A KOZMOLÓGIA ALAPJAI

Sailer Kornél

Oktatási segédanyag,
készült az [1] tankönyv alapján

Elméleti Fizikai Tanszék
Debreceni Egyetem
Debrecen
2014-2017

Contents

1 FIZIKAI ALAPOK **8**

1.1 Csillagászati megfigyelésekből levont legfontosabb következtetések 8

1.2 Hubble-törvény 9

2 HOMOGÉN ÉS IZOTRÓP VILÁGEGYETEM **14**

2.1 Newton-i kozmológia 14

2.2 Relativisztikus kozmológia 18

2.2.1 Elvi alapok és az Einstein-egyenletek 18

2.2.2 Térgeometria és koordinátarendszerek homogén, izotróp Világegyetemben 21

2.2.3 Az anyag energiaimpulzus-tenzora 23

2.3 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-kozmológia 25

2.4 A Friedmann-egyenletek megoldásai 29

2.4.1 Konform időváltozó 29

2.4.2 Sugárzás uralta Világegyetem 30

2.4.3 Por uralta Világegyetem 31

2.4.4 Sugárzás és por keverékét tartalmazó Világegyetem 33

2.4.5 Sugárzás, por és sötét energia keverékét tartalmazó Világegyetem . . 34

2.5 A de Sitter-téridő 35

2.6 Fényterjedés és horizontok 40

2.6.1 Fényszerű geodetikusok 40

2.6.2 Részecske-horizont 40

2.6.3 Optikai horizont 41

2.6.4 Esemény-horizont 42

2.6.5 Hubble-horizont 43

2.7 Konform diagramok 44

2.7.1 Zárt, sugárzás, ill. por uralta Világegyetem 44

2.7.2 de Sitter-Világegyetem(ek) 47

2.7.3 Minkowski-téridő 53

2.7.4 Erős energia-feltételnek eleget tevő anyag által uralt nyílt (hiperbolikus térgeometriájú) vagy lapos Világegyetem 55

2.8 A vöröseltolódás és alkalmazásai 55

2.8.1 A vöröseltolódás 55

2.8.2 Relatív részecske-sebességek vöröseltolódása 57

2.8.3 A relatív vöröseltolódás, mint egyfajta időparaméter 57

2.9 Kozmológiai paraméterek meghatározása 60

2.9.1 Az Ω_0 kozmológiai paraméter meghatározása a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás (CMB) alapján . . . 60
2.9.2 A q lassulási paraméter meghatározása standard gyertyák bolometrikus magnitúdójának z-függése alapján . . . 62

3 A VILÁGEGYETEM VÁZLATOS FEJLŐDÉSTÖRTÉNETE 65
3.1 Anyagösszetétel . . . 65
3.1.1 Az energiasűrűség összetevői . . . 65
3.1.2 A Világegyetem fejlődési korszakai . . . 66
3.2 Korszakok . . . 68
3.2.1 Planck-korszak . . . 68
3.2.2 A felfúvódás korszaka . . . 68
3.2.3 A Nagy Egyesítés korszaka . . . 69
3.2.4 Az elektrogyenge és erős kölcsönhatás Standard Modelljének korszaka 69
3.2.5 A kvarkok és gluonok bezáródása . . . 69
3.2.6 A primordiális neutrínók lecsatolódása . . . 69
3.2.7 Az elektron-pozitron annihilláció korszaka . . . 70
3.2.8 A primordiális nukleoszintézis korszaka . . . 70
3.2.9 Az anyag és a sugárzás egyenjogúsága . . . 70
3.2.10 A rekombináció korszaka . . . 70
3.2.11 A szerkezetképződés korszaka . . . 71
3.2.12 A jövő? . . . 71

4 A FELFÚVÓDÓ VILÁGEGYETEM 72
4.1 Kezdeti feltételek . . . 72
4.1.1 A kezdőfeltételek szerepe . . . 72
4.1.2 A horizont-probléma . . . 73
4.1.3 A laposság problémája . . . 75
4.1.4 Az őseredeti inhomogenitások problémája . . . 76
4.2 A felfúvódó Világegyetem alapgondolata . . . 76
4.3 Az inflatonmező . . . 82
4.3.1 Skalármező mozgásegyenlete táguló Világegyetemben . . . 83
4.3.2 Nem önkölcsönható, tömeges skalármező . . . 84
4.3.3 Önkölcsönható skalármező . . . 91
4.4 Az inflatonmező fejlődésének lecsatolása a skálaparaméter fejlődéséről . . . 93
4.5 A felfűtés és az előfűtés . . . 95
4.6 Mi játszhatja az inflatonmező szerepét? . . . 96

4.7 A felfúvódás forgatókönyvei 97
4.7.1 A felfúvódás régi forgatókönyve: „old inflation” 98
4.7.2 A felfúvódás új forgatókönyve: „new inflation” 99
4.7.3 A kaotikus felfúvódás 99
4.8 A felfúvódás és a de Sitter-téridő 100

5 GRAVITÁCIÓS INSTABILITÁS ÉS SZERKEZETKÉPZŐDÉS A LÁTHATÓ VILÁGEGYETEMBEN A NEWTONI GRAVITÁCIÓ ALAPJÁN 102

5.1 Gravitációs instabilitás a Newton-i fizikában. Jeans elmélete 102
5.2 A ttáguló Világegyetem gravitációs instabilitásai a Newton-i fizikában 105
5.2.1 A perturbációk egyenletei 105
5.2.2 Az adiabatikus perturbációk 107
5.2.3 Vektorperturbációk 109
5.2.4 Gravitációs instabilitás hideg anyag és sugárzás vagy sötét energia egyidejű jelenlétében 110
5.3 Túl a lineáris közelítésen 113

6 A GRAVITÁCIÓS INSTABILITÁS AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLETBEN 115

6.1 Általános megfontolások 115
6.2 A metrika perturbációi 116
6.2.1 A metrika perturbációinak irreducibilis felbontása 116
6.2.2 A metrika perturbációinak mértékinvariáns jellemzése 117
6.2.3 A metrika kozmológiai perturbációi 124
6.3 Kozmikus perturbációk 128
6.3.1 A hidrodinamikai perturbációk egyenletei 128
6.3.2 A hidrodinamikai perturbációk egyenleteinek megoldásai 130

7 A PRIMORDIÁLIS INHOMOGENITÁSOK 137

7.1 Kezdeti inhomogenitások és a felfúvódó Világegyetem 137
7.2 A perturbációk, mint véletlen folyamatok eredményei 138
7.3 A perturbációk erőspektruma a felfúvódás inflatonmezős modelljében 141
7.3.1 Skalárperturbációk egyenletei 141
7.3.2 Rövidhullámú perturbációk 147
7.3.3 Hosszúhullámú perturbációk 150
7.3.4 A felfúvódás szerepe 154
7.4 A kozmológiai perturbációk kvantumelmélete 155

7.4.1 A kvantumtérelméleti modell 155
7.4.2 A Friedmann-féle háttér és a lineáris perturbációk egyenletei 156
7.4.3 A klasszikus egyenletek megoldásai 161
7.4.4 A perturbációk kvantálása 165
7.4.5 A felfúvódás által keltett gravitációs hullámok 175
7.4.6 Az önfenntartó Világegyetem („self-reproduction of the Universe") . 182

A Mértékegységek **185**
A.1 Természetes egységek 185
A.2 Csillagászati egységek 185
A.3 Töltés 186
A.4 Téridő-sokaság szignatúrája 186
A.5 Kozmológiai paraméterek 186

B Nem relativisztikus ideális folyadék **186**

C A viriáltétel **188**

D Négyzetes középértékek **190**

1 FIZIKAI ALAPOK

1.1 Csillagászati megfigyelésekből levont legfontosabb következtetések

A csillagászati megfigyelések néhány fontos következtetést támasztanak alá a Világegyetem geometriai tulajdonságaira, a Világegyetem összetételére és a Világegyetemben az energiasűrűség fluktuációira vonatkozóan. Ezek a megfigyeléseken alapuló eredmények annyira jól alátámasztottak, hogy úgy kezelhetjük őket, mint a Világegyetemre vonatkozó „mérési eredményeket". Ezek alapján az alábbi állításokat olyan tényekként kezelhetjük, amelyeket a Világegyetem bármely elméleti modelljének meg kell tudnia magyarázni.

A Világegyetem geometriai tulajdonságaira vonatkozó megfigyeléseket az alábbiakban összegezhetjük:

- A jelenlegi állapotában a megfigyelhető Világegyetem a kb. 100 Mpc távolságnál nagyobb méretskálákon homogén és izotróp, miközben a kisebb méretskálákon határozottan inhomogén szerkezetet mutat. A csillagok galaxisokba, azok galaxisklaszterekbe tömörödnek, az utóbbiak pedig gömbszerű buborékból („bubbles"), falakból („walls") és szálakból („filaments") álló kozmikus szövedéket („web"-et) alkotnak, amelyekben nagy üregek („voids") találhatók. Mindennek ellenére a legnagyobb méretskálákon a galaxisok eloszlása a megfigyelések szerint homogén és izotróp. Ezt a rádióforrások eloszlása és a röntgen- és gamma-háttérsugárzás is megerősíti. A homogenitásnak és az izotrópiának a legmeggyőzőbb bizonyítékát azonban a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás felfedezése szolgáltatta.

- A Világegyetem a **Hubble-törvénynek** megfelelően tágul, azaz bármely két pontjának v relatív sebessége arányos a két pont R távolságával, $v = HR$, ahol H a Hubble-paraméter. (H a térben állandó, jelenlegi értéke $H_0 \approx 70$ (km/s)/Mpc.)

A Világegyetem jelenlegi anyagösszetételére vonatkozóan az alábbiakat mondhatjuk:

- A Világegyetemben $T = 2,73$ K hőmérsékletű **kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás („Cosmic Microwave Background Radiation", CMB)** van jelen. A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzást a jelenleg ismert termikus sugárzásokkal összevetve azt állapíthatjuk meg, hogy a CMB az, amelynek a spektrális eloszlása követi a legnagyobb pontossággal a Planck-törvényt.

- A Világegyetemben van jelen barionikus anyag, kb. 1 barion jut 10^9 fotonra, ugyanakkor jelentős a barion-aszimmetria, mert nincsen jelen számottevő antibarion.

- Kémiai összetételét tekintve a barionanyagnak kb. 75 %-a hidrogén, kb. 25 %-a hélium és kevés nehezebb elem is előfordul nyomokban.

- Az elektromágneses sugárzás (a CMB) jelenleg a Világegyetem energiasűrűségének kb. 0,05 %-át teszi ki. A barionanyag a Világegyetem teljes energiasűrűségének csak töredékét, kb. 5 %-át adja, a többi járulék „sötét" (elektromágnesesen nem kölcsönható, nem világító) összetevőktől származik. Utóbbiakat kb. 25 %-ban hideg, elhanyagolható nyomású úgynevezett *hideg sötét anyag* és kb. 70 %-ban negatív nyomású *sötét energia* teszi ki.

Végezetül a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzásban észlelt fluktuációkból tudunk az energiasűrűség fluktuációira következtetni.

- Amikor a Világegyetem még kb. 1000-szer kisebb méretű volt, mint jelenleg, akkor az energiasűrűségben kicsiny, kb. 10^{-5} nagyságrendű relatív fluktuációk voltak jelen.

Mint mondottuk, egy kozmológiai modellnek meg kell tudnia magyaráznia mindezeket a megfigyeléseket és az azokhoz kapcsolódó számos további részletet. Ebben a tekintetben **az Ősrobbanás standard modellje („standard Big Bang modell")** mutatkozott sokáig sikeresnek. Ennek lényege, meglehetősen leegyszerűsítve, hogy a megfigyelt Világegyetem története az Ősrobbanással kezdődött kb. 15 milliárd évvel ezelőtt, amikoris a Világegyetem egy rendkívül nagy energiasűrűségű és hőmérsékletű pontszerű objektum volt, amely azóta folyamatosan tágul és hűl. A fentebb felsorolt, az utóbbi évtizedekből származó számos megfigyelési eredmény értelmezése azonban kikényszerítette a standard Ősrobbanás modelljének módosítását. Pontosabban mondva, a modellt kiegészítették azzal a feltevéssel, hogy a Világegyetem kezdeti történetében (fejlődésében, evolúciójában) volt egy rövid időszak, az úgynevezett **felfúvódás („cosmic inflation") korszaka.** Ez valamikor akkor következhetett be, amikor a Világegyetem mérete már meghaladta a Planck-hossz skáláját, de még valószínűleg nem érte el azt a méretskálát, amikor a Nagy Egyesített Elmélet („Grand Unified Theory") kölcsönhatásai kezdtek dominálni. A felfúvódás során a Világegyetem mérete mintegy $10^{60} - 10^{100}$-szorosára nőtt. A standard kozmológiai modell a felfúvódó Világegyetem („inflationary universe") modelljével kiegészítve, továbbra is megmagyarázza mindazokat a tapasztalatokat, amelyeket a standard Ősrobbanás modellje meg tudott magyarázni, de ezen túlmenően magyarázatát adja a jelenleg látható Világegyetem nagy méretskálákon mutatott homogenitásának és izotrópiájának, a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzásban megfigyelt nagyságrendű fluktuációknak, továbbá teret ad az energiasűrűség domináns sötét összetevőinek. Jelenleg a felfúvódást is magába ötvöző Ősrobbanás-modell a legsikeresebb a megfigyelések értelmezésében. Ezért a felfúvódással kiegészített standard kozmológiai modellel fogunk részletesebben foglalkozni. Érdemes azonban megemlíteni, hogy párhuzamosan létezik a **Ciklikus Konform Kozmológiai modell („Cyclic Conform Cosmology", CCC),** amely szintén alkalmasnak látszik az újabb, CMB-n alapuló megfigyelések értelmezésére és nem tételezi fel a Világegyetem felfúvódó szakaszát [2].

1.2 Hubble-törvény

Elsősorban Edwin Hubble meggyőző megfigyeléseinek köszönhető (1929), hogy alapvetően megváltozott a Világegyetemről korábban alkotott képünk, nevezetesen az a felfogás, hogy a Világegyetem öröktől fogva adott, sztatikus objektum. A Hubble-törvény felfedezésének köszönhetően egyértelművé vált, hogy Világegyetemünk tágul, és ennek következtében fejlődésének egy szingulariásból kellett indulnia, amikor az energiasűrűség végtelen nagy volt. A táguló Világegyetem gondolata azonban már korábban, Vesto Slipher észlelései alapján is felmerült (1917). Hubble megfigyelései nagyon meggyőzően igazolták, hogy a távoli galaxisok lényegében a tőlünk mért távolságukkal arányos sebességgel távolodnak. Ha ezt a múltba extrapoláljuk, akkor arra a következtetésre kell jussunk, hogy minden anyagnak nagyjából egy időben együtt kellett tartózkodnia. Ekkor valami „eszméletlen nagy" robbanásnak kellett bekövetkeznie, amivel minden anyag létezése kezdetét vette és a Világegyetem tágulni kezdett. Ezt az extrapolált eseményt nevezzük ma Ősrobbanásnak („Big Bang"). Az általános relativitáselmélet arra tanít, hogy az Ősrobbanás nemcsak az anyag létének, hanem a tér létének is a kezdete volt. Mondhatjuk, hogy az Ősrobbanás mindennek a kezdete. Ma nagyjából egyetértés van abban, hogy ez a kezdet kb. 13,7 milliárd évvel ezelőttre tehető. Hubble felfedezését, amit ma Hubble-törvényként emlegetünk az iránta való tiszteletből, az azóta eltelt kb. egy évszázad során számos további

megfigyelés erősítette meg. A Hubble-törvény jelentőségét már az meghatározza, hogy belőle az Ősrobbanásra lehet következtetni. Van azonban még egy fontos ismeret is elrejtve benne, nevezetesen az, hogy ez egy, sőt az egyetlen elképzelhető olyan tágulási törvény, amely szerint a Világegyetemben nincsen kitüntetett pont és irány, vagyis amely összhangban van azzal, hogy a Világegyetem a legnagyobb méretskálákon homogénnak és izotrópnak tekinthető.

A Világegyetem tágulásáról úgy szerezhetünk tudomást, hogy mérjük távoli objektumok hozzánk képesti távolodási sebességét az objektum spektrumvonalainak Doppler-eltolódása, a vöröseltolódás alapján. Az az alapfeltevésünk, hogy a saját nyugalmi rendszerében bármely atom mindig ugyanazokkal a stacionárius állapotokkal rendelkezik és ezért gerjesztett állapotaiból lebomolva ugyanazokkal a spektrumvonalakkal rendelkező elektromágneses sugárzást bocsát ki. Ha az atom, mint az elektromágneses sugárzás forrása azonban a megfigyelőhöz képest távolodik (pl. a földi megfigyelőhöz képest távolodó galaxisból érkezik a fény), akkor a Doppler-effektus miatt az atom által kibocsátott fény frekvenciája csökken. Ez az általános relativitáselmélet keretében is szigorúan bizonyítható, nem csak az euklideszi térben terjedő hullámok esetén. Fontos, hogy olyan objektum (galaxis) hozzánk képesti relatív sebességét mérjük, amelynek sebessége csak a Világegyetem tágulásából származik, azaz amelynek elhanyagolható a táguló Világegyetemhez képesti sebessége. Mivel a galaxisok többsége egymással nagyon gyengén hat kölcsön, ezért azok ilyen objektumoknak tekinthetők. A relatív sebesség meghatározásakor azonban korrekcióba kell venni a földi megfigyelőnek a Tejútrendszer tömegközéppontjához képesti sebességét.

Az általános relativitáselmélet szerint a téridő nagyon általános feltételek mellett rétegezhető („foliation"), azaz egymást nem metsző térszerű hiperfelületek sokaságaként állítható elő. A Világegyetem térbeli homogenitása azt jelenti, hogy a térszerű hiperfelületek minden pontja egyenértékű. A térbeli izotrópia pedig azt jelenti, hogy a térszerű hiperfelületek minden pontjában található olyan megfigyelő, aki a teret izotrópnak találja. Ezen „izotróp megfigyelők" világvonalai mindenütt merőlegesek a térszerű hiperfelületekre. A galaxisok (jó közelítéssel) ilyen megfigyelőknek tekinthetők. Az egyes térszerű hiperfelületeket megjelölhetjük valamelyik izotróp megfigyelő óráján mért sajátidővel. Ha egy kiválasztott térszerű hiperfelületen az izotróp megfigyelők óráit szinkronizáltuk, akkor a térszerű hiperfelületek fenti parametrizációja ellentmondásmentes, bármely izotróp megfigyelő világvonala egy tetszőleges másik térszerű hiperfelületet akkor metsz, amikor az egyes izotróp megfigyelők órái ugyanazt a sajátidő-értéket mutatják.

A Hubble-törvény és a Hubble-paraméter jelenlegi H_0 értékének meghatározásához meg kell még mérnünk a távolodó objektum tőlünk mért távolságát. Erre az úgynevezett **standard gyertyák („standard candles"), ill. az úgynevezett csillagászati standard vonalzók („standard rulers")** használhatók. Olyan objektum-család tagjait nevezzük standard gyertyáknak, amelyek kb. azonos L luminozitásúak. Egy-egy ilyen égitest-család minden tagja számos hasonló mérhető jellemzővel rendelkezik, amelyek alapján be lehet azonosítani az adott családhoz tartozó standard gyertyákat. Ezután a család Földünkhöz (saját galaxisunkhoz) legközelebbi tagjainak távolságát parallaxismeréssel meghatározzuk. Ha ezután az ismert R_A távolságra levő A objektumból és az ismeretlen R_B távolságra levő B objektumból távcsövünk egységfelületére időegység alatt beérkező energiát, rendre az F_A, ill. F_B látszólagos fényességet megmérjük, akkor az energiamegmaradás alapján fennálló

$$L_A = 4\pi R_A^2 F_A = 4\pi R_B^2 F_B = L_B \tag{1.2.1}$$

összefüggésből az ismeretlen távolságot meg tudjuk határozni:

$$R_B = R_A \sqrt{\frac{F_A}{F_B}}. \tag{1.2.2}$$

Ilyen családot alkotnak a Cefeidákhoz tartozó változó csillagok, ill. a nagyon fényes IA típusú szupernóvák, amelyek jellegzetes spektrumú felrobbanó csillagok. A Cefeidákhoz tartozó változó csillagokat kb. egy évszázadon át tanulmányozták, és nagyon jó standard gyertyáknak bizonyulnak (mert kicsi a család egyes tagjai luminozitásának eltérése). Az IA típusú szupernóvák szintén ígéretesek, mert ezek sokkal nagyobb távolságokon figyelhetők meg, mint a Cefeida változó csillagok.

A standard csillagászati vonalzók olyan objektum-családhoz tartoznak, amelynek tagjai azonos d méretűek (átmérőjűek). Az egy családhoz tartozó objektumokat ez esetben is más jellemzők hasonlósága alapján azonosítjuk. A legközelebbiek R távolságát az ismert d átmérő és annak mért θ szögátmérője alapján az

$$R = \frac{d}{\text{tg}\ \theta} \approx \frac{d}{\theta} \tag{1.2.3}$$

összefüggésből kapjuk meg, ha $\theta \ll 1$.

A fenti módszerekkel nagy számú objektum esetében határozták meg az objektum hozzánk képesti $\vec{v}$ sebességét és tőlünk mért $\vec{r}$ távolságát. Ezen mérések közös tapasztalata, hogy a távolodási sebességre mindig érvényes a Hubble-törvény,

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \tag{1.2.4}$$

függetlenül attól, hogy az objektum milyen irányban helyezkedik el tőlünk. A mérések alapján a Hubble-paraméter jelenlegi értéke $H_0 \approx 65 - 80$ (km/s)/Mpc.

A Hubble-törvény Newton-i gravitációt feltételezve is értelmezhető homogén és izotróp rendszerben. Legyen A, B és C a tér 3 tetszőleges pontja, ezek relatív sebességei és távolságai rendre $(\vec{v}_{AB}, \vec{r}_{AB})$, $(\vec{v}_{BC}, \vec{r}_{BC})$ és $(\vec{v}_{AC}, \vec{r}_{AC})$ (értelemszerű indexeléssel). Ekkor, ha a homogenitás és az izotrópia követelményének megfelelően fennáll, hogy

$$\vec{v}_{AB} = H_0 \vec{r}_{AB}, \quad \vec{v}_{BC} = H_0 \vec{r}_{BC}, \tag{1.2.5}$$

akkor ez maga után vonja, hogy

$$\vec{v}_{AC} = H_0 \vec{r}_{AC} \tag{1.2.6}$$

is igaz. Ez azt jelenti, hogy a Hubble-törvény a tér bármely két pontjának relatív sebességére érvényes. Bárhol is álljunk tehát a térben, mindig azt tapasztaljuk, hogy a tér többi pontja hozzánk képest ugyanazon törvény szerint távolodik. A Világegyetem tágulása tehát nem rendelkezik centrummal. Meg lehet azt is mutatni, hogy a Hubble-törvény az egyetlen olyan tágulási törvény, amelynek során mindvégig fennmarad a Világegyetem homogenitása és izotrópiája.

A centrum nélküli homogén és izotróp tágulást 2-dimenziós analógiával érzékeltethetjük. Tekintsük egy léggömb felszínét, és nézzük, hogy mit figyel meg az a megfigyelő, aki a gömbfelület adott pontjában áll, amikor a léggömböt felfújjuk és ezért a léggömb sugara az idő adott függvénye, $a(t)$ szerint nő. A 3-dimenziós térben, a léggömb középpontjában álló megfigyelő természetesen azt mondja, hogy a gömbfelszín tetszőleges A és B pontja közötti $r_{AB}(t)$ távolság (az A és B pontokon átmenő főkör ívének hossza)

$$r_{AB}(t) = a(t)\alpha_{AB}, \tag{1.2.7}$$

ahol α_{AB} a szóban forgó főkör AB ívének a gömb középpontjából mért látószöge. A két pontnak a gömb felszínén álló megfigyelő számára is mérhető relatív sebessége

$$v_{AB}(t) = \dot{a}(t)\alpha_{AB} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} r_{AB}(t). \tag{1.2.8}$$

Ez éppen azt jelenti, hogy a gömb felszínén nyugvó megfigyelő azt látja, a gömb felszínén végzett mérések alapján, hogy a felszín bármely két pontja a

$$v_{AB}(t) \quad = \quad H(t) r_{AB}(t), \qquad H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{1.2.9}$$

Hubble-törvény szerint távolodik egymástól, anélkül, hogy a gömb felszínén ez a tágulás kitüntetne valamilyen centrumot, vagy valamilyen irányt.

Természetesen a léggömb felszínén „élő" megfigyelő nem tud (definíció szerint) arról, hogy a felület, amin méréseit végzi, be van ágyazva a 3-dimenziós térbe. Az egyenletesen táguló léggömb felszíne a homogén és izotróp módon táguló 3-dimenziós Világegyetem 2-dimenziós analogonja. Az azonban fontos különbség, hogy jelenlegi ismereteink szerint a Világegyetem nincsen beágyazva egy magasabb dimenziós térbe. Ezért, mint megfigyelőknek, a helyzetünk hasonló annak a léggömb felszínén tevékenykedő megfigyelőnek a helyzetéhez, akinek a felszín geometriájára vonatkozó minden ismeretet az ezen a felszínen elvégezhető mérések alapján, mint a felület belső tulajdonságait kell felderítenie. Mi sem „léphetünk ki" a Világegyetemünkből, hogy egy magasabb dimenziós beágyazó térben állva végezzünk el méréseket, merthogy ilyen beágyazó tér nincs is.

Vegyük észre az analógia alapján, hogy a Hubble-paraméter térben állandó, de az időnek függvénye. Tegyük fel, hogy a Világegyetem tágulása során a homogenitás és az izotrópia követelményének egyedül eleget tevő Hubble-törvény mindvégig fennállt. Becslés céljából tegyük fel, hogy a Hubble-paraméter értéke mindvégig a jelenlegi H_0 volt. Ekkor a Hubble-törvényből az is következik, hogy bármely 2 pont távolsága, ami ma r, $t_0 \approx r/v = H_0^{-1}$ idővel ezelőtt nulla volt, ahol a v a szóban forgó pontok jelenlegi távolodási sebessége. Tehát $t_0 \approx H_0^{-1} \approx 14$ milliárd évvel ezelőtt a Világegyetem pontszerű kellett legyen, története az Ősrobbanással kezdődött. Mindjárt itt meg kell azonban említeni, hogy a Hubble-törvénynek és a klasszikus fizikának az extrapolációja egészen a $t \approx 0$ időkre nem helytálló, mert amikor a Világegyetem mérete az $\ell_{\rm Pl}$ Planck-hossz vagy annál kisebb volt, akkor a klasszikus fizika törvényei valószínűleg nem voltak érvényesek. Ekkor a kvantumeffektusok és a gravitációs effektusok összemérhető nagyságrendűek lehettek. Pontosabban tehát inkább azt lehet mondani, hogy a klasszikus fizika (ebbe beleértve mindazt a kvantumelméletet, ami a Planck-hossznál nagyobb méretekben érvényes fizikai törvényeket értelmezi) alapján a Világegyetem történetét fel tudjuk göngyölíteni kb. 14 milliárd évig visszamenőleg. Ha ezen történet „kezdetén", azaz a Világegyetem kb. 14 milliárd évvel ezelőtti állapotában is a (fenti értelemben vett) klasszikus fizika lett volna érvényben, akkor azt kellene gondolnunk, hogy a Világegyetem a „semmiből" egy pontszerű, végtelen energiasűrűségű szingularitással keletkezett.

A homogén és izotróp, táguló Világegyetemben két tetszőleges A és B izotróp megfigyelő relatív távolsága tehát

$$\dot{\vec{r}}_{AB} \quad = \quad H(t) \vec{r}_{AB} \tag{1.2.10}$$

egyenletnek tesz eleget, amelynek megoldása

$$\vec{r}_{AB}(t) \quad = \quad a(t) \vec{\chi}_{AB} \tag{1.2.11}$$

ahol

$$a(t) \quad = \quad \exp\Big(\int_{t_*}^{t} dt' H(t') \Big). \tag{1.2.12}$$

Az $a(t)$ skálaparaméternek a 2-dimenziós analógiában a léggömb sugara felel meg. A tágulás ütemét a

$$H(t) = \dot{a}(t)/a(t) \tag{1.2.13}$$

Hubble-paraméter határozza meg. A $\vec{\chi}_{AB}$ integrációs állandónak a 2-dimenziós analógiában a θ_{AB} középponti szög feleltethető meg; $|\vec{\chi}_{AB}|$ a két megfigyelő távolsága valamely adott t_* időpillanatban. Ha A-t egy koordinátarendszer origójának tekintjük, akkor $\vec{\chi}_{AB}$ a B megfigyelő Lagrange-féle vagy együtt mozgó koordinátája. Az együtt mozgó koordinátákat az általános relativitás elmélet szerint a következőképpen jelölhetjük ki. Valamelyik t_* paraméterű térszerű hiperfelületet tetszőlegesen bekoordinátázzuk, $\vec{\chi} = (\chi^1, \chi^2, \chi^3)$. Majd az egyes pontokban elhelyezkedő izotróp megfigyelők világvonalait tekintjük, és azoknak bármely másik térszerű hiperfelülettel képezett metszéspontjait ugyanezekkel a koordinátákkal jelöljük meg.

Ahol a Világegyetemben az anyagsűrűség kicsi, ott az objektumok egymással való gravitációs kölcsönhatása kicsi, úgyhogy az objektumok izotróp megfigyelőknek tekinthetők, amelyek helyzetükkel jelölik ki az együtt mozgó koordinátákat. Az izotróp megfigyelők együtt mozgó koordinátái tehát definíció szerint állandóak. Ahol azonban sűrűn helyezkednek el az objektumok, ott a sebességük eltérhet a Hubble-törvény alapján elvárttól az objektumok közötti erősebb gravitációs kölcsönhatás miatt. Ezeken a helyeken lokálisan sérül a homogenitás és az izotrópia.

2 HOMOGÉN ÉS IZOTRÓP VILÁGEGYETEM

2.1 Newton-i kozmológia

A táguló Világegyetemre vonatkozó legfontosabb egyenletek már a **Newton-i kozmológia** keretében megérthetők. Newton-i kozmológián a következő modellt értjük. Szemeljünk ki egy tetszőleges pontot a térben, és vizsgáljuk az azt körülvevő $R(t) = a(t)\chi$ sugarú tartományt. Tegyük fel, hogy ezt **por („dust")** tölti ki, azaz olyan anyag, amelynek pozitív az energiasűrűsége, $\epsilon > 0$, de zérus a nyomása, $p = 0$. (Nagy méretskálán a Világegyetemben található galaxisok halmaza jó közelítéssel ilyen pornak tekinthető, mert a galaxisok átlagosan elég távol vannak egymástól, és ezért elhanyagolható a gravitációs kölcsönhatásuk.) Legyen az energiasűrűség elég kicsi, azaz a gravitációs vonzás elég gyenge és a gömb is elég kicsi ahhoz, hogy a porrészecskék sebessége mindenütt sokkal kisebb legyen, mint a $c = 1$ fénysebesség. Ekkor a rendszer dinamikája jó közelítéssel a gravitáció Newton-féle törvénye alapján tárgyalható. A Newton-i kozmológiában implicit módon fel kell használni, hogy a gömbön kívüli anyagnak a gömbön belüli bármely részecskére gyakorolt gravitációs hatása zérus, amit az általános relativitás elméletében Birkhoff tétele biztosít. Feltesszük továbbá, hogy a kiszemelt (táguló) térfogatban található anyag M tehetetlen tömege a tágulás során megmarad. Ebben a modellben alább levezetjük az energiasűrűségre és a tágulás skálaparaméterére vonatkozó egyenleteket. Azok egzaktul megegyeznek azokkal az egyenletekkel, amelyek az általános relativitáselmélet keretében állnak fenn ugyanezen mennyiségekre, ha a Világegyetemet por tölti ki. Ez nem véletlen, mert elegendően kicsiny $R(t)$ sugarú, homogén, porszerű anyagot tartalmazó térfogatban a gravitációs mező gyenge, a sebességek kicsik, úgyhogy a Newton-i gravitáció feltételei teljesülnek, a relativisztikus korrekciók elhanyagolhatóak.

Az anyagmegmaradás lokális törvényét az energiasűrűségre vonatkozó kontinuitási egyenlet fejezi ki. Az energiasűrűség szóhasználat a Newton-i kozmológiában valójában a tehetetlen tömeg sűrűségét jelenti, de az általános relativitás elméletén alapuló kozmológiához való erős hasonlóság nyilvánvalóbbá tétele érdekében maradunk az energiasűrűség szóhasználatnál. Az energiasűrűség

$$\epsilon(t) = \frac{M}{(4\pi/3)a^3(t)\chi^3}. \tag{2.1.1}$$

Tegyük fel, hogy a jelenlegi t_0 időpillanatban a skálaparaméter értéke $a_0 = a(t_0)$ és az energiasűrűség értéke $\epsilon_0 = \epsilon(t_0)$. Az utóbbiakkal kifejezhetjük az energiasűrűség tetszőleges t időpillanatban felvett értékét:

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^3. \tag{2.1.2}$$

Az energiamegmaradás ezen törvényét idő szerint deriválva átírhatjuk azt differenciális alakba:

$$\dot{\epsilon}(t) = -3\epsilon_0 \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = -3\epsilon(t)H(t). \tag{2.1.3}$$

Itt hallgatólagosan nemcsak azt tettük fel, hogy az energia azonos a tömeggel, hanem azt is, hogy a tágulás során ez az energia megmarad, ami csak akkor jó közelítés, ha a nyomás zérus, azaz sokkal kisebb, mint az energiasűrűség, úgyhogy a térfogatváltozás során végzett munka elhanyagolható. Utóbbi feltétel akkor teljesül, ha a Világegyetemet, ill. a vizsgált térfogatot por tölti ki.

Erről az egyenletről könnyű felismerni, hogy a nem relativisztikus anyag kontinuitási egyenlete. Homogén közegben $\epsilon(\vec{r},t) = \epsilon(t)$, ahol $\vec{r}$ a térben bevezetett Euler-féle helyzetvektor, és homogén izotróp tágulás esetén $\vec{v} = H\vec{r}$, ezeket beírva a kontinuitási egyenletbe,

$$0 = \dot{\epsilon}(t) + \vec{\nabla}\Big(\epsilon(t)H(t)\vec{r}\Big) = \dot{\epsilon}(t) + 3\epsilon(t)H(t) \tag{2.1.4}$$

adódik, ami éppen a korábban levezetett egyenlet. Másrészről, ha homogén $\epsilon(\vec{r},t_0) = \epsilon(t_0)$ kezdeti feltételt tételezünk fel, és megoldjuk ezzel a

$$\partial_t\epsilon + \vec{\nabla}(\epsilon\vec{v}) = 0 \tag{2.1.5}$$

kontinuitási egyenletet, akkor a sebességmezőre a Hubble-törvény adódik. Valóban, ha $t = t_0$-ban az energiasűrűség homogén, akkor

$$\vec{\nabla}\vec{v}(\vec{r},t_0) = -\frac{\dot{\epsilon}(t_0)}{\epsilon(t_0)} \tag{2.1.6}$$

adódik, ahonnan $\vec{v}(\vec{r},t_0) = H_0\vec{r}$ alakú, ahol $H_0 = -\frac{\dot{\epsilon}(t_0)}{3\epsilon(t_0)}$. Ekkor viszont a $t_0 + dt$ időpillanatban az energiasűrűség,

$$\epsilon(t_0 + dt) = \epsilon(t_0) - 3H_0\epsilon(t_0) \tag{2.1.7}$$

ismét homogén, ami viszont az előbbi érvelést ismételve megint $\vec{v}(\vec{r},t_0+dt) = H(t_0+dt)\vec{r}$ alakú sebességmezőt eredményez. A gondolatmenetet egymást követő infinitezimális dt időlépésekben a végtelenségig folytathatjuk, így tudjuk belátni, hogy a Hubble-törvény az egyetlen olyan sebességmező, amelynek során az energiasűrűség homogén marad. A Hubble-törvény szerinti sebességmező pedig nem tüntet ki semmilyen irányt a térben.

A skálaparaméter időfüggésére vonatkozó egyenletet úgy kapjuk meg, hogy felírjuk Newton II. törvényét egy m tömegű, az $R(t)$ sugarú gömb felszínén elhelyezkedő, a felszínnel együtt mozgó próbarészecskére:

$$m\ddot{R}(t) = -\frac{GMm}{R^2(t)}. \tag{2.1.8}$$

Itt felhasználtuk, hogy a próbarészecskére ható erőt csak a gömbön belüli anyaggal való gravitációs kölcsönhatás határozza meg, az pedig közömbös, hogy milyen anyag helyezkedik el a gömbön kívül. (Ez az, amit az általános relativitás elmélete keretében a Birkhoff-törvény állít.) Írjuk át az egyenletet az alábbi alakba:

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi}{3}G\epsilon(t)R(t), \tag{2.1.9}$$

majd használjuk fel, hogy a fizikai távolság és az együtt mozgó távolság közt $R(t) = a(t)\chi$ reláció áll fenn, úgyhogy egyenletünkből

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi}{3}G\epsilon(t)a(t) \tag{2.1.10}$$

adódik. Ez a skálaparaméter keresett egyenlete.

A energiasűrűségre vonatkozó (2.1.3) és a skálaparaméterre vonatkozó (2.1.10) egyenletek csatoltak, adott kezdőfeltételek esetén megoldhatók az $\epsilon(t)$ energiasűrűség és az $a(t)$

skálaparaméter időfüggésére nézve. Helyettesítsük be az energiasűrűség (2.1.2) kifejezését a (2.1.10) egyenletbe. Ekkor csak az $a(t)$ skálaparamétert tartalmazó differenciálegyenletet kapunk:

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi}{3}\frac{G\epsilon_0 a_0^3}{a^2(t)}. \tag{2.1.11}$$

Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát $\dot{a}$-tal,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{a}^2(t)\right) = \frac{d}{dt}\frac{4\pi}{3}\frac{G\epsilon_0 a_0^3}{a(t)}, \tag{2.1.12}$$

ahonnan

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + V(a) = E, \quad V(a) = -\frac{4\pi G\epsilon_0 a_0^3}{3a} \tag{2.1.13}$$

adódik, ahol E integrációs állandó. Ez az egyenlet formálisan analóg a $V(a)$ potenciálmezőben mozgó egységnyi tömegű, E energiájú részecskére vonatkozó energia-megmaradási törvénnyel. Ilyen alakú megmaradási törvény vonatkozik pl. a Földről kilőtt E energiájú rakétára. Ha $E < 0$, akkor a rakéta visszatér a Földre; ha $E > 0$, akkor a rakéta a végtelenbe távozik; az $E = 0$ eset pedig éppen a kiszökés határesete. Ez azt jelenti, hogy $E < 0$ esetén a Világegyetem tágul, $a(t)$ nő, majd egy maximális értéket elérve csökkenni kezd, és végül a Világegyetem összezuhan. Ugyanakkor $E \geq 0$ esetén a Világegyetem mindvégig tágul. Fizikailag tehát csupán az jelent minőségi különbséget, hogy mi az E integrációs állandó előjele.

Mielőtt belemennénk a megoldások jellegének részletezésébe, jegyezzük meg, hogy a Newton-i kozmológia érvényét veszti, ha a vizsgált tartomány sugara túl naggyá válik és ezért a távoli részecskék sebessége nem lesz kicsi a fénysebességhez képest. Mivel azonban az általános relativitás elméletében, a homogén, porral kitöltött Világegyetemre ugyanezen egyenletek vonatkoznak, érdemes a megoldások tulajdonságait részletesen megvizsgálni. Ehhez osszuk el a (2.1.13) egyenlet mindkét oldalát a^2-tel, és átrendezés után írjuk azt

$$H^2 - \frac{2E}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\epsilon \tag{2.1.14}$$

alakba. Innen látszik, hogy az E integrációs állandó előjelét a Hubble-paraméter értékének és az energiasűrűség értékének a viszonya határozza meg. Bevezethetjük azt a **kritikus energiasűrűséget,** amely mellett az E integrációs állandó értéke nulla:

$$\epsilon_{kr} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{2.1.15}$$

A kritikus energiasűrűség tehát az az energiasűrűség, amikor a rendszer gravitációs potenciális energiája éppen egyenlő nagyságú, de ellentétes előjelű a rendszer tágulásból származó kinetikus energiájával. Mivel a Hubble-paraméter értéke változik az idő függvényében, azért a kritikus energiasűrűség is függ az időtől. (Sokszor azonban, ha kritikus energiasűrűségről beszélnek a szakirodalomban, akkor annak a Világegyetem jelenlegi állapotában felvett értékére gondolnak.)

Az E integrációs állandót kifejezhetjük az időtől függő $\epsilon(t)$ energiasűrűséggel és az időtől függő Hubble-paraméterrel,

$$E = \frac{a^2}{2}H^2 - \frac{4\pi G}{3}a^2\epsilon = \frac{4\pi G}{3}a^2(\epsilon_{kr} - \epsilon), \tag{2.1.16}$$

majd itt bevezethetjük az

$$\Omega(t) \quad = \quad \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{kr}(t)} \tag{2.1.17}$$

kozmológiai paramétert, amelynek segítségével

$$E \quad = \quad \frac{4\pi G}{3} a^2 \epsilon_{kr}[1 - \Omega(t)]. \tag{2.1.18}$$

A kozmológiai paraméter értéke tehát meghatározza, hogy az E integrációs állandónak milyen az előjele. Ráadásul ez az előjel eldönthető akkor, ha meghatározzuk a kozmológiai paraméter jelenlegi $\Omega_0 = \Omega(t_0) = \epsilon_0/\epsilon_{kr}(t_0)$ értékét. **Ha $\Omega_0 = 1$, akkor $E = 0$, az örökké tágulóVilágegyetem határesete valósul meg, ha $\Omega_0 < 1$, akkor a Világegyetemünk kezdetben tágul majd összehúzódik, és ha $\Omega_0 > 1$, akkor a Világegyetem örökké tágulni fog.** Mivel a por részecskéi gravitációsan vonzzák egymást, ezért a gravitációs vonzás az uralkodóan port tartalmazó Világegyetem, **a por uralta Világegyetem („dust dominated universe")** tágulását mindig lassítja ($\ddot{a} < 0$). Azt is vegyük azonban észre, hogy bármelyik megoldás valósul is meg, a modell szerint a Világegyetem valamikor egy szinguláris kezdetből kellett, hogy induljon, amikor a skálaparaméter értéke zérushoz közelített, és amikor az energiasűrűség és az $\dot{a}$ tágulási sebesség végtelenhez tartott. Az általános relativitáselmélet ehhez a képhez azt teszi hozzá, hogy Ω_0 1-hez képest felvett értékétől függően más a tér görbülete. **Ha $\Omega_0 = 1$ ($E = 0$), akkor a tér lapos („flat"), a tér görbülete zérus (a Világegyetem ekkor parabolikusan tágul, $k = 0$); ha $\Omega_0 < 1$ ($E > 0$), akkor a tér görbülete negatív (a Világegyetem hiperbolikusan tágul, $k = -1$); és végül, ha $\Omega_0 > 1$ ($E < 0$), akkor a tér görbülete pozitív (a Világegyetem előbb tágul majd összezuhan, $k = +1$).**

Végül keressük meg a skálaparaméter explicit időfüggését a lapos ($k = 0,\ E = 0$), por uralta Világegyetemben. Ekkor a (2.1.13) egyenletből

$$a\dot{a}^2 \quad \equiv \quad \frac{4}{3}\left(\frac{d}{dt}a^{3/2}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon_0 a_0^3}{3} \tag{2.1.19}$$

adódik, ahonnan $\frac{d}{dt}a^{3/2}$ =áll., azaz $a^{3/2} \propto t$, vagyis

$$a(t) \quad \propto \quad t^{2/3}. \tag{2.1.20}$$

Ekkor a Hubble-paraméter időfüggésére azt kapjuk, hogy

$$H(t) \quad = \quad \frac{2}{3t}. \tag{2.1.21}$$

Innen, a Hubble-paraméter jelenlegi H_0 értékét felhasználva, a Világegyetem korára $t_0 = 2/(3H_0)$ adódik, ami alig különbözik a korábbi, durva becslés $t_0 \approx 1/H_0$ eredményétől. Az energiasűrűségre azt találjuk, hogy

$$\epsilon(t) \quad = \quad \frac{3}{8\pi G}H^2(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} = \epsilon_{kr}(t), \tag{2.1.22}$$

úgyhogy $\Omega(t) = 1$ ebben a speciális esetben, ahogy azt $E = 0$ miatt várjuk is.

2.2 Relativisztikus kozmológia

2.2.1 Elvi alapok és az Einstein-egyenletek

Ahhoz, hogy a Világyegyetem dinamikájáról hitelesebb képet kaphassunk, túl kell lépjünk a Newton-i kozmológián. Az általános relativitáselmélet keretében tudjuk csak tárgyalni azokat az eseteket, amikor a vizsgált térfogat olyan nagy, hogy a távoli objektumok sebessége megközelíti a fénysebességet és/vagy amikor az anyag nyomása nem nulla, azaz nem por. Mai ismereteink szerint a Világegyetem összetételében kezdetben (az Ősrobbanás után első kb. 100000 évben) a **sugárzás** volt uralkodó, jelenleg pedig az energiasűrűségnek kb. 70 %-a negatív nyomású, úgynevezett **sötét energiától** származik. Az általános relativitáselmélet szerint a Világegyetem anyaga és annak fizikai állapota határozza meg a téridő geometriáját; ezen belül azt is, hogy egy együtt mozgó megfigyelő milyennek látja a teret, annak geometriai tulajdonságait. Az Albert Einstein által 1915-ben kidolgozott általános relativitáselméletet a megfigyelések messzemenően igazolták azóta. Ide kell sorolni a Merkúr perihéliummozgásának magyarázatát, a fénygörbülés és a vöröseltolódás kísérleti igazolását, de az Einstein-i elmélet helytállóságát igazolja a földi globális helymeghatározó rendszer, a GPS („Global Positioning System") sikere is.

Az általános relativitás elmélete szerint az anyag gravitációs hatásánál fogva határozza meg a téridő geometriai szerkezetét. A tapasztalat szerint minden anyag minden része, minden részecske, sőt a fizikai mezők (pl. a fény) alá van vetve a gravitációs kölcsönhatásnak és maga is gravitációs hatást fejt ki az anyag más részeire. Ezt a részecskék súlyos tömegüknél fogva teszik. Eötvös Loránd azonban kísérleteivel bizonyította, hogy a súlyos és a tehetetlen tömeg aránya univerzális állandó, úgyhogy a kétféle tömeg egyenlőnek vehető. Ennek az az egyik legfontosabb következménye, hogy a gravitációs mezőben szabadon eső, nem forgó, kicsiny méretű „szekrényke", azaz lokális vonatkoztatási rendszer inerciális vonatkoztatási rendszer. Ez az **ekvivalencia elv** az általános relativitáselmélet egyik alappillére. A szabadon eső kicsiny próbatestek világvonalai, ill. a szabadon terjedő fénysugarak világvonalai, azaz (az időszerű, ill. fényszerű) geodetikusok a téridő „egyenesei". A lokális inerciarendszerekben azonban érvényesnek kell lennie a speciális relativitáselmélet összefüggéseinek. A vákuumbeli fénysebesség minden lokális inerciarendszerben minden irányban azonos, c. A téridőt az általános relativitáselméletben is elemi események által kijelölt pontsokaságnak tekintjük, ahol lokálisan bármely elemi esemény kicsiny környezetében a szabadon eső megfigyelő a téridőt Minkowski-metrikájúnak észleli. Lokálisan kijelölhető a múltbeli és a jövőbeli fénykúp, és bármely adott elemi esemény környezetében található események az adott eseményhez képest időszerű, fényszerű és térszerű eseményekre osztályozhatók. Arról már említést tettünk, hogy a téridő valamely időparaméterrel megjelölt térszerű hiperfelületek folytonos sorozataként képzelhető el. Ez az időparaméter az izotróp megfigyelők által mért sajátidő, ha a tér izotróp. Meg lehet mutatni, hogy az izotrópia maga után vonja a tér homogenitását, viszont a homogén tér még lehet anizotróp.

Az általános relativitáselmélet másik alappillére a **Mach-elv,** pontosabban annak részleges elfogadása. Az elv értelmében minden anyagdarab tehetetlenségi mozgását a Világegyetem többi anyagának mozgása, állapota határozza meg. Ez határozza meg azt is, hogy mi tekinthető lokálisan inerciarendszernek. Einstein az elvet úgy vette figyelembe az általános relativitáselméletben, hogy minden anyag a gravitációs hatásánál fogva módosítja a téridő geometriáját. A téridő geometriájának alapvető belső tulajdonsága az R **invariáns görbület,** mint azt Gauss tetszőleges dimenziójú görbült felület esetén bebizonyította. Arról, hogy a téridő R görbülete nem nulla, onnan szerezhetünk tudomást, hogy az egymás közelében haladó próbatestek egymásra árapály-erőt fejtenek ki, s ennek következtében egymáshoz képest relatív gyorsulásuk lesz. A téridő görbültségét geometriailag az fejezi ki, hogy ha egy (négyes-)vektort önmagával párhuzamosan elto-

lunk egy infinitezimális zárt görbe mentén, akkor nem kapjuk vissza az eredeti vektort. A téridő ezen tulajdonságát az $R_{\gamma\beta\delta}{}^{\alpha}$ **görbületi tenzor** fejezi ki. Ha a V^{β} vektort toljuk el párhuzamosan, olyan infinitezimális paralelogramma mentén, amelynek éleit az A^{γ}, B^{δ} infinitezimális vektorok képezik, akkor a kiindulási pontba történő visszaérkezéskor az eltérés $\Delta V^{\alpha} = R_{\gamma\beta\delta}{}^{\alpha} V^{\delta} A^{\gamma} B^{\beta}$. A görbületi tenzorból kontrakcióval képezhető az $R_{\gamma\delta} = R_{\gamma\alpha\delta}{}^{\alpha} = R_{\delta\gamma}$ **Ricci-tenzor,** amely szimmetrikus, majd belőle újabb kontrakcióval a téridő $R = R_{\gamma}{}^{\gamma}$ **skalárgörbülete.** Az ekvivalencia-elv alapján az anyag gravitáló tömege ekvivalens a tehetetlen tömegével. Az utóbbi azonban a relativisztikus effektusok miatt nem a nyugalmi, hanem az anyag mozgását is figyelembe vevő mozgási tömeg. Másrészt ez a teljes tömeg az anyag energiájával ekvivalens, $E = mc^2$. Arról, hogy az anyag térfogategységenként mekkora energiát hordoz, az energiaimpulzus-tenzorának T^{00} komponense ad felvilágosítást, $T^{00} = \epsilon$. Einstein ezért azt feltételezte, hogy téridő görbületét meghatározó dinamikai egyenlet jobb oldalán az anyag energiaimpulzus-tenzora áll valamilyen, a gravitációs állandót tartalmazó tényezővel szorozva. Az egyenlet bal oldalán pedig az $R_{\gamma\beta\delta}{}^{\alpha}$ görbületi tenzorból képezett szimmetrikus tenzor, a

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \tag{2.2.1}$$

Einstein-tenzor áll, amelynek spúrja

$$G^{\alpha}_{\alpha} = R - \frac{1}{2} R \delta^{\alpha}_{\alpha} = -R. \tag{2.2.2}$$

Az anyag tehát a

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} \tag{2.2.3}$$

Einstein-egyenlet által meghatározott módon alakítja a téridő görbületét. (Ha SI rendszerben dolgozunk, akkor a jobboldali együttható $8\pi G/c^4$.) Az Einstein-egyenlet spúrja,

$$-R = 8\pi G T \tag{2.2.4}$$

közvetlen kapcsolatot teremt a téridő görbülete és az energiaimpulzus-tenzor spúrja, $T = T^{\alpha}_{\alpha}$ között.

Az általános relativitás elméletének további elve **az általános kovariancia.** A Természet, a fizika törvényei tenzoregyenletek alakjában írhatók fel, nem függenek attól, hogy hogyan választunk koordinátarendszert a téridőben. Az egyik, a téridő koordinátarendszertől független szerkezetét jellemző mennyiség, **az invariáns ívelem négyzete,** amely a téridő infinitezimális távolság-fogalma, meghatározza a infinitezimálisan közeli elemi események távolságát a téridőben. Ha az egyik esemény téridő-koordinátái $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^{\alpha}$, a másiké $x^{\alpha} + dx^{\alpha}$, akkor az invariáns ívelem négyzete

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^{\alpha} dx^{\beta}, \tag{2.2.5}$$

ahol $g_{\alpha\beta}(x) = g_{\beta\alpha}(x)$ az úgynevezett **metrikus tenzor.** A metrikus tenzor másodrendű, szimmetrikus tenzormező, a görbült téridőben általában helyről helyre változik. A téridő minden pontjában elképzelhető egy lokális inerciarendszer, a lokálisan szabadon eső vonatkoztatási rendszer, amelyben a téridő a speciális relativitáselméletnek megfelelő Minkowski-tér. Ezért mindig található olyan folytonos koordinátatranszformáció, amellyel az adott pont kicsiny környezetében Minkowski-koordinátákra térhetünk át, és amelyben a metrikus tenzor a Minkowski-féle. Ennek $(+,-,-,-)$ **Lorentz-szignatúrája** van, úgyhogy az

általános relativitáselméletben is a metrikus tenzor Lorentz-szignatúrájú. (A folytonos koordinátatranszformációk nem tudják megváltoztatni a szignatúrát.) Az invariáns ívelem négyzetének előjele határozza meg, hogy adott x^α koordinátájú elemi eseményhez képest az infinitezimálisan közeli más események időszerűen ($ds^2 > 0$), fényszerűen ($ds^2 = 0$), avagy térszerűen ($ds^2 < 0$) elválasztottak. A metrikus tenzor meghatározza adott téridőpontban értelmezett bármely két u^α és v^α vektornak a skalárszorzatát, $g_{\alpha\beta}(x)u^\alpha v^\beta$. Ezzel meghatározódik az adott téridőpontban értelmezett vektoroknak a hossza és egymással bezárt szögeik. Ezután már értelmet nyer a **vektorok párhuzamos eltolása,** amelyre a görbület jellemzéséhez van szükség. Az infinitezimális párhuzamos eltolás az x^α téridőpontban értelmezett vektorok terének olyan leképezése az $x^\alpha + dx^\alpha$ pontban értelmezett vektorok terére, amelynek során a lineáris vektortérben értelmezett műveleti tulajdonságok mellett a vektorok skalárszorzata is megőrződik. A görbe menti párhuzamos eltolás így pl. szemléletesen azt jelenti, hogy a vektor hossza az eltolás során változatlan marad és ugyancsak az marad a vektornak a görbe, általában pontról pontra más érintőjével bezárt szöge. A párhuzamos eltolás birtokában lehetőség van vektormezők olyan deriváltjainak értelmezésére, amikor a definícióhoz szükséges differenciahányados számlálójában nem egyszerűen az x pontban értelmezett $v^\alpha(x)$ vektort és a közeli $x + dx$ pontban értelmezett $v^\alpha(x + dx)$ vektort hasonlítjuk össze, hanem ehelyett a $v^\alpha(x + dx)$ vektort először párhuzamosan eltoljuk az x pontba, s az így kapott vektorból vonjuk ki $v^\alpha(x)$-et. Az eredmény egy olyan deriválás értelmezése, amit **kovariáns deriváltnak** nevezünk. A közönséges $\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \equiv v^\alpha{}_{,\beta}$ parciális derivált nem viselkedik tenzormezőként folytonos koordinátatranszformációk során, míg a

$$v^\alpha{}_{;\beta}(x) = v^\alpha{}_{,\beta}(x) + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x)v^\gamma(x) \tag{2.2.6}$$

kovariáns derivált maga is tenzorként transzformálódik. A közönséges parciális deriváltat módosító második tag a jobb oldalon a párhuzamos eltolás eredménye, $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x)$ a párhuzamos eltolást jellemző **affin konnexió.** A kovariáns deriválás általánosítható tetszőleges tenzormezőre, pl. skalármező kovariáns deriváltja azonos a parciális deriváltjával,

$$\phi_{;\alpha} = \phi_{,\alpha}; \tag{2.2.7}$$

másodrendű tenzor kovariáns deriváltja,

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\delta}T^{\delta\beta} + \Gamma^\beta{}_{\gamma\delta}T^{\alpha\delta}, \tag{2.2.8}$$

stb. A párhuzamos eltolás egyértelműsítése érdekében meg szokás követelni, hogy a metrikus tenzor kovariáns deriváltja tűnjön el,

$$g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = 0. \tag{2.2.9}$$

Ebben az esetben a kovariáns deriváltban fellépő affin konnexiót **Christoffel-szimbólumoknak** nevezzük, ezek a metrikus tenzorral és annak első deriváltjaival az alábbi módon fejezhetők ki:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x) = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(g_{\gamma\delta,\beta} + g_{\beta\delta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\delta}). \tag{2.2.10}$$

Az Einstein-egyenletekben szereplő Ricci-tenzor ezek után kifejezhető a Christoffel-szimbólumokkal és azok első deriváltjaival:

$$R^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma}(\Gamma^\delta{}_{\gamma\beta,\delta} - \Gamma^\delta{}_{\gamma\delta,\beta} + \Gamma^\delta{}_{\gamma\beta}\Gamma^\sigma{}_{\delta\sigma} - \Gamma^\sigma{}_{\gamma\delta}\Gamma^\delta{}_{\beta\sigma}). \tag{2.2.11}$$

2.2.2 Térgeometria és koordinátarendszerek homogén, izotróp Világegyetemben

Az Einstein-egyenletek tényleges megoldásához, ill. a belőlük a Világegyetem fejlődésére vonatkozóan levezetett egyenletek megoldásához koordinátarendszert kell bevezessünk. Homogén és izotróp Világegyetem esetében már beszéltünk arról, hogy t időkoordinátaként az izotróp megfigyelők (szinkronizált) sajátidejét használjuk. A 3-dimenziós térben is célszerű azonban olyan koordinátarendszert bevezetni, amely maximálisan idomul a tér nagyfokú szimmetriájához, a térbeli eltolásokkal és elforgatásokkal szembeni szimmetriához. A homogenitás és az izotrópia nagyon erős megszorítást jelent a tér geometriájára nézve: a 3-dimenziós tér K görbülete állandó. Az állandó görbületű 3-dimenziós (euklideszi szignatúrájú) térnek csak háromféle geometriája lehetséges: a 3-dimenziós tér lapos geometriájú (a tér görbülete nulla, $K = 0$), a pozitív görbületű 3-dimenziós gömbfelület ($K > 0$), és a negatív görbületű 3-dimenziós hiperbolikus tér ($K < 0$). Az állandó K görbületű 3-dimenziós térben a térbeli ívhossz négyzete

$$d\ell^2 = a^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right) \tag{2.2.12}$$

alakba írható, ahol $r \in [0, \infty)$ radiális koordináta, $\theta \in [0, \pi]$ és $\varphi \in [0, 2\pi]$ gömbi szögek, és $a^2 > 0$ valós pozitív paraméter. A $k = 0$, $k = +1$ és $k = -1$ értékek felelnek meg rendre a lapos ($K = 0$), a pozitív görbületű ($K > 0$) és a negatív görbületű ($K < 0$) tér esetének. Az (r, θ, φ) koordináták tehát a gömbi polárkoordináták általánosításai állandó görbületű tér esetére.

Ha bevezetjük az átskálázott $\bar{r}$ radiális koordinátát az

$$r = \frac{\bar{r}}{1 + \frac{1}{4}k\bar{r}^2} \tag{2.2.13}$$

definícióval, akkor a 3-dimenziós ívelem négyzete átírható

$$d\ell^2 = a^2\frac{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2}{(1 + \frac{1}{4}k\bar{r}^2)^2} \tag{2.2.14}$$

alakba, ahol

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{r}\sin\theta\cos\varphi, \\ \bar{y} &= \bar{r}\sin\theta\sin\varphi, \\ \bar{z} &= \bar{r}\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Sokszor kényelmes egy másik koordinátarendszert használni, amikor a radiális koordináta helyett a

$$\chi = \begin{cases} \text{ar sh } r, & \text{ha} \quad k = -1, \\ r, & \text{ha} \quad k = 0, \\ \text{arc sin } r, & \text{ha} \quad k = +1 \end{cases} \tag{2.2.16}$$

koordinátát használjuk. Lapos és hiperbolikus térben $\chi \in [0, \infty)$, pozitív görbületű térben pedig $\chi \in [0, \pi]$ és az utóbbi esetben minden r értéknek két különböző χ érték felel meg. A χ koordináta használata tehát egyértelművé teszi a koordinátázást. A 3-dimenziós térben az elemi ívhossz négyzete

$$d\ell^2 = a^2[d\chi^2 + \Phi^2(\chi)d\Omega^2], \tag{2.2.17}$$

ahol

$$\Phi^2(\chi) = \begin{cases} \mathrm{sh}^2\chi, & \text{ha} \quad k=-1, \\ \chi^2, & \text{ha} \quad k=0, \\ \sin^2\chi, & \text{ha} \quad k=+1 \end{cases} \tag{2.2.18}$$

és $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. A téridő invariáns ívhossznégyzete tehát homogén és izotróp tér esetén

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - d\ell^2 \\ &= dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + \Phi^2(\chi)d\Omega^2]. \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Az ívhosszelem négyzete ezen alakjának megfelelő metrikát **Robertson-Walker-féle metrikának** nevezzük. A 3-dimenziós térbeli $d\ell$ fizikai távolság arányos az $a(t)$ skálaparaméterrel, amely általános esetben függhet az egymást követő térszerű hiperfelületeket parametrizáló t időtől. Ez a legáltalánosabb metrika, amivel a homogén és izotróp Világegyetem rendelkezhet. A Világegyetem anyagának energiaimpulzus-tenzora az Einstein-egyenletek alapján határozza meg, hogy az $a(t)$ skálaparaméter hogyan változik az idő függvényében.

Lapos ($K=0$, $k=0$) tér esetén az ($\bar{x}=x,\ \bar{y}=y,\ \bar{z}=z$) koordináták 3-dimenziós euklideszi koordináták, ($\bar{r}=r,\ \theta,\ \varphi$) pedig a 3-dimenziós euklideszi térben bevezetett szokásos gömbi polárkoordináták. A tér tágulását (összehúzódását) az $a(t)$ skálaparaméter időfüggése írja le. Ez abban nyilvánul meg, hogy két, a térben infinitezimálisan közeli, ($dx,\ dy,\ dz$) (együtt mozgó) koordinátakülönbséggel elhelyezkedő pont fizikai távolsága

$$d\ell = a(t)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}, \tag{2.2.20}$$

bárhol is helyezkedjenek el a térben. Mivel az $a(t)$ skálaparaméter csak az időtől függ, a tágulás (összehúzódás) nem tüntet ki helyet és irányt, nincsen centruma sem. A két együtt mozgó (azaz rögzitett tér-koordinátájú) pont relatív sebessége

$$\frac{d\ell}{dt} = \dot{a}(t)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}d\ell \equiv H(t)d\ell, \tag{2.2.21}$$

ami éppen Hubble törvényének infinitezimálisan közeli pontokra vonatkozó alakja.

Pozitív görbületű ($K>0$, $k=+1$) tér ívelemnégyzetének kifejezését a 3-dimenziós euklideszi térbe ágyazott 2-dimenziós gömbfelület példájával tehetjük kézenfekvővé. Az a sugarú gömbfelület egyenlete $x^2+y^2+z^2=a^2$, ahonnan $zdz=-xdx-ydy$. Vezessük be a $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ radiális koordinátát ($0\le\rho\le a$) és a $\varphi\in[0,2\pi]$ polárszöget, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Ekkor $\rho d\rho = xdx+ydy$, úgyhogy a gömbfelület két szomszédos pontjának távolságára

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= dx^2+dy^2+dz^2 = dx^2+dy^2+\frac{(xdx+ydy)^2}{a^2-x^2-y^2} \\ &= d\rho^2+\rho^2d\varphi^2+\frac{\rho^2d\rho^2}{a^2-\rho^2} = \frac{d\rho^2}{1-(\rho^2/a^2)}2+\rho^2d\varphi^2 \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

adódik. Az $a\to\infty$ határesetben visszakapjuk a 2-dimenziós sík ívhosszelemének definícióját síkbeli polárkoordinátákban. Bevezethetjük ezután az $r=\rho/\sqrt{a^2}$ átskálázott radiális koordinátát, amelynek segítségével a 2-dimenziós felületen az elemi ívhossz négyzete

$$d\ell^2 = a^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2d\varphi^2\right) \tag{2.2.23}$$

alakot ölt, ahol $k = +1$ a pozitív görbületű gömbfelület, a $k = 0$ választás a zérus görbületű sík esetének felel meg. A (2.2.23) 2-dimenziós ívhossznégyzet nyilvánvaló általánosítása a 3-dimenziós ívhossznégyzet (2.2.17) alakja. A konstans pozitív görbületű 2-dimenziós felületnek nincsen határa, mégis véges a „térfogata", a gömb felszíne, $4a^2\pi$. Hasonlóan a 3-dimenziós állandó pozitív görbületű tér térfogata is véges, $V = 2\pi^2 a^3$. A geometria sajátossága, hogy a háromszög szögeinek összege nagyobb, mint 180°.

A negatív görbületű ($K < 0$, $k = -1$) 3-dimenziós térnek (a hiperbolikus vagy más néven Bolyai-Lobacsevszkij-féle térnek) nem találjuk 2-dimenziós analogonját a 3-dimenziós euklideszi térbe ágyazott felületek között. Formálisan azonban a (2.2.23) kifejezésből a^2-nek negatív értéket adva, azaz a $k = -1$ választással kaphatjuk meg a konstans negatív görbületű 2-dimenziós felület metrikáját. Meg lehet mutatni, hogy a 2-dimenziós hiperbolikus tér a 3-dimenziós Lorentz-szignatúrájú térbe ágyazott $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$ hiperboloidként szemléltethető. A hiperbolikus tér térfogata végtelen (akárcsak a lapos téré), és benne a háromszög szögeinek összege kisebb, mint 180°.

2.2.3 Az anyag energiaimpulzus-tenzora

Az Einstein-egyenletek meghatározzák, hogy az anyag gravitációs tulajdonságainál fogva hogyan alakítja a téridő geometriai szerkezetét, görbületét. Az anyag energiaimpulzus-tenzorának változása azonban az anyag mozgásegyenleteinek megoldása alapján határozható meg. Az anyag mozgásegyenleteiben viszont szerepel a metrikus tenzor. Az általános kovariancia elve ugyanis azt követeli meg, hogy ezeknek a mozgásegyenletek az alakja is invariáns legyen az általános (folytonos) koordinátatranszformációkkal szemben. A mozgásegyenleteknek tehát tenzoregyenleteknek kell lenniük, s ezért kovariáns deriváltakat kell tartalmazniuk, amelyekben szerepel a metrikus tenzor. Az Einstein-egyenletek és az energiaimpulzus-tenzor összeegyeztethetőségének feltétele, hogy az energiaimpulzus-tenzor kovariáns divergenciája tűnjön el, $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$. Ez a **konzisztencia-feltétel** azért szükséges, mert az Einstein-tenzor kovariáns divergenciája az Einstein-tenzor definíciójából következően eltűnik, $G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$.

Az anyag a legnagyobb méretskálákon jó közelítéssel **ideális folyadéknak („perfect fluid")** tekinthető, amelyet az ϵ energiasűrűséggel, a p nyomással és az áramlás u^α négyes-sebességével jellemezhetünk. Az ideális folyadék energiaimpulzus-tenzora:

$$T^\alpha_\beta = (\epsilon + p)u^\alpha u_\beta - p\delta^\alpha_\beta. \tag{2.2.24}$$

Ha a táguló Világegyetemmel együtt mozgó ideális folyadékot tételezünk fel, akkor a „folyadékrészecskék" világvonalai az izotróp megfigyelők világvonalai, úgyhogy az ideális folyadék négyes-sebessége $u^0 = 1$, $u^i = 0$. Ettől inhomogenitások közelében van lokálisan eltérés, ahol u^i az anyagsűrűsödések miatti árapály-erők következtében nem nulla. A legnagyobb kozmológiai méretskálákon azonban átlagosan homogén az energiasűrűség, úgyhogy a Világegyetem egészének fejlődése szempontjából élhetünk a négyes-sebességre vonatkozó fenti feltevéssel. Az energiaimpulzus-tenzor kifejezésében a nyomást az anyag $p = p(\epsilon)$ állapotegyenlete határozza meg. **Az ideális folyadék állapotegyenlete** általában $p = w\epsilon$ alakú. Az **ultrarelativisztikus gáz (sugárzás)** állapotegyenlete $p = \epsilon/3$, azaz $w = 1/3$. A **kozmikus por** nyomása $p = 0$, azaz $w = 0$. Az **állandó pozitív** $\Lambda > 0$ **kozmológiai állandó** esete ekvivalens a $p = -\epsilon$ állapotegyenletű ideális folyadék esetével, amikor $w = -1$. Utóbbi abból következik, hogy a kozmológiai taggal kiegészített Einstein-egyenletek alakja

$$G_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}. \tag{2.2.25}$$

Ha azonban feltesszük, hogy az anyag állapotegyenlete $p = -\epsilon$, akkor $T_{\alpha\beta} = -pg_{\alpha\beta} = \epsilon g_{\alpha\beta}$, ami azt jelenti, hogy az ilyen anyag jelenléte éppen $\Lambda = 8\pi G\epsilon$ kozmológiai állandó jelenlétével egyenértékű. (Ha c-t is kiírjuk, akkor $\Lambda = (8\pi G/c^4)\epsilon$. Az egyenértékűséget úgy látjuk be, hogy a kozmológiai tagot átrendezzük a jobb oldalra, és észrevesszük, hogy ekkor a jobb oldalon a szóban forgó $p = -\epsilon$ állapotegyenletű ideális folyadék energiaimpulzus-tenzora áll $8\pi G$ együtthatóval szorozva.)

Célszerű a későbbiek számára meghatározni **az ideális folyadék energiaimpulzus-tenzorának komponenseit Robertson-Walker-metrikájú téridő esetén.** Mivel nincsenek a térben kitüntetett irányok, azért $T^i_0 = 0$ és $T^i_j = T^{**}\delta^i_j$. A homogén és izotróp Világegyetemmel együtt mozgó ideális folyadék energiaimpulzus-tenzorának el nem tűnő komponensei:

$$\begin{aligned} T^0_0 &= (\epsilon + p) - p = \epsilon, \\ T^*_* &= -p = -w\epsilon \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

és az energiaimpulzus-tenzor spúrja $T = T^0_0 + 3T^*_* = (1 - 3w)\epsilon$. Innen az adódik, hogy **sugárzás** esetén $T^*_* = -\frac{\epsilon}{3}$, **por** esetén $T^*_* = 0$, $\Lambda > 0$ **kozmológiai állandó,** ill. az azzal egyenértékű $p = -\epsilon$ állapotegyenletű ideális folyadék esetén $T^*_* = +\epsilon$. (Később belátjuk, hogy ekkor $\epsilon =$áll. és $\Lambda = 8\pi G\epsilon =$áll., úgyhogy $T^{**} = -\frac{\Lambda}{8\pi G a^2}$.

Mint később látni fogjuk, a **sötét energia** értelmezése szempontjából fontos lehet az olyan anyag, amelynek negatív a nyomása. Erre példa **a homogén skalármező klasszikus kondenzátumával leírható anyag.** A $V(\varphi)$ potenciállal jellemzett klasszikus skalármező energiaimpulzus-tenzora

$$(T_{sk})^\alpha_\beta = \varphi^{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \left(\frac{1}{2}\varphi^{,\gamma}\varphi_{,\gamma} - V(\varphi)\right)\delta^\alpha_\beta. \tag{2.2.27}$$

A klasszikus skalármező mozgásegyenlete:

$$\varphi^{,\alpha}_{,\alpha} + V(\varphi) = 0. \tag{2.2.28}$$

Ha a skalármező Lagrange-sűrűségének „kinetikus” tagja pozitív, $\varphi^{,\alpha}\varphi_{,\alpha} > 0$, akkor az energiaimpulzus-tenzort az ideális folyadék energiaimpulzus-tenzorának alakjára hozhatjuk, ha bevezetjük az

$$\begin{aligned} &\epsilon = \frac{1}{2}\varphi^{,\gamma}\varphi_{,\gamma} + V(\varphi), \qquad p = \frac{1}{2}\varphi^{,\gamma}\varphi_{,\gamma} - V(\varphi), \\ &u^\alpha = \frac{\varphi^{,\alpha}}{\sqrt{\varphi^{,\gamma}\varphi_{,\gamma}}} \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

mennyiségeket. Homogén Világegyetemben csak a térben állandó $\varphi =$áll. térkonfiguráció jöhet szóba, ami homogén kondenzátumot jelent. Ekkor $\partial\varphi/\partial x^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ és

$$\epsilon = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \tag{2.2.30}$$

A homogén skalármező kielégíti a $p + \epsilon \geq 0$, úgynevezett **gyenge energiafeltételt**, továbbá a $w = p/\epsilon$ hányados időfüggő és alulról korlátos, $w \geq -1$, tetszőleges pozitív $V(\varphi) > 0$ potenciál esetén. Ugyanakkor az $\epsilon + 3p \geq 0$ feltétel, az úgynevezett **erős energiafeltétel** megsérülhet. Ez pl. bekövetkezik akkor, ha a potenciál lokális minimummal rendelkezik a φ_0 pontban, ekkor a $\varphi(t) = \varphi_0$ homogén térkonfiguráció megoldása a mozgásegyenletnek és a nyomásra a

$$p = -\epsilon = -V(\varphi_0) < 0 \tag{2.2.31}$$

negatív érték adódik. A skalármező energiaimpulzus-tenzora ebben az esetben

$$(T_{sk})^\alpha_\beta = V(\varphi_0)\delta^\alpha_\beta. \tag{2.2.32}$$

ennek megfelelően az Einstein-egyenlet jobb oldalán megjelenik a $8\pi G V(\varphi_0)\delta^\alpha_\beta$ tag. Ha feltesszük, hogy más anyag (pl. sugárzás és/vagy por) is jelen van a Világegyetemben, és az nem hat (vagy csak elhanyagolható mértékben hat) kölcsön a klasszikus skalármezővel, akkor az Einstein-egyenlet jobb oldala $8\pi G[V(\varphi_0)\delta^\alpha_\beta + T^\alpha_\beta]$, ahol T^α_β a skalármező mellett jelenlevő többi anyag energiaimpulzus-tenzora. Rendezzük át a skalármező járulékát az Einstein-egyenlet bal oldalára, ekkor az egyenlet

$$R^\alpha_\beta - \frac{1}{2}R\delta^\alpha_\beta - \Lambda\delta^\alpha_\beta = 8\pi G T^\alpha_\beta, \tag{2.2.33}$$

alakot ölt, ahol

$$\Lambda = 8\pi G V(\varphi_0). \tag{2.2.34}$$

A kondenzált skalármező tehát ugyanolyan szerepet játszik az Einstein-egyenletben, mint a $\Lambda > 0$ **kozmológiai állandó** jelenléte a Világegyetemben. A kozmológiai tagot eredetileg már Einstein feltételezte, amikor az Einstein-egyenletek sztatikus Világegyetemet leíró megoldását kereste. Akkor még nem volt ismert a Világegyetem tágulását jelentő Hubble-törvény. Most látjuk, hogy a homogén skalármező alapállapota, azaz a vákuum $V(\varphi_0)$ energiasűrűsége magyarázatát adhatja a kozmológiai tagnak.

2.3 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-kozmológia

A homogén és izotróp esetben az Einstein-egyenletek megoldása **a Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker kozmológia.** Ennek egyenleteit úgy kapjuk meg, hogy az Einstein-egyenletekbe beírjuk a homogén és izotróp tér esetének megfelelő Robertson-Walker metrikából számolt Einstein-tenzort és az anyag energiaimpulzus-tenzorát. A kozmológia szempontjából érdekes esetekben az utóbbit az ideális folyadék

$$T^{\alpha\beta} = (\epsilon + p)u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta} \tag{2.3.1}$$

energiaimpulzus-tenzorának alakjában vesszük fel. Ha ezután felhasználjuk az anyag $p = p(\epsilon)$ állapotegyenletét is, akkor 2 független egyenletet kapunk, amelyekből az $a(t)$ skálaparaméter és az $\epsilon(t)$ energiasűrűség időfüggése meghatározható. Az Einstein-tenzor és az anyag energiaimpulzus-tenzora szimmetrikus másodrendű tenzorok, ezért 10 független komponensük van. A független egyenletek számának 10-ről 2-re történő csökkenése a tér nagyfokú szimmetriájának a következménye. A $G^{\alpha\beta}u_\beta$ (ill. $T^{\alpha\beta}u_\beta$) négyesvektor térirányú komponensei el kell tűnjenek, $G^{i\beta}u_\beta = 0$, mert egyébként lenne kitüntetett irány a térben. Együtt mozgó folyadék esetén a folyadékrészecskék maguk az izotróp megfigyelők, amelyek világvonalai időirányúak, azaz a folyadék négyes-sebességének térirányú $u^i = 0$ komponensei eltűnnek, ekkor viszont $u^0 = 1$ és $G^i_0 = 0$ kell legyen. A térbeli izotrópia további következménye, hogy a G^i_j tér-térkomponensek mátrixának nincsen kitüntetett sajátvektora a 3-dimenziós térben, azaz G^i_j a Kronecker-deltával arányos, vagyis minden G_{**} diagonális tér-térkomponens azonos, a nem-diagonális tér-térkomponensek pedig eltűnnek. Így összesen 2 független Einstein-egyenlet adódik,

$$\begin{aligned} G^0_0 &= 8\pi G\epsilon, \\ G^*_* &= -8\pi G p. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Egyszerűség kedvéért vegyük a síkgeometria (lapos tér, $k = 0$) esetét. A Robertson-Walker-metrika,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{2.3.3}$$

azaz

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t) \end{pmatrix} \tag{2.3.4}$$

alapján most már kiszámolhatjuk a Christoffel-szimbólumokat, az el nem tűnőek

$$\begin{aligned} &\Gamma^0{}_{11} = \left(-\frac{1}{2}g^{0\delta}g_{11,\delta}\right) = -\frac{1}{2}g_{11,0} = -\frac{1}{2}d(-a^2)/dt = a\dot{a} \\ &= \Gamma^0{}_{22} = \Gamma^0{}_{33}, \\ &\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}g^{1\delta}g_{1\delta,0} = \frac{1}{2}g^{11}g_{11,0} = \frac{1}{2}(-a^{-2})d(-a^2)/dt = \dot{a}/a \\ &= \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30}. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

A Ricci-tenzor független komponensei

$$\begin{aligned} R^0_0 &= g^{00}(\Gamma^\delta_{00,\delta} - \Gamma^\delta_{0\delta,0} + \Gamma^\delta_{00}\Gamma^\sigma_{\delta\sigma} - \Gamma^\sigma_{0\delta}\Gamma^\delta_{0\sigma}) \\ &= -\sum_i \Gamma^i_{0i,0} - \sum_i (\Gamma^i_{0i})^2 = -3\frac{d}{dt}(\dot{a}/a) - 3(\dot{a}/a)^2 = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R^*_* &= g^{*\gamma}(\Gamma^\delta_{\gamma*,\delta} - \Gamma^\delta_{\gamma,\delta,*} + \Gamma^\delta_{\gamma*}\Gamma^\sigma_{\delta\sigma} - \Gamma^\sigma_{\gamma\delta}\Gamma^\delta_{*\sigma}) \\ &= g^{**}(\Gamma^\delta_{**,\delta} - \Gamma^\delta_{*\delta,*} + \Gamma^\delta_{**}\Gamma^\sigma_{\delta\sigma} - \Gamma^\sigma_{*\delta}\Gamma^\delta_{*\sigma}) \\ &= (-a^{-2})(\Gamma^0_{**,0} + \Gamma^0_{**}\sum_i \Gamma^i_{0i} - \Gamma^0_{**}\Gamma^*_{*0} - \Gamma^*_{*0}\Gamma^0_{**}) \\ &= -\frac{1}{a^2}\left(\frac{d}{dt}(a\dot{a}) + \Gamma^0_{**}\Gamma^*_{*0}\right) = -\frac{1}{a^2}\left(\dot{a}^2 + a\ddot{a} + a\dot{a}\frac{\dot{a}}{a}\right) \\ &= -\frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

A téridő invariáns görbülete sík térgeometria esetén

$$R = R^0_0 + 3R^*_* = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \tag{2.3.7}$$

és az Einstein-tenzor független komponensei

$$\begin{aligned} G^0_0 &= R^0_0 - \frac{1}{2}R = -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}, \\ G^*_* &= R^*_* - \frac{1}{2}R = -\frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Így a független Einstein-egyenletek az alábbi alakot öltik:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\epsilon, \tag{2.3.9}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi G p. \tag{2.3.10}$$

(Ha SI egységrendszerben dolgoznánk, akkor az egyenletek jobb oldalán $8\pi G/c^4$ szerepelne és a mennyiségek feletti pont jelentése $d/d(ct)$ lenne.) Fejezzük ki az első egyenletből $\frac{\dot{a}^2}{a^2}$-et és helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\epsilon + 3p). \tag{2.3.11}$$

Az Einstein-tenzor spúrja $G = -R$, úgyhogy az Einstein-egyenletek spúrjára

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{4\pi G}{3}(\epsilon - 3p) \tag{2.3.12}$$

adódik.

Hasonló egyenleteket kapunk pozitív görbületű ($k = +1$) és hiperbolikus ($k = -1$) tér esetén is. A térgeometriák megkülönböztetésére korábban bevezetett k paraméter segítségével általánosan az alábbi alakba írhatjuk a homogén és izotróp Világegyetem fejlődését leíró Einstein-egyenleteket:

$$H^2(t) + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\epsilon, \tag{2.3.13}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\epsilon + 3p). \tag{2.3.14}$$

Itt $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ a korábban bevezetett Hubble-paraméter. Az invariáns görbület a különböző térgeometriák esetén pedig:

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \tag{2.3.15}$$

Az Einstein-egyenletek spúrja általános esetben

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{4\pi G}{3}(\epsilon - 3p). \tag{2.3.16}$$

A (2.3.13) és (2.3.14) egyenletek az úgynevezett **Friedmann-egyenletek,** amelyeket Alexander Friedmann javasolt az 1920-as évek elején. Közülük a (2.3.13) egyenlet alakilag pontosan megegyezik azzal, amit a Hubble-paraméterre a Newton-i kozmológia keretében kapunk, ha $-2E = k$ jelölést használunk; igaz, most a $p = p(\epsilon)$ állapotegyenlet és a tér geometriája is bármilyen lehet. Ezért **az általános relativitás elméletében is érvényes, hogy az $\Omega = \epsilon/\epsilon_{kr}$ kozmológiai paraméter** értéke meghatározza az állandó görbületű Világegyetem geometriáját: ha $\Omega = 1$ ($k = 0$), akkor síkgeometria valósul meg, azaz a tér lapos; ha $\Omega > 1$ ($k = +1$), akkor a tér pozitív görbületű és zárt; ha $\Omega < 1$ ($k = -1$), akkor a tér negatív görbületű, azaz hiperbolikus geometriájú. A lapos és a hiperbolikus tér nyílt. Az (2.3.14) egyenletből kiolvashatjuk, hogy amennyiben az anyag eleget tesz az $\epsilon + 3p > 0$ erős energiafeltételnek, akkor a Világegyetem mindig lassulva

tágul, azaz $\ddot{a} < 0$. A közönséges ideális folyadékok, amelyekre $w > -1/3$, eleget tesznek ennek a feltételnek. Ilyen ideális folyadék a sugárzás és a por. Ha azonban az anyag megsérti az erős energiafeltételt, azaz olyan az állapotegyenlete, hogy $\epsilon + 3p < 0$, akkor a Világegyetem tágulása gyorsuló, $\ddot{a} > 0$. Ilyen ideális folyadék az, amelyre $w < -1/3$. Jelenlegi ismereteink szerint a sötét anyag megsérti az erős energiafeltételt. A homogén skalármező kondenzátuma is megsérti az erős energiafeltételt, ez olyan ideális folyadék, amelynek az állapotegyenletében $w = -1$. Az előzőekben megmutattuk, hogy a $\Lambda > 0$ kozmológiai állandó jelenléte is egyenértékű egy $p = -\epsilon$ állapotegyenletű ideális folyadék jelenlétével.

Az Einstein-egyenletek konzisztenciáját a

$$0 = T^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = T^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\delta}T^{\delta\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\delta}T^{\alpha\delta} \tag{2.3.17}$$

feltételek biztosítják:

$$\begin{aligned} 0 &= T^{\alpha 0}{}_{;\alpha} = T^{\alpha 0}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\delta}T^{\delta 0} + \Gamma^{0}{}_{\alpha\delta}T^{\alpha\delta} \\ &= T^{00}{}_{,0} + \sum_i \Gamma^{i}{}_{i0}T^{00} + \sum_i \Gamma^{0}{}_{ii}T^{ii} \\ &= \dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon + 3a\dot{a}\frac{p}{a^2} = \dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + p), \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

$$\begin{aligned} 0 &= T^{\alpha i}{}_{;\alpha} = T^{\alpha i}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\delta}T^{\delta i} + \Gamma^{i}{}_{\alpha\delta}T^{\alpha\delta} \\ &= T^{0i}{}_{,0} + \sum_i \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha i}T^{ii} + \Gamma^{i}{}_{ii}T^{ii} \equiv 0. \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Az egyenleteket sík térgeometria esetén ($k = 0$) határoztuk meg, de általános érvényűek homogén és izotróp téridőben. A második konzisztencia-egyenlet azonosságként teljesül, az első pedig átírható

$$\dot{\epsilon} = -3H(\epsilon + p) \tag{2.3.20}$$

alakba. Erről be lehet látni, hogy **a termodinamika I. főtételének alkalmazása az adiabatikus tágulóés ideális folyadékkal homogén módon kitöltött Világegyetemre.** Tekintsük a Világegyetem tetszőleges V térfogatát, ennek (belső)energiája $E = \epsilon V + TS$, ahol T és S rendre a V térfogatban található anyag hőmérséklete és entrópiája. A (belső)energia megváltozása dV térfogatváltozás és adiabatikus tágulás, azaz $dS = 0$ entrópiaváltozás esetén $dE = -pdV$, vagyis a tágulási munka. A tágulás miatti térfogatváltozás $dV \propto 3a^2\dot{a}$ és másrészről $dE \propto \dot{\epsilon}a^3 + \epsilon 3a^2\dot{a}$, úgyhogy végül

$$\dot{\epsilon} = -3(\epsilon + p)\dot{a}/a \tag{2.3.21}$$

adódik. Ez az egyenlet pedig éppen megegyezik a konziszencia-feltételből kapott (2.3.20) egyenlettel.

A termodinamika I. főtételének az adiabatikusan tágulóideális folyadékra történő alkalmazásából, azaz a (2.3.20) egyenletből meghatározhatjuk, hogy hogyan változik az ideális folyadék energiasűrűsége a skálaparaméter függvényében, ha felhasználjuk az ideális folyadék állapotegyenletét. Írjuk a (2.3.20) egyenletet

$$0 = d\epsilon + 3(\epsilon + p)d\ln a \tag{2.3.22}$$

alakba. Az $\propto \epsilon a^3$ energia megváltozása

$$\begin{aligned} d(\epsilon a^3) &= a^3 d\epsilon + 3a^2 \epsilon da = a^3(d\epsilon + 3\epsilon d\ln a) \\ &= -3a^3 p d\ln a. \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Innen $p = w\epsilon$ állapotegyenletű ideális folyadék esetén

$$d(\epsilon a^3) = -3w\epsilon a^3 d\ln a, \tag{2.3.24}$$

azaz

$$\epsilon a^3 \propto a^{-3w} \tag{2.3.25}$$

adódik. Por esetén ($p = 0$ miatt $w = 0$) $\epsilon a^3 =$áll., azaz $\epsilon \propto a^{-3}$; sugárzás esetén ($p = \epsilon/3$ miatt $w = 1/3$) $\epsilon a^3 \propto a^{-1}$, azaz $\epsilon \propto a^{-4}$; sötét energia ($p = -\epsilon$ miatt $w = -1$) esetén $\epsilon a^3 \propto a^3$, azaz $\epsilon =$áll. skálázást kapunk. Ezeket a skálatörvényeket fel tudjuk használni, amikor a Friedmann-egyenletek megoldásainak explicit alakját keressük.

Jegyezzük meg, hogy a Newton-i kozmológia csak korlátozott érvényű. Helyessége kicsiny méretskálákon, porszerű anyag jelenlétében igaz, amikor a tágulásból származó sebességek sokkal kisebbek, mint a vákuumbeli fénysebesség. Ez tulajdonképpen az általános relativitás elméletének ismeretében utólag igazolható. Ráadásul a Newton-i kozmológiában a tér mindig lapos, azaz síkgeometriájú (nulla görbületű). Az általános relativitás elmélete keretében kapott Friedmann-egyenletek általános érvényűek: tetszőleges állapotegyenletű relativisztikus anyag jelenlétében lehetővé teszik a Világegyetem fejlődésének (időbeli változásának) szelf-konzisztens leírását. Az anyag állapota meghatározza a tér geometriáját. A $k = \pm 1$ esetekben az $a(t)$ skálaparaméter a (3-dimenziós) tér görbületi sugarának jelentésével bír.

A standard Friedmann-kozmológia a kozmológiai állandó eltűnését feltételezi, $\Lambda = 0$. A kapott egyenletek azonban az el nem tűnő kozmológiai állandó jelenlétének megfelelő, $p = -\epsilon$ állapotegyenletű anyag által uralt Világegyetem fejlődésére is alkalmazhatóak. Ilyen eset az, amikor a Világegyetemet sötét energia, vagy $\Lambda > 0$ kozmológiai állandó, vagy egy skalármező homogén kondenzátuma uralja. Jelenleg nem tudjuk, hogy ezek az anyag három különböző alakban történő megjelenését jelentik, vagy pedig annak különböző alakjai.

A fejezet címében szereplő elnevezésről még annyit, hogy Georges Lamaître 1927-ben publikálta a tágulló Világegyetemre vonatkozó modelljét, amelyet lényegében Friedmann munkásságával párhuzamosan dolgozott ki. A tágulló Világegyetem modelljét Einstein akkor még nem fogadta el, csak később: azután, hogy 1929-ben Hubble mérései igazolták a tágulást.

2.4 A Friedmann-egyenletek megoldásai

2.4.1 Konform időváltozó

Láttuk korábban, hogy a homogén és izotróp Világegyetemben az invariáns ívelemnégyzet mindig

$$ds^2 = dt^2 - d\ell^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + \Phi^2(\chi)d\Omega^2] \tag{2.4.1}$$

alakba írható, ahol χ az együtt mozgó koordinátarendszer radiális koordinátája, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. A Friedmann-egyenletek megoldása sok esetben könnyebb, ha az úgynevezett η **konform időt** vezetjük be, amelynek segítségével a Robertson-Walker-metrika

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - \Phi^2(\chi)d\Omega^2] \tag{2.4.2}$$

alakot ölt. Ez azt jelenti, hogy a konform idő és a t ,,fizikai" idő közötti kapcsolat

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \tag{2.4.3}$$

amelynek segítségével

$$\begin{aligned} dt &= a(\eta)d\eta, \\ \dot{a} &= \frac{da}{a(\eta)d\eta} = \frac{a'}{a}, \\ \ddot{a} &= \frac{d}{ad\eta}\frac{a'}{a} = \frac{1}{a}\left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2}\right), \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= \frac{a'' + ka}{a^3}. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Ekkor a (2.3.13) Friedmann-egyenlet és az Einstein-egyenlet (2.3.16) spúrja rendre

$$(a')^2 + ka^2 = \frac{8\pi G}{3}\epsilon a^4 \tag{2.4.5}$$

és

$$a'' + ka = \frac{4\pi G}{3}(\epsilon - 3p)a^3 \tag{2.4.6}$$

alakot ölt. Sokszor az utóbbi egyenletet érdemesebb használni a (2.3.14) Friedmann-egyenlet helyett, mert megkönnyíti az analitikus megoldás megkeresését, ha van ilyen.

2.4.2 Sugárzás uralta Világegyetem

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $p = \epsilon/3$ állapotegyenletű **sugárzás (ultrarelativisztikus gáz) uralja a Világegyetemet.** Ekkor a (2.4.6) egyenlet

$$a'' + ka = 0 \tag{2.4.7}$$

alakúra egyszerűsödik. Ennek keressük a megoldását $a(\eta = 0) = 0$ kezdőfeltétellel. A kezdőfeltételnek eleget tevő megoldás:

$$a(\eta) = a_r \begin{cases} \mathrm{sh}\eta, & \text{ha} \quad k = -1 \\ \eta, & \text{ha} \quad k = 0 \\ \sin\eta, & \text{ha} \quad k = +1 \end{cases}, \tag{2.4.8}$$

ahol a_r integrációs állandó. Ezt felhasználva, a fizikai idő $t = \int_0^\eta a(\eta')d\eta'$ és a konform idő kapcsolata:

$$t = a_r \begin{cases} \mathrm{ch}\eta - 1, & \text{ha} \quad k = -1 \\ \eta^2/2, & \text{ha} \quad k = 0 \\ 1 - \cos\eta, & \text{ha} \quad k = +1 \end{cases}, \tag{2.4.9}$$

ahol lapos és hiperbolikus geometria esetén $0 \leq \eta < \infty$, pozitív görbületű (zárt) tér esetén $0 \leq \eta \leq \pi$. Utóbbi esetben a felső határt az jelenti, hogy a Világegyetem ismét összezuhan, $a(\eta = \pi) = 0$ lesz. A téridő görbülete

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = -6\frac{a'' + ka}{a^3}. \tag{2.4.10}$$

Felhasználva a skálaparaméter η-függését a téridő görbületére mindhárom esetben zérus adódik:

$$R = \begin{cases} 0, & 0 \leq \eta < \infty \quad (0 \leq t < \infty) \quad \text{ha} \quad k = -1 \\ 0, & 0 \leq \eta < \infty \quad (0 \leq t < \infty) \quad \text{ha} \quad k = 0 \\ 0, & 0 \leq \eta \leq \pi \quad (0 \leq t \leq 2a_r) \quad \text{ha} \quad k = 1 \end{cases}. \tag{2.4.11}$$

A Ricci-tenzor komponensei azonban nem tűnnek el, és szingulárisakká válnak, amikor lapos, ill. hiperbolikus térgeometria esetén $\eta = 0$ ($t = 0$), ill. amikor zárt tér esetén $\eta = 0$ és π ($t = 0$ és $2a_r$).

Síkgeometriájú (lapos, $k = 0$) térben a skálaparaméter

$$a \propto \eta \propto t^{1/2}, \tag{2.4.12}$$

a Hubble-paraméter

$$H = \frac{a'}{a^2} = \frac{1}{a_r \eta^2} = \frac{1}{2t}. \tag{2.4.13}$$

A sugárzás energiasűrűsége lapos térben a (2.3.13) egyenletből

$$\epsilon_r = \frac{3}{8\pi G} H^2 = \frac{3}{32\pi G t^2} \propto a^{-4}, \tag{2.4.14}$$

azaz a skálaparaméter a^{-4} hatványával arányos. Ezt vártuk az Einstein-egyenletek konzisztenciája, azaz a termodinamika I. főtétele alapján.

2.4.3 Por uralta Világegyetem

Ha a Világegyetemet $p = 0$ nyomású por uralja, akkor a (2.4.6) egyenlet

$$a'' + ka = C \tag{2.4.15}$$

alakot ölt, ahol $\frac{4\pi G}{3}\epsilon a^3 = C$ =áll., mert adiabatikus tágulás során ϵa^3 =áll. A homogén egyenlet általános megoldása

$$a_h(\eta) = \begin{cases} A\text{sh}\eta + B\text{ch}\eta, & \text{ha} \quad k = -1 \\ A\eta + B, & \text{ha} \quad k = 0 \\ A\sin\eta + B\cos\eta, & \text{ha} \quad k = +1 \end{cases}, \tag{2.4.16}$$

és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása

$$a_p(\eta) = \begin{cases} -C, & \text{ha} \quad k = -1 \\ \frac{1}{2}C\eta^2, & \text{ha} \quad k = 0 \\ C, & \text{ha} \quad k = +1 \end{cases}. \tag{2.4.17}$$

Ezek ismeretében az általános megoldás

$$a(\eta) \quad = \quad \begin{cases} A\mathrm{sh}\eta + B\mathrm{ch}\eta - C, & \text{ha} \quad k=-1 \\ \frac{1}{2}C\eta^2 + A\eta + B, & \text{ha} \quad k=0 \\ A\sin\eta + B\cos\eta + C, & \text{ha} \quad k=+1 \end{cases} . \tag{2.4.18}$$

Az $a(\eta = 0) = 0$ kezdőfeltétel a $k = \mp 1$ esetben a $B = \pm C$ megszorítást, a $k = 0$ esetben pedig a $B = 0$ megszorítást jelenti, úgyhogy az $a(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$a(\eta) \quad = \quad \begin{cases} A\mathrm{sh}\eta + C(\mathrm{ch}\eta - 1), & \text{ha} \quad k=-1 \\ \frac{1}{2}C\eta^2 + A\eta, & \text{ha} \quad k=0 \\ A\sin\eta - C(\cos\eta - 1), & \text{ha} \quad k=+1 \end{cases} . \tag{2.4.19}$$

Most van azonban egy további kezdeti feltételünk is. Nevezetesen a (2.4.5) egyenletből $\eta \to 0$ esetben $\epsilon a^3 \to$áll. és $a \to 0$ felhasználásával $a'(\eta = 0) = 0$ következik, ami k értékétől függetlenül azt vonja maga után, hogy $A = 0$. A porszerű anyag által uralt homogén és izotróp Világegyetemben tehát

$$a(\eta) \quad = \quad a_m \begin{cases} (\mathrm{ch}\eta - 1), & \text{ha} \quad k=-1 \\ \frac{1}{2}\eta^2, & \text{ha} \quad k=0 \\ (1 - \cos\eta), & \text{ha} \quad k=+1 \end{cases} , \tag{2.4.20}$$

ahol $a_m = C$ integrációs állandó. Por által uralt Világegyetemben ismét $0 \leq \eta < \infty$, ha $k = 0, \ -1$, viszont zárt Világegyetem ($k = +1$) esetén $0 \leq \eta \leq 2\pi$, mert $\eta = 2\pi$ esetén a Világegyetem összezuhan, $a(\eta = 2\pi) = 0$. A téridő görbületére

$$R \quad = \quad \begin{cases} \frac{-6}{a_m^2(\mathrm{ch}\eta - 1)^3}, & 0 \leq \eta < \infty, \quad \text{ha} \quad k=-1 \\ \frac{-48}{a_m^2\eta^6}, & 0 \leq \eta < \infty, \quad \text{ha} \quad k=0 \\ \frac{-6}{a_m^2(1-\cos\eta)^3}, & 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad \text{ha} \quad k=+1 \end{cases} \tag{2.4.21}$$

adódik. Mindhárom térgeometria esetén $\eta = 0$ szingularitás, a téridő görbülete $R \to -\infty$, zárt tér esetén $\eta = 2\pi$ is szingularitás.

Por uralta, síkgeometriájú Világegyetemben a fizikai és a konform idő kapcsolata $t = \int_0^\eta a(\eta')d\eta' = a_m\eta^3/6$, azaz $\eta = (6t/a_m)^{1/3}$, a skálafaktor

$$a \quad \propto \quad \eta^2 \propto t^{2/3}, \tag{2.4.22}$$

a Hubble-paraméter

$$H \quad = \quad \frac{a'}{a^2} = \frac{4}{a_m\eta^3} = \frac{2}{3t} \tag{2.4.23}$$

és az energiasűrűségre

$$\epsilon_m \quad = \quad \frac{3}{8\pi G}H^2 = \frac{6}{\pi G a_m^2 \eta^6} \propto a^{-3} \tag{2.4.24}$$

adódik.

2.4.4 Sugárzás és por keverékét tartalmazó Világegyetem

Vizsgáljuk most meg azt az esetet, **amikor a Világegyetemben sugárzás és por keveréke van jelen.** A sugárzás energiasűrűsége a skálaparaméterrel a^{-4} szerint, a (porszerű) anyagé pedig a^{-3} szerint változik. Ezért léteznie kell egy pillanatnak, amikor $\epsilon_r = \epsilon_m \equiv \epsilon_{eq}/2$, azaz a sugárzás és az anyag energiája megegyezik, legyen ekkor a skálaparamáter értéke a_{eq}. A teljes energiasűrűség - a sugárzás és a por skálázását figyelembe véve - az alábbi alakba írható:

$$\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_m = \frac{\epsilon_{eq}}{2}\left(\frac{a_{eq}^4}{a^4} + \frac{a_{eq}^3}{a^3}\right). \tag{2.4.25}$$

Ekkor a (2.4.6) egyenlet jobb oldalán

$$\epsilon - 3p = [\epsilon_r - 3(\epsilon_r/3)] + \epsilon_m = \frac{\epsilon_{eq}}{2}\frac{a_{eq}^3}{a^3} \tag{2.4.26}$$

szerepel, mint szorzótényező, úgyhogy lapos Világegyetemben az Einstein-egyenlet spúrja

$$a'' = \frac{2\pi G}{3}\epsilon_{eq}a_{eq}^3. \tag{2.4.27}$$

Ennek az $a(\eta = 0) = 0$ kezdőfeltételhez tartozó megoldása

$$a(\eta) = \frac{\pi G}{3}\epsilon_{eq}a_{eq}^3\eta^2 + B\eta, \tag{2.4.28}$$

ahol B integrációs állandó. A B állandót a (2.4.5) egyenletből határozzuk meg. Helyettesítsük be ide az energiasűrűség (2.4.25) skálázását és a skálaparaméter (2.4.28) η-függését,

$$\begin{aligned}(a')^2 &= \frac{4\pi G}{3}\epsilon_{eq}\left(\frac{a_{eq}^4}{a^4} + \frac{a_{eq}^3}{a^3}\right)a^4 \\ &= \frac{4\pi G}{3}\epsilon_{eq}a_{eq}^3(a_{eq} + a) \\ &= \frac{4\pi G}{3}\epsilon_{eq}a_{eq}^3\left(a_{eq} + \frac{\pi G}{3}\epsilon_{eq}a_{eq}^3\eta^2 + B\eta\right),\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

ahonnan $\eta = 0$ esetén

$$B = (a')(\eta = 0) = 2a_{eq}\left(\frac{\pi G\epsilon_{eq}a_{eq}^2}{3}\right)^{1/2} \equiv \frac{2a_{eq}}{\eta_*} \tag{2.4.30}$$

adódik, ahol $\eta_* = (\pi G\epsilon_{eq}a_{eq}^2/3)^{-1/2}$. A skálaparaméter η-függése tehát

$$a(\eta) = a_{eq}\left(\frac{\eta^2}{\eta_*^2} + \frac{2\eta}{\eta_*}\right) \tag{2.4.31}$$

alakba írható. Jelölje η_{eq} azt a konform időt, amikor bekövetkezik, hogy a sugárzás és a por energiasűrűsége megegyezik, $a(\eta_{eq}) = a_{eq}$; ebből az egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\eta_* = \frac{\eta_{eq}}{\sqrt{2} - 1}. \tag{2.4.32}$$

Ha $0 \leq \eta \ll \eta_{eq}$, akkor a Világegyetemben a sugárzás dominál és $a \propto \eta$; ha $\eta \gg \eta_{eq}$, akkor pedig a por dominál és $a \propto \eta^2$.

Sík térgeometriájú, sugárzás és por homogén keveréke által uralt Világegyetemben a téridő görbülete

$$R = -\frac{6a''}{a^3} = -\frac{12\eta_*^4}{a_{eq}^2(\eta^2 + 2\eta_*\eta)^3}, \tag{2.4.33}$$

és ennek $\eta \to 0$ esetén szingularitása van, az $\eta \to \infty$ határesetben pedig a téridő görbülete zérushoz tart. Természetesen ebben az esetben a tér görbülete mindvégig $K = 0$ az evolúció során.

2.4.5 Sugárzás, por és sötét energia keverékét tartalmazó Világegyetem

Az eddigi példáink nem voltak realisztikus modelljei a Világegyetemünknek. Realisztikusabb, de még mindig nagyon leegyszerűsített az a homogén, izotróp modell, amelyben azt feltételezzük, hogy a Világegyetemben sugárzás, por (barionikus és sötét anyag) és sötét energia kölcsön nem ható keveréke van jelen. Ekkor az ϵ teljes energiasűrűség a keverék egyes X komponensei ϵ_X energiasűrűségeinek az összege, $\epsilon = \sum_X \epsilon_X$, a teljes p nyomás pedig az egyes p_X parciális nyomások összege, $p = \sum_X p_X$. A keverék egyes komponensei $p_X = w_X \epsilon_X$ állapotegyenletű ideális folyadékok, amelyek energiasűrűsége az időben változó $a(t)$ skálafaktorral

$$\epsilon_X(t) \sim [a(t)]^{-3(1+w_X)} \tag{2.4.34}$$

szerint változik. A (2.3.13) Friedmann-egyenlet most

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\epsilon = \frac{8\pi G}{3}\sum_X \epsilon_X \tag{2.4.35}$$

alakot ölt. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a kritikus energiasűrűség jelenlegi $\epsilon_{\rm kr}(t_0)$ értékével,

$$\frac{H^2}{\epsilon_{\rm kr}(t_0)} = \frac{8\pi G}{3}\sum_X \frac{\epsilon_X(t)}{\epsilon_X(t_0)}\frac{\epsilon_X(t_0)}{\epsilon_{\rm kr}(t_0)}, \tag{2.4.36}$$

ahonnan

$$H^2 = \frac{8\pi G\epsilon_{\rm kr}(t_0)}{3}\sum_X \Omega_{X,0}\frac{\epsilon_X(t)}{\epsilon_X(t_0)} \tag{2.4.37}$$

adódik, ahol bevezettük a keverék egyes komponenseihez tartozó $\Omega_{X,0}$ kozmológiai paramétereket. Felhasználva az energiasűrűségek (2.4.34) skálázását, írhatjuk, hogy

$$\frac{\epsilon_X(t)}{\epsilon_X(t_0)} = \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3(1+w_X)}, \tag{2.4.38}$$

ahol $a_0 = a(t_0)$. Használjuk fel továbbá, hogy $\frac{8\pi G\epsilon_{\rm kr}(t_0)}{3} = H_0^2$, ahol H_0 a Hubble-paraméter jelenlegi értéke. Mivel $H = \dot{a}/a$,

$$\left(\frac{\dot{a}}{H_0 a}\right)^2 = \sum_X \Omega_{X,0}\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3(1+w_X)}. \tag{2.4.39}$$

Vezessük be a t idő helyett a $\bar{\eta}$ változót, $H_0 a^{-1} dt = d\eta$ relációval. Ekkor a (2.4.37) egyenlet

$$\left(\frac{da}{d\bar{\eta}}\right)^2 \frac{1}{a^4} = \sum_X \Omega_{X,0} \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3(1+w_X)} \tag{2.4.40}$$

alakot ölt. Legyen $a_0 = 1$, használjuk fel, hogy $w_r = 1/3$ a sugárzás és $w_m = 0$ a por esetén, továbbá tegyük fel, hogy a sötét energiát $w_\Lambda = -1$ paraméterű ideális folyadéknak tekintjük. Szorozzuk a (2.4.40) egyenlet mindkét oldalát a^4-nel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{da}{d\bar{\eta}}\right)^2 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} a + \Omega_{\Lambda,0} a^4, \tag{2.4.41}$$

ahol $\Omega_{r,0} \approx 0,0005$ az elektromágneses sugárzás, $\Omega_{m,0} \approx 0,27$ a barionikus és a sötét anyag és $\Omega_\Lambda \approx 0,73$ a sötét energia hányada a jelenlegi kritikus energiasűrűségben. Talán még többet mond, ha a Világegyetem jelenlegi korában mérjük a fizikai időt, $\tau = t/H_0^{-1} = H_0 t$,

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = \Omega_{r,0} \frac{1}{a^2} + \Omega_{m,0} \frac{1}{a} + \Omega_{\Lambda,0} a^2. \tag{2.4.42}$$

Ez az egyenlet alkalmas rá, hogy $a(0) = 0$ kezdőfeltétellel keressük a megoldás $\frac{da}{d\tau}|_{t=0} > 0$ ágát. A megoldás három jellemző szakaszt tartalmaz, a sugárzás, a por és a sötét energia uralta szakaszokat. Láthatjuk, hogy $a \approx 0$ esetén közelítőleg

$$\frac{da}{d\tau} \approx \sqrt{\Omega_{r,0}} \frac{1}{a}, \tag{2.4.43}$$

ahonnan $a \propto \tau^{1/2}$ adódik, ami a sugárzás uralta Világegyetem jellemzője. Ha a aszimptotikusan nagy, akkor közelítőleg

$$\frac{da}{d\tau} \approx \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} a, \tag{2.4.44}$$

ahonnan $a \propto e^{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\tau}$ adódik, azaz amikor a Világegyetemet már a sötét energia fogja uralni, akkor a Világegyetem exponenciálisan fog tágulni.

2.5 A de Sitter-téridő

Az Einstein-egyenletek, ill. a Friedmann-egyenletek legnagyobb fokú szimmetriával rendelkező megoldásai azok, amelyek homogén és izotróp téridőt írnak le. Ezek nemcsak a térbeli eltolásokkal és forgatásokkal szemben, hanem a téridőbeli eltolásokkal és elforgatásokkal szemben is invariáns Világegyetemet írnak le. Ilyenkor a téridő R invariáns görbülete állandó. A **Minkowski-téridő** is ilyen megoldás, amely üres tér (és zérus kozmológiai állandó) esetén adódik, amikor $T^\alpha_\beta = 0$, és így nyilvánvalóan az invariáns görbület zérus, $R = 0$. A téridő legnyilvánvalóbb koordinátázása, amikor a rétegzéshez használt térszerű, ugyancsak zérus görbületű hiperfelületeken (x, y, z) Descartes-koordinátákat vezetünk be:

$$ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{2.5.1}$$

Természetesen, a 3-dimenziós térben használhatunk (r, θ, φ) gömbi polárkoordinátákat is, $z = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ definícióval. Ilyen koordinátázás esetén a metrika

$$ds^2 = dt^2 - [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] = dt^2 - (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \tag{2.5.2}$$

alakot ölt, ahol a radiális koordináta $0 < r < \infty$, $0 < \theta < \pi$ és $0 < \varphi < 2\pi$. (Az $r = 0$ és $\sin\theta = 0$ koordináta-szingularitások. A Minkowski-téridőt nem lehet egyetlen ilyen koordinátarendszerrel lefedni, legalább 2 ilyen koordinátakörnyezet szükséges a teljes lefedéshez.) Egy másik lehetőség, hogy retardált és avanzsált nullkoordinátákat használunk, ezek rendre $v = t + r$ és $w = t - r$. Ekkor a $v =$áll. és a $w =$áll. hiperfelületek ,,képe" a (t, r) félsíkon $\pm 45^o$-os meredekségű egyenesek, amelyek minden pontja 2-dimenziós, r sugarú gömbfelületnek felel meg. Ezek rendre az origóba radiálisan befelé ($v =$áll.), ill. az origóból radiálisan kifelé futó ($w =$áll.) gömbhullámok fénysebességgel mozgó fázisfelületei. A nullkoordináták segítségével a metrika

$$ds^2 \quad = \quad dv\ dw - \frac{1}{4}(v - w)^2 d\Omega^2. \tag{2.5.3}$$

A Minkowski-téridő fontos jellemzője, hogy geodetikusan teljes, azaz bármely 2 pontjához egyértelműen létezik olyan geodetikus, amely összeköti ezt a 2 pontot.

A de Sitter-téridő állandó, $R < 0$ negatív görbületű téridő, amely fontos szerepet játszik a felfúvódó Világegyetem modelljének értelmezése során: a felfúvódási szakaszban a téridő jó közelítéssel de Sitter-téridőnek tekinthető. Másrészt a téridő aszimptotikusan szintén a de Sitter-téridőhöz fog közelíteni, ha a Világegyetemet az a sötét energia fogja uralni, ami ma a Világegyetem anyagának döntő többségét, kb. 70 %-át teszi ki. A kozmológia szempontjából nem érdektelen tehát a de Sitter-téridő tanulmányozása. A de Sitter-téridő maximális szimmetriájú, $R < 0$ invariáns görbületű téridő, a *téridő* homogén és izotróp, azaz rendelkezik az $R = 0$ invariáns görbületű Minkowski-téridő 10 szimmetriájával. Ennek a magasfokú szimmetriának az a következménye, hogy a téridő többféleképpen is rétegezhető térszerű hiperfelületekkel. A rétegzéshez választott térszerű hiperfelületek lehetnek zérus, pozitív, ill. negatív görbületű hiperfelületek. A különböző választások a téridő különböző koordinátázásának felelnek meg. Minden ilyen rétegzés és koordinátázás azonban egyúttal egy döntés is, hogy mely megfigyelőket tekintünk együtt mozgó megfigyelőknek, és hogy milyen időparamétert használunk, mint ezen megfigyelők sajátidejét. Ezért az egyes rétegzések különböző Világegyetem-modelleknek felelnek meg.

A 4-dimenziós de Sitter-téridő nem képzelhető el, mint az 5-dimenziós euklideszi térbe beágyazott felület. Ebben hasonlít a Bolyai-Lobacsevszkij-féle hiperbolikus térhez. Ugyanakkor a de Sitter-téridő beágyazható az eggyel magasabb dimenziós Minkowski-térbe. Úgy képzelhető el, mint a

$$-v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad = \quad \alpha^2 \tag{2.5.4}$$

egyenletű hiperboloid felülete, amely a

$$ds^2 \quad = \quad dv^2 - dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.5.5}$$

Minkowski-metrikájú 5-dimenziós R^5 térbe van beágyazva. A hiperboloidon bevezethetjük a $(t, \chi, \theta, \varphi)$ koordinátákat a

$$\begin{aligned} &v = \alpha \mathrm{sh}(\alpha^{-1}t), \quad w = \alpha \mathrm{ch}(\alpha^{-1}t)\cos\chi, \\ &x = \alpha \mathrm{ch}(\alpha^{-1}t)\sin\chi\ \cos\theta, \quad y = \alpha \mathrm{ch}(\alpha^{-1}t)\sin\chi\ \sin\theta\ \cos\varphi, \\ &z = \alpha \mathrm{ch}(\alpha^{-1}t)\sin\chi\ \sin\theta\ \sin\varphi \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

összefüggésekkel. Ekkor a metrika a

$$ds^2 \quad = \quad dt^2 - \alpha^2 \mathrm{ch}^2(\alpha^{-1}t)(d\chi^2 + \sin^2\chi\ d\Omega^2) \tag{2.5.7}$$

alakot ölti. A metrika koordináta-szingularitást mutat a $\chi = 0$ és $\chi = \pi$, ill. a $\theta = 0$ és $\theta = \pi$ pontokban. Ezeket a pontokat leszámítva a $(-\infty < t < \infty,\ 0 \leq \chi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ polárkoordinátarendszer lefedi a teljes téridőt. A $t =$áll. metszetek állandó pozitív görbületű gömbfelületek. Ebben a koordinátarendszerben a téridő rétegzése ezekkel a gömbfelületekkel történik.

A helyzetet a 2-dimenziós de Sitter-térnek 3-dimenziós Minkowski-térbe történő beágyazása szemlélteti. Ekkor a 2-dimenziós de Sitter-tér egy a fénykúpon kívül eső, a 3-dimenziós Minkowski-tér „időtengelye", mint szimmetriatengely körül elhelyezkedő „hiperboloid". Pozitív görbületű hipersíkokkal történő rétegzésnek az felel meg, hogy a Minkowski-tér „időtengelyére" merőleges síkokkal elmetsszük a hiperboloidot, a metszésvonalak körök, vagyis pozitív görbületű „terek". A Minkowski-tér időtengelyét tartalmazó (e tengely körüli elforgatással egymásból nyerhető) síkoknak és a hiperboloidnak a metszésvonalai pedig a 2-dimenziós de Sitter-térben az izotróp megfigyelők végtelenből végtelenbe futó világvonalai, adott térkoordinátájú vonalak. Megjegyezzük összehasonlításként, hogy a 2-dimenziós hiperbolikus teret a 3-dimenziós Minkowski-térbe ágyazott olyan („időtengely" körüli) forgáshiperboloid szemlélteti, amely viszont teljes egészében a (pl. jövőbeli) fénykúpon belül helyezkedik el.

A hiperboloidon bevezethetünk másik koordinátarendszert is (más az időparaméter definíciója és másak a rájuk ortogonális rétegző hiperfelületek):

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \alpha \ln \frac{v+w}{\alpha}, \quad \bar{x} = \alpha \ln \frac{x}{v+w}, \\ \bar{y} &= \alpha \ln \frac{y}{v+w}, \quad \bar{z} = \alpha \ln \frac{z}{v+w}. \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Ezekben a koordinátákban a de Sitter-téridő metrikája

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - e^{(2\alpha^{-1}\bar{t})}(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2). \tag{2.5.9}$$

Ezek a koordináták nincsenek értelmezve $v + w \leq 0$ esetén, ezért ezzel a koordinátakörnyezettel nem fedhető le az egész de Sitter-téridő, hanem annak csak a $v+w > 0$ „fele". A rétegző hiperfelületek most az állandó $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ koordinátájú $\bar{t}$-koordinátavonalakra merőleges, zérus görbületű, 3-dimenziós, térszerű hiperfelületek. Hasonlóan, negatív görbületű térszerű felületekkel is lehetséges a de Sitter-tér rétegezése. A különböző koordinátázások közti megfeleltetések természetesen megtalálhatók az átfedő értelmezési tartományokon.

Most belátjuk, hogy a de Sitter-téridőt kapjuk a Friedmann-egyenletek megoldásaként, ha pozitív $\Lambda > 0$ kozmológiai állandójú, más anyagtól mentes Világegyetemet képzelünk el, vagy - ami ezzel ekvivalens - azt tesszük fel, hogy a Világegyetemet olyan ideális folyadék tölti ki, amelynek az állapotegyenlete $p = -\epsilon$ (azaz $w = -1$). Ekkor, mint korábban beláttuk, az energiasűrűség $\epsilon =$áll. Mivel ekkor $\epsilon + 3p = -2\epsilon$ és bevezethetjük a

$$H_\Lambda^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} > 0 \tag{2.5.10}$$

állandót ($H_\Lambda^2 \leftrightarrow \Lambda/3$), a (2.3.14) Friedmann-egyenlet

$$\ddot{a} = H_\Lambda^2 a \tag{2.5.11}$$

alakot ölt. Ennek általános megoldásai

$$a(t) = Ae^{H_\Lambda t} + Be^{-H_\Lambda t} \tag{2.5.12}$$

alakúak. A (2.3.13) Friedmann-egyenletet átírhatjuk

$$\dot{a}^2 = H_\Lambda^2 a^2 - k \tag{2.5.13}$$

alakba. Innen, ha behelyettesítjük az általános megoldás alakját, a

$$4H_\Lambda^2 AB = k \tag{2.5.14}$$

feltételt kapjuk az A és B integrációs állandókra. Ha a rétegezés **lapos geometriájú** ($k = 0$) térszerű hiperfelületek seregével történik, akkor az A és B állandók egyike zérus kell legyen. Az $A \neq 0,\ B = 0$ választás táguló Világegyetemet ír le. Az A paraméter értékének megválasztása a $t = 0$ időpillanat megválasztásának felel meg. Ekkor

$$a(t) = H_\Lambda^{-1} e^{H_\Lambda t}, \tag{2.5.15}$$

ahol az $A = H_\Lambda^{-1}$ választással éltünk. (Megjegyzem, hogy a fordított $A = 0,\ B \neq 0$ választás összehúzódó Világegyetem modellje lehetne.) A $k = \pm 1$ esetekben, amikor a rétegzés pozitív, ill. negatív görbületű térszerű hiperfelületekkel történik, választhatjuk úgy a $t = 0$ időpillanatot, hogy $|A| = |B|$ teljesüljön. Ekkor $A = \pm B = 1/(2H_\Lambda)$ és

$$a(t) = \frac{1}{2H_\Lambda}(e^{H_\Lambda t} \pm e^{-H_\Lambda t}) = H_\Lambda^{-1} \begin{cases} \mathrm{ch}(\Lambda t), & \text{ha} \quad k = +1 \\ \mathrm{sh}(\Lambda t), & \text{ha} \quad k = -1 \end{cases} \tag{2.5.16}$$

adódik. A de Sitter-téridőben az invariáns ívelemnégyzet tehát

$$ds^2 = dt^2 - H_\Lambda^{-2} \begin{pmatrix} \mathrm{sh}^2(H_\Lambda t) \\ e^{2H_\Lambda t} \\ \mathrm{ch}^2(H_\Lambda t) \end{pmatrix} \left[d\chi^2 + \begin{pmatrix} \mathrm{sh}^2\chi \\ \chi^2 \\ \mathrm{ch}^2\chi \end{pmatrix} d\Omega^2 \right], \text{ ha } \begin{pmatrix} k = -1 \\ k = 0 \\ k = +1 \end{pmatrix} \tag{2.5.17}$$

alakokban írható fel. Látjuk, hogy a fentebbi α paraméter szerepét H_Λ játssza. Azzal ellentétben, amikor a Világegyetemben pozitív nyomású anyag az uralkodó, itt most a $k = 0, \pm 1$ esetek csupán a koordinátarendszer különböző megválasztását jelentik, nem pedig különböző fizikai tartalmat. Az egyes esetekben a (χ, t) koordináták a

$$\begin{array}{lll} 0 \leq \chi < \infty, & 0 \leq t < \infty, & \text{ha } k = -1 \\ 0 \leq \chi < \infty, & -\infty < t < \infty, & \text{ha } k = 0 \\ 0 \leq \chi \leq \pi, & -\infty < t < \infty, & \text{ha } k = +1 \end{array} \tag{2.5.18}$$

intervallumokat futják be. A skálaparaméter $a(t)$ a $k = 0$ és a $k = -1$ esetekben szigorúan monoton növekszik, míg a $k = +1$ esetben előbb szigorúan monoton csökken, majd - elérve egy minimális értéket - szigorúan monoton növekvővé válik. A $t \to \infty$ határesetben mindegyik koordinátázás aszimptotikusan az $a(t) \sim e^{H_\Lambda t}$ exponenciálisan növekvő skálaparamétert adja.

A téridő görbületére az egyes esetekben ugyanaz az érték adódik:

$$R = -6H_\Lambda^2 \left\{ \begin{array}{lll} 1 + \frac{\mathrm{ch}^2(H_\Lambda t) - 1}{\mathrm{sh}^2(H_\Lambda t)} = 2 & (0 \leq t < \infty), & \text{ha} \quad k = -1 \\ 2 & (-\infty < t < +\infty), & \text{ha} \quad k = 0 \\ 1 + \frac{\mathrm{sh}^2(H_\Lambda t) + 1}{\mathrm{ch}^2(H_\Lambda t)} = 2 & (-\infty < t < +\infty), & \text{ha} \quad k = +1 \end{array} \right\} = -12H_\Lambda^2. \tag{2.5.19}$$

A téridőnek nincsen valódi evolutiója, a görbülete mindvégig állandó.

A de Sitter-téridőben nincsen igazi, koordinátarendszertől független fejlődés. A koordinátarendszert jellemzi inkább, hogy hogyan változik a skálaparaméter, ill. hogy milyen jelentés adható a 3-dimenziós térnek és az időnek. A Minkowski-térrel ellentétben a de Sitter-térben nem létezik sztatikus koordinátarendszer. Ezért a kozmológiai megfontolásokban az az eset játszik szerepet, amikor a de Sitter-téridő időeltolási szimmetriája kicsit sérül az anyagterek és a metrika fluktuációi miatt. Ezek a de Sitter-térhez képesti perturbációk vezethetnek ahhoz, hogy a Világegyetem kikerüljön a de Sitter-állapotból.

Kezdetben a kozmológiai modellek kapcsán az az elgondolás fogalmazódott meg, hogy a Világegyetem állandó, amit az anyag (energia) időben állandó sűrűsége kell, hogy kifejezzen a modellekben. Albert Einstein eredetileg az Einstein-egyenletek sztatikus megoldását kereste. Friedmann munkája kapcsán azonban kiderült, hogy nincsen ilyen megoldás. Annak érdekében, hogy legyen, Einstein feltételezte, hogy a Világegyetemben jelen van egy állandó, homogén energiasűrűség, s ezért az Einstein-egyenleteket kiegészítette a kozmológiai taggal. Feltette, hogy a kozmológiai állandó értéke nagyon kicsi. A Hubble-törvény felfedezése (1929) után nyilvánvalóvá vált, hogy a sztatikus Világegyetem modellje tovább nem tartható, a Világegyetem tágul. Az állandó sűrűség biztosítása érdekében Einstein egy 1931-ből származó kéziratában felvetette az **állandósult Világegyetem modelljének** („steady state model") gondolatát, de – kortársait jóval megelőzve – el is vetette azt; vélhetően azért, mert fel kellett benne tételezni, hogy állandóan keletkezik „a semmiből új anyag" a Világegyetemben. Hasonló modell-feltevésekből kiindulva, később Thomas Gold és Hermann Bondi (1948), majd Fred Hoyle kidolgozták az állandósult Világegyetem modelljét. Ennek térideje a de Sitter-téridő $v + w > 0$ „fele". Ekkor a $k = 0$ esetnek megfelelő koordinátázás $\bar{t}$ időparamétere játssza a fizikai idő szerepét, az együtt mozgó anyag világvonalai a síkgeometriájú $\bar{t}$ hiperfelületekre merőleges időszerű geodetikusok ($\bar{t}$-vonalak). Bár ezek a geodetikusok a teljes de Sitter-téridőben teljesek, végtelenből végtelenbe futnak, a de Sitter-téridő $v + w > 0$ tartományában nem teljesek, azaz a „múltban" a $\bar{t}$ idő véges értékénél elérik a Világegyetem határát. Az állandó energiasűrűség csak úgy biztosítható a modellben, ha a tágulással párhuzamosan pontosan annyi új anyag keletkezik állandóan, hogy az kompenzálja a tágulás miatti sűrűségcsökkenést. A modell szerint ennek az anyagnak 1 protonból és 1 elektronból álló hidrogén atomok alakjában kell jelen lennie. Az egyes atomokat alkotó protonoknak és elektronoknak a vákuumból kellene keltődniük rendkívül kicsi rátával: kb. 1 atom/m^3/10^{9}év lenne a keletkezési sebesség. Ez a modell nem feltételezi, hogy a Világegyetem Ősrobbanásban keletkezett, mégis levezethető belőle a Világegyetem számos megfigyelt tulajdonsága. Az állandósult Világegyetem modellje nagyon meggyőzőnek és filozófiai szempontból is vonzónak tűnt, amíg a modellnek ellentmondó megfigyelési eredmények nem születtek. A távoli galaxisoknak a Mullard Rádióobszervatóriumban Sir Martin Ryle által végzett részletes leszámlálása szolgáltatta az első, a modellnek határozottan ellentmondó eredményt. A döntő bizonyítékot azonban az állandósult Világegyetem modellje ellen az szolgáltatta, amikor Arno Penzias és Robert W. Wilson 1964-ben megfigyelte a Világegyetemből minden irányból érkező mikrohullámú elektromágneses sugárzást. Voltaképpen George Gamow és Robert Dicke az 1940-es évek végén megjósoltak egy ilyen sugárzást az általuk Ősrobbanás elméletének („Big-Bang theory") nevezett modell keretében. Szerintük az Ősrobbanást egy kb. 4000 K hőmérsékletű fényfelvillanás kísérte, és ez a hőmérsékleti sugárzás aztán a Világegyetem tágulása során a mai napra lehűlt az abszolút zérushoz közeli hőmérsékletre a tágulást kísérő rendkívül nagy vöröseltolódás miatt. Amikor Penziasnak és Wilsonnak a kb. 2,725 K hőmérsékletű mikrohullámú kozmikus háttérsugárzásra vonatkozó megfigyelései cáfolhatatlan ténynek bizonyultak, Dicke rájött, hogy ez a sugárzás éppen az, amit ő és Gamow az Ősrobbanás elmélete keretében megjósoltak. 1978-ban Penzias és Wilson felfedezésükért Nobel-díjat kaptak.

2.6 Fényterjedés és horizontok

2.6.1 Fényszerű geodetikusok

A legtöbb információnk a Világegyetemből érkező fény megfigyeléséből származik, amit az utóbbi évszázadban jelentősen kiegészítettek a Röntgen- (X-ray), a rádiófrekvenciás és az infravörös spektrumtartományban végzett megfigyelések. Ezért alapvető fontosságú annak megértése, hogy hogyan terjed a fény a Világegyetemben. Az általános relativitáselmélet szerint a fénysugarak fényszerű geodetikusok a téridőben. A fényszerű geodetikusok mentén 2 infinitezimálisan közeli pont invariáns távolságának négyzete

$$ds^2 = 0. \tag{2.6.1}$$

Ez igaz a speciális relativitáselméletben, s így az általános relativitáselméletben is igaznak kell lennie minden lokális inerciarendszerben, de akkor minden vonatkoztatási rendszerben igaz, mert ds^2 invariáns a folytonos koordinátatranszformációkkal (diffeomorfizmusokkal) szemben. Homogén és izotróp Világegyetemben a térbeli koordinátarendszer origóját bárhol választhatjuk, és a radiális fénysugarakat érdemes vizsgálni. Szimmetriaokoknál fogva a $\theta, \varphi =$áll. görbék geodetikusok a téridőben. A radiális fénysugarak egyenlete különösen egyszerű, ha áttérünk úgynevezett **konform időkoordinátára**,

$$\eta(t) = \int \frac{dt}{a(t)}. \tag{2.6.2}$$

Ekkor a metrika

$$ds^2 = a^2(t)[d\eta^2 - d\chi^2 - \Phi^2(\chi)d\Omega^2] \tag{2.6.3}$$

alakot ölt, ahol χ az együtt mozgó koordináta. (Emlékezzünk, ez azt jelenti, hogy $\Delta\chi$ koordinátakülönbségnek $a(\eta)\Delta\chi$ fizikai távolság felel meg a térben radiális irányban.) Ezért a radiális fényszerű geodetikusok esetében ($\theta, \varphi =$áll., $d\Omega^2 = 0$) az invariáns ívelem négyzete

$$ds^2 = a^2(t)(d\eta^2 - d\chi^2) = 0. \tag{2.6.4}$$

Innen megkapjuk a fényszerű geodetikus egyenletét:

$$\eta = \pm\chi + \text{ const.} \tag{2.6.5}$$

A tetszőlegesen rögzített $\theta, \varphi =$áll. szögekhez tartozó (χ, η) síkon tehát a fénysugaraknak 45°-os egyenesek felelnek meg.

2.6.2 Részecske-horizont

Egy másik alapvető kérdés, hogy **„hová láthatunk el" a Világegyetemben, azaz hogy mekkora az észlelt Világegyetem.** Mivel semmilyen fizikai hatás (részecske, hullám) sem tud a vákuumbeli fénysebességnél gyorsabban terjedni, ezért léteznek horizontok, amelyek korlátot szabnak annak, hogy mekkora az egész Világegyetem megfigyelt része.

Az egyik ilyen horizont-fogalom a **részecske-horizont.** A Világegyetem korának t pillanatában adott együtt mozgó megfigyelő számára a részecske-horizont annak a tartománynak a határa, amelyen belüli pontokban történő eseményeket tudott csak a megfigyelő a Nagy Bumm és a t pillanat között kibocsátott jelekkel befolyásolni. Mindazokra

az eseményekre, amelyek a részecske-horizonton kívül történnek a t pillanatban, a megfigyelőnek nem lehetett fizikai befolyása. Legyen konform időben a Világegyetem kezdete η_i, és keressük a részecske-horizontot az η időpillanatban. Az együtt mozgó koordinátákban a maximális távolság, amit a fény meg tudott tenni az $\eta - \eta_i$ időtartam alatt,

$$\chi_p(\eta) \quad = \quad \eta - \eta_i = \int_{t_i}^{t} \frac{dt'}{a(t')}, \tag{2.6.6}$$

ahol t_i és t a kezdeti és a jelen időpillanat időkoordinátája az izotróp megfigyelők óráján. A tér tetszőleges pontjában álló (a táguló térrel együtt mozgó) megfigyelőnek $\chi_p(\eta)$ sugarú környezetében vannak azok a jelenbeli események, amelyekre a Nagy Bumm óta a megfigyelőnek fizikai ráhatása lehetett.

A részecske-horizontnak van egy másik (az előzővel egyenértékű) értelmezése. A $\chi_p(\eta)$ távolság egyúttal az a távolság, amelynél kisebb távolságokról eljuthatott a megfigyelőhöz fényjel a Nagy Bumm és az η pillanat között. A részecske-horizont tehát annak a tartománynak a határa, ameddig „ellát" a Világegyetemben a megfigyelő.

Ha a megfigyelési pont koordinátái $(\eta, \chi = 0)$, akkor mindaz, ami a $\chi = \chi_p(\eta)$ részecske-horizonton túl történik, nem állhat a megfigyelővel kauzális kapcsolatban. Ha a Világegyetemnek a vizsgált kozmológiai modellben van kezdete, akkor célszerű $t_i = \eta_i = 0$ választással élni. Ha ilyen nincsen, mint pl. a de Sitter-téridő esetén, akkor jogos t_i és η_i nullától különböző választása. A részecske-horizont fizikai távolságát a skálaparaméterrel történő szorzással kapjuk meg:

$$d_p(t) \quad = \quad a(t) \int_{t_i}^{t} \frac{dt'}{a(t')}. \tag{2.6.7}$$

Por uralta síkgeometriájú Világegyetemben $a(t) \propto t^{2/3}$, a részecske-horizont pedig $d_p(t) = t^{2/3} \int_0^t dt' (t')^{-2/3} = 3t$. Meg lehet mutatni, hogy por által uralt Világegyetemben a térbeli távolság négyzetének (2.2.17) képletében szereplő $\Phi(\chi)$ a részecske-horizonton a

$$\Phi(\chi_p) \quad = \quad \frac{2}{a_0 H_0 \Omega_0} \tag{2.6.8}$$

alakban fejezhető ki a skálafaktor, a Hubble-paraméter és a kozmológiai paraméter jelenlegi értékével.

Sugárzás uralta Világegyetemben $a(t) \propto t^{1/2}$ és a részecske-horizont $d_p(t) = t^{1/2} \int_0^t dt'$ $(t')^{-1/2} = 2t$.

2.6.3 Optikai horizont

Szokás **optikai horizontról** is beszélni. Addig, amíg a Világegyetem fejlődése során nem történik meg az elektronok és a protonok rekombinációja hidrogén-atomokká, addig a Világegyetem nem átlátszó. Amikor a rekombináció megtörtént, a Világegyetem skálafaktora kb. 1000-szer volt kisebb, mint ma. Legyen t_r a rekombináció pillanata (konform időben η_r). A rekombináció bekövetkezte óta terjedő fény együtt mozgó koordinátákban $\chi_{opt} = \eta - \eta_r$ távolságra, azaz a t időpillanatig csak a

$$d_{opt}(t) \quad = \quad a(\eta)(\eta - \eta_r) = a(t) \int_{t_r}^{t} \frac{dt'}{a(t')} \tag{2.6.9}$$

távolságra juthatott el a megfigyelőtől. Az a határ, ami a megfigyelőtől d_{opt} távolságra van, az optikai horizont. Itt érdemes megemlíteni, hogy az optikai horizont nem sokkal kisebb, mint a részecske-horizont. Ennek ellenére az optikai horizont és a részecske-horizont közötti események fontos információt hordoznak a Világegyetem fejlődésének korai szakaszáról.

Az optikai horizont egyúttal annak a tartománynak a határa a Világegyetemben, amelyen belülről a rekombináció óta kaphatott a megfigyelő információt. A megfigyelő az optikai horizontot „látja", amikor a CMB-t figyeli meg. Ugyanakkor az optikai horizont és a részecske-horizont közötti távolságokról is fontos információ származhat a rekombináció előtti Világegyetemről. Ehhez a a primordiális neutrinók és a primordiális gravitációs hullámok megfigyelése útján kaphatnánk információt. Ezek ugyanis már a fotonok előtt lecsatolódtak az anyagról.

Por uralta síkgeometriájú Világegyetemben $a(t) \propto t^{2/3}$, a részecske-horizont pedig $d_p(t) = t^{2/3} \int_0^t dt'(t')^{-2/3} = 3t$. A Világegyetemben a sugárzás lecsatolódása (η_r) óta a mostani η_0 ideig lényegében a por az uralkodó anyagösszetevő. Ezért

$$\begin{aligned} \eta_0 - \eta_r &\propto \int_{t_r}^{t_0} dt t^{-2/3} = 3(t_0^{1/3} - t_r^{1/3}), \\ \eta_0 &\propto 3t_0^{1/3}, \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

úgyhogy

$$\frac{\eta_r}{\eta_0} = 1 - \frac{\eta_0 - \eta_r}{\eta_0} = (t_r/t_0)^{1/3}. \tag{2.6.11}$$

Másrészt a megfigyelések alapján $a(t_r)/a(t_0) = (t_r/t_0)^{2/3} \approx 10^{-3}$, tehát $\eta_r/\eta_0 \approx 0,03$, ami azt jelenti, hogy az optikai horizont jelenlegi távolsága a részecske-horizont távolságának 97%-a. Az optikai horizont csak kb. 3%-kal van közelebb, mint a részecske-horizont.

2.6.4 Esemény-horizont

Az **esemény-horizont** bizonyos értelemben a részecske-horizont komplemense. Azt mondja meg, hogy a jelenben a megfigyelőtől milyen távol van annak a tartománynak a határa, amelyen belülről elinduló fényjelek az idők végezetéig elérhetik a megfigyelőt (valamikor a jövőben). Tetszőleges megfigyelő részecske-horizontján belül vannak a 3-dimenziós tér (az η_i kezdeti konform időhöz tartozó rétegző térszerű hiperfelület) mindazon pontjai, amelyekből adott (η konform) pillanatban egy megfigyelő kaphat információt (fizikai jelet). Ezzel szemben tetszőleges megfigyelő esemény-horizontján kívül vannak a 3-dimenziós tér (az η_{max} végső konform időhöz tartozó rétegző térszerű hiperfelület) mindazon pontjai, amelyekből adott (η konform) pillanatban küldött jelek sosem fogják a megfigyelőt elérni. Itt η_{max} a Világegyetem fejlődésének végső pillanata konform időben kifejezve. Az esemény-horizonton kívüli pontok együtt mozgó koordinátáira $\chi > \chi_e(\eta)$ teljesül, ahol az esemény-horizont

$$\chi_e(\eta) = \eta_{max} - \eta. \tag{2.6.12}$$

Az esemény-horizont fizikai távolsága

$$d_e(t) = a(t) \int_t^{t_{max}} \frac{dt'}{a(t')}. \tag{2.6.13}$$

A Világegyetem fejlődése lehet az izotróp megfigyelők óráján véges vagy végtelen időtartamú. Véges esetben η_{max} mindig véges, ami $\eta_i = 0$ esetén mindig véges esemény-horizontot jelent. Zárt, lassuló Világegyetemben például t_{max} véges, mert végül a Világegyetem kollapszust szenved. Ekkor a részecske-horizont és az esemény-horizont is véges.

Ha a Világegyetem fejlődése $t_{max} \to \infty$ végtelen ideig tart, akkor η_{max} lehet véges vagy végtelen aszerint, hogy milyen a tágulás üteme. Lapos vagy nyílt, lassulva táguló Világegyetemben mind t_{max}, mind η_{max} végtelen, és ezért χ_e és d_e is az, úgyhogy ezekben az esetekben nem létezik esemény-horizont. Ha azonban a Világegyetem gyorsulva tágul, akkor η_{max} és a d_e-ben szereplő integrál véges, úgyhogy létezik véges esemény-horizont még a lapos vagy a nyílt Világegyetem esetén is. A felfúvódó Világegyetem modellje szempontjából fontos példa a lapos de Sitter-téridő esete, amikor

$$\eta_e(t) = \int_t^\infty dt' e^{-H_\Lambda t'} = H_\Lambda^{-1} e^{-H_\Lambda t} \tag{2.6.14}$$

és

$$d_e(t) = e^{H_\Lambda t} \eta_e(t) = H_\Lambda^{-1}. \tag{2.6.15}$$

Ez azt jelenti, hogy egy tetszőleges megfigyelő sohasem fogja látni azokat az eseményeket, amelyek hozzá képest az esemény-horizontnál nagyobb távolságon történnek. Ezek az események ezért nem tudják befolyásolni a megfigyelő jövőjét. Mondhatjuk, hogy az esemény-horizonton kívüli események és a megfigyelő közti tér túl gyorsan tágul ahhoz, hogy a horizonton kívülről fizikai jel érhesse el a megfigyelőt. Szokás ilyenkor a tágulást szuperluminálisnak (a fénysebességet meghaladónak) nevezni.

2.6.5 Hubble-horizont

Szokás továbbá még használni a **Hubble (v. görbületi) horizont** fogalmát, amin a H^{-1} távolságskálát értjük. (Ha a fénysebességet explicit módon kiírjuk, akkor cH^{-1}.) Ez tulajdonképpen a téridő 4-es görbületi sugarának nagyságrendje, úgyhogy H^{-1} meghatározza a lokális inerciarendszerek méretét. A lokális inerciarendszer egy téridő-pont invariáns ívhosszban mért olyan Δs sugarú környezetére terjedhet ki, amelyen belül a görbület elhanyagolható, azaz amelyre $\Delta s \ll H^{-1}$. Ebből is látszik, hogy – bár horizontnak nevezik, a Hubble-horizont nem kinematikai és kauzális megfontolások alapján van értelmezve, mint a részecske-horizont. Ugyanakkor dinamikailag fontos szerepet játszik; egyrészt meghatározza a Világegyetem tágulásának ütemét (a tágulás karaterisztikus idejét), másrészről fellép a kozmológiai perturbációk mozgásegyenletében, mint ezt később látni fogjuk.

A (2.3.14) Friedmann-egyenletből látjuk, hogy a skálaparaméter, azaz a Világegyetem tágulása aszerint lassul, ill. gyorsul, hogy teljesül-e az $\epsilon + 3p > 0$ **erős energiafeltétel** avagy nem. Ha teljesül, akkor általában a részecske-horizont és a Hubble-horizont azonos nagyságrendűek. Ha nem teljesül az erős energiafeltétel, akkor jelentős különbség lehet a részecske-horizont és a Hubble-horizont között. Pl. ez az eset, ha a síkgeometriájú 3-dimenziós hiperfelületekkel rétegezett de Sitter-téridőt vizsgáljuk ($p = -\epsilon$). Ekkor a skálaparaméter, $a(t) \propto e^{H_\Lambda t}$ és a részecske-horizont exponenciálisan nő,

$$d_p(t) = e^{H_\Lambda t} \int_{t_i}^t e^{-H_\Lambda t} dt = H_\Lambda^{-1} (e^{H_\Lambda (t - t_i)} - 1). \tag{2.6.16}$$

Ha $t - t_i \gg H_\Lambda^{-1}$, akkor a részecske-horizont exponenciálisan nő, miközben a Hubble-horizont állandó marad.

2.7 Konform diagramok

A kozmológiai modellekhez tartozó téridő kauzális szerkezetének és végtelenbeli viselkedésének tanulmányozása céljából Roger Penrose a **konform diagramok** használatát javasolta. Idézzük fel a Robertson-Walker-metrika (2.4.2) alakját,

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - \Phi^2(\eta,\chi)d\Omega^2], \tag{2.7.1}$$

ahol az η konform idő és a χ együtt mozgó radiális koordináta értéke végtelen v. egyik oldalról végtelen intervallumot futhat be. Meg lehet azonban mutatni, hogy mindig létezik a metrikának olyan konform transzformációja, azaz a metrikus tenzort $g_{\alpha\beta} \to g'_{\alpha\beta} = \omega^2(\eta,\chi)g_{\alpha\beta}$ módon transzformáló $(\eta,\chi,\theta,\varphi) \to (\eta',\chi',\theta,\varphi)$ koordináta-transzformáció, amellyel az időbeli és térbeli végtelenek végesbe transzformálhatók. Az ilyen konform transzformáció megőrzi a metrika (2.7.1) alakját annyi eltéréssel, hogy az a skálafaktor χ-függést is nyerhet, $a^2(\eta,\chi)$. Tegyük fel, hogy végrehajtottunk egy ilyen transzformációt, és használjuk a továbbiakban a kapott új (η',χ') koordinátákat. Az egyszerűség kedvéért elhagyjuk róluk a vesszős jelölést.

A **konform diagram** egy olyan véges, 2-dimenziós ábra, amelyen a téridőt az (η,χ) koordináta-síkon szemléltetjük. Mivel a metrika (2.7.1) alakú, azért a fényszerű geodetikusoknak most is az $\eta = \pm\chi + \text{const.}$ 45°-os egyenesek felelnek meg. Az olyan téridők konform diagramjai pontosan megegyeznek, amelyek metrikája csak egy nem szinguláris konform transzformációban különbözik. A téridőt egyértelműen jellemzi a konform diagramjának az alakja és azon a szingularitások elhelyezkedése. A szingularitásoknak és a diagram határainak a helyzetét az $a(\eta,\chi)$ és a $\Phi(\eta,\chi)$ függvények határozzák meg. Az előfordulhat, hogy a különböző téridőknek azonos alakú a konform diagramjuk, de másak a szinguláris határaik.

Alább néhány példát nézünk végig különböző téridők konform diagramjaira.

2.7.1 Zárt, sugárzás, ill. por uralta Világegyetem

A Friedmann-egyenletek megoldásaként a zárt Világegyetem skálafaktora, ha a Világegyetemet sugárzás (r), ill. por (d) tölti ki,

$$a(\eta) = a_m \begin{cases} \sin\eta & \text{(r)} \\ (1-\cos\eta) & \text{(d)} \end{cases}, \tag{2.7.2}$$

a metrika pedig

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi d\Omega^2], \tag{2.7.3}$$

és a

$$\begin{cases} 0 \le \chi \le \pi, \quad 0 < \eta < \pi & \text{(r)} \\ 0 \le \chi \le \pi, \quad 0 < \eta < 2\pi & \text{(d)} \end{cases} \tag{2.7.4}$$

véges intervallumok teljesen lefedik az egész téridőt. Ezért ezekben az esetekben (η,χ) már alkalmas koordináták ahhoz, hogy a konform diagramot azonnal megrajzoljuk. A zárt, sugárzás uralta Világegyetem esetét a 1. ábra, a zárt, por uralta Világegyetem esetét pedig a 2. ábra mutatja.

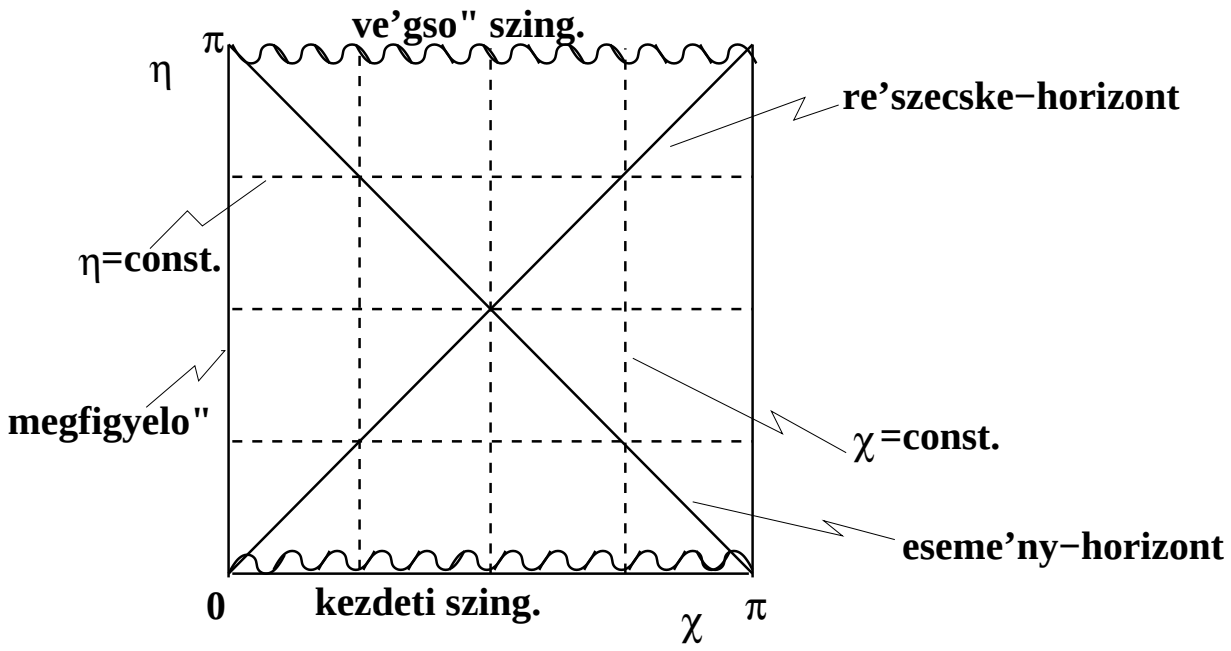

Figure 1: Zárt, sugárzás által uralt Világegyetem konform diagramja

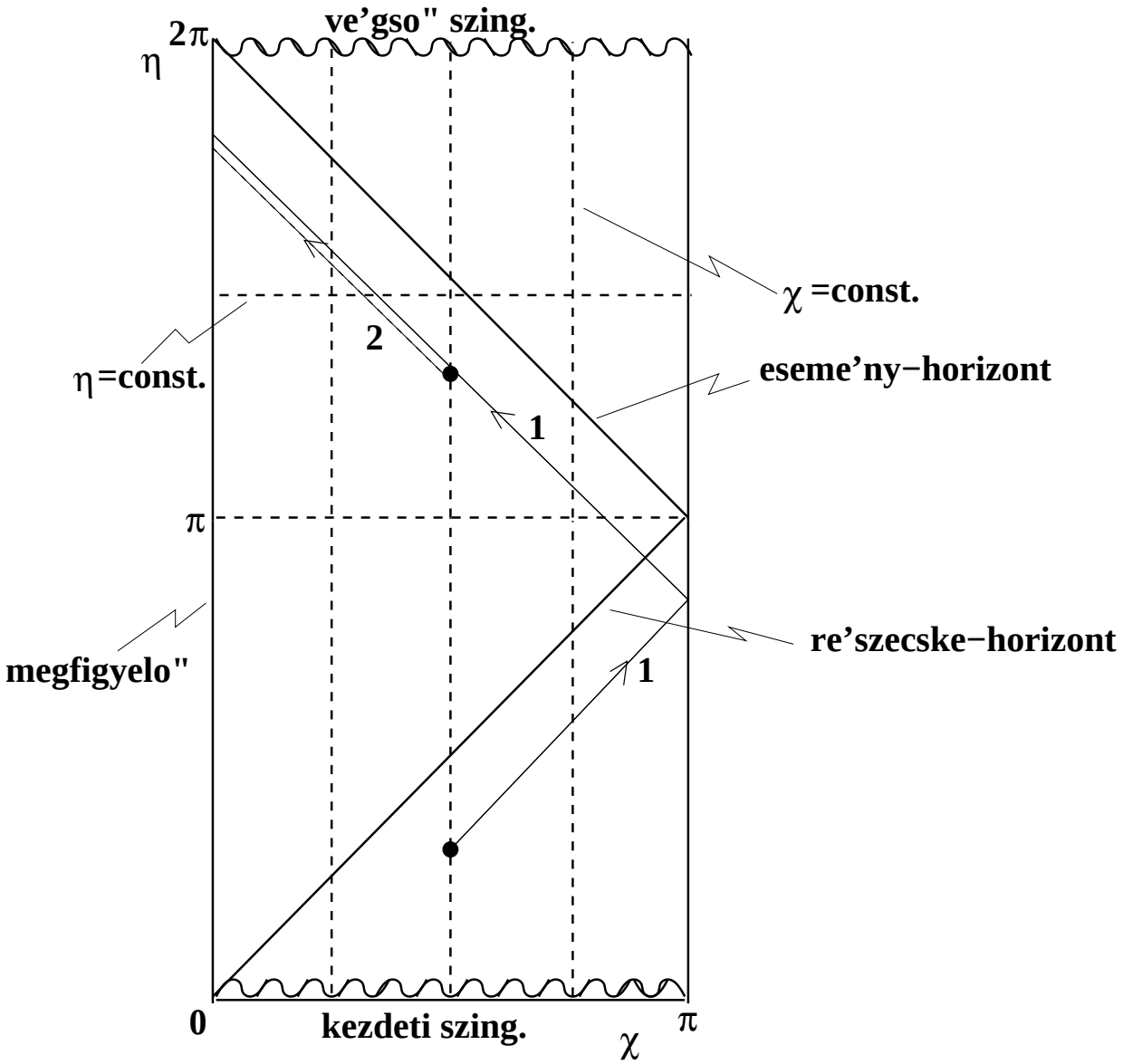

Figure 2: Zárt, por által uralt Világegyetem konform diagramja

A kezdeti pillanatot $\eta_i = 0$-nak választottuk. Mindkét diagramon az alsó és felső határok szingularitásnak felelnek meg, amikor zérussá válik a skálafaktor, ill. végtelenné válik az energiasűrűség és a téridő görbülete. A sugárzás, ill. a por által uralt Világegyetemben a skálafaktor rendre $\eta < \pi/2$, ill. $\eta < \pi$ esetén nő, majd a diagram másik felében, amikor $\eta > \pi/2$, ill. $\eta > \pi$, akkor csökken. A por uralta Világegyetemben η maximális értéke kétszerese annak, ami az η maximális értéke a sugárzás által uralt Világegyetem esetén. Ugyanakkor a χ-intervallum mindkét esetben azonos. Ennek a különbségnek a következtében másképpen alakul a részecske- és az esemény-horizont a két Világegyetemben. Az ábrákon feltüntettük a $\chi = 0$ pontban elhelyezkedő megfigyelő részecske-, és esemény-horizontját, amelyek egyenletei rendre $\chi_p(\eta) = \eta - \eta_i = \eta$, ill. $\chi_e(\eta) = \eta_{max} - \eta$. Amikor a sugárzás uralta Világegyetem az $\eta = \pi$ pillanatban kollapszust szenved, akkor a $\chi = 0$ pontban álló megfigyelő részecske-horizontja $\chi_p(\pi) = \pi$ lesz, azaz az egész Világegyetem láthatóvá válik a megfigyelő számára. A legtávolabbi $\chi = \pi$ pontból a végső pillanatban a megfigyelőhöz érkező fény információt hoz arról, hogy mi volt a Világegyetem állapota a kezdeti $\eta_i = 0$ pillanatban. Mivel $\eta_{max} = \pi$, minden η esetén létezik a megfigyelő számára a $\pi \leq \chi_e(\eta) = \pi - \eta > 0$ esemény-horizont. A por uralta Világegyetemben is az $\eta = \pi$ pillanatban az egész Világegyetem láthatóvá válik a $\chi = 0$-ban álló megfigyelő számára. Ez a pillanat azonban az, amikor a skálaparaméter maximális. Ezért a fénynek van elég ideje az $\eta_{max} = 2\pi$ pillanatig, hogy mégegyszer átszelje az egész Világegyetemet. A részecske- és az esemény-horizont egyenletéből az is látszik, hogy por uralta Világegyetemben részecske-horizont csak a tágulási szakaszban létezik, esemény-horizont pedig csak az összehúzódási szakaszban.

A $\chi = 0$ és $\chi = \pi$ pontok bármely pillanatban a térgeometriát jellemző 3-dimenziós hipergömb átellenes pólusai. A $\chi = 0$ pontból állandó θ, φ koordinátákkal indított fénysugár eléri a $\chi = \pi$ pontot. Koordinátarendszerünk azonban ebben a pontban szinguláris, viszont meg lehet mutatni egy másik, ebben az átellenes pólusban nem szinguláris koordináta-szelvényt használva, hogy a fény a $\chi = \pi$ pontban visszaverődik az $\theta' = \pi - \theta$, $\varphi' = \varphi + \pi$ irányban. Ezt az irányváltást azonban nem mutatja a konform diagram, mert azon a szögváltozók el vannak nyomva. A konform diagram minden pontja egy 2-dimenziós gömbfelület. Az elmondottak tükrében vizsgáljuk meg, hogyan lát a megfigyelő egy galaxist, amely a $\chi_g > 0$ helyen tartózkodik. Sugárzás uralta Világegyetemben csak akkor láthatja a megfigyelő a galaxist adott η pillanatban, ha $\chi_g < \chi_p(\eta)$, azaz a galaxis az η pillanathoz tartozó részecske-horizonton belül helyezkedik el. Ha ez így van, akkor a megfigyelő észlelheti a galaxist az onnan korábban a megfigyelő irányába kibocsátott fény beérkezése révén. Ugyanez vonatkozik a tágulási szakaszban a por uralta Világegyetemben a hasonló megfigyelésre. Minőségileg megváltozik azonban a helyzet a por uralta Világegyetemben, ha a megfigyelő az összehúzódás szakaszában észleli a galaxist. Ekkor nincsen részecske-horizont, a $\chi = 0$ megfigyelő $\eta > \pi$ pillanatban észleli a $\chi_g > 0$ galaxis feléje kibocsátott fényjelét, amely a 2-es fényszerű geodetikus mentén érkezik. Ugyanakkor azonban az átellenes irányban is látja a megfigyelő a galaxist azon fényjel révén, amelyet a galaxis jóval korábban a térnek a megfigyelővel átellenes pólusa felé sugárzott ki, és amely ott visszaverődve most az átellenes irányból érkezik a megfigyelőhöz az 1-es fényszerű geodetikus mentén.

2.7.2 de Sitter-Világegyetem(ek)

A de Sitter-téridő különböző rétegezései („foliations") nem csak azt jelentik, hogy a rétegzéshez használt térszerű hiperfelületek mások, hanem azt is, hogy másképpen van értelmezve a fizikai idő. Más-más térszerű hiperfelületekre ortogonális világvonalú izotróp megfigyelőket tekintünk együtt mozgó megfigyelőknek. Ezért a különböző rétegzéseknek megfelelő koordinátázások különböző Világegyetem-modelleknek felelnek meg. A modellek közti különbséget még jobban aláhúzza, hogy a használt koordinátarendszer zárt tér esetén

az egész téridőt lefedi, sík tér esetén csak a téridő ,,felét", hiperbolikus térgeometria esetén pedig csak egy az utóbbinál is szűkebb tartományát fedi le. Ezek a modellek minden esetben olyan Világegyetemet írnak le, amelyben $\Lambda > 0$ kozmológiai állandó (vagy a Λ kozmológiai állandóval modellezhető sötét anyag, vagy pl. egy skalármező felfúvódást okozó klasszikus kondenzátuma) van csak jelen.

- **Zárt Világegyetem.**

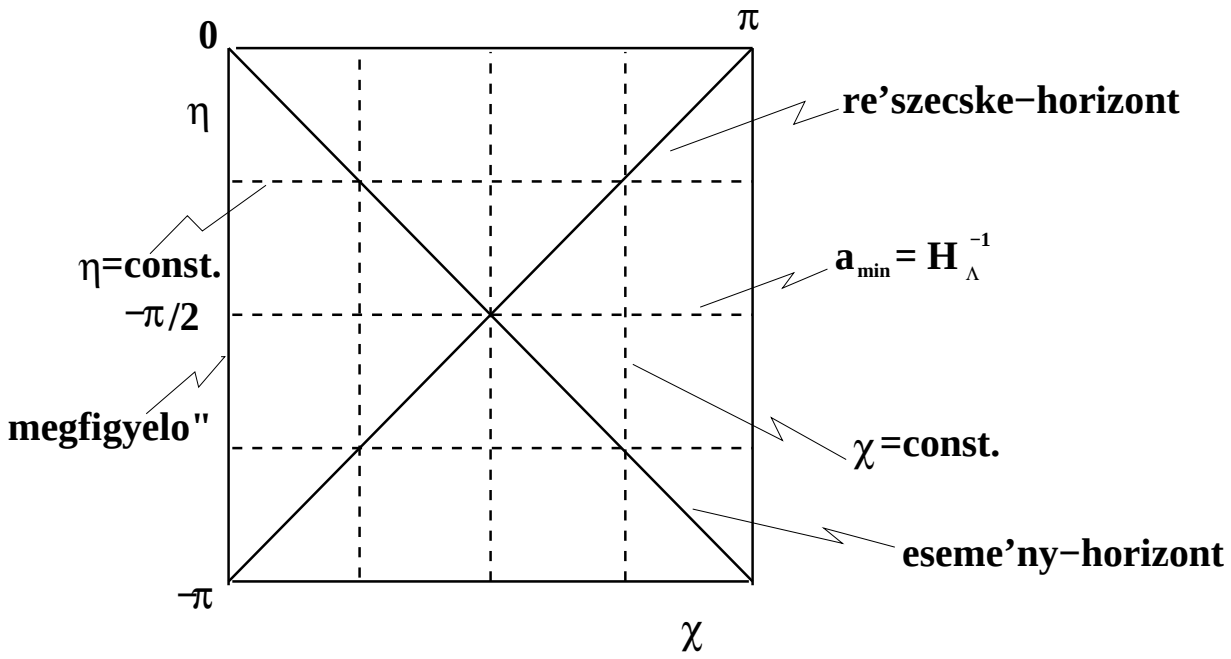

Figure 3: Zárt de Sitter-Világegyetem konform diagramja

A konform és a fizikai idő közti kapcsolat

$$\eta \;=\; H_\Lambda \int_{-\infty}^{t} \frac{dt}{\mathrm{ch}(H_\Lambda t)} = \mathrm{arc\,sin}[\mathrm{th}(H_\Lambda t)] - \frac{\pi}{2}, \tag{2.7.5}$$

ami $\mathrm{ch}(H_\Lambda t) = -(\sin\eta)^{-1}$ alakba is írható, úgyhogy a Robertson-Walker-metrika ebben az esetben

$$ds^2 \;=\; \frac{1}{H_\Lambda^2 \sin^2\eta}(d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi\; d\Omega^2) \tag{2.7.6}$$

alakot ölt, ahol $-\pi \leq \eta \leq 0$ és $0 \leq \chi \leq \pi$, azaz a Világegyetemet az (η, χ)-síkon közvetlenül (további változó-transzformáció nélkül) ábrázolhatjuk. Az $a = H_\Lambda^{-1}\mathrm{ch}(H_\Lambda t) = [-H_\Lambda \sin\eta]^{-1}$ skálaparaméter $\eta = -\pi/2$ esetén minimális, $a_{min} = H_\Lambda^{-1}$. Az ,,idők" kezdetén és ,,végezetén" a skálafaktor végtelen, de ez nem jelent fizikai szingularitást, mert az invariáns görbület állandó. Ez a szingularitás csupán koordináta-szingularitás. A zárt de Sitter-Világegyetem konform diagramja tulajdonképpen majdnem azonos a sugárzás uralta Világegyetem konform diagramjával, azzal a különbséggel, hogy az $\eta_i = -\pi$ és $\eta_{max} = 0$ esetekben nincsen fizikai szingularitás. A $\chi = 0$ pontban ülő megfigyelő számára mindig létezik részecske-horizont

és esemény-horizont is. (Mivel minden megfigyelő egyenértékű a homogenitás miatt, ezért ez az állítás minden együtt mozgó megfigyelőre igaz.)

A részecske-horizont $\chi_p(\eta) = \chi - \chi_i = \chi + \pi$, az esemény-horizont pedig $\chi_e(\eta) = \eta_{max} - \eta = -\eta$. Az esemény-horizont fizikai skálája $\eta \to 0$ esetén:

$$d_e(\eta \to 0) \quad = \quad \lim_{\eta\to 0} |-a(\eta)\eta| = \lim_{\eta\to 0} \frac{\eta}{H_\Lambda \sin\eta} = H_\Lambda^{-1}. \tag{2.7.7}$$

Másrészről viszont a Hubble-paraméter

$$H(\eta) \quad = \quad \frac{a'}{a^2} = -H_\Lambda \cos\eta, \tag{2.7.8}$$

ami $\eta \to 0$ esetén $H(\eta \to 0) \to -H_\Lambda$ határértékhez tart. Azt modhatjuk tehát, hogy zárt de Sitter-Világegyetemben a végtelen távoli jövőben az esemény-horizont fizikai skálája $|H^{-1}| = H_\Lambda^{-1}$, azaz a görbületi sugár. Érdemes ezt összehasonlítani a sugárzás uralta zárt Világegyetemmel, amikor $\chi_e(\eta) = \pi - \eta$, $a(\eta) = a_r \sin\eta$, $d_e(\eta) = (\pi - \eta)\sin\eta$, $H(\eta) = a_r^{-1}\cos\eta(\sin\eta)^{-2}$. A konform diagram felső szélén ($\eta = \pi$, azaz $t = 2a_r$) az esemény-horizont fizikai skálája nullához tart, ellentétben azzal, hogy zárt de Sitter-Világegyetemben a megfelelő határérték véges és nem zérus, $H(0) = -H_\Lambda$. (Vigyázat, bár $\eta_e(0) = 0$, az esemény-horizont $d_e(0)$ fizikai-távolságban véges!) Ugyanakkor zárt, sugárzás uralta Világegyetemben kezdetben ($\eta_i = 0$) a Hubble-paraméter végtelen, $\lim_{\eta\to 0} H(\eta) = \infty$, míg a zárt de Sitter-Világegyetemben kezdetben ($\eta_i = -\pi$) a Hubble-paraméter véges $\lim_{\eta\to -\pi} H(\eta) = H_\Lambda$, az esemény-horizont kezdeti fizikai távolsága pedig végtelen, $\lim_{\eta\to -\pi} d_e(\eta) = \lim_{\eta\to -\pi} \frac{\eta}{H_\Lambda \sin\eta} \to \infty$.

Bevezethetjük az (η, χ) koordináták helyett a $(\hat{t}, r)$ úgynevezett sztatikus koordinátákat a

$$\mathrm{th}(H_\Lambda \hat{t}) = \frac{\cos\eta}{\cos\chi}, \qquad H_\Lambda r = \frac{\sin\chi}{\sin\eta} \tag{2.7.9}$$

definícióval. Ezekben a koordinátákban az invariáns ívelem négyzete:

$$ds^2 \quad = \quad [1 - (H_\Lambda r)^2]d\hat{t}^2 - \frac{dr^2}{1 - (H_\Lambda r)^2} - r^2 d\Omega^2. \tag{2.7.10}$$

A 4. ábrán látjuk az r =áll. és $\hat{t}$ =áll. hiperfelületeket. A részecske-horizont az $r = H_\Lambda^{-1}$, $\hat{t} = -\infty$, az esemény-horizont az $r = H_\Lambda^{-1}$, $\hat{t} = \infty$ hiperfelület. A sztatikus koordináták csak a térdő „felét”, azaz a I és III tartományokat fedik le. Ezek a koordináták szingulárissá válnak a horizontokon, de folytathatók azok túloldalára. Ott az $r > H_\Lambda^{-1}$ koordináta játssza az idő, és $\hat{t}$ a radiális koordináta szerepét. A II és IV tartományokban a sajátidő

$$d\tau \quad = \quad \frac{dr}{[(H_\Lambda r)^2 - 1]^{1/2}}, \tag{2.7.11}$$

és a metrika

$$ds^2 \quad = \quad d\tau^2 - [(H_\Lambda r)^2 - 1]d\hat{t}^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{2.7.12}$$

alakot ölt. Meg lehet mutatni, hogy ez a II tartományban összehúzódó, a IV tartományban pedig táguló Világegyetemet ír le. Következésképpen azt látjuk, hogy a de Sitter-térdőben nem lehet sztatikus koordináta-rendszert olyan méretskálákra kiterjedten bevezetni, amelyek meghaladják a görbület skáláját.

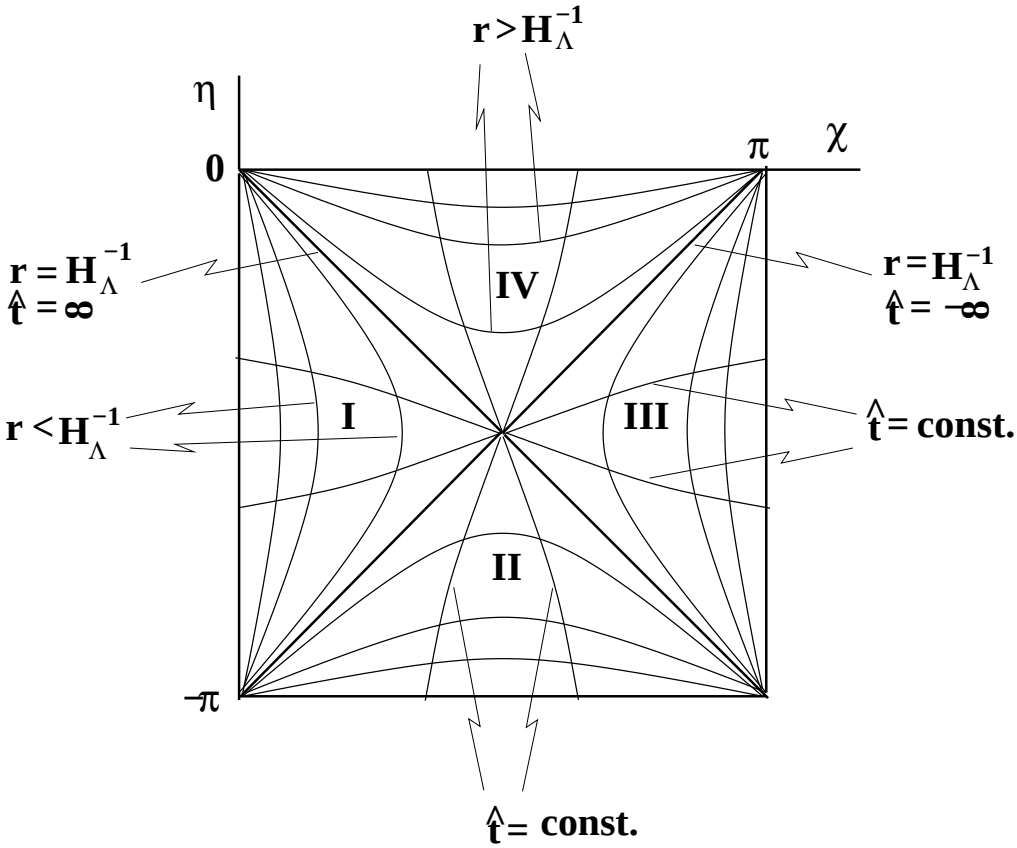

Figure 4: Zárt de Sitter-Világegyetem konform diagramján a sztatikus koordináták állandó értékeinek megfelelő hiperfelületek, valamint a részecske- és az eseményhorizont ábrázolása.

- **Lapos térgeometriájú Világegyetem**

  A lapos de Sitter-Világegyetemben a skálafaktor

$$a(\bar{t}) \;=\; H_\Lambda^{-1} e^{H_\Lambda \bar{t}}, \tag{2.7.13}$$

  a fizikai $\bar{t}$ idő és az $\bar{\eta}$ konform idő kapcsolata pedig

$$\bar{\eta} \;=\; \int \frac{d\bar{t}}{H_\Lambda^{-1} e^{H_\Lambda \bar{t}}} = -e^{-H_\Lambda \bar{t}} \tag{2.7.14}$$

  (az additív állandót zérusnak választottuk az egyszerűség kedvéért). A t és χ, ill. az η jelölést fenntartottuk a pozitív görbületű térszerű hiperfelületekkel történő rétegezés során használt koordináták jelölésére, amelyekkel a lapos térszerű rétegző hiperfelületekre vezető $(\bar{t}, \bar{\chi})$ koordináták

$$\mathrm{ch}(H_\Lambda t)\ \cos\chi = \mathrm{ch}(H_\Lambda \bar{t}) - \frac{1}{2} e^{H_\Lambda \bar{t}} \bar{\chi}^2, \quad \mathrm{ch}(H_\Lambda t)\ \sin\chi = \bar{\chi} e^{H_\Lambda \bar{t}} \tag{2.7.15}$$

  kapcsolatban állnak, ahol $-\infty < t < \infty$, $0 < \chi < \pi$ miatt, mint az a $\bar{\chi} = e^{-H_\Lambda \bar{t}} \mathrm{ch}(H_\Lambda t)\ \sin\chi > 0$ és a $\bar{\eta} = -e^{-H_\Lambda \bar{t}} < 0$ kifejezésekből látszik, az adódik,

hogy $0 < \bar{\chi} < \infty$ és $-\infty < \bar{\eta} < 0$. Ha felhasználjuk az $\bar{\eta}$ és $\bar{t}$, továbbá az η és t közti összefüggéseket, a lapos de Sitter-Világegyetem $(\bar{\eta}, \bar{\chi})$ koordinátái és a zárt de Sitter-Világegyetem (η, χ) koordinátái közötti

$$\bar{\eta} = \frac{\sin\eta}{\cos\eta + \cos\chi}, \quad \bar{\chi} = \frac{\sin\chi}{\cos\eta + \cos\chi} \tag{2.7.16}$$

relációkat kapjuk. A lapos de Sitter-Világegyetemben az invariáns ívelemnégyzet tehát

$$ds^2 = \frac{1}{H_\Lambda^2 \bar{\eta}^2}(d\bar{\eta}^2 - d\bar{\chi}^2 - \bar{\chi}^2 d\Omega^2), \tag{2.7.17}$$

ahol a koordináták végtelen intervallumot futnak be. Az a tény azonban, hogy az $(\bar{\eta}, \bar{\chi})$ koordináták kifejezhetők a zárt de Sitter-Világegyetem (η, χ) koordinátáival, lehetővé teszi, hogy a nyílt, lapos de Sitter-Világegyetemet ábrázoljuk a zárt eset konform diagramján, ld. a 5. ábra.

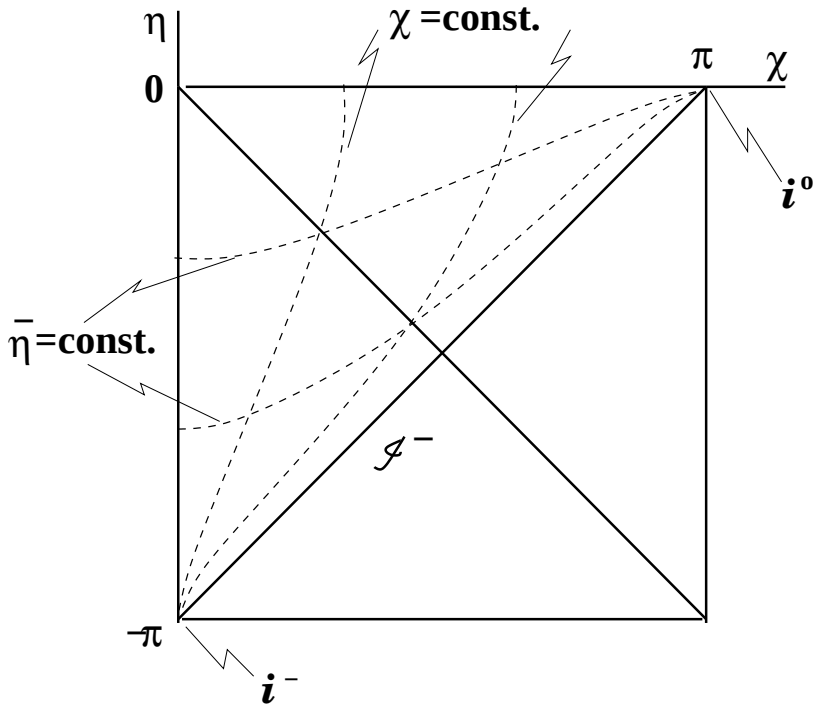

Figure 5: Sík térgeometriájú de Sitter-Világegyetem konform diagramja a zárt de Sitter-téridő konform diagramján ábrázolva.

A lapos, nyílt de Sitter-Világegyetem a teljes de Sitter-téridőnek csak a „felére" terjed ki. A lapos, nyílt de Sitter-Világegyetemnek megfelelő tartományt egyik oldalról a részecske-horizont határolja. Az időszerű geodetikusok (többek közt a $\bar{\chi}$ =áll. együtt mozgó megfigyelők világvonalai) mind a múltbeli végtelennek megfelelő i^- pontból indulnak ki, neve **múltbeli időszerű végtelen („past time-like infinity")**. Bármely $\bar{\eta}$=áll. időben a térbeli végtelennek (a radiális koordináta végtelen értékének) az ábrán az i^0 pont felel meg, neve **térszerű végtelen („space-like**

infinity”). (Ne felejtsük el, hogy az ábra pontjai 2-dimenziós gömbfelületeket szimbolizálnak.) A lapos de Sitter-Világegyetem geodetikusan nem teljes. Ha pl. a $\bar{\chi} = 0$ pontban nyugvó megfigyelőhöz a története során beérkező fényjelek múltját visszafelé nyomon követjük, akkor azt tapasztaljuk, hogy azok a Világegyetem $\mathfrak{I}^-$ **(„scri minus”)** határán elvégződnek, ahol $\bar{\eta} \to -\infty$ és $\bar{\chi} \to +\infty$, de $\bar{\eta} + \bar{\chi}$ véges, azaz a fényszerű geodetikusok erről a határról indulnak. Ugyanakkor a teljes de Sitter-téridőben tovább folytatódnak. A lapos de Sitter-Világegyetem fényszerű geodetikusai tehát a $\mathfrak{I}^-$ határról indulnak, amelynek a neve **múltbeli null-végtelen („past null infinity”)**.

- **Hiperbolikus térgeometriájú (nyílt) Világegyetem**

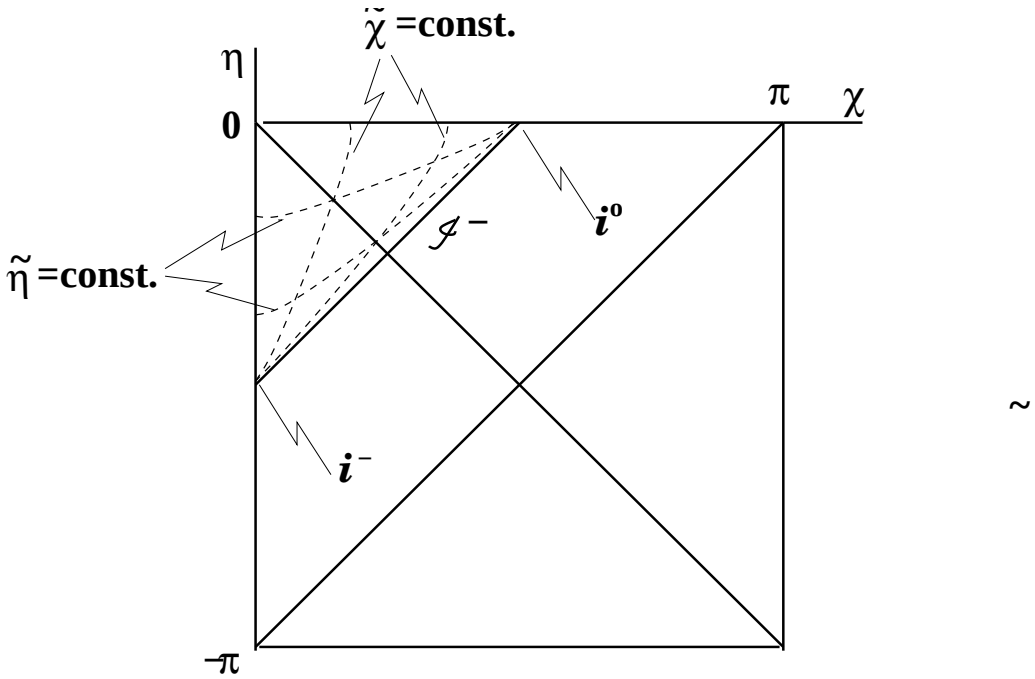

Figure 6: Hiperbolikus térgeometriájú, nyílt de Sitter-Világegyetem konform diagramja a zárt de Sitter-téridő konform diagramján ábrázolva.

A de-Sitter-téridőn bevezethetünk olyan $(\tilde{t}, \tilde{\chi})$ koordinátarendszert, amely a téridő hiperbolikus (azaz negatív görbületű) térszerű hiperfelületekkel történő rétegezésének felel meg. A skálaparaméter ebben az esetben

$$a(\tilde{t}) \quad = \quad H_\Lambda^{-1} \mathrm{sh}(H_\Lambda \tilde{t}), \tag{2.7.18}$$

ahol $0 < \tilde{\chi} < \infty$ és $0 < \tilde{t} < \infty$. A $\tilde{t}$ fizikai idő és a konform idő közötti kapcsolat

$$\tilde{\eta} \quad = \quad H_\Lambda \int \frac{d\tilde{t}}{\mathrm{sh}(H_\Lambda \tilde{t})} = \ln \frac{e^{H_\Lambda \tilde{t}} - 1}{e^{H_\Lambda \tilde{t}} + 1}, \tag{2.7.19}$$

ahonnan

$$\mathrm{sh}(H_\Lambda \tilde{t}) \quad = \quad -\frac{1}{\mathrm{sh}\tilde{\eta}} \tag{2.7.20}$$

adódik, úgyhogy a metrika

$$ds^2 = \frac{1}{H_\Lambda^2 \mathrm{sh}^2\tilde{\eta}}(d\tilde{\eta}^2 - d\tilde{\chi}^2 - \mathrm{sh}^2\tilde{\chi}\, d\Omega^2) \tag{2.7.21}$$

alakot ölt, ahol a ,,hullámos" koordináták most is ugyanazokat az intervallumokat futják be, mint a lapos Világegyetemben a ,,felülvonásos" koordináták: $-\infty < \tilde{\eta} < 0$, $0 < \tilde{\chi} < \infty$. A hiperbolikus, nyílt de Sitter-Világegyetem konform diagramja most is a zárt de Sitter-Világegyetem koordinátáinak segítségével ábrázolható, ld. a 6. ábrát. A kétféle koordináta-rendszer közötti kapcsolat

$$\mathrm{ch}(H_\Lambda t)\cos\chi = \mathrm{ch}(H_\Lambda \tilde{t}), \quad \mathrm{ch}(H_\Lambda t)\sin\chi = \mathrm{sh}(H_\Lambda \tilde{t})\mathrm{sh}\tilde{\chi}, \tag{2.7.22}$$

ami a t és η, ill. a $\tilde{t}$ és $\tilde{\eta}$ közti reláció felhasználása révén azt eredményezi, hogy

$$\mathrm{th}\tilde{\eta} = \frac{\sin\eta}{\cos\chi}, \quad \mathrm{th}\tilde{\chi} = \frac{\sin\chi}{\cos\eta}. \tag{2.7.23}$$

A 6. ábráról látjuk, hogy a hiperbolikus de Sitter-Világegyetem a teljes de Sitter-téridőnek csak a ,,nyolcadára" terjed ki. Mint ahogy a lapos de Sitter-Világegyetem, ugyanúgy a hiperbolikus sem geodetikusan teljes.

A de Sitter-téridőben, bármely koordinátarendszerben az állandó időhöz tartozó térszerű hiperfelületek egyre laposabbak (kisebb görbületűek) és egymáshoz egyre hasonlóbbak lesznek a $\chi \ll \pi/2$ tartományban, ahogy tartunk a távoli jövő felé, azaz $\eta \to 0^-$. Ebben a határesetben a skálafaktor fordítva arányos lesz a konform idővel, vagy ami ugyanezt jelenti, exponenciálisan nő a fizikai idő függvényében.

A de Sitter-téridőnek fontos szerepe van a felfúvódó Világegyetem modelljeiben, mint később látni fogjuk. A realisztikus kozmológiai modellben megsérül az időbeli eltolási szimmetria a kozmikus fluktuációk következtében. A fluktuációk hatását, mint perturbációt lehet figyelembe venni, amelyhez a perturbálatlan esetet a de Sitter-téridő, ill. valamelyik ($k = 0, \pm 1$) de Sitter-Világegyetem szolgáltatja. A fluktuációk hatására a Világegyetem **,,olyan szerencsésen" lép ki (,,graceful exit") az exponenciálisan felfúvódó szakaszból (,,inflation"),** hogy belép a Friedmann-modellnek megfelelő fejlődési szakaszba. Aszerint, hogy a perturbálatlan rendszert a de Sitter-Világegyetem melyik esetének tételeztük fel, rendre a zárt, a lapos, ill. a hiperbolikus Friedmann-modell szerint folytatódik a Világegyetem fejlődése. Ez indokolja, hogy a de Sitter-téridő rétegezésének, ill. megfelelő koordinátázásainak mindhárom minőségileg különböző esetével megismerkedjünk.

2.7.3 Minkowski-téridő

Gömbi polárkoordinátákban a Minkowski-metrika alakja

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{2.7.24}$$

ami ugyan konform alakú, de a változók a végtelen $-\infty < t < \infty$, $0 \leq r < \infty$ intervallumokat futják be. Ezért át kell térnünk konform változókra, hogy fel tudjuk rajzolni a Minkowski-téridő konform diagramját. Egy lehetséges választás ebből a célból olyan (η, χ) koordináták bevezetése, amelyek a (t, r) koordinátákkal hasonló relációban állnak, mint a zárt de Sitter-Világegyetem koordinátái a nyílt (hiperbolikus) de-Sitter-Világegyetem

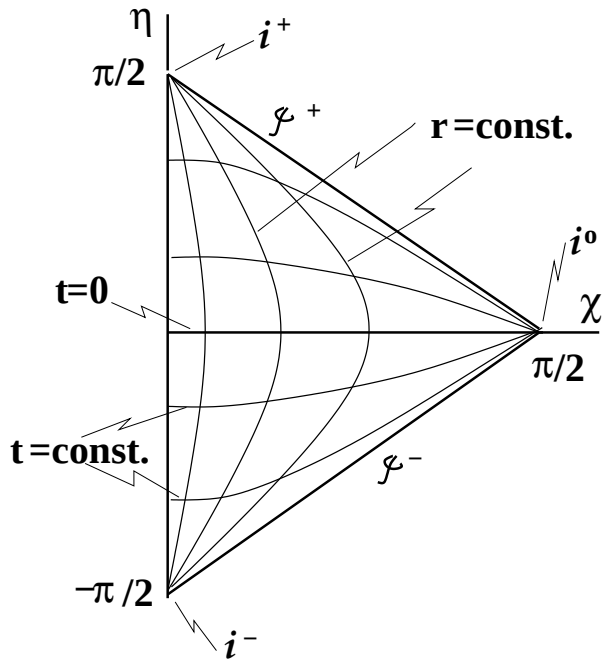

Figure 7: A Minkowski-téridő konform diagramja.

koordinátáival (utóbbiak helyére formálisan a (2.7.23) transzformáció képleteiben a (t, r) koordinátákat írjuk):

$$\mathrm{th}t = \frac{\sin\eta}{\cos\chi}, \quad \mathrm{th}r = \frac{\sin\chi}{\cos\eta}. \tag{2.7.25}$$

A Minkowski-metrika ekkor a

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\chi - \sin^2\eta}(d\eta^2 - d\chi^2 - \Psi^2(\eta,\chi)d\Omega^2) \tag{2.7.26}$$

alakot ölti, ahol $\Psi^2(\eta,\chi)$ konkrét alakja most számunkra nem érdekes a konform diagram megszerkesztése szempontjából. Ha összevetjük a nyílt, hiperbolikus de Sitter-Világegyetem $\tilde{\eta}$ koordinátáját és a Minkowski-téridő t koordinátáját, akkor annyi a különbség, hogy $\tilde{\eta}$ csak a valós tengely negatív $0 > \tilde{\eta} > -\infty$ értékeit futja be, míg t az egész $-\infty < t < \infty$ valós tengelyt, miközben $\tilde{\chi}$ és r ugyanazokat a valós nem negatív értékeket futják be. A különbség abból adódik, hogy a nyílt, hiperbolikus de Sitter-Világegyetem skálafaktora az $\tilde{\eta} \to 0^-$ határesetben felrobban. Ezért a Minkowski-téridő konform diagramja egy olyan nagy háromszög, amely a nyílt, hiperbolikus de Sitter-Világegyetem konform diagramjának megfelelő kisebb háromszögből és annak időtükrözöttjéből áll. A múltbeli időszerű végtelen i^- és a múltbeli null-végtelen $\mathfrak{I}^-$, valamint a térszerű végtelen i^0 mellett megjelenik a **jövőbeli időszerű végtelen („future time-like infinity")** i^+ és a **jövőbeli null-végtelen („future null infinity")** $\mathfrak{I}^+$ is. Az időszerű geodetikusok i^+-ban futnak össze, az $r = 0$-ban ($\chi = 0$)-ban tartózkodó megfigyelő által kibocsátott fényjelek pedig $\mathfrak{I}^+$-ban végződnek, amelynek mentén $t \to +\infty$ és $r \to +\infty$ miközben $t - r$ véges.

2.7.4 Erős energia-feltételnek eleget tevő anyag által uralt nyílt (hiperbolikus térgeometriájú) vagy lapos Világegyetem

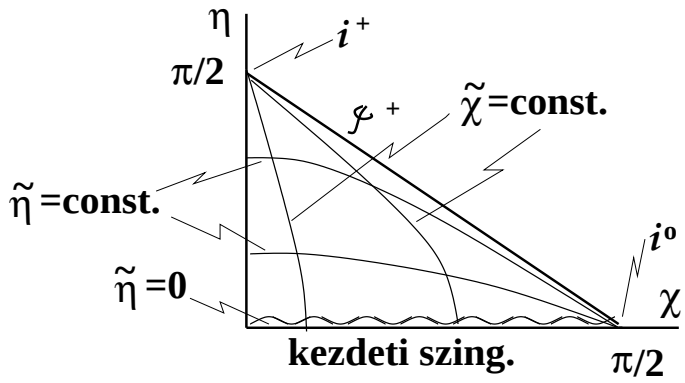

Figure 8: A nyílt (hiperbolikus) és a lapos Világegyetemek konform diagramja, ha az anyag állapotegyenlete teljesíti az erős energiafeltételt.

Emlékeztetünk rá, hogy az erős energia-feltételnek olyan anyag tesz eleget, amelynek a $p = p(\epsilon)$ állapotegyenlete kielégíti az $\epsilon + 3p > 0$ egyenlőtlenséget. Ekkor az ívhosszelem négyzete

$$ds^2 = a^2(\tilde{\eta})(d\tilde{\eta}^2 - d\tilde{\chi}^2 - \Phi^2(\tilde{\chi})d\Omega^2) \tag{2.7.27}$$

alakú, ahol nyílt Világegyetem esetén $\Phi = \mathrm{sh}\tilde{\chi}$, lapos Világegyetemben pedig $\Phi = \tilde{\chi}$, továbbá az $\tilde{\eta}$ konform idő a $(0, \infty)$ intervallumot, az együtt mozgó $\tilde{\chi}$ koordináta mindkét esetben szintén a $(0, \infty)$ intervallumot futja be. Megjegyezzük, hogy korábbi jelölésünkhöz képest a hullámvonallal jelöltük ezeket a nem véges intervallumon értelmezett koordinátákat, hogy fenntartsuk a továbbiakban az $(\eta,\ \chi)$ koordinátákat arra az esetre, amikor koordinátatranszformációval a végteleneket végesbe transzformáljuk. A skálaparaméter ezekben az esetekben lassulva táguló ($\dot{a} > 0,\ \ddot{a} < 0$) Világegyetemet ír le, és $a(\tilde{\eta} = 0) = 0$ miatt a Világegyetemnek kezdeti szingularitása van. Az $\tilde{\eta} > 0$ értékek esetén a metrika a Minkowski-metrikából nem szinguláris konform transzformációval kapható meg. Másrészt $\tilde{\eta}$ és $\tilde{\chi}$ ugyanolyan intervallumokat futnak be, mint a Minkowski-téridő t és r koordinátái az utóbbinak a $t > 0$ félterén. Ezért a nyílt és a lapos Világegyetem konform diagramjainak a vizsgált esetben (erős energiafeltétel teljesedése) ugyanolyan alakúaknak kell lenniük, mint a Minkowski-téridő konform diagramjának felső „fele”. A diagram alsó határa ($\tilde{\eta} = 0$) valódi fizikai szingularitásnak felel meg, ez a lényegi különbség a Minkowski-téridő konform diagramjához képest.

2.8 A vöröseltolódás és alkalmazásai

2.8.1 A vöröseltolódás

A Világegyetem tágulásának a fény terjedésére fontos kihatása van. A fényforrás által kibocsátott fény frekvenciája a táguló Világegyetemben vöröseltolódást szenved mire a távoli megfigyelőhöz elér. Ennek tulajdonítható, hogy a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás hőmérséklete lecsökken, mire azt észleljük. A hőmérséklet a skálafaktor reciprokával arányos, $T \propto 1/a(t)$.

Legyen η_T az emittált fény konform időben mért periódusideje, ami a megfigyeléskor is ugyanekkora. Ez abból következik, hogy az egy periódusnyi hullámvonulat elejének trajektóriája a konform diagrammon $\chi_1(\eta) = \chi_{em} - (\eta - \eta_{em})$, a végének a trajektóriája pedig $\chi_2(\eta) = \chi_{em} - (\eta - \eta_{em} - \eta_T)$. A $\chi_{obs} = 0$ koordinátájú megfigyelő ezért a fényjel elejét $\eta_{1,obs} = \chi_{em} + \eta_{em}$, a végét pedig $\eta_{2,obs} = \eta_{1,obs} + \eta_T$ konform időben észleli, vagyis $\eta_{2,obs} - \eta_{1,obs} = \eta_T$. Az η_T konform periódusidőnek az emitter helyén $\Delta t_{em} = \eta_T a(\eta_{em})$, a megfigyelő helyén $\Delta t_{obs} = \eta_T a(\eta_{obs})$ fizikai periódusidő felel meg. Az emittált és a megfigyelt fény hullámhossza ($c = 1$ esetén) rendre $\lambda_{em} = \Delta t_{em}$, ill. $\lambda_{obs} = \Delta t_{obs}$, és a hullámhosszak aránya

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{a(\eta_{obs})}{a(\eta_{em})} = \frac{a_0}{a(t_{em})}. \tag{2.8.1}$$

Innen látjuk, hogy a fény λ hullámhossza az a skálaparaméterrel egyenes arányban nő, $\lambda \propto a$, a frekvenciája pedig akkor a skálaparaméterrel fordított arányban csökken, $\omega \propto 1/a$ a táguló Világegyetemben.

A Világegyetem tágulása során elkövetkezik a pillanat, amikor az anyag annyira lehűl, hogy a protonok és az elektronok semleges atomokat kezdenek alkotni (elsősorban H-atomokat, kevés He-atomot és nyomokban nehezebb atomokat). Amikor a töltések ilyen módon bemenekülnek a semleges atomokba, akkor lényegében lecsatolódik az elektromágneses sugárzás az anyagról, azaz elhanyagolhatóvá válik az elektromágneses sugárzás és az anyag kölcsönhatása. Ma azt a kozmikus elektromágneses háttérsugárzást figyeljük meg, ami a Világegyetemben a lecsatolódás idején jelen volt. A tapasztalat szerint ez egy termikus egyensúlyi sugárzás. Ráadásul, ez olyan termikus sugárzás, ami annyira pontosan eleget tesz a Planck-törvénynek, hogy a termikus egyensúlynak ilyen pontosan megfelelő sugárzást sem előállítani, sem megfigyelni a Természetben más esetben eddig nem sikerült. Mármost a sugárzás minden frekvenciájú komponense ugyanolyan arányú vöröseltolódást szenved amíg a jelenben eljut hozzánk. Ez, – a Wien-féle eltolódási törvénnyel ($\lambda_{\max} T =$áll.) összhangban – azt is jelenti, hogy a termikus sugárzás T hőmérséklete a maximális sugárzási intenzitáshoz tartozó $\lambda_{\max}$ hullámhosszal fordítottan arányosan, azaz az a skálafaktorral ugyancsak fordítottan arányosan tolódik el. Így lesz belőle ma 2,73 K hőmérsékletű, mikrohullámú háttérsugárzás.

Érdemes megjegyezni, hogy a Hubble-horizonthoz képest kis távolságokon a vöröseltolódás Doppler-effektusként fogható fel, ami azért lép fel, mert a megfigyelőhöz képest, annak lokális inerciarendszerében a fényforrás a tágulás következtében távolodik. Ekkor a kis távolodási sebesség és az elhanyagolható görbület miatt alkalmazható a klasszikus hullámtan eredménye, azaz hogy a megfigyelt ω_{obs} frekvencia és a kibocsátott $\omega_{em} > \omega_{obs}$ frekvencia eltolódása az emittált frekvencia v/c-szerese, ahol $v = H\Delta\ell$ a fényforrásnak a tágulásból adódó távolodási sebessége, $\Delta\ell$ a fényforrás és a megfigyelő távolsága. Esetünkben a hullám terjedési sebessége $c = 1$, úgyhogy a Doppler-eltolódás

$$\Delta\omega = \omega_{em} - \omega_{obs} = v\omega_{em} = H\omega_{em}\Delta\ell. \tag{2.8.2}$$

Itt elhanyagoltuk a Hubble-paraméter időfüggését, feltéve, hogy a fénykibocsátás és a megfigyelés közti idő $\Delta t = t_{obs} - t_{em} = \Delta\ell$ (ha $c = 1$) elég kicsi. Ezért a kapott összefüggést infinitezimális $\Delta\ell$, ill. Δt esetére alkalmazva, azt differenciálegyenlet alakjába írhatjuk át:

$$\dot{\omega} = -H(t)\omega = -\frac{\dot{a}}{a}\omega. \tag{2.8.3}$$

Ennek a megoldása $\omega(t) \propto 1/a(t)$, ahogy azt az általános relativitás elmélete alapján általános esetben megkaptuk.

2.8.2 Relatív részecske-sebességek vöröseltolódása

Az együtt mozgó („comoving") (azaz az izotróp) megfigyelőkhöz képesti lokális relatív sebességek, az úgynevezett saját sebességek („peculiar velocities") is vöröseltolódást szenvednek. Az általános relativitáselméletben a részecske w^i sajátsebessége a részecske négyessebességének a térszerű rétegző hiperfelületekkel párhuzamos komponense, $u^\alpha = (1 + \mathcal{O}(w^i w_i), w^i)$. A gázrészecskék saját sebessége vöröseltolódásának az a jelentősége, hogy, **ha a Világegyetemben a sugárzás lecsatolódott a gázról, akkor a gáz hőmérséklete gyorsabban fog zérushoz tartani a tágulás során, mint a termikus sugárzás hőmérséklete.** A gáz hőmérséklete a skálaparaméter négyzetének reciprokával arányosan csökken ekkor.

Legyen adott két együtt mozgó megfigyelő, Alíz és Béla, akik egy részecske világvonala mentén helyezkednek el, és legyen a részecskének a saját sebessége $w(t_A)$, amikor a t_A időpillanatban elhalad Alíz mellett, majd legyen ugyanennek a részecskének a saját sebessége $w(t_B)$, amikor a $t_B > t_A$ időpillanatban Béla mellett halad el. Az Alízhoz és a Bélához rögzített lokális inerciarendszerek relatív sebessége viszont $v \approx H\Delta\ell$, ha Alíz és Béla $\Delta\ell \approx w(t_A)(t_B - t_A) \equiv w(t_A)\Delta t$ távolsága elég kicsi ahhoz, hogy elhanyagolhassuk a Hubble-paraméter időbeli változását (és a részecske saját sebességének változását $\Delta\ell$ becslésekor). Ekkor viszont írhatjuk, hogy

$$w(t_A) = w(t_B) + v, \quad \Rightarrow \quad w(t_A) - w(t_B) = -H(t_A)w(t_A)(t_A - t_B), \tag{2.8.4}$$

amit infinitezimális Δt időtartamot véve átírhatunk megint differenciálegyenlet alakjába:

$$\dot{w} \;=\; -H(t)w. \tag{2.8.5}$$

Ennek megoldása megint $w(t) \propto 1/a(t)$. A részecskéknek az együtt mozgó megfigyelőkhöz képesti saját sebességei tehát ugyanúgy vöröseltolódást szenvednek, mint a fény frekvenciája, és a saját sebesség ismét a skálaparaméterrel fordított arányban skálázik. Ezt a homogén és izotróp Világegyetemben érvényes törvényszerűséget a részecske geodetikus egyenletének vizsgálata alapján szigorúan az általános relativitáselmélet keretein belül is be lehet látni, ha felhasználjuk, hogy a részecske világvonala mentén mindenhol választhatunk olyan térbeli koordinátarendszert, amelyben a saját sebesség radiális, azaz $u^\alpha = (1+\mathcal{O}(w^2), u^\chi, 0, 0)$. Ekkor a fentebb használt w sebesség a négyessebességnek a χ radiális koordináta irányába mutató u^χ komponensének megfelelő fizikai sebesség, $w = a(\eta)u^\chi(\eta)$.

A kapott eredménynek van egy fontos következménye. A nem relativisztikus gázrészecskék $T_{n.r.g.}$ hőmérséklete a lokális relatív sebességek négyzetének várható értékével arányos, ezért arra a Világegyetem tágulása során a $T_{n.r.g.} \propto 1/a^2$ skálatörvény kell, hogy vonatkozzon. Ennek az a következménye, hogy ha a sugárzás lecsatolódott a gázról, akkor a gáz gyorsabban hűl, mint a sugárzás.

2.8.3 A relatív vöröseltolódás, mint egyfajta időparaméter

A z **relatív vöröseltolódáson** a

$$z \;=\; \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \tag{2.8.6}$$

hányadost értjük. Ez az a relatív hullámhosszváltozás, amit egy távoli galaxis által kibocsátott fény λ_{em} hullámhossza elszenved, amíg a jelenben eljut hozzánk, mint λ_{obs} hullámhosszú fény. A z relatív vöröseltolódás felhasználható a fénykibocsátás t_{em} idejének meghatározására a mai t_0 időpillanathoz képest. Ez azért szerencsés, mert nem kell hozzá

tudni, hogy mikor volt a Világegyetem történetének kezdete. Adott z relatív vöröseltolódás megfelel annak az időpillanatnak, amikor a Világegyetem skálaparamétere $(1+z)$-szer kisebb volt, mint ma,

$$1+z = \frac{a_0}{a(t_{em})}, \tag{2.8.7}$$

ahol $a_0 = a(t_0)$ a skálaparaméter a jelen t_0 időpillanatban.

Az elmondottak alapján a jelen t_0 időpillanatban észlelt fény z relatív vöröseltolódása kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban áll azzal a t_{em} idővel, amikor a fény kibocsátása történt. Ezért a z relatív vöröseltolódás alkalmas arra, hogy a Világegyetem történéseit a t idő helyett z-vel parametrizáljuk.

1. *Az energiasűrűség parametrizálása, $\epsilon(z)$.*

   Az energiasűrűség lokális megmaradását kifejező (2.3.22) egyenletből indulunk ki, $d\epsilon = -3[\epsilon + p(\epsilon)]d\ln a$, ahol a (2.8.7) egyenlet alapján $d\ln a = -d\ln(1+z)$. Ezért azt kapjuk, hogy

   $$\ln(1+z) = \frac{1}{3}\int_{\epsilon_0}^{\epsilon(z)} \frac{d\epsilon}{\epsilon + p(\epsilon)}, \tag{2.8.8}$$

   ahol $\epsilon_0 = \epsilon(t_0)$ az energiasűrűség mostani értéke. Ez egy implicit egyenlet $\epsilon(z)$ meghatározására.

2. *A Hubble-paraméter változása, $H(z)$.*

   Induljunk ki a (2.3.13) Friedmann-egyenletből, ahol $k/a^2 = k(1+z)^2/a_0^2$, továbbá $8\pi G\epsilon/3 = H_0^2\epsilon/\epsilon_{kr,0} = H_0^2\Omega_0\epsilon/\epsilon_0$, ahol $H_0 = H(t_0)$, $\Omega_0 = \Omega(t_0)$ és $\epsilon_{kr,0}$ a megfelelő mennyiségek jelenlegi értékei. Ezeket felhasználva a (2.3.13) egyenlet

   $$H^2(z) + \frac{k(1+z)^2}{a_0} = \frac{H_0^2\Omega_0\epsilon(z)}{\epsilon_0} \tag{2.8.9}$$

   alakot ölt. Mivel $H(z=0) = H_0$, ezért fennáll a $k/a_0^2 = H_0^2(\Omega_0 - 1)$ összefüggés, ahonnan $k \neq 0$ térgeometriájú Világegyetem esetén kifejezhetjük a skálafaktor jelenlegi értékét a Hubble-paraméter és a kozmológiai paraméter jelenlegi értékével. Ekkor a Hubble-paraméter z-függésére a

   $$H^2(z) + H_0^2(\Omega_0 - 1)(1+z)^2 = \frac{H_0^2\Omega_0\epsilon(z)}{\epsilon_0} \tag{2.8.10}$$

   egyenletet, ill. a

   $$H(z) = H_0\left[(1-\Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_0\frac{\epsilon(z)}{\epsilon_0}\right]^{1/2} \tag{2.8.11}$$

   explicit alakot kapjuk. Ha $k = 0$, akkor $\Omega_0 = 1$ és a (2.8.9) egyenletből közvetlenül adódik, hogy

   $$H(z) = H_0\left[\frac{\epsilon(z)}{\epsilon_0}\right]^{1/2}, \tag{2.8.12}$$

   ami a (2.8.11) egyenlőségből is kiadódik formálisan az $\Omega_0 = 1$ helyettesítéssel.

3. *A fizikai idő parametrizálása, $t(z)$.* Az ϵ energiasűrűség z-függésének meghatározása után a Hubble-paraméter z-függését is meg tudjuk kapni, majd ennek az ismeretében meghatározhatjuk a fizikai t idő z-függését is. Deriváljuk a (2.8.7) egyenlet mindkét oldalát $t_{em} = t$ szerint,

$$\dot{z} = -\frac{a_0}{a^2(t)}\dot{a} = -(1+z)H(t), \tag{2.8.13}$$

ahonnan

$$t(z) = \int_0^{t(z)} dt = -\int_\infty^z \frac{dz'}{H(z')(1+z')} = \int_z^\infty \frac{dz'}{H(z')(1+z')} \tag{2.8.14}$$

adódik, ahol az integrációs állandót úgy választottuk, hogy a kezdeti $t = 0$ időpillanatnak a $z \to \infty$ határeset feleljen meg.

4. *A vöröseltolódás felhasználása távolság meghatározására.* Ha ismerjük egy távoli galaxisból hozzánk érkező fénynek a z relatív vöröseltolódását, akkor abból meg tudjuk határozni a galaxisnak a tőlünk mért távolságát. Tegyük fel, hogy az együtt mozgó koordinátákban tőlünk χ távolságra levő galaxis az η_{em} konform időben fényt bocsátott ki felénk, ami az η_0 jelen pillanatban érkezik el hozzánk, akkor fennáll a

$$\chi = \eta_0 - \eta_{em} = \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{2.8.15}$$

összefüggés. Használjuk fel, hogy $a = a_0/(1+z)$ és $dt = -dz/[H(z)(1+z)]$, ekkor arra jutunk, hogy

$$\chi(z) = \frac{1}{a_0}\int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \tag{2.8.16}$$

A $k \neq 0$ térgeometriájú Világegyetemben $1/a_0^2 = H_0^2(\Omega_0 - 1)/k = H_0^2|\Omega_0 - 1|$, azaz $1/a_0 = H_0\sqrt{|\Omega_0 - 1|}$, úgyhogy ezekben az esetekben

$$\chi(z) = H_0\sqrt{|\Omega_0 - 1|}\int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \tag{2.8.17}$$

adódik. Ezért az emitter fizikai távolsága tőlünk

$$\ell(z) = a_0\chi(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \tag{2.8.18}$$

A $z \to \infty$ (azaz a $t_{em} \to 0$, ill. $\eta_{em} \to 0$) határesetben $\chi(z)$ a részecske-horizonthoz tart, hiszen ekkor $\chi(z) \to \eta_0 = \chi_p(\eta_0)$, mert $\chi_p(\eta) = \eta$. Ez azt jelenti, hogy a relatív vöröseltolódás segítségével csak a részecske-horizonton belüli távolságokat lehet meghatározni.

Példaképpen, a por uralta Világegyetemben

$$\epsilon(z) = \epsilon_0(1+z)^3, \tag{2.8.19}$$

és

$$H(z) = H_0(1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z}. \tag{2.8.20}$$

Ha a por uralta Világegyetem lapos ($\Omega_0 = 1$), akkor az integrálok elvégzése után a következőket kapjuk:

$$t(z) = \frac{2}{3H_0}(1+z)^{-3/2}, \quad \chi(z) = \frac{2}{a_0 H_0}[1 - (1+z)^{-1/2}]. \tag{2.8.21}$$

2.9 Kozmológiai paraméterek meghatározása

A kozmológiai paraméterek meghatározására szolgáló módszerek azon alapulnak, hogy mérhetjük az egyes csillagászati objektumok sugárzásának vöröseltolódásával együtt azok látószögét és látszólagos fényességét. Ha adott például a csillagászati **hosszúság-standardok („standard rulers")** valamely osztálya, azaz azonos méretű csillagászati objektumok egy osztálya, akkor azok $\Delta\theta$ látószöge jól meghatározott módon függ az objektumokból érkező fény z relatív vöröseltolódásától, $\Delta\theta(z)$. Hasonlóképpen, ha adott az azonos luminozitású égitestek, az úgynevezett **standard gyertyák („standard candles")** egy osztálya, akkor ezen objektumok m_{bol} látszólagos fényessége jól meghatározott módon függ az objektumokból érkező fény z relatív vöröseltolódásától, $m_{bol}(z)$. Ezek, az égitestek meghatározott osztályaira vonatkozó függvények tartalmazzák a kozmológiai paramétereket, amelyek a mérési adatok ismeretében aztán meghatározhatók. A módszerek jelentőségét növeli, hogy a mérési eredmények a Világegyetem korábbi állapotára vonatkoznak, amikor az a mostani méreténél $(1+z)$-szer kisebb volt. Ezért a z-függések révén a Világegyetem megelőző fejlődéséről kapunk információt, amelynek révén esetleg dönteni tudunk különböző kozmológiai modellek között azok alkalmazhatóságát illetően.

2.9.1 Az Ω_0 kozmológiai paraméter meghatározása a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás (CMB) alapján

A látószög és a relatív vöröseltolódás kapcsolata. Tegyük fel, hogy adott a csillagászati hosszúság-standardok valamilyen osztálya. Ekkor az adott osztályba tartozó egyes égitestek $\Delta\theta$ látószöge („angular size" vagy „angular diameter") a tőlük hozzánk érkező fény z relatív vöröseltolódásától jól meghatározott módon függ. Legyen az égitest tőlünk (a $\chi = 0$ helyen tartózkodó izotróp megfigyelőtől) χ_{em} (együtt mozgó radiális koordinátában mért) távolságra a $\varphi_0 =$áll. síkban, és ℓ transzverzális méretével helyezkedjen el úgy, hogy átmérőjének egyik vége θ_0, másik vége $\theta_0 + \Delta\theta$ irányban látszik. (A gömbi szögeket mindig választhatjuk így az általánosság csorbítása nélkül.) A fény az átmérő mindkét végéből radiális geodetikusok mentén érkezik hozzánk. A keresett látószög tehát $\Delta\theta$. Használjuk fel a térmetrika (2.2.17) alakját és hogy most $d\chi^2 = 0$, $d\Omega^2 \approx (\Delta\theta)^2$, ekkor az átmérő fizikai hossza

$$\ell = a(t_{em})\Phi(\chi_{em})\Delta\theta, \tag{2.9.1}$$

ahol a (2.2.18) egyenlőség adja meg $\Phi(\chi_{em})$ kifejezését a különböző térgeometriák esetén. Itt t_{em} jelenti a fény kibocsátásának az időpontját, amelynek konform időben az $\eta_{em} = \eta_0 - \chi_{em}$ felel meg, ahol η_0 a megfigyelés pillanata. A fenti egyenlőségből kifejezhetjük a látószöget:

$$\Delta\theta = \frac{\ell}{a(\eta_0 - \chi_{em})\Phi(\chi_{em})}. \tag{2.9.2}$$

Ha a Világegyetem η_0 korával összemérve $\chi_{em} \ll \eta_0$, azaz az égitest „közel van", akkor írhatjuk, hogy $a(\eta_0 - \chi_{em}) \approx a(\eta_0) = a_0$, $\Phi(\chi_{em}) \approx \chi_{em}$, és ekkor

$$\Delta\theta \approx \frac{\ell}{a_0\chi_{em}} = \frac{\ell}{D}, \tag{2.9.3}$$

ahol D az égitest tőlünk mért fizikai távolsága. A közeli objektum látószöge tehát fordítottan arányos az égitestnek a tőlünk mért távolságával. Naívan is azt várnánk, hogy kis távolságokon jó közelítés az Euklidesz-i geometria, amelynek alapján a $\Delta\theta$ látószög alatt látott ℓ hosszúságú körív $D = \Delta\theta/\ell$ sugarú körön helyezkedik el.

Ha az égitest tőlünk távol van, mondjuk a $\chi_p(\eta_0) = \eta_0$ részecske-horizont közelében helyezkedik el, akkor mondhatjuk, hogy $\chi_{em} \approx \chi_p(\eta_0)$, $\eta_0 - \chi_{em} \ll \eta_0$, $a(\eta_0 - \chi_{em}) \ll a(\eta_0)$ és $\Phi(\chi_{em}) \approx \Phi(\chi_p) =$áll., úgyhogy ilyenkor

$$\Delta\theta \approx \frac{\ell}{\Phi(\chi_p)} \frac{1}{a(\eta_0 - \chi_{em})}. \tag{2.9.4}$$

Ekkor minél távolabb helyezkedik el tőlünk az égitest, $\eta_0 - \chi_{em}$ és vele együtt $a(\eta_0 - \chi_{em})$ is annál közelebb van nullához, úgyhogy az égitest látószöge nő, ha távolabb helyezkedik el tőlünk, és fokozatosan az égitest képe beborítja az egész égboltot. Ne felejtsük el azonban, hogy a tőlünk mért távolsággal az égitest látszólagos fényessége drasztikusan csökken. Ha nem így lenne, akkor a távoli objektumok fénye teljesen elnyomná a közeliekét. Az összefüggésből látszik, hogy a furcsa viselkedésért teljes egészében a skálafaktor időfüggése a felelős.

Térjünk most vissza a (2.9.2) egzakt kifejezéshez, és fejezzük ki a látószöget a z relatív vöröseltolódással,

$$\Delta\theta(z) = \frac{\ell}{a_0 \Phi(\chi_{em}(z))}(1+z). \tag{2.9.5}$$

Itt felhasználtuk a (2.8.7) összefüggést, $\chi_{em}(z)$-t pedig a (2.8.16) integrállal kell kiszámolni. Por uralta sík térgeometriájú Világegyetemben a $\chi(z)$ függvény (2.8.21) alakú, amit felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\Delta\theta(z) = \frac{\ell H_0}{2} \frac{(1+z)^{3/2}}{(1+z)^{1/2} - 1}. \tag{2.9.6}$$

Kis vöröseltolódás, $z \ll 1$ esetén a látószög fordítva arányos z-vel, csökken, majd $z = 5/4$-nél minimuma van, és végül $z \gg 1$ esetén z-vel arányosan skálázik. Hasonló $\Delta\theta(z)$ függvények más kozmológiai modellek esetén is meghatározhatók. Ha ismertek a hosszúság-standardok osztályai, akkor ezen összefüggéseket az adott egy-egy osztályra vonatkozó mért (z, $\Delta\theta$) adatokkal összevetve, elvben különbséget tehetünk a különböző kozmológiai modellek között azok alkalmazhatóságát illetően. A fő gondot azonban a megfelelő hosszúság-standardok csillagászati beazonosítása jelenti.

Lényeges áttörést jelentett, amikor a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás hőmérsékletét mérték különböző irányokban, és rájöttek, hogy a hőmérséklet egy kicsit függ az iránytól. Felvették a hőmérséklet autokorrelációját, mint az egyes irányok közti $\Delta\theta$ szög függvényét. Megfigyelték, hogy a $\Delta\theta$ iránykülönbség függvényében maximumok jelentkeznek, ahogy a nagy szögkülönbségek felől a kisebbek felé haladunk. Az úgynevezett **„első akusztikus csúcs”** helyét lényegében az határozza meg, hogy hol van a rekombináció (az elektromágneses sugárzás lecsatolódása) idején **„hang-horizont”,** vagyis hogy mekkora az az ℓ_s távolság, amekkora távolságra tud a hang terjedni a barionokból és sugárzásból álló anyagban. Az $\ell_s \propto H^{-1}(z_r)$ hosszúság-standardként szolgál, ahol z_r a rekombinációhoz tartozó vöröseltolódás, $z_r \approx$1100. Mivel $\Omega_0 z_r \gg 1$, a (2.9.5) kifejezésben írhatjuk, hogy $\chi_{em}(z_r) \approx \chi_p$ továbbá, hogy $\Phi(\chi_p) = 2(a_0 H_0 \Omega_0)^{-1}$ (ld. a (2.6.8) kifejezést), ezért az „első akausztikus csúcs” helyére a

$$\Delta\theta(z_r) = \frac{\ell_s}{a_0 \Phi(\chi_p)}(1+z_r) = \frac{a_0 H_0 \Omega_0}{2 a_0 H(z_r)}(1+z_r) \approx \frac{z_r H_0 \Omega_0}{2 H(z_r)} \tag{2.9.7}$$

kifejezést kapjuk. Használjuk fel, hogy a (2.8.20) összefüggés alapján $H(z_r)/H_0 \approx (\Omega_0 z_r^3)^{1/2}$, ekkor a

$$\Delta\theta(z_r) \approx \frac{z_r \Omega_0}{2}(\Omega_0 z_r^3)^{-1/2} = \frac{\Omega_0^{1/2}}{2 z_r^{1/2}} \approx 0,87^o \Omega_0^{1/2} \tag{2.9.8}$$

eredményre jutunk. Érdemes észrevenni, hogy euklideszi térben a megfelelő látószög $\Delta\theta \approx t_r/t_0 \approx z_r^{-3/2}$ lenne, ami kb. 1000-szer kisebb lenne, mint a helyes eredmény.

Az első akusztikus csúcs helyére vonatkozó eredményünk lényegében csak Ω_0 értékétől függ. Ez más kozmológiai modellek esetén is így van, amikor a Világegyetem anyagösszetétele nem egyszerűen por, hanem több komponenst is tartalmaz. Ennek köszönhető, hogy a Világegyetem térgörbületére, amit Ω_0 értéke határoz meg, a legpontosabb mérési eredményt az adja, hogy meghatározzuk a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás hőmérsékletének autokorrelációs függvényében az első akusztikus csúcs helyét. **Innen származik annak a bizonyítéka, hogy a Világegyetem jelenleg (2017-ben) nagyon jó közelítéssel sík térgörbületű, azaz lapos, azaz $\Omega_0 = 1,0002 \pm 0,0026$.** Ez egy fontos megfigyelés, és a felfúvódó Világegyetem modellje olyan modell, ami ezt a tényt meg tudja magyarázni.

2.9.2 A q lassulási paraméter meghatározása standard gyertyák bolometrikus magnitúdójának z-függése alapján

Tegyük fel, hogy tőlünk χ_{em} együtt mozgó távolságban helyezkedik el egy standard gyertyának tekinthető égitest, amelynek L a luminozitása (időegység alatt kisugárzott teljes energiája). Ha az égitest a sugárzást a t_{em} időpillanattól kezdődően $\Delta\eta$ konform időtartam alatt bocsátotta ki, akkor a kibocsátott $\Delta E_{em} = L\Delta t_{em}(\Delta\eta) = La(t_{em})\Delta\eta$ energia egy $\Delta\chi = \Delta\eta$ együtt mozgó szélességű gömbhéjban található a későbbi pillanatokban, amelynek sugara nő, ahogy telik az idő, a fotonok frekvenciája pedig vöröseltolódást szenved. Amikor a gömbhéj eléri a megfigyelőt a t_0 időpillanatban, akkor a héjban levő energia a vöröseltolódás miatt

$$\Delta E_{obs} = \Delta E_{em}\frac{a(t_{em})}{a_0} = \frac{La^2(t_{em})}{a_0}\Delta\eta. \tag{2.9.9}$$

Ebben a pillanatban a gömbhéj felszíne $S = 4\pi a_0^2\Phi^2(\chi_{em})$, és a $\Delta\chi$ konform szélességű héj $\Delta t = a_0\Delta\eta$ fizikai idő alatt söpör át a megfigyelőn, úgyhogy a megfigyelő által észlelt **bolometrikus fluxus** (energiaáramsűrűség)

$$\begin{aligned} F &= \frac{\Delta E_{obs}}{S\Delta t} = \frac{La^2(t_{em})}{a_0}\Delta\eta\frac{1}{4\pi a_0^2\Phi^2(\chi_{em})a_0\Delta\eta} \\ &= \frac{La^2(t_{em})}{4\pi\Phi^2(\chi_{em})a_0^4}, \end{aligned} \tag{2.9.10}$$

amit kifejezhetünk, mint a z relatív vöröseltolódás függvényét:

$$F(z) = \frac{L}{4\pi a_0^2\Phi^2(\chi_{em}(z))(1+z)^2}, \tag{2.9.11}$$

ahol $\chi_{em}(z)$-t a (2.8.16) kifejezés alapján kell meghatározni. A csillagászok a bolometrikus fluxus helyett az $m_{bol} = -2,5\log_{10}F$ **bolometrikus magnitúdót** szokták mérni:

$$m_{bol}(z) = 5\log_{10}(1+z) + 5\log_{10}\Phi(\chi_{em}(z)) + \text{ const.} \tag{2.9.12}$$

Vizsgáljuk meg a (2.9.12) függvényt, ha $z \ll 1$. Ekkor az első tag $5\log_{10}(1+z) \approx 5z/\ln 10$. A második tagban $\chi_{em} \ll 1$, ha $z \ll 1$, de ekkor az integrálközépérték-tételt alkalmazva

$$\Phi(\chi_{em}(z)) \approx \chi_{em}(z) = \frac{1}{a_0}\int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \approx \frac{1}{a_0}\frac{z}{H(\zeta)}, \tag{2.9.13}$$

ahol a $\zeta = z/2$ választással szokás élni. A (2.9.12) kifejezés második tagja ezért

$$5\log_{10}\Phi(\chi_{em}(z)) \approx 5\log_{10}z - 5\log_{10}H(\zeta) + \text{const.} = \frac{5}{\ln 10}[\ln z - \ln H(\zeta)]. \quad (2.9.14)$$

Másrészről írhatjuk, hogy

$$\ln H(\zeta) \approx \ln[H_0 + H'(0)\zeta] \approx \frac{H'(0)}{H_0}z + \text{ const.}, \quad (2.9.15)$$

ahol – felhasználva a $t(z)$ függvény (2.8.14) alakját –

$$H'(z) = \dot{H}t'(z) = \frac{-\dot{H}}{H(z)(1+z)} \quad (2.9.16)$$

adódik, úgyhogy $H'(0)/H_0 = -\dot{H}(0)/H_0^2$. Ugyanakkor a $H = \dot{a}/a$ kifejezést deriválva az idő szerint

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -H^2\left(1 - \frac{\ddot{a}}{aH^2}\right), \quad (2.9.17)$$

aminek a segítségével

$$\ln H(\zeta) \approx -\dot{H}(0)/H_0^2\zeta \approx \left(1 - \frac{\ddot{a}(0)}{a_0H_0^2}\right)\zeta = (1+q_0)\zeta. \quad (2.9.18)$$

Itt

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(0)}{a_0H_0^2} \quad (2.9.19)$$

az úgynevezett **lassulási paraméter („deceleration parameter”),** amelynek pozitív értéke a Világegyetem tágulásának lassulását jellemzi. A bolometrikus magnitúdó tehát $z \ll 1$ esetén

$$\begin{aligned} m_{bol}(z) &\approx 5\log_{10}z + \frac{5}{\ln 10}[z - (1+q_0)\zeta] + \text{const.} \\ &\approx 5\log_{10}z + \frac{2,5}{\ln 10}(1-q_0)z + \text{const.}, \end{aligned} \quad (2.9.20)$$

ahol behelyettesítettük a $\zeta = z/2$ értéket.

A (2.3.14) Friedmann-egyenletből kifejezhetjük a lassulási paramétert a $p(\epsilon)/\epsilon$ állapot-egyenlettel. Írjuk ehhez a (2.3.14) egyenletet

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3H^2}\epsilon\frac{H^2}{2}\left(1 + \frac{3p(\epsilon)}{\epsilon}\right) = -\frac{\epsilon}{\epsilon_{kr}}\frac{H^2}{2}\left(1 + \frac{3p(\epsilon)}{\epsilon}\right) \quad (2.9.21)$$

alakba, ahonnan azonnal adódik, hogy

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(0)}{a_0H_0^2} = \frac{1}{2}\Omega_0\left(1 + \frac{3p(\epsilon_0)}{\epsilon_0}\right). \quad (2.9.22)$$

A kapott eredményből az következik, hogy ha mérjük a standard gyertyák bolometrikus magnitudóját a fényük relatív vöröseltolódásának a függvényében, akkor abból vissza tudunk következtetni a lassulási paraméterre és azon keresztül a Világegyetemben található anyag állapotegyenletére.

Az IA típusú szupernóvákat, mint standard gyertyákat vizsgálva rendkívül érdekes eredményt kaptak a fizikusok. A q_0 lassulási paraméter értéke negatívnak adódott, ami azt jelenti, hogy a Világegyetem gyorsulva tágul. Ez azért meglepő, mert azt várjuk, hogy a tágulás lassul amiatt, hogy a Világegyetem anyagának egyes darabjai gravitációsan vonzzák egymást, ami fékezi a tágulást. A (2.3.14) Friedmann-egyenlet alapján gyorsuló tágulás csak akkor képzelhető el, ha a Világegyetem energiasűrűségének jelentős részét olyan anyag alkotja, amelynek nyomása negatív, ill. amelyre jellemző $w = p/\epsilon$ hányados negatív. Ez a feltételezett anyag az úgynevezett **sötét energia („dark energy").**

Az egyik lehetőség, hogy a sötét energia szerepét a vákuum energiája, azaz a Λ **kozmológiai állandó** el nem tűnő értéke játssza, ami $p = -\epsilon$, azaz $w = -1$ állapotegyenletnek felel meg. A másik lehetőség, hogy a sötét energia dinamikai természetű, pl. egy időben lassan változó skalármezőnek tulajdonítható; ekkor **kvintesszenciáról („quintessence")** szokás beszélni. A Világegyetem gyorsuló tágulásának megfigyelése sok izgalmas kozmológiai kérdést vet fel. Ezek egyik része a sötét energia eredetére vonatkozik. A másik részük arra irányul, hogy mi a magyarázata annak, hogy a gyorsuló tágulás vált uralkodóvá a Világegyetemben egy viszonylag hosszú előzetes fejlődés után, és ez miért pont akkor történt, amikor. A kérdések egy további része pedig a Világegyetem jövőjére vonatkozik. Ez aszerint nagyon eltérő lehet, hogy mi az eredete a sötét energiának. Ha vákuumenergiáról van szó, akkor a gyorsuló tágulás a végtelenségig fog folytatódni, miközben a Világegyetem kiürül (a többi anyagösszetevőjének energiasűrűsége zérushoz tart). Ha viszont a sötét energia dinamikai eredetű, akkor a dinamikai skalártér bomlás révén újra benépesítheti anyaggal a Világegyetemet. Nem tudjuk azonban, hogy mi is a sötét energia eredete, és ezért a Világegyetem jövője egyike a nyitott kérdéseknek.

Még egy fontos körülményről kell említést tenni. A $z \ll 1$ esetben a bolometrikus magnitúdóra közelítéssel kapott eredményünk kb. $z < 0,3$ esetén használható, nagyobb z-k esetében nem. Azon megfigyelések során, amelyekből a gyorsuló tágulásra vonatkozó következtetések származnak, olyan szupernóvákat használtak standard gyertyákként, amelyek esetében $z \approx 1$ nagyságrendű. Ekkor tehát nem alkalmazható a közelítő képletünk, hanem az egzakt (2.9.12) összefüggésből kell kiinduljunk. Ekkor a kozmológiai modellek valamelyik osztályát választva tudjuk meghatározni a $\Phi(\chi_{em}(z))$ mennyiséget.

Tegyünk fel például sík térgeometriájú, hideg anyagot és kozmológiai állandót tartalmazó Világegyetemet, amelyben $\Omega_0 = \Omega_\Lambda + \Omega_m$, ahol Ω_Λ, ill. Ω_m rendre a sötét energia sűrűségének, ill. a hideg anyag energiasűrűségének és a kritikus energiasűrűségnek a hányadosa. Ekkor meg lehet mutatni, hogy

$$\Phi(\chi_{em}) \quad = \quad \chi_{em}(z) = \frac{1}{H_0 a_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m (1+z')^3 + 1 - \Omega_m}}. \tag{2.9.23}$$

Ezt felhasználva, kiszámolták numerikusan az $m_{bol}(z)$ bolometrikus magnitúdót Ω_m különböző értékeire, és azt tapasztalták, hogy a csillagászati eredményeket akkor sikerül legjobban reprodukálni, ha $\Omega_m \approx 0,3$. Ez azt jelenti, hogy **a Világegyetem energiasűrűségének ma kb. 70%-a sötét energia, kb. 30%-a anyag. Az utóbbiban kb. 4% a barionikus anyag, és kb. 26% a sötét anyag.** A sugárzás (a fotonok és a neutrínók és a vélhetően jelenlevő gravitációs sugárzás) hányada a teljes $\Omega_0 \approx 1$ értékben elenyészően kicsiny.

3 A VILÁGEGYETEM VÁZLATOS FEJLŐDÉSTÖRTÉNETE

3.1 Anyagösszetétel

3.1.1 Az energiasűrűség összetevői

A Világegyetem tágulása a Friedmann-egyenletek szerint attól függ, hogy hogyan változik az energiasűrűség és hogy melyek az egyes anyagösszetevők, ill. azok állapotegyenletei. Azok az anyagösszetevők, amelyek néhány MeV alatti hőmérsékleteken szerepet játszottak, ill. játszanak, a primordiális (őseredeti) sugárzás, a barionok, az elektronok, a neutrínók, a sötét anyag és a sötét energia. Vegyük most sorra ezeket az összetevőket a Világegyetem energiasűrűségéhez való jelenlegi hozzájárulásukból kiindulva.

- **A primordiális sugárzáson** a jelenleg $T_{\gamma 0} = 2,73$ K hőmérsékletű kozmikus mikrohullámú háttérsugárzást (CMB) értjük. Ez jelenleg $\epsilon_{\gamma 0} = 10^{-34}$ g/cm^3 energiasűrűséget ($c = 1$!), a kritikus energiasűrűségnek 10^{-5}-ed részét képezi; a spektruma tökéletes Planck-spektrum. Ez a kozmikus hőmérsékleti sugárzás már a Világegyetem viszonylag korai, jóval 1 GeV hőmérséklet feletti szakaszában jelen volt, csak akkor még nem volt mikrohullámú. Mivel a sugárzás energiasűrűsége a skálafaktor negyedik hatványával fordítottan arányos, ezért a korai időszakban ennek a sugárzásnak sokkal nagyobb volt a hozzájárulása a teljes energiasűrűséghez.

- **A barionikus anyagból** épülnek fel a bolygók, a csillagok, a gázfelhők, a kis tömegű sötét „csillagok" és a feketelyukak is. A könnyű elemek gyakoriságából és a CMB-adatokból is arra lehet következtetni, hogy a barionikus anyag jelenleg a teljes energiasűrűségnek kb. 4 %-át, $\Omega_b \approx 0,04$ képezi. Jelenleg 1 barionra átlagosan 10^9 foton jut.

- **Sötét anyag és sötét energia.** A CMB fluktuációkból arra lehet következtetni, hogy a Világegyetem teljes energiasűrűsége jelenleg kb. megegyezik a kritikus energiasűrűséggel, $\Omega \approx 1$. A fentebb elmondottak fényében ez azt jelenti, hogy a Világegyetem anyagának nagy része sötét és nem barionikus. Több megfigyelés együtteséből (a CMB-adatok, a Világegyetem nagy méretskálákon mutatott szerkezete, a gravitációs lencse-effektus és a nagy vöröseltolódású szupernóvák alapján) arra következtetnek a fizikusok, hogy a sötét összetevő maga is két vagy több összetevőtől származik. Nevezetesen, a sötét összetevő részben **hideg sötét anyagból („cold dark matter"),** részben **sötét energiából („dark energy")** áll. A hideg sötét anyag nyomása zérus, és képes **gravitációs csomósodásra („clustering")** miáltal hozzá tud járulni a gravitációs instabilitások képződéséhez. A különböző (szuperszimmetrikus) részecskefizikai elméletek természetes jelölteket szolgáltatnak a hideg sötét anyagra, köztük a **gyengén kölcsönható tömeges részecskék** jöhetnek mai ismereteink szerint leginkább számításba. A nem barionikus hideg sötét anyag a kritikus sűrűségnek kb. 26 %-át teszi ki. A maradék kb. 70 % a sötét energia járuléka. Ez negatív nyomású, nem csomósodó összetevő. Ennek eredetéről ma azt gondoljuk, hogy az vagy a vákuum energiája, azaz a kicsi $\Lambda > 0$ kozmológiai állandónak megfelelő $p_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$ állapotegyeneletű „ideális folyadék", vagy egy dinamikai skalártér kondenzátumának energiája, az úgynevezett **kvintesszencia („quintessence"),** amelynek állapotegyenlete $p = w\epsilon$, ahol $w \leq -1/3$.

- **A primordiális neutrínók** is a kezdeti, forró Világegyetemből maradtak vissza. A tőlük származó háttérsugárzást egyelőre nem tudjuk mérni. Ha az egyes neutrínófaj-

ták mind zérus nyugalmi tömegűek lennének, akkor ma a termikus neutrínó-háttérsugárzás hőmérséklete 1,9 K lenne, és a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzásból eredő energiasűrűségnek 0,68-szorosával járulna hozzá a teljes energiasűrűséghez. A neutrínó-oszcillációs kísérletek eredményeiből arra lehet következtetni, hogy a neutrínóknak van tömegük, bár az kicsi. Ám még ekkor is úgy becsülhető, hogy a primordiális neutrínók 1 %-ot nem meghaladó mértékben járulhatnak csak hozzá a kritikus energiasűrűséghez.

- Egy további összetevőt képviselhetnek a Világegyetem kezdeti, felfúvódó szakaszából visszamaradt **primordiális gravitációs hullámok**, egyelőre azonban ezeket sem tudjuk mérni.

3.1.2 A Világegyetem fejlődési korszakai

A Világegyetem dinamikai fejlődésében jellemző korszakok különíthetők el aszerint, hogy az energiasűrűségnek melyik összetevője meghatározó. Ehhez vegyük először figyelembe, hogy növekvő z relatív vöröseltolódással a sugárzás, a barionikus és a hideg nem barionikus anyag, továbbá a sötét energia járulékának z-függése rendre:

$$\epsilon_\gamma(z) = \epsilon_{\gamma 0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 = \epsilon_{\gamma 0}(1+z)^4, \tag{3.1.1}$$

$$\epsilon_m(z) = \epsilon_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \epsilon_{kr\ 0}\Omega_m(1+z)^3, \tag{3.1.2}$$

$$\epsilon_Q(z) = \epsilon_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} = \epsilon_{kr\ 0}\Omega_Q(1+z)^{3(1+w)}, \tag{3.1.3}$$

ahol $\epsilon_{kr\ 0} = 3H_0^2/8\pi G$ a kritikus energiasűrűség értéke ma, Ω_m a barionikus anyag és a hideg nem barionikus sötét anyag hozzájárulása a kozmológiai paraméterhez, Ω_Q pedig a sötét energia hozzájárulása a kozmológiai paraméterhez.

Ha időben visszafelé követjük a Világegyetem fejlődését, akkor Ω_Q nő a leglassabban, Ω_m kicsit gyorsabban és Ω_γ a leggyorsabban. Ezért létezik olyan z_Q, hogy $z > z_Q$ esetén a barionikus anyag meg a hideg sötét anyag együttes járuléka nagyobb, mint a sötét energia járuléka:

$$z_Q = \left(\frac{\Omega_Q}{\Omega_m}\right)^{-1/3w} - 1. \tag{3.1.4}$$

Ez a jelenlegi ($z = 0$) időpillanathoz közel, kb. $z_Q \approx 0,33 - 1,33$ értékek között helyezkedik el, ha $-1 \leq w < -1/3$, $\Omega_m \approx 0,3$ és $\Omega_Q \approx 0,7$. Fizikai időben úgy becsülhetjük, hogy $0 < t < t_Q$ ideig a por uralta a Világegyetemet, ezért $t_Q/t_0 \approx (1+z_Q)^{-3/2} \approx 0,4 - -0.08$.

Hasonlóképpen, a sugárzási energiasűrűség az időben visszafelé haladva gyorsabban nő, mint a hideg anyag energiasűrűsége, úgyhogy létezik olyan z_{eq} vöröseltolódás, hogy $z > z_{eq}$ esetén a sugárzás válik dominálóvá,

$$z_{eq} = \frac{\epsilon_{kr\ 0}\Omega_m}{\epsilon_{\gamma\ 0}} - 1 \approx 2,26 \cdot 10^4 \Omega_m h_{75}^2, \tag{3.1.5}$$

ahol

$$h_{75} = \frac{H_0}{75\ \mathrm{kms^{-1}Mpc^{-1}}}, \tag{3.1.6}$$

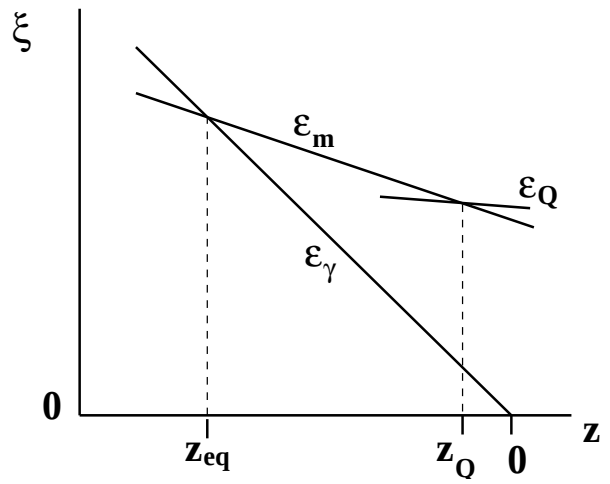

Figure 9: Az energiasűrűség egyes összetevőinek z-függését kvalitatív módon mutató ábra. A függőleges tengelyen $\xi = \ln(\epsilon_x/\epsilon_{\gamma 0})$ van ábrázolva.

ahol H_0 a Hubble-paraméter jelenlegi értéke. A becsült érték $z_{eq} \approx 10^4$, és ha azzal a közelítéssel élünk, hogy $z > z_{eq}$ esetén a sugárzás dominált, akkor $t_{eq}/t_0 \approx (1 + z_{eq})^{-2} \approx 10^{-8}$.

A fentiek alapján jól elkülöníthető három dinamikailag különböző fejlődési korszak a Világegyetem történetében.

- **A sugárzás uralta fejlődés korszaka,** $z > z_{eq} \approx 10^4$, amikor a Világegyetemet ultrarelativisztikus, $p = \epsilon/3$ állapotegyenletű sugárzás uralja; ekkor a skálafaktor $a \propto t^{1/2}$ skálatörvény szerint nő.
- **Az anyag uralta korszak,** $z_{eq} > z > z_Q \approx 1$, amikor a $p = 0$ zérus nyomású összetevő határozza meg a skálafaktor $a \propto t^{2/3}$ törvény szerinti növekedését.
- **A sötét energia korszaka,** $z > z_Q \approx 1$, amikor a tágulást a negatív nyomású, $p = w\epsilon$ $(-1 \leq w < -1/3)$ állapotegyenletű összetevő határozza meg. A skálafaktor $a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$ szerint növekszik növekvő idővel. Míg az előző két korszakban a tágulás lassuló, addig ebben a korszakban a tágulás gyorsuló.

Ezekkel a korszakokkal kapcsolatban meg kell állapítsuk, hogy ahhoz, hogy a Világegyetemben ma észlelt szerkezetek (bolygók, csillagok, galaxisok, galaxishalmazok, továbbá a legnagyobb méretskálákon a kozmikus szövedék) ki tudjanak alakulni, a sötét energia uralma nem következhetett be túlságosan korán. A z_Q értéke azt mutatja, hogy ez éppen mostanában következett (következik) be. Ez az egybeesés, hogy éppen akkor kezd a sötét energia uralkodóvá válni, amikor az Emberiség itt a Földön jelen van, és képes ennek megfigyelésére, talán csak egy furcsa véletlen, de mindenképpen rejtélyesnek látszik. (Vegyük észbe, hogy az emberi történelem egésze, – kb. az utolsó 50 ezer év, – csak egy pillanat a kb. 14 milliárd évet átfogó kozmikus időskálán.)

3.2 Korszakok

A Világegyetem fejlődése az általános térgeometria, ill. téridő-geometria alakulásán túl részleteit tekintve nagy mértékben függ attól, hogy milyen állapotegyenletet írunk az Einstein-egyenletekbe, ill. a belőlük homogén és izotróp Világegyetem esetére levezetett Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-egyenletekbe. Az állapotegyenlet azonban a Világegyetem fejlődése során maga is változik aszerint, hogy hogyan változik az anyagösszetétel, ill. a jelenlevő anyag fázisa. Nagyjából az utóbbinak megfelelően, azaz annak megfelelően, hogy milyen kölcsönhatások jellemzik adott időszakban a Világegyetem anyagát, ill. hogy milyen alakban, fázisban van az anyag jelen az adott időszakban, a Világegyetem fejlődéstörténetét jellegzetes **korszakokra („epochs")** bonthatjuk. Természetesen ezek a korszakok tulajdonképpen az előző fejezetben meghatározott korszakokon belüli finomabb szakaszolást jelentenek. A korszakhatárokat megadhatjuk a fizikai időben, de a sugárzás uralta korszakban használhatjuk erre a célra a primordiális elektromágneses sugárzás (a jelenlegi CMB) hőmérsékletét is. Utóbbi a frekvenciához hasonlóan $1/a$ szerint skálázik a skálafaktorral, ami azt jelenti, hogy $T_\gamma(z) = T_{\gamma\ 0}(1+z)$ törvény szerint változik a z relatív vöröseltolódás függvényében. A MeV-ben mért hőmérséklet és a s-ban mért idő között $T_{MeV} = \mathcal{O}(1)/\sqrt{t_s}$ összefüggés áll fenn a sugárzás uralta korszakban.

Az alábbiakban felvázoljuk az egyes korszakokat, anélkül, hogy belemerülnénk azoknak a részletes analízisébe. Természetesen annak tudatában tekintünk el itt a további részletektől, hogy azok rendkívül fontos részismereteket tartalmaznak az egyes részecskefizikai, magfizikai és atomfizikai folyamatokról, amelyek szervesen beépülnek a Standard Kozmológiai Modellbe, legyen az annak akár a hagyományos, Ősrobbanáson alapuló változata, akár a felfúvódást is magába építő változata. A Standard Kozmológiai Modell csak az itt el nem mondott fizikai részletekkel kiegészítve alkalmas olyan numerikus számítások elvégzésére, amelyek alapján reprodukálni tudja a látható Világyetemre vonatkozó adatainkat.

3.2.1 Planck-korszak

A **Planck-korszak („Planck epoch")** az Ősrobbanástól számítva kb. 10^{-43} s-ig ($T \approx 10^{19}$ GeV) tart, ami kb. a Planck-idő. Ebben a korszakban olyan magas volt a hőmérséklet, hogy feltehetően az általunk alacsony energián észlelt elektromágneses, gravitációs, gyenge és erős kölcsönhatás egyetlen alapvető kölcsönhatásban egyesült. A hagyományos, általános relativitáselméleten alapuló kozmológia egy Ősrobbanásnak nevezett szingularitásból induló fejlődésre következtet. Utóbbi azonban erősen vitatható, mert ebben az időszakban az általános relativitáselmélet nem megbízható. Kezdetben valószínűleg egyformán fontos szerepet játszottak a kvantum- és a gravitációs effektusok. Várhatóan egy nem perturbatív elmélet, mint valamilyen **húrelmélet („string theory")** vagy a **hurok-kvantumgravitáció („loop quantum gravity")** tudna megválaszolni olyan kérdéseket, mint a kezdeti téridőszerkezet, a kezdeti szingularitások kérdése. Ugyanakkor kicsivel később, mint a Planck-idő, azaz kicsivel kisebb hőmérsékleten (energián) a klasszikus téridőnek már van értelme, és azt várjuk, hogy az általános relativitáselméletre alapozott kozmológia jól működik.

3.2.2 A felfúvódás korszaka

Valószínűsíthető, hogy a fenti időszakot egy olyan korszak követte, amikor **a Világegyetem időben exponenciálisan felfúvódott,** kb. a $10^{-43} - 10^{-36}$ s ($T \approx 10^{19} - 10^{16}$ GeV) időszak alatt, közvetlenül a soron következő Nagy Egyesítés korszaka előtt. En-

nek a korszaknak a legfontosabb következményei annyira robosztusak, hogy alig függenek részecskefizikai részletektőltól és a felfúvódás modelljétől. A felfúvódó Világegyetem modellje ugyanakkor számos kozmológiára vonatkozó csillagászati megfigyelésnek természetes magyarázatát adja, mint arra a bevezetőben részben már utaltunk. Ezekre a felfúvódás tárgyalásakor még részletesen vissza fogunk térni. Mindez amellett szól, hogy valószínűleg kellett lennie egy ilyen korszaknak.

3.2.3 A Nagy Egyesítés korszaka

A **Nagy Egyesítés korszaka („Grand Unification epoch")** kb. a $10^{-36} - 10^{-14}$ s ($T \approx 10^{16}$ GeV- 10 TeV) időszak. Azt várjuk, hogy ekkor az elektrogyenge és az erős kölcsönhatás valamilyen Nagy Egyesített Elmélete („Grand Unification Theory") lehet képes a fizikai törvények leírására. A Világegyetem barion-aszimmetriája is valószínűleg ekkor jött létre. Ennek a korszaknak a fizikája nem ismert, túlmutat az elektrogyenge és az erős kölcsönhatás Standard Modelljén. A szuperszimmetria is fontos szerepet játszhatott ebben az időszakban. Szuperszimmetrikus elméletek jósolnak olyan tömeges részecskéket, amelyek képezhetik a hideg sötét anyagot. A korszakkal kapcsolatos egyik fontos tisztázatlan kérdés éppen a Világegyetem ekkori anyagösszetétele.

3.2.4 Az elektrogyenge és erős kölcsönhatás Standard Modelljének korszaka

A $10^{-14} - 10^{-10}$ s ($T \approx 10$ TeV - 100 GeV) időtartamra kiterjedő korszakról van szó, amikor **a gyenge és az erős kölcsönhatás Standard Modelljének fizikája érvényes,** ami gyorsítókkal is vizsgálható, tulajdonképpen jól (vagy legalább is elég jól) ismert részecskefizika. Az elektrogyenge szimmetriasértés skálája kb. 100 GeV. Még efölött vagyunk, az elektrogyenge szimmetria még sértetlen, a mértékbozonok még tömeg nélküliek. A szimmetria visszaállásának skálája fölötti topológiai fázisátalakulások során erősen sérülhet a fermion- és barionszám megmaradása.

3.2.5 A kvarkok és gluonok bezáródása

Kb. 10^{-5} s ($T \approx 10$ MeV) időpont környékén megtörténik a kvarkgluon-plazmának a fázisátalakulása bezáró fázisba, amikor a kvarkok és a gluonok bezáródnak a barionokba és a mezonokba. Jelenlegi ismereteink szerint ennek valószínűleg nincsen komolyabb kozmológiai nyoma.

3.2.6 A primordiális neutrínók lecsatolódása

Kb. $0,2$ s ($T \approx 1 - 2$ MeV) körül a primordiális neutrínók lecsatolódnak a többi anyagról, és további szóródások nélkül terjednek a későbbiekben, mert bizonyos gyenge-kölcsönhatási folyamatok egyensúlya megszűnik. Ezt követően a neutron-proton arány is befagy, mert azok a folyamatok, amelyek eddig kémiai egyensúlyban tartották őket, hatástalanokká válnak. Az ezt túlélő neutronok száma meghatározza a primordiális elemek gyakoriságát.

3.2.7 Az elektron-pozitron annihilláció korszaka

Az Ősrobbanás után kb. 1 s ($T \approx 0,5$ MeV) idővel a hőmérséklet eléri az elektron nyugalmi tömegét. Ekkor megindul az elektronok és a pozitronok annihillációja. Amint a hőmérséklet tovább csökken, csak egy nagyon kis elektrontöbblet marad vissza, kb. 1 elektron 1 milliárd fotonra. A keletkező fotonok termikus egyensúlyban vannak, és a sugárzás hőmérséklete ekkor megnövekedik a neutrínók hőmérsékletéhez képest, amelyek már korábban lecsatolódtak.

3.2.8 A primordiális nukleoszintézis korszaka

A 200 − 300 s ($T \approx 0,05$ MeV) időszakban jelentőssé válnak a magreakciók, amelyek révén a kezdetben szabad protonok és neutronok héliumot és más könnyű atommagokat alkotnak. Ez az őseredeti mukleoszintézis. A könnyű elemek gyakoriságaira a primordiális nukleoszintézis folyamatai alapján kapott elméleti becslések nagyon jó egyezést mutatnak a megfigyelt adatokkal. Ez erős bizonyítéka annak, hogy a Világegyetem történetét az Ősrobbanás utáni kb. 1 s-ig helyesen tudjuk visszakövetkeztetni.

3.2.9 Az anyag és a sugárzás egyenjogúsága

Az Ősrobbanás után 10^{11} s ($T \approx \mathcal{O}(1)$ eV) időpillanat táján a sugárzás és az anyag energiasűrűsége egyenlővé válik. A pontos időpont függ attól, hogy milyen a sötét összetevő részecske-tartalma; értéke csak egy $\mathcal{O}(1)$ nagyságrendű tényező erejéig ismert. Ez tehát az az időpont, amikor a sugárzás által uralt időszak megszűnik és a Világegyetem átlép az anyag által uralt korszakba.

3.2.10 A rekombináció korszaka

Kb. $10^{12} - 10^{13}$ s-mal az Ősrobbanás után nagyjából az összes szabad elektron és proton rekombinálódik és elektromosan semleges H-atomot alkot. Ettől kezdve a Világegyetem átlátszóvá („transparent") válik az elektromágneses háttérsugárzásra. A rekombináció idején az energiasűrűségben jelenlevő kicsiny inhomogenitások megjelennek a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás hőmérsékletének ingadozásaiban. Ezek a mai napig is jelen vannak, és információt hordoznak arról, hogy milyen volt a Világegyetem állapota, amikor a téridőben **az utolsó szóródás hiperfelületén („last scattering surface")** tartózkodott, azaz azon a térszerű hiperfelületen, amelyen a fotonok utoljára szóródtak az anyag töltött részecskéin.

Fontos még megjegyezni, hogy a protonok és elektronok rekombinációját kicsit megelőzte a He-atommagok rekombinációja semleges He-atomokká. A He a Világegyetem barionikus anyagának kb. 25 %-át képezi. A He-rekombináció után még viszonylag sok szabad elektron volt jelen, úgyhogy a Világegyetem még homályos („opaque") maradt az elektromágeneses sugárzásra nézve. A He-rekombináció tehát nem okozott drámai változást, viszont figyelembe kell venni a CMB fluktuációk elméleti számítása során, mert befolyással van a hangsebességre. Azt meg láttuk, hogy a CMB fluktuációk autokorrelációs függvényén az első akusztikus csúcs helye döntő jelentőségű a kozmológiai paraméter jelenlegi Ω_0 értékének meghatározása szempontjából.

3.2.11 A szerkezetképződés korszaka

Ez a szakasz, ami alatt a Világegyetem makroszerkezetének kialakulása történik, kb. az Ősrobbanás utáni $10^{16} - 10^{17}$ s-ig (30 – 300 millió év) tart. A kezdeti kicsiny inhomogenitásokból a gravitációs instabilitások hatására jönnek létre a galaxisok és a galaxishalmazok. Ennek a folyamatnak az elméleti, az általános relativitáselméleten alapuló megértése egy bonyolult nem lineáris probléma numerikus megoldását igényli. A nem-linearitás okozta számítási nehézségeken túl itt fontos lenne ismerni a sötét anyag és a sötét energia mibenlétét. Ennek a korszaknak a kutatása még bizonyára hosszú ideig nyitott terület lesz.

3.2.12 A jövő?

Azt várnánk a kozmológiai modellünktől, hogy ne csak a Világegyetem múltbeli történéseire adjon magyarázatot, hanem előrejelzéssel is szolgáljon annak jövőjét illetően. Mint arról már említés történt, a jelen kb. annak az időpontnak felel meg, amikor a sötét energia átveszi az uralmat az anyag felett, és azóta a Világegyetem gyorsulva tágul. (A sugárzás súlya a kritikus sűrűségben napjainkban már nagyon csekély.) A Világegyetem további sorsa nagy mértékben attól függ, hogy a sötét energia természete milyen. Mint arról már volt szó, a jövő minőségileg is nagyon különböző lehet a különböző esetekben. Ha a sötét energia a vákuum energiáját jelenti, akkor a gyorsuló tágulás örök időkig folytatódik és a Világegyetem kiürül, az energiasűrűség zérussá válik. Ha a sötét energia kvintesszencia, akkor elképzelhető, hogy a kondenzátum bomlás révén újra részecskékben materializálódik és azok felfűtik újra a Világegyetemet. Van azonban olyan elképzelés is, amely a megfigyelések széles körét a felfúvódó Világegyetem modellje nélkül is meg tudja magyarázni és azt jósolja, hogy a Világegyetem fejlődése ciklikus. Utóbbi a Penrose által javasolt **Konform Ciklikus Kozmológia („Conformal Cyclic Cosmology" (CCC))** modellje. Ez a terület felvet egy csomó nyitott kérdést, és éppen azáltal, hogy a ciklikusság lehetősége is esetleg felmerül, szorosan összekapcsolódik, összekapcsolódhat a kezdetek, a Planck-korszak körüli kérdéskörrel.

4 A FELFÚVÓDÓ VILÁGEGYETEM

4.1 Kezdeti feltételek

4.1.1 A kezdőfeltételek szerepe

A Világegyetemnek a Planck-korszak utáni geometriai fejlődése az általános relativitáselmélet keretében tárgyalható, ami a gravitáció klasszikus, nem kvantumfizikai elmélete. Azt azonban hozzá kell tegyük, hogy az Einstein-egyenletekbe, amelyek az általános relativitás dinamikai egyenletei, be kell írni az anyag energiaimpulzus-tenzorát. Ehhez a fizikai mezők dinamikai egyenleteire és a részecskék mozgásegyenleteire van szükség. Az utóbbi lépés homogén és izotróp Világegyetem esetén kiváltható az energiaimpulzus-tenzornak az állapotegyenlet segítségével történő parametrizálásával, ha az anyagot együtt mozgó folyadéknak feltételezzük; ez történik a Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker-egyenletekben. Természetesen realisztikus esetben az energiaimpulzus-tenzorhoz többféle anyagösszetevő (beleértve a sugárzást, a barionikus és a sötét anyagot és a sötét energiát is) hozzájárul, amelyeknek eltérők az állapotegyenletei. Ráadásul, korszakról korszakra haladva az anyagban zajló részecskefizikai, atommagfizikai és atomfizikai folyamatok következtében az állapotegyenletek változnak. Ezek alakjában benne sűrűsödik mindaz a klasszikus és kvantumfizikai ismeretünk, amit az anyagról a Planck-tömegnél alacsonyabb energiaskálákon szereztünk. A Világegyetem fejlődésének az általános relativitás elmélete keretében történő tárgyalását az igazolja, hogy a Világegyetemre vonatkozó megfigyeléseinket sikerül kb. az Ősrobbanás utáni első másodpercig megérteni. Ennek legjellemzőbb bizonyítékai a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás, a nukleoszintézis következtében kialakuló elemgyakoriságok, a foton-barion arány, a hidrogén-hélium arány, stb. megértése.

Abból, hogy csillagászati megfigyeléseink alapján a Világegyetemünk tágul, az általános relativitáselmélet szilárd talaján arra következtetünk, hogy a Világegyetem és a téridő Ősrobbanással vette kezdetét, amikor végtelen volt az energiasűrűség és a térnek nem volt fizikai kiterjedése. Ráadásul az általános relativitáselméletben az is szigorúan bizonyítható, hogy ez az Ősrobbanásnak nevezett kezdeti fizikai szingularitás akkor is megvolt, ha nem tesszük fel, hogy a Világegyetem homogén és izotróp. Erre a fizikai szingularitással bekövetkezett kezdetre azonban csak akkor szabad következtetnünk, ha azt is elfogadjuk, hogy az általános relativitáselmélet mindvégig érvényben volt. A kezdeteknél, a Planck-korszakban azonban ez erősen kétséges, sőt ma szinte bizonyosak vagyunk, hogy a Planck-tömegnél nagyobb energiaskálákon a gravitációs effektusok és a kvantumeffektusok egyformán jelentősek voltak. Van többféle elmélet (pl. húrelméleti modellek, kvantumgravitációs elméletek), ami jelölt lehet ezen korszak fizikájának tárgyalására. Valójában azonban nem tudjuk, hogy van-e a gravitációnak kvantumelmélete, és ha van, milyen az, ha meg nem lenne, akkor mi van helyette. Mindennek dacára az általános relativitás elméletén alapuló kozmológiai modellek azon következtetését, hogy mostantól visszaszámítva extrapolálható egy feltételezett Ősrobbanás időpontja, elfogadhatjuk, és használhatjuk ezt az időpontot, mint az időskálánk nullpontját. Ha nem volt Ősrobbanás, akkor lehet, hogy az időtengely folytatható a negatív irányban, de az is lehet, hogy az idő fogalmával is bajba jutunk. Mindez azonban a jelen tárgyalásunkat egyrészt meghaladja, másrészt nem érinti. Most kizárólag a Világegyetemnek arra a fejlődési szakaszára szeretnénk összpontosítani figyelmünket, ami a Planck-korszak után következett, amikor az általános relativitáselméletet már alkalmazhatónak gondoljuk.

Az Einstein-egyenletek (ill. a Friedmann-egyenletek) a téridő mozgásegyenletei. Megoldásukhoz valamilyen t_i kezdeti időpillanatban meg kell adni a kezdőfeltételeket

(általánosságban egy úgynevezett Cauchy-felületen, homogén és izotróp esetben ez a téridő rétegző felületeinek egyike). Válasszuk a fentiek alapján a kezdeti időpontot a Planck-időnek, $t_i \approx 10^{-43}$ s-nak. A kezdőfeltételek azt az állapotot rögzítik, amelyben a Világegyetem kiemelkedik a Planck-korszakból és megkezdi klasszikus fizikai geometriai fejlődését. A kérdés, hogy milyennek kellett lennie ennek a kezdeti állapotnak ahhoz, hogy olyan, a néhány száz Mpc-os távolságskálán lényegében homogén és izotróp, finomabb felbontásban olyan inhomogenitást mutató Világegyetem jöjjön létre, mint amilyennek azt ma megfigyeljük. Először azt fogjuk taglalni, hogy milyen problémákkal szembesülünk, ha azt feltételezzük, hogy a Világegyetem Friedmann-féle tágulása a Planck-korszak végeztével rögtön megindult. Az Ősrobbanás hagyományosabb (felfúvódási korszakot nem feltételező) modellje –minden sikere ellenére – ezekkel a problémákkal terhes.

A kezdőfeltételek részben az energiasűrűség kezdeti eloszlásának megadását jelentik, részben annak a sebességmezőnek a megadását, ami az anyag kezdeti mozgását jellemzi. Az előbbivel az úgynevezett **horizont-probléma („horizon problem”),** az utóbbival a **laposságí probléma („flatness problem”)** kapcsolatos.

4.1.2 A horizont-probléma

A Világegyetemmel együtt mozgó megfigyelő a Nagy Bummtól számított t pillanatban az $\ell_p(t)$ részecske-horizontig „lát el”,

$$\ell_p(t) = a(t)\int_{t_i}^{t}\frac{dt'}{a(t')}. \tag{4.1.1}$$

A kezdeti t_i pillanatban a Világegyetem kauzális tartományainak lineáris mérete $\ell_c(t_i) = t_i$ kell legyen (mert a vákuumbeli fénysebesség $c = 1$). Ennek együtt mozgó koordinátákban $\chi_c = t_i/a_i$ távolság felel meg, úgyhogy a kauzális tartományok lineáris mérete a t pillanatban

$$\ell_c(t) = a(t)\chi_c = t_i\frac{a(t)}{a_i}. \tag{4.1.2}$$

Azt kapjuk tehát, hogy

$$\frac{\ell_p(t)}{\ell_c(t)} = \frac{a_i}{t_i}\int_{t_i}^{t}\frac{dt'}{a(t')}. \tag{4.1.3}$$

Ez a hányados mondja meg, hogy hogyan viszonyul a t pillanatban a látható Világegyetem mérete a Világegyetem azon tartományainak méretéhez, amelyeken belüli események között kauzális kapcsolat lehet. Becsüljük meg ennek a hányadosnak a nagyságrendjét. Tegyük fel ehhez, hogy a skálaparaméter $a(t) = \alpha t^\beta$ $(0 < \beta < 1)$ hatványfüggvény szerint változik. Ekkor azt találjuk, hogy

$$\frac{\ell_p(t)}{\ell_c(t)} = \frac{a_i}{t_i}\frac{1}{\alpha(1-\beta)}[t^{-\beta+1} - t_i^{-\beta+1}] = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{a_i}{t_i}\frac{t}{a(t)} - 1\right). \tag{4.1.4}$$

Nézzük először a hányados értékét a jelenlegi Világegyetemben,

$$\frac{\ell_p(t_0)}{\ell_c(t_0)} = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{a_i}{a_0}\frac{t_0}{t_i} - 1\right) \approx \frac{1}{1-\beta}\frac{a_i}{a_0}\frac{t_0}{t_i}. \tag{4.1.5}$$

Az a_i/a_0 hányadost megbecsülhetjük annak alapján, hogy az elektromágneses sugárzás $T(t)$ hőmérséklete fordítottan arányos az a skálaparaméterrel,

$$\frac{a_i}{a_0} = \frac{T_0}{T_i} \approx \frac{1\mathrm{K}}{10^{32}\mathrm{K}} \approx 10^{-32}, \tag{4.1.6}$$

ahol T_i-t a Planck-hőmérséklettel azonosítottuk. Ha t_i-t a Planck-idővel tesszük egyenlővé, akkor

$$\frac{a_i}{a_0}\frac{t_0}{t_i} \approx \frac{10^{17}\mathrm{s}}{10^{-43}\mathrm{s}}10^{-32} \approx 10^{28} \tag{4.1.7}$$

adódik. Ehhez képest a kerek zárójelen belüli második tag valóban elhanyagolható, és mivel $1-\beta \sim \mathcal{O}(1)$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\ell_p(t_0)}{\ell_c(t_0)} \approx 10^{28}. \tag{4.1.8}$$

Jelenleg tehát a látható Világegyetem térfogata $\approx 10^{3\cdot 28} = 10^{84}$-szerese az olyan tartományoknak, amelyeken belüli események kauzális kapcsolatban lehetnek. Mégis azt tapasztaljuk, hogy a Világegyetem minden részéből nagyon pontosan (10^{-4} relatív eltéréssel) ugyanolyan hőmérsékletű kozmikus háttérsugárzás érkezik hozzánk.

Vizsgáljuk még meg ezt a horizont-problémát valamely korábbi megfigyelő szempontjából. Ha a skálaparaméter hatványfüggvény szerint változik, akkor a deriváltjára

$$\dot{a}(t) = a(t)\frac{\beta}{t} \tag{4.1.9}$$

adódik, ugyanez a kezdeti t_i pillanatban

$$\dot{a}_i = a_i\frac{\beta}{t_i} \tag{4.1.10}$$

összefüggést jelent. Az utóbbi két egyenlet megfelelő oldalait elosztva egymással, azt találjuk, hogy

$$\frac{a_i}{t_i}\frac{t}{a(t)} = \frac{\dot{a}_i}{\dot{a}(t)} \tag{4.1.11}$$

és

$$\frac{\ell_p(t)}{\ell_c(t)} = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{a_i}{t_i}\frac{t}{a(t)} - 1\right) \approx \frac{\dot{a}_i}{\dot{a}(t)}. \tag{4.1.12}$$

Ha a gravitáció mindig vonzó kölcsönhatás volt, akkor a Világegyetem tágulása a Friedmann-egyenletek szerint mindig lassuló volt, úgyhogy $\dot{a}_i > \dot{a}(t)$, azaz a részecske-horizont, vagyis az elvileg látható Világegyetem mérete mindig nagyobb volt, mint a kauzális tartományainak a mérete. Ezért beszélünk horizont-problémáról. A jelenben fennáll az

$$\frac{\ell_p(t_0)}{\ell_c(t_0)} \approx \frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_0} \approx 10^{28} \tag{4.1.13}$$

nagyságrendi becslés.

4.1.3 A laposság problémája

A kezdőfeltételek másik része a kezdősebességek megadása. Az Einstein-egyenletekkel kapcsolatos Cauchy-probléma akkor és csak akkor egyértelműen meghatározott, ha a kezdeti anyageloszlás és a kezdeti sebességeloszlás is adott. A kezdeti sebességeket a Hubble-törvénnyel összhangban kell megadni a látható Világegyetemben, vagyis a részecske-horizonton belül. Csak így biztosítható, hogy a kezdeti homogenitás ne szűnjön meg rövid idő alatt. Ez önmagában még kiélezettebbé teszi a horizont-problémát. Még finomabban hangoltnak kell lennie a kezdeti állapotnak, hiszen az óriási számú, egymástól kauzálisan független térfogatdarabban nemcsak az anyagsűrűségnek kell nagy pontossággal azonosnak lennie, hanem a sebességeknek is nagy pontossággal követniük kell a Hubble-törvényt. Még élesebben vetődik fel tehát a kérdés, hogy ilyen kezdeti állapot létrejötte hogyan volt lehetséges olyan tartományok között, amelyek nem álltak ok-okozati kapcsolatban.

A kezdeti anyageloszlás egyenletességének pontossága a CMB-adatok szerint legalább $\delta\epsilon/\epsilon \approx 10^{-4}$ kell legyen. Megkérdezhetjük természetesen azt is, hogy a kezdeti sebességeknek milyen relatív pontossággal kell követniük a Hubble-törvényt ahhoz, hogy a kozmológiai fejlődést a jelenig nyomon követve ne kerüljünk ellentmondásba a megfigyelések eredményeivel. Erre a kérdésre úgy kaphatunk választ, hogy összehasonlítjuk egy nagy gömbszimmetrikus anyagfelhőnek a tágulásból adódó kinetikus energiáját és a teljes energiáját. A teljes energia E^{tot} megmarad és minden időpillanatban a tágulásból származó pozitív E^k kinetikus energia és a gravitációs önkölcsönhatásból származó negatív E^p potenciális energia összege. Az energiamegmaradás törvényét felírjuk a kezdeti és a jelen pillanatban:

$$E^{tot} = E_i^k + E_i^p = E_0^k + E_0^p. \tag{4.1.14}$$

A kinetikus energia a sebesség négyzetével arányos. Ha tehát az anyag sebessége mindenütt a Hubble-törvényt követi, akkor a tágulásból származó kinetikus energia a skálaparaméter első deriváltjának négyzetével arányos. Ezért fenn kell álljon az

$$E_i^k = E_0^k \frac{\dot{a}_i^2}{\dot{a}_0^2} \tag{4.1.15}$$

reláció a kinetikus energia kezdeti és mai értéke között. Mivel a teljes energia megmarad, a gravitációs vonzásból származó potenciális energia pedig mindig negatív, azért teljesülnek az alábbi relációk:

$$\frac{E^{tot}}{E_i^k} < \frac{E_0^k}{E_i^k} = \frac{\dot{a}_0^2}{\dot{a}_i^2} \approx 10^{-56}. \tag{4.1.16}$$

Itt felhasználtuk az előző fejezet végén kapott becslésünket, hogy $\dot{a}_0/\dot{a}_i \approx 10^{-28}$. Másrészről a porgömb Newton-i gravitáció hatására történő Hubble-törvény szerinti tágulásának taglalásakor arra a következtetésre jutottunk, hogy a teljes energiának jó közelítéssel zérusnak kell lennie, azaz a kinetikus energiának jó közelítéssel meg kell egyeznie a potenciális energia mínusz egyszeresével.

Arra a megdöbbentő következtetésre jutottunk tehát, hogy a Természetnek a kezdeti sebességeket 10^{-54} % pontossággal kellett volna beállítania a Hubble-törvény szerinti értékekre ahhoz, hogy az óriási pozitív kinetikus energia és a negatív potenciális energia a homogenitás által megkívánt rendkívüli pontossággal zérussá összegződjön. Ha ettől kicsit eltértek volna a kezdeti sebességek, akkor annak drámai következménye lenne: vagy újra összezuhanna a Világegyetem a gravitációs vonzás dominanciája miatt, vagy túl hamar

kitágulna és „üressé” válna (nullához tartana az energiasűrűsége). Egy ilyen finoman hangolt kezdeti állapot létrejötte rendkívül természetellenesnek tűnik akkor, amikor a Világegyetem éppen csak kiemelkedik a kvantumfluktuációk uralta Planck-korszakból. Ez a kezdeti sebességek problémája.

Most megmutatjuk, hogy a kezdeti sebességek csak akkor lehettek ilyen hihetetlen pontossággal finoman hangoltak, ha a Planck-korszak végén a kezdeti Világegyetem hihetetlen mértékben lapos térgeometriát mutatott, azaz a kezdeti sebességek problémája egyúttal a laposság problémája is. Mi a magyarázata, hogy a kezdeti Világegyetem rendkívüli mértékben lapos volt. Az általános relativitás elméletének keretében a fenti problémát az $\Omega(t)$ kozmológiai paraméter nyelvén lehet megfogalmazni. A (2.3.13) Friedmann-egyenletet átírhatjuk

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \tag{4.1.17}$$

alakba. Ha ezt az egyenletet felírjuk a jelen és a kezdeti időpillanatra, majd a két egyenlet megfelelő oldalainak hányadosát képezzük, akkor rendezés után a következő összefüggést kapjuk:

$$\Omega_i - 1 = (\Omega_0 - 1)\frac{(Ha_0)^2}{(Ha_i)^2} = (\Omega_0 - 1)\frac{\dot{a}_0^2}{\dot{a}_i^2} \leq 10^{-56}, \tag{4.1.18}$$

hiszen tudjuk a CMB-adatok analíziséből, hogy $\Omega_0 \approx 1$. A kapott egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a kezdeti Világegyetem óriási pontossággal lapos, azaz Euklidesz-i geometriájú volt. Ennek a következtetésnek a furcsasága, természetellenessége a laposság problémája.

4.1.4 Az őseredeti inhomogenitások problémája

A kezdeti feltételek problematikáját tovább bonyolítja, hogy a kezdeti inhomogenitások amplitudója nem lehetett akármekkora. Meg lehet mutatni, hogy ezeknek $\delta\epsilon/\epsilon \approx 10^{-5}$ nagyságrendűnek kellett lenniük ahhoz, hogy belőlük a gravitációs instabilitások révén kialakulhasson a galaxishalmazok szövedékének az a falakból, üregekből és szálakból álló szerkezete, amelyet megfigyelhetünk. Erre irányult a **Sloan Digitális Égboltfelmérés („Sloan Digital Sky Survey”),** amelynek keretében 2000 óta az égbolt kb. 35 %-át térképezték fel, 500 millió égitestről készítve fotometriás képet és 1 millió objektumnak a spektrumát is megmérték a $z = 0,1$-től a $z = 6$-ot meghaladó vöröseltolódások tartományában. Az SDSS galaxistérképe mutatja azt a kozmikus szerkezetet, amelyre fentebb pár szóval utaltunk. A kezdeti instabilitások problematikájára később majd még visszatérünk.

4.2 A felfúvódó Világegyetem alapgondolata

A kezdeti feltételekkel kapcsolatos problémák abból származnak, hogy az $\dot{a}_i/\dot{a}_0$ tényező értéke határozza meg a kauzálisan független tartományok számát és a kezdeti sebességek eloszlásának megkövetelt pontosságát egyaránt, és ez az arány minden esetben nagyon nagy szám, amikor a gravitációs kölcsönhatás a Világegyetem fejlődése alatt mindvégig vonzó jellegű, és ezért a tágulás lassuló. Ha el akarjuk kerülni az $\dot{a}_i/\dot{a}_0 \gg 1$ egyenlőtlenséget, ill. meg akarjuk fordítani, akkor az szükséges, hogy a tágulás gyorsuló legyen, ami viszont a Friedmann-egyenletek értelmében azt feltételezi, hogy a fejlődés kezdeti szakaszán a gravitációs kölcsönhatásnak taszító jellegűnek kellett lennie. Egy ilyen fejlődési szakasz megengedése megoldhatja a kezdeti feltételekkel kapcsolatos problémákat. **A**

Világegyetem felfúvódását („cosmic inflation”) tehát úgy értelmezzük, mint a Világegyetem gyorsuló tágulásának szakaszát, amelynek során a gravitáció taszító jellegű.

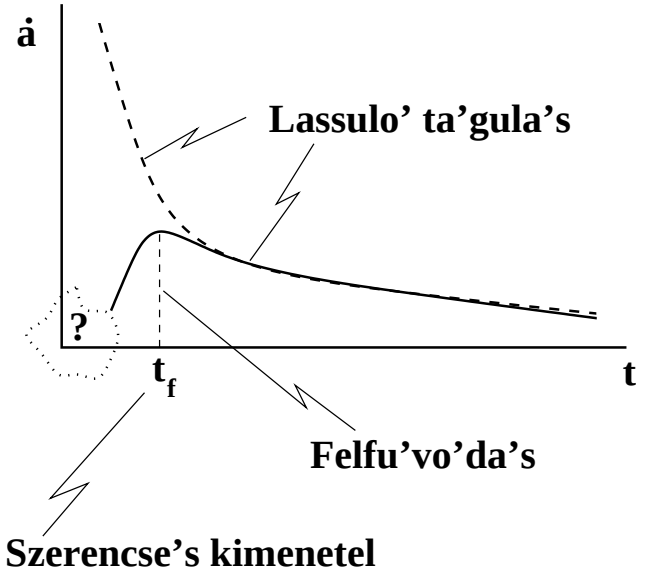

Figure 10: A tágulási sebesség az idő függvényében a felfúvódást is tartalmazó kozmológiai modellben.

Megjegyezzük, hogy egy ilyen szakasz feltételezése szükségesnek látszik ahhoz, hogy $\dot{a}_i/\dot{a}_0 < 1$ lehessen, de nem biztos, hogy elégséges is. Az utóbbi már a felfúvódás tényleges realizációjának további részletein múlik. A felfúvódás tényleges realizációjára további megszorítást jelent, hogy a Planck-korszakot követően meglehetősen rövid idő alatt végbe kell mennie ahhoz, hogy ne romoljon el a hagyományos Friedmann-féle kozmológia eredményessége, pl. a nukleoszintézisről abban alkotott kép változatlanul megtartható maradjon. A vizsgálatok azt mutatják, hogy ehhez a felfúvódásnak a $t_f \approx 10^{-36} - 10^{-34}$ s ideig be kell fejeződnie. Az is fontos követelmény, hogy a felfúvódást követően „sima” átmenetnek kell történnie a lassuló tágulás hagyományos, Friedmann-féle kozmológia által tárgyalható szakaszába, mert egyébként nem lenne biztosítható a Világegyetem homogenitása. Ezt a követelményt úgy szokták fogalmazni, hogy a felfúvódásnak **szerencsés kimenetelűnek („graceful exit”)** kell lennie. Az elvárást kvalitatív módon az $(\dot{a}, t)$ síkon a 10. ábra szemlélteti.

A felfúvódó Világegyetem modellje alkalmas arra, hogy a megfigyelhető Világegyetemet olyan kicsiny kezdeti tartományból származtassuk, amelynek pontjai kauzális kapcsolatban lehettek függetlenül attól, hogy mi volt, mekkora inhomogenitások voltak ezen a kicsiny tartományon kívül. Sőt még azt is meg lehet mutatni, hogy ha a kiszemelt kicsiny, kauzálisan összefüggő tartományon belül kezdetben voltak is erős inhomogenitások, azok amplitudója a felfúvódás következtében hamar lecsengett. A modelltől tehát azt várjuk, hogy alkalmas lehet a Világegyetem homogenitásának magyarázatára. A hirtelen felfúvódás a skálafaktor drámai megnövekedésével járt együtt, ami azt is jelenti, hogy a 3-dimenziós tér görbületi sugara óriásira nőtt. Ha a látható Világegyetem ennek a térnek csak egy kicsiny tartománya, akkor ez magyarázhatja, hogy nem látjuk a teret görbültnek, hogy a megfigyelt Világegyetem lapos.

Lássuk be a fentiekhez először azt, hogy **a felfúvódás képes egy kicsiny, kauzálisan összefüggő homogén tartományból magyarázni a megfigyelt homogén**

Világegyetemet. A magyarázat azon alapul, hogy gyorsulva táguló Világegyetemben mindig létezik esemény-horizont,

$$r_e(t) \quad = \quad a(t)\int_t^{t_{max}} \frac{dt'}{a(t')} = a(t)\int_{a(t)}^{a_{max}} \frac{da}{\dot{a}a}, \tag{4.2.1}$$

hiszen gyorsuló tágulás esetén $\dot{a}$ növekvő a-val nő, úgyhogy az integrál konvergens még akkor is, ha $a_{max} \to \infty$. A bizonyítás két lépésben történik:

- Először belátjuk, hogy ha van valahol egy a kezdeti esemény-horizont méretét 2-szeresen meghaladó, azaz $2r_e(t_i)$ sugarú homogén tartomány, akkor abból tetszőleges későbbi időre kifejlődhet egy homogén tartomány. Az esemény-horizont megléte azt jelenti, hogy mindaz, ami a megfigyelőt körülvevő $r_e(t)$ sugarú gömbön kívül történik, nem tudja a megfigyelő jövőjét befolyásolni. Tegyük most fel, hogy kezdetben az anyag egy $2r_e(t_i)$ sugarú gömbön belül homogén eloszlású volt. Akkor az anyag a Világegyetem teljes fejlődése során homogén marad abban az $r_h(t)$ sugarú tartományban, ami az $r_e(t_i)$ sugarú gömbből keletkezik, hiszen ott a homogenitást csak az eredetileg $r_e(t_i)$ és $2r_e(t_i)$ sugarú gömbhéjak közötti tartomány tudná befolyásolni, az pedig homogén volt. Az eredetileg a $2r_e(t_i)$ sugarú gömbön kívüli esetleges inhomogenitások, még ha el is kezdenek befelé terjedni, sohasem tudják elrontani a homogenitást az $r_h(t)$ sugarú gömbön belül, hanem csak az $r_h(t)$ és $2r_h(t)$ sugarak közti gömbhéjban. A kialakult homogén tartomány méretét megkaphatjuk a tágulás alapján:

$$r_h(t) \quad = \quad r_e(t_i)\frac{a(t)}{a_i}, \qquad t > t_i. \tag{4.2.2}$$

- Most már csak azt kell belássuk, hogy egy ilyen kezdeti esemény-horizonton belüli homogén tartományból kialakuló $r_h(t)$ sugarú homogén tartomány mérete a látható Világegyetem egészére kiterjed, azaz hogy $r_h(t) \approx r_p(t)$, ahol $r_p(t)$ a részecske-horizont fizikai mérete,

$$r_p(t) \quad = \quad a(t)\int_{t_i}^{t} \frac{dt'}{a(t')} = a(t)\int_{a_i}^{a(t)} \frac{da}{\dot{a}a}. \tag{4.2.3}$$

  Ha figyelembe vesszük, hogy a jobb oldalon álló integrálhoz a lényeges járulék $a \approx a_i$ környezetéből jön, akkor jó közelítéssel írhatjuk, hogy

$$r_p(t) \quad \approx \quad a(t)\int_{a_i}^{a_{max}} \frac{da}{\dot{a}a} = \frac{a(t)}{a_i}a_i\int_{a_i}^{a_{max}} \frac{da}{\dot{a}a} = \frac{a(t)}{a_i}r_e(t_i) = r_h(t). \tag{4.2.4}$$

  Tehát azt kaptuk, hogy a kialakuló homogén tartomány mérete nagyságrendileg megegyezik a részecske-horizont méretével, azaz **egy esemény-horizontnyi méretű, kauzálisan összefüggő, homogén kezdeti tartományból felfúvódással olyan méretű tartomány fejlődhet ki, ami le tudja fedni a látható Világegyetemet.**

Szükséges-e, hogy a kezdeti állapot egy az esemény-horizont kétszeresének megfelelő homogén tartomány legyen, vagy elhagyható a homogenitás követelménye? Azt látjuk be, hogy ha vannak kezdeti inhomogenitások, azok a felfúvódás következtében elhalnak a horizonton belül. Ez azt jelenti, hogy **egy erős inhomogenitásokat tartalmazó kicsiny kezdeti kauzális tartományból is létrejöhet felfúvódással a részecske-horizonton belül homogén Világegyetem.** Az inhomogenitás mértékét azzal szokás

mérni, hogy mennyi a görbületi sugár skáláján a relatív energiaváltozás (azaz, hogy a görbületi sugárnyi fizikai távolságon mennyi az energiasűrűség relatív megváltozása):

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon} \approx \frac{|\nabla\epsilon|}{\epsilon}\frac{1}{a}H^{-1} = \frac{|\nabla\epsilon|}{\epsilon}\frac{1}{\dot{a}}, \tag{4.2.5}$$

ahol $\nabla\epsilon$ az energiasűrűség gradiense együtt mozgó koordinátákban, H^{-1} a görbületi sugár, azaz a Hubble-paraméter reciproka. Tegyük fel, hogy az anyageloszlás kezdeti inhomogenitása nagy, (azaz, hogy 100%-os a megváltozás H^{-1} távolságon):

$$\left(\frac{\delta\epsilon}{\epsilon}\right)_{t_i} \approx \frac{|\nabla\epsilon|}{\epsilon}\frac{1}{\dot{a}_i} \sim \mathcal{O}(1). \tag{4.2.6}$$

Az általános relativitás elméletének keretében, a lineáris perturbációk terjedése kapcsán belátható, hogy a $|\nabla\epsilon|/\epsilon$ hányados nem változik lényegesen a tágulás során. Ezért nem kapott i indexet. A $t \gg t_i$ időpillanatban az inhomogenitás nagyságrendje tehát

$$\left(\frac{\delta\epsilon}{\epsilon}\right)_{t} \approx \frac{|\nabla\epsilon|}{\epsilon}\frac{1}{\dot{a}(t)} = \frac{|\nabla\epsilon|}{\epsilon}\frac{1}{\dot{a}_i}\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}(t)} \sim \mathcal{O}(1)\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}(t)}. \tag{4.2.7}$$

Ez az arány a Friedmann-modell szerint közönséges anyag és/vagy sugárzás, azaz lassuló tágulás esetén a Világegyetem jelenéig óriásira, kb. 10^{28}-ra nőne. **Ha azonban a Világegyetem felfúvódik, azaz gyorsulva tágul, akkor a kezdeti inhomogenitás elenyészik a görbületi sugár skáláján. A jelenség azáltal következik be, hogy az inhomogenitás térbeli kiterjedése (azaz a hullámhossza) a-val arányosan növekszik, ami gyorsabb, mint a $H^{-1} = a/\dot{a}$ görbületi sugár növekedése, és eközben az inhomogenitás $|\nabla\epsilon|/\epsilon$ amplitudója lényegében változatlan marad.** (Például $a \sim e^{H_\Lambda t}$ exponenciális tágulás esetén $H^{-1} = H_\Lambda^{-1}$ =áll, és $\dot{a}_i/\dot{a}(t) = e^{-H_\Lambda(t-t_i)} \ll 1$. Ez összhangba hozható azzal, hogy a CMB-adatok elemzéséből $(\delta\epsilon/\epsilon)_0 \approx 10^{-5}$ adódik a t_0 pillanatban, azaz a jelenlegi Világegyetemben.) **Az inhomogenitások ebben az értelemben tehát elértéktelenednek, inflálódnak; a felfúvódás kozmikus inflációként („cosmic inflation") történő emlegetése erre utal.**

Következő lépésként megmutatjuk, hogy **a felfúvódó Világegyetem modellje képes lehet annak is magyarázatát adni, hogy miért látjuk ma a Világegyetemet jó közelítéssel lapos térgeometriájúnak,** azaz miért egyenlő a kozmológiai paraméter jelenlegi értéke jó közelítéssel 1-gyel, $\Omega_0 \approx 1$. Fentebb már említettük, hogy a CMB-adatok elemzéséből az adódik, hogy $\dot{a}_i/\dot{a}_0 < 10^{-5} \ll 1$. Ehhez az kell, hogy a Világegyetem kezdeti tágulásának $\dot{a}_i$ sebessége a mai $\dot{a}_0$ tágulási sebességnél sokkal kisebb legyen. Rendezzük át a (4.1.18) egyenletet

$$\Omega_0 = 1 + (\Omega_i - 1)\left(\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_0}\right)^2 \tag{4.2.8}$$

alakba. Innen azt látjuk, hogy amennyiben a kezdeti $|\Omega_i - 1| \lesssim \mathcal{O}(1)$ nagyságrendű volt, akkor a kozmológiai paraméter mai értéke nagyon jó közelítéssel $\Omega_0 \approx 1$. Erre a következtetésre, mint láttuk, a felfúvódás, azaz a gyorsulva tágulás kinematikája alapján jutottunk, teljesen függetlenül attól, hogy milyen a Világegyetem teljes energiasűrűségének eredete, és milyenek voltak a felfúvódás részletei. **A felfúvódó Világegyetem modelljének tehát az a „robosztus" következménye, hogy a Világegyetem jelenlegi teljes energiasűrűsége éppen kritikus (megegyezik a kritikus energiasűrűség**

jelenlegi értékével), azaz a Világegyetemünk ma nagyon jó közelítéssel lapos térgeometriájú, $\Omega_0 \approx 1$, és az ehhez képesti lokális eltérések 10^{-5}-nél kisebbek. Érdemes megjegyezni, hogy amíg a lassulva táguló Világegyetemben az $\Omega \to 1$ határérték $t \to 0$ esetén valósul meg, addig a gyorsulva táguló Világegyetemben ez a $t \to \infty$ határesetben következne be. A felfúvódó Világegyetem modellje tehát semmissé teszi azt a követelményt, hogy a kezdeti sebességeknek óriási pontossággal kellett volna követniük a Hubble-törvényt, és hogy a kezdeti Világegyetemben $\Omega_i \approx 1$ lett volna óriási pontossággal, azaz hogy a kezdeti Világegyetem óriási pontossággal lapos lett volna. A felfúvódó Világegyetem modellje tehát megoldást jelent a kezdeti feltételek finom hangolásával kapcsolatos olyan problémákra, amelyek az Ősrobbanás korábbi modelljeiben megoldatlanok maradtak.

Most már csak azt kell végiggondoljuk, hogy **milyen feltételek mellett lehet a gravitáció taszító jellegű,** és hogy ha ez be is következik, **milyen feltételek esetén valósulhat meg a szerencsés kimenetel a felfúvódó fejlődési szakaszból a Friedmann-féle lassulva táguló szakaszba.**

- Nézzük először a **gravitációs taszítás** kérdését. A felfúvódás feltétele, hogy $\ddot{a} > 0$ legyen. A (2.3.14) Friedmann-egyenlet alapján,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\epsilon + 3p), \tag{4.2.9}$$

  a tágulás biztosan lassul, $\ddot{a} < 0$, ha $\epsilon + 3p$ pozitív, azaz teljesül az erős energiafeltétel. Minden „közönséges anyag” esetén a nyomás pozitív, azért ilyen anyagra $\epsilon + 3p$ is pozitív. Ha tehát a Világegyetemet közönséges anyag tölti ki, akkor a Világegyetem lassulva tágul. Ahhoz, hogy a Világegyetem tágulása gyorsuló, azaz $\ddot{a} > 0$ legyen, az anyag állapotegyenletének olyannak kell lennie, hogy megsérüljön az erős energiafeltétel, azaz az $\epsilon + 3p < 0$ egyenlőtlenség álljon fenn. Ehhez $p(\epsilon) < -\epsilon/3$ tulajdonságú állapotegyenlettel kell az anyagnak rendelkeznie. Ilyen lehet pl. a már említett $\Lambda > 0$ kozmológiai állandó jelenléte, ami egyenértékű a $p = -\epsilon$ =áll. állapotegyenletű anyag jelenlétével. Ebben az esetben az Einstein-egyenletek megoldása a de Sitter-Világegyetem. A de Sitter-Világegyetem a $t \gg H_\Lambda^{-1}$ idők esetén exponenciálisan tágul, és a tágulás sebessége arányos a skálafaktorral, azaz szintén exponenciálisan növekvő. Ez kedvező lehet a felfúvódási szakasz lefolyásának modellezésére, viszont nem tudja biztosítani annak szerencsés kimenetelét a lassulva táguló későbbi szakaszba.

  Ahhoz, hogy realisztikusabb modellt kapjunk, amelyben a felfúvódás szerencsésen tud folytatódni a Friedmann-féle lassuló tágulásban, meg kell engedjük, hogy a Hubble-paraméter változzon időben a felfúvódás során. Induljunk ki az $\ddot{a}/a = H^2 + \dot{H}$ azonosságból. Innen következik, hogy $\ddot{a}$ csak úgy válhat negatívvá a felfúvódás szerencsés kimetele esetén, ha $\dot{H}$ negatív lesz és abszolút értékben meghaladja H^2-et, azaz $|\dot{H}| > H^2$. Amikor bekövetkezik hogy $H^2 + \dot{H}$ előjelet vált pozitívról negatívra, akkor ér véget a felfúvódás. Jelölje ezt az időpontot t_f.

- Most **megbecsüljük, hogy mekkorának kell lennie a felfúvódás időtartamának ahhoz, hogy létrejöhessen a szerencsés kimenetel a Friedmann-féle lassuló tágulás szakaszába, és megvizsgáljuk, hogy mi a szerencsés kimenetel feltétele.** A felfúvódásnak elegendően sokáig kell tartania, hogy egy kicsiny, kauzálisan összefüggő tartomány fel tudjon ezalatt az idő alatt fúvódni a látható Világegyetem méretére. Az $\dot{a}_i/\dot{a}_0 < 10^{-5}$ feltételt átírjuk

$$\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_0} = \frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_f}\frac{\dot{a}_f}{\dot{a}_0} = \frac{a_i}{a_f}\frac{H_i}{H_f}\frac{\dot{a}_f}{\dot{a}_0} < 10^{-5} \tag{4.2.10}$$

alakba. A korábbiakban beláttuk, hogy $\dot{a}_f/\dot{a}_0 > 10^{28}$ kell legyen ahhoz, hogy a kezdetben kauzálisan összefüggő tartomány mérete a felfúvódás végére elérje a részecske-horizont méretét. Ezért a szerencsés kimenetelű felfúvódás feltétele az, hogy

$$\frac{a_f}{a_i} > 10^5 \frac{\dot{a}_f}{\dot{a}_0}\frac{H_i}{H_f} > 10^{33}\frac{H_i}{H_f} \tag{4.2.11}$$

legyen. Tegyük fel, hogy a felfúvódás kezdetén $|\dot{H}_i| \ll H_i^2$ és hanyagoljuk el a Hubble-paraméter változását, akkor azt kapjuk, hogy a $t_i \leq t \leq t_f$ idők esetén $\ddot{a}a \approx H_i^2$, ahonnan $a(t) \approx Ce^{H_i t}$. Ebben a közelítésben $H_f \approx H_i$ és becslésünk

$$\frac{a_f}{a_i} \approx e^{H_i(t_f - t_i)} > 10^{33}, \tag{4.2.12}$$

ahonnan $t_f > 75H_i^{-1}$, úgyhogy **a szerencsés kimenetelű felfúvódásnak tovább kell tartania, mint a Hubble-idő 75-szöröse, és a Világegyetem skálaparaméterének a felfúvódás alatt legalább e^{75}-szörösre („75 e-folding") kell nőnie.**

Másrészről, ha $\dot{H}_i$ kicsi H_i^2-hez képest, és $t_i \ll t_f$ (azaz $t_f - t_i \approx t_f$), akkor a felfúvódást becsülhetjük $|\dot{H}_i| \approx H_i/t_f$ alapján, $t_f \approx H_i/|\dot{H}_i|$ időtartamúnak. Ezt felhasználva viszont az

$$\frac{a_f}{a_i} \approx e^{H_i t_f} \approx e^{H_i^2/|\dot{H}_i|} > 10^{33} \tag{4.2.13}$$

egyenlőtlenségből $|\dot{H}_i|/H_i^2 < 1/75$ adódik, ami viszont megszorítást jelent az állapotegyenletre. Valóban, vegyük a $k = 0$ esetben a (2.3.9) és a (2.3.10) Friedmann-egyenleteket, amelyekből rendre

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{3H^2}{8\pi G}, \\ p &= -\frac{2\dot{H} + 3H^2}{8\pi G}. \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Innen elemi számolással kapjuk, hogy

$$\frac{\epsilon + p}{\epsilon} = -\frac{2\dot{H}}{3H^2}. \tag{4.2.15}$$

Az t_i pillanatbeli kezdeti állapotegyenletre ezért a

$$\left|\left(\frac{\epsilon + p}{\epsilon}\right)_i\right| = \frac{2}{3H_i^2}|\dot{H}_i| < 10^{-2} \tag{4.2.16}$$

megszorítást kapjuk. Ez azt jelenti, hogy **a felfúvódás akkor lehet szerencsés kimenetelű, ha a kezdeti állapotegyenlet a vákuum $p = -\epsilon$ alakú állapotegyenletétől 1 %-nál kevésbé különbözik. A de Sitter-Világegyetem ezért jó közelítése lehet a felfúvódás kezdeti szakaszának. A felfúvódás akkor ér véget, amikor $\epsilon + p \approx \epsilon$ lesz.**

4.3 Az inflatonmező

Ebben a fejezetben arra a kérdésre keressük a választ, hogy milyen módon, milyen térelméleti modellben valósulhat meg közelítőleg a vákuumállapotnak megfelelő $p \approx -\epsilon$ állapotegyenlet. Amikor a Planck-korszak lezárult és a Világegyetem felfúvódása feltevésünk szerint kezdetét vette, még a Planck-tömeg energiaskálájánál alig kisebb energiaskálán vagyunk. Nem tudjuk tulajdonképpen, hogy ekkor milyen állapotban volt a Világegyetem, csak annyit tudunk, hogy az energiasűrűség még a Planck-skálán mérve is rendkívül nagy kellett, hogy legyen, és a hőmérséklet is nagyon magas lehetett. Bármi is volt akkor jelen a Világegyetemben, porszerű anyag és/vagy sugárzás, valamint topológiai defektusok, a felfúvódás olyan óriási tágulást eredményezett, hogy a vöröseltolódás révén a hőmérséklet és az energiasűrűség zérushoz tartott, mire véget ért a felfúvódás. Az egyetlen anyagösszetevő, ami a felfúvódás után jelen lehetett, az a felfúvódást okozó kvantummező klasszikus kondenzátuma.

A felfúvódásnak egy játék-modelljét fogjuk megalkotni, amely fő vonásaiban olyan, hogy megoldást jelent a horizont-problémára; a kezdeti sebességek problémájára, azaz magyarázza a jelenlegi megfigyelt Világegyetem laposságát, ill. a kozmológiai paraméter 1-hez közeli értékét, és biztosítja a felfúvódás utáni állapotban az energiasűrűség térbeli fluktuációinak kellően kicsiny voltát. Egyúttal a modell kellően sima átmenetet biztosít a lassulva táguló korszakba. Mindezek olyan fő vonásokat írnak elő a modellre, amelyek nagy mértékben függetlenek attól, hogy ténylegesen mi valósítja meg fizikailag a kondenzátumot.

Ezért a legegyszerűbb választás, egy (egy-komponensű) skalármező φ kondenzátuma, amely a kezdeti t_i időpillanatban, a Planck-korszak lezárulása után a Planck-skálán mérve is nagy $|\varphi_i| \gg m_{\rm Pl}$ amplitúdóval van jelen. Ezért a skalármező a felúvódás kezdetén „távol van" a stabil vákuumállapotától. A felfúvódást okozó skalármezőt **inflatonmezőnek** nevezzük. **Feltesszük, hogy az infláció kezdetén olyan nagy az inflatonmező kondenzátuma, ami nagyon távol van az alapállapoti értéktől, de az inflatonmező amplitúdója már elég kicsi ahhoz, hogy az inflatonmezőt lényegében klasszikus fizikai mezőnek lehessen tekinteni, elhanyagolva a kvantumgravitációs effektusokat. Az inflatonmező klasszikus viselkedéséhez az szükséges, hogy a kondenzátum energiasűrűsége a Planck-skálánál kisebb, $\epsilon_{\rm kond} < m_{\rm Pl}^4$ legyen ($\hbar = c = 1$ egységekben).** Azt fogjuk megmutatni, hogy **az inflatonmező kondenzátuma akkor tölti be a neki szánt szerepet, mint a felfúvódás okozója, ha a kondenzátum értéke nagyon lassan csökken, és gördül le azon érték közelébe, amelynél a kondenzátum energiája minimális. Majd amikor megközelíti a kondenzátum amplitúdója ezt az értéket, akkor oszcillálni kezd az energiaminimum, azaz az alapállapot közelében, és ez biztosítja a felfúvódás szerencsés kimenetelét, azaz a sima átmenetet a Világegyetem lassulva táguló korszakába.**

Ezen modellszerű elképzelés szellemében feltesszük tehát, hogy az inflatonmező amplitúdója **lassan „gördül le" („slow roll")** kezdeti, nem egyensúlyi állapotából az energiaminimumot (a potenciális energia minimumát) jelentő alapállapotba, amelyet megközelítve oszcillálni kezd. A felfúvódás addig tart, amíg az inflatonmező alapállapota közelébe jut a rendszer. A felfúvódási szakasznak elég hosszúnak kell lennie ahhoz, hogy biztosítsa azt, hogy nagyon kicsi kauzálisan összefüggő térbeli tartományból kifejlődhessen a mai látható Világegyetem méretét meghaladó felfúvódott Világegyetem. Ez tudja majd biztosítani a modell részleteinek gondos megválasztása esetében, hogy a látható Világegyetem homogén és izotróp legyen, továbbá, hogy a tér görbülete gyakorlatilag zérus legyen napjainkban. Egyúttal ez az extrém nagy mértékű tágulás tudja kimosni a Planck-szakaszból megörökölt esetleges fluktuációkat is annyira, hogy a felfúvódás végén a $\delta\epsilon/\epsilon < 10^{-5}$ korlát teljesüljön az energiafluktuációkra. Ugyanakkor azt is tudatosítani kell, hogy

az óriási mértékű felfúvódás következtében akkora a vöröseltolódás, hogy minden sugárzás és minden anyag lényegében közel zérus hőmérsékletűvé válik. A porszerű anyagtól és sugárzástól eredő energiasűrűség is zérushoz tart. Az egyetlen, ami visszamarad, az inflatonmező oszcilláló kondenzátuma. Így joggal merül fel egy újabb kérdés: milyen részecskefizikai folyamatok révén kerül a hideg, felfúvódott Világegyetem megfigyelhető része abba a forró, nagy energiasűrűségű, a tapasztalt barionaszimmetriával rendelkező állapotba, aminek létre kellett valahogy jönnie ahhoz, hogy a Világegyetem későbbi fejlődése mutassa mindazt, amire a kozmológiai, csillagászati megfigyelésekből vissza tudunk következtetni. Most először a felfúvódás feltételezett dinamikájával foglalkozunk, és egy későbbi fejezetben fogunk rátérni az **felfűtés („reheating")** és az **előfűtés („preheating")** mechanizmusára. Az utóbbi két mechanizmus adhat arra választ, hogy hogyan került a Világegyetem megfigyelt része a felfúvódás szerencsés kimenetele után és/vagy során újra forró, nagy energiasűrűségű, sugárzás és/vagy porszerű anyag által uralt állapotba.

4.3.1 Skalármező mozgásegyenlete táguló Világegyetemben

Korábban azt láttuk be, hogy a klasszikus skalármező sztatikus, homogén térkonfigurációja az anyag olyan állapotát írja le, amelyben $p = -\epsilon$ alakú állapotegyenlet érvényes. Abban az esetben, ha a sztatikus φ_0 =áll. térkonfiguráció megfelel a skalármező potenciálja minimumának, akkor ez éppen a mező alapállapota, ami lehet triviális, azaz $\varphi_0 = 0$ és lehet nem triviális, spontán szimmetriasértő, amikor $\varphi_0 \neq 0$.

Most általánosabban azt kérdezzük, milyen legyen a klasszikus homogén skalármező potenciálja ahhoz, hogy a mező időbeli változása a tágulás során szerencsés kimenetelű felfúvódást eredményezzen. Ehhez először is az szükséges, hogy az állapotegyenlet közelítőleg a vákuum állapotegyenlete maradjon a felfúvódás altt. Mivel skalármező esetén $\epsilon = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)$ és $p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)$, azért $p + \epsilon = \dot{\varphi}^2$ akkor marad közel zérus, ha $\dot{\varphi}$ nagyon kicsi, azaz a kondenzátum φ amplitúdója lassan változik az idő függvényében. Ilyenkor a rendszer a kezdeti állapotából lassan jut el a stabil vákuumállapotba, a potenciális energia stabil minimumához tartozó állapotba. Ebből adódik a lassú legördülés követelménye. A kezdeti állapot lehet (a) lokális minimum, ahonnan alagúteffektus révén jut a rendszer a stabil vákuumállapotba, (b) labilis egyensúlyi állapot, vagy (c) egy nem egyensúlyi állapot. A (b) és (c) esetben a rendszer „a potenciálon történő lassú legördüléssel" jut a vákuumállapotba. A különböző lehetőségekre később még visszatérünk. Egyelőre a továbbiakban a (c) esetnek megfelelő felfúvódást fogjuk megismerni. A lokális energiamegmaradás $\dot{\epsilon} = -3(p + \epsilon)H$ törvényéből a klasszikus homogén skalármező mozgásegyenlete,

$$0 = \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi), \tag{4.3.1}$$

ahol $V'(\varphi) = \partial_\varphi V(\varphi)$ és felhasználtuk, hogy $\dot{\epsilon} = \dot{\varphi}\ddot{\varphi} + V'\dot{\varphi}$, ill. hogy $\dot{\varphi} \neq 0$, ha a mező nem sztatikus. Meg lehet mutatni, hogy a (4.3.1) egyenlet a görbült téridőben az inflatonmező Klein-Gordon-egyenlete. A tágulást a $k = 0$ esetben, azaz a skálafaktor időfejlődését sík térgeometria esetén a

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\epsilon = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right) \tag{4.3.2}$$

Friedmann-egyenlet írja le. A (4.3.1) és a (4.3.2) egyenletek megoldását először egyszerű, kvadratikus potenciál, majd általános alakú potenciál esetében keressük meg és diszkutáljuk.

4.3.2 Nem önkölcsönható, tömeges skalármező

Legyen a skalármező potenciálja $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$. Fejezzük ki H-t a (4.3.2) egyenletből és helyettesítsük be a (4.3.1) egyenletbe:

$$0 = \ddot{\varphi} + \kappa(\dot{\varphi}^2 + m^2\varphi^2)^{1/2}\dot{\varphi} + m^2\varphi, \tag{4.3.3}$$

ahol $\kappa = \sqrt{12\pi G} = \sqrt{12\pi}/m_{Pl}$ ($\hbar = c = 1$ egységekben). A (4.3.3) egyenlet a $\varphi(t)$ függvényre vonatkozó közönséges, másodrendű, nem lineáris differenciálegyenlet, amelyben nincsen explicit időfüggés. Ezért átírhatjuk az egyenletet az $u(\varphi) = \dot{\varphi}(\varphi)$ függvényre vonatkozó közönséges elsőrendű differenciálegyenletté. Használjuk fel, hogy $\ddot{\varphi} = u'u$, ahol $u' = du/d\varphi$. Ekkor a

$$0 = u'u + \kappa(u^2 + m^2\varphi^2)^{1/2}u + m^2\varphi, \tag{4.3.4}$$

azaz az

$$u' = -\frac{\kappa(u^2 + m^2\varphi^2)^{1/2}u + m^2\varphi}{u} \tag{4.3.5}$$

differenciálegyenletet kapjuk az $u(\varphi)$ függvényre. Az egyenlet megoldásainak tulajdonságait a 2-dimenziós $(\varphi, u = \dot{\varphi})$ fázistérben vizsgálhatjuk. Vegyük észre, hogy ha a (4.3.3) egyenletnek a $0 \leq t < \infty$ intervallumon $\varphi(t)$ megoldása, akkor $-\varphi(-t)$ is megoldás a $-\infty < t \leq 0$ intervallumon. A kozmológiai érdekességű eset természetesen az előző. Másrészt az egyenlet (4.3.5) alakjában az említett szimmetria a fázistér origójára vonatkozó tükrözési szimmetriaként, azaz $(\varphi, u(\varphi)) \leftrightarrow (-\varphi, -u(-\varphi))$ szimmetriaként jelenik meg.

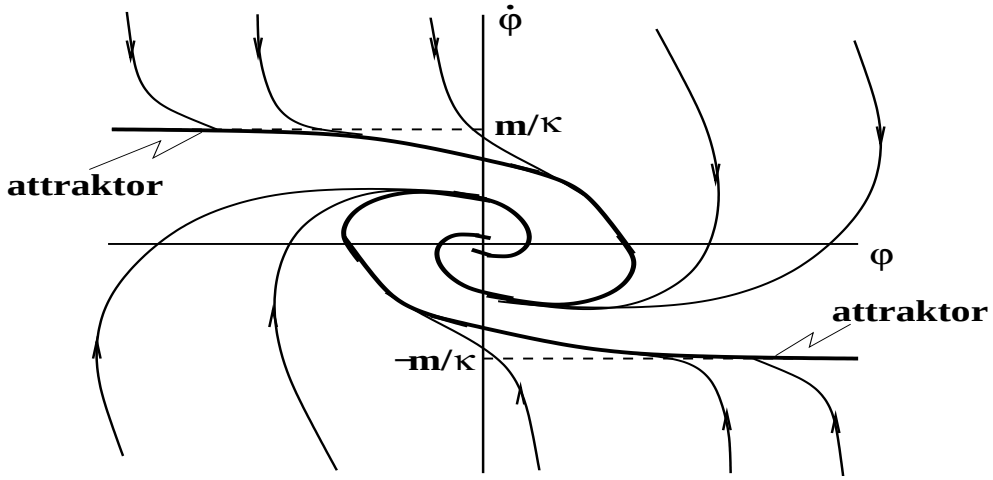

Figure 11: A homogén, $V = m^2\varphi^2/2$ potenciálú tömeges skalártér fázisdiagramja homogén és izotróp Világegyetemben (kvalitatív ábra).

A fázistrajektóriák futásának több szakaszát különböztethetjük meg. Vegyük ezeket sorra.

- **Az ultra-kemény állapotegyenletnek megfelelő fejlődési szakasz.** A fázisszerkezet jellegzetessége, hogy a fázistér origója fixpont, továbbá, hogy a különböző

típusú (a $t \in (0, \infty)$, ill. a $t \in (-\infty, 0)$ félegyeneseken értelmezett) megoldások a fázistér két diszjunkt tartományában futnak, amelyet egy attraktorként viselkedő szeparátrix választ el egymástól. A kozmológiai érdekességű megoldások $\varphi_P > 0$, $u_P < 0$ előjelű kezdőfeltételekkel indulnak nagy u_P értékkel a t_P kezdőpillanatban, amikor $u_P^2 \gg m^2\varphi_P^2 \sim \mathcal{O}(m^2 m_{\rm Pl}^2)$, ahol feltettük, hogy $\varphi_{\rm Pl} \gg m_{\rm Pl}$. Amíg $t > t_P$ esetén a megoldás is teljesíti az $u^2 \gg m^2\varphi^2$ feltételt, addig az állapotegyenlet közelítőleg $p \approx \epsilon \approx \frac{1}{2}u^2$, ami a „lehető legkeményebb" állapotegyenlet, az úgynevezett **ultrakemény állapotegyenlet („ultra-hard equation of state").** A zérus tömegű skalármező mindig ezt az esetet valósítja meg. Az ultra-kemény állapotegyenlet érvényességi tartományában elhanyagolhatjuk a potenciált (ami tömeg nélküli skalármezőnek felel meg), és a (4.3.5) egyenletet közelítőleg

$$u' \approx -\kappa|u| \approx \kappa u \tag{4.3.6}$$

alakba írhatjuk (mert $u < 0$). Innen a megoldás

$$u = Ce^{\kappa\varphi}, \quad C < 0 \tag{4.3.7}$$

az ultra-kemény állapotegyenlet érvényességi tartományában. Mivel $C = u_P e^{-\kappa\varphi_P}$, a megoldás explicit alakja

$$u = \dot{\varphi} = u_P e^{\kappa(\varphi - \varphi_P)}. \tag{4.3.8}$$

Keressük $\varphi(t)$-t $\varphi = B - A\ln t$ alakban. Ekkor azt kapjuk, hogy $\varphi_P = B - A\ln t_P$, úgyhogy

$$u = u_P e^{\kappa A \ln(t/t_P)} = u_P (t_P/t)^{\kappa A} = \dot{\varphi} = -(A/t), \tag{4.3.9}$$

ami $A = 1/\kappa$ esetén állhat csak fenn azonosságként és $u_P = -1/(\kappa t_P)$ kell legyen. Mivel $\kappa \sim \sqrt{G} \sim m_{\rm Pl}^{-1}$ és $|u_P| \gg \mathcal{O}(m m_{\rm Pl})$, azért $(1/m_{\rm Pl}) < t_P \ll (1/m)$ kell legyen. Végül az adódik, hogy

$$\begin{aligned} u(t) &\approx \frac{u_P t_P}{t} = -\frac{1}{\kappa t}, \\ \varphi(t) &\approx \varphi_P + A\ln\frac{t_P}{t} = \varphi_P + \frac{1}{\kappa}\ln\frac{t_P}{t}. \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Ez a megoldás azon a $t_P \le t \le t_i$ időintervallumon jó közelítés, amelyen $u^2 \gg m^2\varphi^2$. Ha a skalármező tömegét úgy választjuk, hogy $m \ll m_{\rm Pl}$ és a φ_P kezdeti amplitúdót pedig úgy, $\varphi_P \gg m_{\rm Pl}$, akkor $u_P^2 \gg \mathcal{O}(m^2 m_{\rm Pl}^2)$ még mindig lehet sokkal nagyobb, mint $m^2\varphi_P^2$. Az ilyen választás tág teret biztosít olyan kezdőfeltételeknek, amelyek elvezetnek az ultra-kemény szakaszon át az attraktorhoz.

Helyettesítsük be a kapott megoldást a (4.3.2) Friedmann-egyenletbe, ahonnan a Hubble-paraméter időfüggésére a

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx \frac{\kappa^2}{9}u^2 = \frac{1}{9t^2} \tag{4.3.11}$$

összefüggés adódik. Ekkor a tágulást

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{3t} \tag{4.3.12}$$

írja le, úgyhogy az ultra-kemény állapotegyenlet következményeként a skálafaktor $a \propto t^{1/3}$ és az energiasűrűség $\epsilon \approx u^2/2 = 1/(2\kappa t^2) \propto a^{-6}$ skálatörvényt követ. A kapott megoldás tömeg nélküli skalármező esetében egzakt, nem közelítő jellegű. Az $u = \dot{\varphi}$ exponenciálisan gyorsabban változik kezdetben, mint maga a mező amplitúdója, úgyhogy a kezdeti nagy $|u_P|$ érték gyorsan lecseng, miközben φ még alig változott. Ezért a nagy kezdeti $|u_P|$ értékről induló fázistrajektóriák szinte állandó φ mellett érik el az attraktort, jelentősen megnövelve ezzel azon kezdeti feltételek halmazát, amelyek felfúvódáshoz vezetnek.

Látjuk azt is, hogy a kezdeti feltételek nagyságrendjének fenti megválasztása mellett az energiasűrűség kezdetben $\epsilon_P \sim u_P^2/2 \sim \mathcal{O}(m^2 m_{\rm Pl}^2)$ sokkal kisebb, mint a Planck-skálának megfelelő $\epsilon_{\rm Pl} \sim \mathcal{O}(m_{\rm Pl}^4)$ energiasűrűség. Ez indokolja, hogy a felfúvódás során a skalármezőt klasszikus közelítésben vegyük figyelembe, elhanyagolva a kvantumfluktuációit.

Annyit érdemes még megjegyezni, hogy ha különböző állapotegyenletű anyagok uralta homogén, izotróp Világegyetemek tágulását hasonlítjuk össze, akkor ultra-kemény állapotegyenlet esetén $a \propto t^{1/3}$, sugárzás esetén $a \propto t^{1/2}$ és por esetén $a \propto t^{2/3}$ adódik. Onnan az ultra-kemény elnevezés, hogy az $a \propto t^{\alpha}$ hatványfüggvény szerinti tágulás esetén ekkor a legkisebb az $\alpha > 0$ kitevő.

- **A felfúvódási szakasz, amikor $p \approx -\epsilon$ teljesül.** Amikor a megoldás a $t_i > t_P$ időpillanatban eléri az attraktort, akkor az $m^2\varphi^2/2$ potenciális energia összemérhetővé válik az $u^2/2$ kinetikus energiával, majd jelentősen meghaladja azt, és alkalmazható lesz az $u^2 \ll m^2\varphi^2$ közelítés. Ha a fázistrajektória még $\varphi \gg m_{\rm Pl}$ értéknél éri el az attraktort, akkor azon közelítőleg $u(\varphi) \approx$áll., azaz $u' \approx 0$. Ebben a fejlődési szakaszban $\epsilon + p = u^2 \ll \epsilon$, azaz jó közelítéssel a vákuum állapotegyenlete valósul meg.

  Megmutatjuk a következőket:

  1. A trajektória akkor hagyja el az $u =$áll. fejlődési szakaszt, amikor a kondenzátum φ amplitúdója a Planck-skálára csökken, azaz olyan pillanatban, amikor $\varphi \approx m_{\rm Pl}$ lesz.
  2. Az $u =$áll. trajektória-szakasz felel meg a Világegyetem felfúvódásának.

  Lássuk be ezeket az állításokat!

  1. Először is az attraktor egyenlete aszimptotikusan nagy $\varphi \gg m_{Pl}$ értékeknél $u'_{attr} \approx 0$. Ezért a (4.3.5) egyenletből a $(\kappa m\varphi u + m^2\varphi)_{attr} \approx 0$ egyenlőség és az

  $$u_{attr} \quad = \quad \dot{\varphi}_{attr} \approx -\frac{m}{\kappa} \sim \mathcal{O}(m m_{\rm Pl}) \tag{4.3.13}$$

  aszimptotikus érték adódik. Az attraktoron a kondenzátum amplitúdója közelítőleg lineárisan csökken növekvő t idővel,

  $$\varphi_{attr}(t) \quad \approx \varphi_i - \tfrac{m}{\kappa}(t - t_i) \approx \tfrac{m}{\kappa}(t_f - t), \tag{4.3.14}$$

  ahol extrapolációval bevezettük azt a t_f időt, amikor a közelítő megoldás formálisan zérussá válik, jóllehet a közelítésünk már ezt megelőzően érvényét veszti.

  Ha a (4.3.5) egyenletben szereplő $\sqrt{u^2 + m^2\varphi^2}$ kifejezést az $u/(m\varphi)$ kis paraméterben sorba fejtjük, és az $u'_{attr} \approx 0$ egyenlet megoldását $u_{attr} \approx -\frac{m}{\kappa} + \delta u$

alakban keressük, akkor $\delta u = \frac{m}{\kappa}\frac{1}{2}\frac{1}{\kappa^2\varphi^2}$ adódik az első el nem tűnő korrekcióra, úgyhogy a pontosabb kifejezés

$$u_{attr} \approx -\frac{m}{\kappa}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\kappa^2\varphi^2} + \mathcal{O}(\kappa^{-3}\varphi^{-3})\right). \tag{4.3.15}$$

A korrekció $\varphi \approx 1/(\sqrt{2}\kappa) \sim \mathcal{O}(m_{\rm Pl})$ esetén összemérhetővé válik a vezető rendű taggal, úgyhogy a közelítésünk akkor veszti érvényét, amikor a skalármező amplitúdója a Planck-skálára, azaz a $\varphi \sim \mathcal{O}(m_{\rm Pl})$ értékre csökken. Az attraktor vizsgált szakaszán tehát φ értéke lényegesen meghaladja a Planck-skálát. Ez azonban nem jelenti, hogy nem perturbatív kvantumgravitációs elmélet keretében kellene tárgyalnunk az adott fejlődési szakaszt. Kvantumgravitáció akkor játszhat szerepet, ha vagy a görbületi sugár csökken a Planck-hossz alá, vagy az energiasűrűség nő a Planck-skála fölé. Elhanyagolható kinetikus energiájú homogén skalármező energiája akkor nő a Planck-skálára, ha $m^2\varphi^2 \approx m_{\rm Pl}^4$ azaz $\varphi \approx m_{\rm Pl}(m_{\rm Pl}/m)$, ha tehát $m \ll m_{\rm Pl}$, akkor bőven állhat rendelkezésre olyan $m_{\rm Pl} \ll \varphi_P \ll m_{\rm Pl}(m_{\rm Pl}/m)$ kezdeti érték, amely mellett a teljes időfejlődés megmarad a klasszikus fizika, a Planck-skála alatti fizika érvényességi tartományában. Eddig tehát beláttuk, hogy kellően kis tömeg (lapos potenciálgödör) esetén lényegében bármilyen $m_{\rm Pl} \ll \varphi_P \ll m_{\rm Pl}(m_{\rm Pl}/m)$ és $|\dot{\varphi}_P| > m/\kappa \sim m m_{\rm Pl}$ kezdőfeltétel mellett a kvadratikus potenciál alkalmas lehet, hogy a fejlődés ráfusson az attraktorra.

2. Most már azt kell belássuk, hogy az attraktoron haladó fázistrajektória felfúvódást ír le. Ha a skalármező tömege $m = 10^{13}GeV \cong 10^{-6}m_{\rm Pl}$ (a Nagy Egyesített elméletek jellemző energiaskálája), akkor $\varphi_i \lesssim m_{\rm Pl}(m_{\rm Pl}/m) \sim 10^6$ $m_{\rm Pl}$ kezdeti értékről indulhat a felfúvódás és addig tart, amíg $\varphi_f \sim m_{\rm Pl}$ nagyságrendűre csökken. Elképzelhető tehát sok nagyságrenden át olyan φ_i kezdeti érték, amikor a felfúvódási szakasz klasszikus, nincsenek kvantumgravitációs effektusok. A felfúvódási szakasz során az energiasűrűséget a potenciális energia uralja, $u^2 \ll m^2\varphi^2$, ezért az $\epsilon + p = u^2$ összefüggésből a

$$p \approx -\epsilon + u_{attr}^2 = -\epsilon + (m/\kappa)^2 \tag{4.3.16}$$

állapotegyenlet adódik, ahol $\epsilon \approx \frac{1}{2}m^2\varphi_{attr}^2 \gg \frac{1}{2}u_{attr}^2$ miatt a jobb oldalon $-\epsilon$-nál kicsit különböző értékek állnak. A felfúvódás akkor ér véget, amikor $\varphi_{attr} \approx \varphi_f \sim \kappa^{-1}$ értékre csökken, ami $\varphi_f \sim m_{\rm Pl} \ll \varphi_i$ értékeket jelent. A felfúvódás becsült időtartama tehát

$$t_f - t_i \approx \frac{\varphi_f - \varphi_i}{-m/\kappa} \approx \frac{\kappa\varphi_i}{m}. \tag{4.3.17}$$

A (4.3.2) egyenletből meghatározhatjuk a Hubble-paraméter időfüggését a felfúvódás során. Ebben a szakaszban elhanyagolhatjuk a kinetikus tagot, úgyhogy

$$H^2 = \frac{4\pi G}{3}(u^2 + m^2\varphi^2) \approx \frac{\kappa^2 m^2}{9}\varphi^2, \tag{4.3.18}$$

azaz

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \approx \frac{\kappa m}{3}\varphi_{attr}(t) \approx \frac{\kappa m}{3}\left[\varphi_i - \frac{m}{\kappa}(t - t_i)\right] \approx \frac{m^2}{3}(t_f - t) \tag{4.3.19}$$

adódik. A Hubble-paraméter tehát az idő lineáris függvényeként változik a felfúvódási szakaszban. Egyúttal látjuk, hogy

$$\begin{aligned} H_i &= H(t_i) \approx \frac{\kappa m}{3}\varphi_i, \\ H_f &= H(t_f) \approx \frac{\kappa m}{3}\varphi_f, \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

ami azt jelenti, hogy $H_f/H_i \approx \varphi_f/\varphi_i \sim m/m_{\rm Pl} \approx 10^{-6}$, ha $m \approx 10^{13}$ GeV. Ekkor a Hubble-paraméter értéke kb. 6 nagyságrendet csökken.

Becsüljük meg, hogy mennyit változik eközben a skálaparaméter! A (4.3.19) egyenlet könnyen megoldható a skálafaktorra. Ha közvetlenül integráljuk az egyenlet mindkét oldalát, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \ln a(t) &\approx \ln C + \frac{\kappa m}{3}\left[\varphi_i(t-t_i) - \frac{m}{2\kappa}(t-t_i)^2\right] \\ &= \ln C + \frac{\kappa m}{3}\left[\frac{1}{2}\varphi_i(t-t_i) - \frac{m}{2\kappa}(t-t_i)^2 + \frac{1}{2}\varphi_i(t-t_i)\right] \\ &\approx \ln C + \frac{1}{2}H(t)(t-t_i) + \frac{1}{2}H_i(t-t_i) \\ &\approx \ln C + \frac{1}{2}[H_i + H(t)](t-t_i), \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

ill. t_f időpillanattal parametrizálva azt, hogy

$$\ln a(t) \approx \ln C' - \frac{m^2}{6}(t_f - t)^2, \tag{4.3.22}$$

ahol C, C' alkalmasan választott integrációs állandók. A fentiek alapján a skálafaktor időfüggésére az alábbi kifejezéseket kapjuk:

$$a(t) \approx a_i \exp\left\{\frac{1}{2}[H_i + H(t)](t-t_i)\right\} \approx a_f \exp\left\{-\frac{m^2}{6}(t_f - t)^2\right\}. \tag{4.3.23}$$

Ezek segítségével megbecsülhetjük, hogy milyen mértékű lehet a felfúvódás,

$$\frac{a_f}{a_i} \approx \exp\left\{\frac{m^2}{6}(t_f - t_i)^2\right\} \approx \exp\left\{\frac{\kappa^2\varphi_i^2}{6}\right\}. \tag{4.3.24}$$

Itt $\kappa \sim m_{\rm Pl}^{-1}$, $m = 10^{13}$ GeV tömegű skalártér esetében $\varphi_i \sim 10^6 m_{\rm Pl}$, úgyhogy a felfúvódás mértéke $a_f/a_i \sim \mathcal{O}(\exp\{10^{12}\})$ lehet, ami messze meghaladja a minimálisan megkövetelt e^{75} értéket. Láttuk, hogy eközben a Hubble-paraméter szinte alig változik (csak 6 nagyságrendet csökken). Ezzel beláttuk, hogy a nem önkölcsönható, tömeges skalármező olyan modellje lehet a felfúvódást kiváltó „anyagnak”, amely biztosítani tudja, hogy egy nagyon kicsiny kauzálisan összefüggő tartományból olyan óriási méretű homogén tartomány jöjjön létre, amelynek a látható Világegyetem csak piciny része.

- **Az oszcillációs szakasz és a felfúvódás szerencsés kimenetele.** Ezekután már csak az van hátra, hogy megvizsgáljuk, lehetséges-e a felfúvódási szakaszból szerencsés kimenetel a Friedmann-féle lassulva táguló szakaszba. A felfúvódás, mint már szó volt róla, akkor fejeződik be, amikor a skalármező amplitúdója lecsökken

a Planck-skálára. A felfúvódást követően a megoldást legkönnyebben úgy tárgyalhatjuk, ha áttérünk a $(\varphi,\ u)$ változókról a H Hubble-paraméterre és egy újonnan bevezetett θ szögváltozóra. A változó-transzformáció érdekében induljunk ki a (4.3.2) Friedmann-egyenlet

$$u^2 + m^2\varphi^2 \quad = \quad \frac{3}{\kappa}H^2 \tag{4.3.25}$$

alakjából, ami megengedi az

$$u = \alpha H \sin\theta, \qquad m\varphi = \alpha H \cos\theta \tag{4.3.26}$$

transzformációt, ahol $\alpha = \sqrt{3/\kappa}$. A transzformációs képletekből közvetlenül adódik egyrészt, hogy

$$\begin{aligned} m\dot{\varphi} &= mu = m\alpha H \sin\theta = \alpha(\dot{H}\cos\theta - H\dot{\theta}\sin\theta), \\ \dot{H}\cos\theta - H\dot{\theta}\sin\theta &= mH\sin\theta. \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

Másrészt $\dot{u} = \alpha(\dot{H}\sin\theta + H\dot{\theta}\cos\theta)$ felhasználásával a (4.3.1) egyenletet,

$$\dot{u} + 3Hu + m^2\varphi \quad = \quad 0, \tag{4.3.28}$$

átírhatjuk

$$\dot{H}\sin\theta + H\dot{\theta}\cos\theta + 3H^2\sin\theta + mH\cos\theta \quad = \quad 0 \tag{4.3.29}$$

alakba. Szorozzuk ezután a (4.3.27) egyenletet $\cos\theta$-val, a (4.3.29) egyenletet pedig $\sin\theta$-val, majd adjuk össze az egyenletek megfelelő oldalait, ekkor a

$$\dot{H} \quad = \quad -3H^2\sin^2\theta \tag{4.3.30}$$

egyenletet kapjuk. Szorozzuk most a (4.3.29) egyenletet $\cos\theta$-val, a (4.3.27) egyenletet pedig $\sin\theta$-val és vonjuk ki az utóbbi megfelelő oldalait az előző megfelelő oldalaiból, ekkor $H \neq 0$ miatt

$$\dot{\theta} \quad = \quad -m - \frac{3}{2}H\sin 2\theta \tag{4.3.31}$$

adódik. Sikerült tehát a másodrendű Klein-Gordon-egyenletet 2 elsőrendű differenciálegyenlet csatolt rendszerévé átírnunk.

Keressük most a (4.3.30), (4.3.31) egyenletrendszer közelítő megoldását. Előre bocsátjuk, hogy ebben a bekezdésben a t időn a felfúvódás befejeződésétől, azaz az Ősrobbanás utáni t_f időpillanattól számítva eltelt időt értjük. A (4.3.30) egyenlet mutatja, hogy H csökken növekvő t esetén, úgyhogy a (4.3.31) egyenlet jobb oldalának második tagja csillapodó oszcillációkat ír le. Ha t elég nagy, akkor ez a tag elhanyagolható, és $\dot{\theta} \approx -m$, ahonnan

$$\theta(t) \quad \approx \quad -mt, \tag{4.3.32}$$

ahol az integrációs állandóként jelentkező konstans fázist zérusnak választottuk. A φ skalártér tehát $\omega \approx m$ frekvenciával oszcillál, és természetesen $u = \dot{\varphi}$ is.

A fázistérben a trajektória spirálisan rátekeredik az origóra. Helyettesítsük be a (4.3.32) közelítő megoldást a (4.3.30) egyenletbe,

$$\dot{H} = -3H^2 \sin^2 mt, \quad \Rightarrow \quad -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2}(1 - \cos 2mt), \tag{4.3.33}$$

majd integráljuk az egyenlet mindkét oldalát. Ezután mindkét oldal reciprokát véve azt kapjuk, hogy

$$H(t) \approx \frac{2}{3t}\left(1 - \frac{\sin 2mt}{2mt}\right)^{-1}. \tag{4.3.34}$$

Innen azt is látjuk, hogy a közelítésünk (a csillapodva oszcilláló tag elhanyagolása) akkor jogos, ha $mt \gg 1$.

A $\theta(t)$ és $H(t)$ közelítő megoldások ismeretében egyrészt meg tudjuk határozni a skalármező amplitúdójának időfüggését,

$$\varphi(t) \approx \frac{\alpha}{m} H(t) \cos\theta(t) \approx \frac{2\alpha \cos mt}{3mt}\left(1 + \frac{\sin 2mt}{2mt}\right), \tag{4.3.35}$$

másrészt a $\dot{a}/a = d\ln a/dt = H(t)$ egyenletet integrálhatjuk, és meghatározhatjuk a skálafaktor időbeli változását:

$$\begin{aligned}
\ln\frac{a(t)}{a_f} &\approx \int_{t_f}^{t} dt' \frac{2}{3t'}\left(1 - \frac{\sin 2mt'}{2mt'}\right) \approx \frac{2}{3}\int_{2mt_f}^{2mt} \frac{du}{u - sinu} \approx \frac{2}{3}\int_{2mt_f}^{2mt} \frac{du}{u}\left(1 + \frac{\sin u}{u}\right) \\
&\approx \frac{2}{3}\int_{2mt_f}^{2mt} du\left(\frac{1}{u} + \frac{\sin u}{u^2}\right) \\
&\approx \frac{2}{3}\ln\frac{t}{t_f} - \left[\frac{2}{3}\frac{\cos u}{u^2}\right]_{2mt_f}^{2mt} - \frac{2}{3}\int_{2mt_f}^{2mt} du \frac{-2(-cosu)}{u^3} \\
&\approx \frac{2}{3}\ln\frac{t}{t_f} - \frac{\cos 2mt}{6m^2t^2} + \text{const.} + \mathcal{O}((mt)^{-3}),
\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

azaz

$$a(t) \approx \text{const.} t^{2/3}\left(1 - \frac{\cos 2mt}{6m^2t^2} + \mathcal{O}((mt)^{-3})\right). \tag{4.3.37}$$

A kapott eredmény tanulsága az, hogy a Hubble-paraméter és a skálafaktor a kicsiny oszcilláló tagoktól eltekintve a $p = 0$ állapotegyenletű, por uralta Világegyetem időfüggését mutatja. A modell tehát biztosítja a szerencsés kimenetelt a felfúvódó, azaz gyorsulva táguló szakaszból a Friedmann-féle lassulva táguló szakaszba.

Sikerült tehát belátni, hogy a tömeges skalármező klasszikus kondenzátuma alkalmas modellje lehet a felfúvódásnak, és ha a skalárrészecskék tömege jóval kisebb, mint a Planck-tömeg, akkor a modell biztosítja a szerencsés kimenetelt a hideg anyag által uralt, lassulva táguló szakaszba. A hideg anyag nehéz skalár részecskéinek a Világegyetem későbbi fejlődése során kell elbomlaniuk barionokra, leptonokra és sugárzásra, amire számos elvi lehetőség kínálkozik.

4.3.3 Önkölcsönható skalármező

Vizsgáljuk most meg, hogy általános alakú potenciál esetén milyen feltételeknek kell ahhoz teljesülniük, hogy a felfúvódás szerencsés kimenetellel végbe menjen. Induljunk ki az általános alakú potenciál esetén érvényes (4.3.1) és (4.3.2) egyenletekből:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0, \tag{4.3.38}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right). \tag{4.3.39}$$

A (4.3.38) Klein-Gordon-egyenlet egy csillapított lineáris harmonikus oszcillátor egyenlete. A csillapítást a H Hubble-paraméter határozza meg. Ha jelentős a $-3H\dot{\varphi}$ csillapító erő, akkor ez hamar kicsivé teszi a kezdeti $\dot{\varphi}$ „sebességet", és kis értéken tudja tartani a $\ddot{\varphi}$ „gyorsulást". Ha elhanyagolható a kinetikus tag, azaz $\dot{\varphi}^2 \ll V$, akkor az inflatonmező energiasűrűsége $\epsilon \approx V$ és a (4.3.39) Friedmann-egyenletből $H \propto \sqrt{\epsilon} \approx \sqrt{V}$. Ha nagy a V potenciál értéke, azaz a mező amplitúdójának értéke sokkal nagyobb, mint $m_{\rm Pl}$, akkor a súrlódási tag mellett a gyorsulás elhanyagolható a (4.3.38) egyenletben, ez az úgy nevezett **lassú gördülés („slow-roll")** esete: a kezdetben kicsi $\dot{\varphi}$ alig változik, aminek következtében a mező amplitúdója is csak lassan csökken, és „gördül le" a potenciál minimumának irányába. A továbbiakban ezzel a **lassú gördüléses közelítéssel („slow-roll approximation")** fogunk élni. A lassú gördüléses közelítés alkalmazhatóságának feltételei:

$$\dot{\varphi}^2 \ll |V|, \tag{4.3.40}$$

$$|\ddot{\varphi}| \ll |3H\dot{\varphi}|. \tag{4.3.41}$$

Ebben a közelítésben a (4.3.38) és (4.3.39) mozgásegyenletek az alábbi alakot öltik:

$$3H\dot{\varphi} + V' \approx 0, \tag{4.3.42}$$

$$H \equiv \frac{d\ln a}{dt} \approx \sqrt{\frac{8\pi G}{3}V}. \tag{4.3.43}$$

A (4.3.42) egyenletet felhasználva írhatjuk, hogy

$$H = \frac{d\ln a}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\ln a}{d\varphi} \approx -\frac{V'}{3H}\frac{d\ln a}{d\varphi}. \tag{4.3.44}$$

Szorozzuk ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát H-val, és helyettesítsük be az így kapott egyenlet bal oldalába, H^2 helyére H-nak a (4.3.43) egyenlet által meghatározott kifejezését. Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk rendezés után a skálafaktor φ-függésére:

$$\frac{d\ln a}{d\varphi} \approx -8\pi G\frac{V}{V'}. \tag{4.3.45}$$

Ezt az egyenletet könnyűszerrel integrálhatjuk,

$$\ln a - \ln a_i \approx 8\pi G\int_{\varphi}^{\varphi_i} d\varphi' \frac{V(\varphi')}{V'(\varphi')}, \tag{4.3.46}$$

ahonnan a skálafaktor, mint az inflatonmező amplitúdójának a függvénye:

$$a(\varphi) \approx a_i \exp\left\{8\pi G\int_{\varphi}^{\varphi_i} d\varphi' \frac{V(\varphi')}{V'(\varphi')}\right\}. \tag{4.3.47}$$

A lassú gördülés közelítésének (4.3.40) feltétele a $\dot{\varphi} \sim V'/H$ és a $H \sim \sqrt{V}/m_{\rm Pl}$ nagyságrendi becslést felhasználva,

$$|V| \gg \dot{\varphi}^2 \sim \left(\frac{V'}{H}\right)^2 \sim \frac{(V')^2}{V} m_{\rm Pl}^2, \tag{4.3.48}$$

ahonnan

$$\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll \frac{1}{m_{\rm Pl}^2} \tag{4.3.49}$$

adódik. Nézzük most a (4.3.41) egyenlőtlenséget. Használjuk fel, hogy $\dot{\varphi} \sim V'/H$, amiből $\ddot{\varphi} \sim (V''\dot{\varphi}/H) - (V'\dot{H}/H^2)$, ahol $H \sim \sqrt{V}/m_{\rm Pl}$ miatt $\dot{H} \sim (V m_{\rm Pl}^2)^{-1/2} V'\dot{\varphi}$, úgyhogy a (4.3.41) egyenlőtlenséget az alábbi alakba írhatjuk át:

$$|V'| \gg \left|\frac{V''\dot{\varphi}}{H} - \frac{V'\dot{H}}{H^2}\right| \sim \left|\frac{V''V'}{H^2} - \frac{(V')^2}{\sqrt{V m_{\rm Pl}^2} H^2}\frac{V'}{H}\right| \sim \left|\frac{V''}{V} - \frac{(V')^2}{V^2}\right| |V'| m_{\rm Pl}^2, \tag{4.3.50}$$

azaz

$$\left|\frac{V''}{V} - \frac{(V')^2}{V^2}\right| \ll \frac{1}{m_{\rm Pl}^2}. \tag{4.3.51}$$

Ha teljesül a (4.3.49) feltétel, akkor innen azt a további feltételt kapjuk, hogy

$$\left|\frac{V''}{V}\right| \ll \frac{1}{m_{\rm Pl}^2}. \tag{4.3.52}$$

A lassú gördülés mindkét (4.3.49) és (4.3.52) feltételének eleget tevő potenciál pl. a

$$V(\varphi) = \frac{1}{n}\lambda\varphi^n \tag{4.3.53}$$

hatványfüggvény alakú potenciál. Ha $\varphi \gg m_{\rm Pl}$, akkor

$$\begin{aligned} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 &= \left(\frac{\lambda\varphi^{n-1}}{(1/n)\lambda\varphi^n}\right)^2 = \frac{n^2}{\varphi^2} \ll \frac{1}{m_{\rm Pl}^2}, \\ \frac{V''}{V} &= \frac{(n-1)\lambda\varphi^{n-2}}{(1/n)\lambda\varphi^n} = \frac{n(n-1)}{\varphi^2} \ll \frac{1}{m_{\rm Pl}^2}. \end{aligned} \tag{4.3.54}$$

Ebben az esetben

$$\int_{\varphi}^{\varphi_i} d\varphi' \frac{V(\varphi')}{V'(\varphi')} = \int_{\varphi}^{\varphi_i} d\varphi' \frac{\varphi'}{n} = \frac{1}{n}(\varphi_i^2 - \varphi^2), \tag{4.3.55}$$

úgyhogy a skálafaktor az inflatonmező amplitúdójának függvényében

$$a(\varphi(t)) \approx a_i \exp\left\{\frac{8\pi G}{n}[\varphi_i^2 - \varphi^2(t)]\right\} \approx a_i \exp\left\{\frac{1}{n m_{\rm Pl}^2}[\varphi_i^2 - \varphi^2(t)]\right\} \tag{4.3.56}$$

módon változik. A felfúvódás zöme lezajlik, amíg az inflatonmező amplitúdója néhányszoros faktorral csökken. Ugyanakkor a Világegyetemünknek a jelenlegi szerkezetét alapvetően

az a felfúvódási szakasz határozza meg, amikor további kb. $e^{50} - e^{70}$-es faktorral nő a skálafaktor, ez viszont az inflatonmező amplitúdójának kicsiny csökkenése mellett megy végbe. Természetesen a részletek erősen függenek már attól, hogy ezen kicsiny értékek esetén milyen alakú a potenciál.

Lássuk most be, hogy a potenciál alakjának megválasztásával szabályozni tudjuk, hogy milyen típusú lassulva táguló szakaszba történjen a felfúvódást követő szerencsés kimenetel! Végül, amikor a lassú gördülés feltételei már nem teljesülnek, akkor leáll a felfúvódás, az inflatonmező amplitúdója oszcillálni kezd, és megtörténhet a szerencsés kimenetel a lassuló tágulás szakaszába. Tegyük fel, hogy a potenciál olyan, hogy az oszcilláció periódusideje sokkal kisebb, mint a Világegyetemünk életkora. Ekkor az oszcilláló szakaszban elhanyagolhatjuk a Világegyetem tágulását a (4.3.38) Klein-Gordon-egyenletben ($\dot{H} \approx 0$ közelítéssel élhetünk):

$$\ddot{\varphi} + V'(\varphi) \approx 0. \tag{4.3.57}$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát φ-vel, és használjuk fel, hogy $\ddot{\varphi}\varphi = (\varphi\dot{\varphi})^{\cdot} - \dot{\varphi}^2$; ekkor azt kapjuk, hogy

$$(\varphi\dot{\varphi})^{\cdot} - \dot{\varphi}^2 + \varphi V'(\varphi) \approx 0. \tag{4.3.58}$$

Átlagoljunk az oszcilláció periódusidejére, akkor az első tag átlaga zérus, és azt kapjuk, hogy $\langle\dot{\varphi}^2\rangle \approx \varphi V'(\varphi)$. Ha ezt felhasználjuk, akkor az oszcillációs szakaszban érvényes állapotegyenletről a következőt mondhatjuk:

$$w = \frac{p}{\epsilon} \approx \frac{\langle\dot{\varphi}^2 - 2V\rangle}{\langle\dot{\varphi}^2 + 2V\rangle} \approx \frac{\langle\varphi V'(\varphi)\rangle - \langle 2V(\varphi)\rangle}{\langle\varphi V'(\varphi)\rangle + \langle 2V(\varphi)\rangle}. \tag{4.3.59}$$

Ebből az következik, hogy a $V = (1/n)\lambda\varphi^n$ hatványfüggvény alakú potenciál esetén $w \approx (n-2)/(n+2)$. Kvadratikus potenciál, azaz $n = 2$ esetén tehát $w \approx 0$, ami megfelel az előző alfejezetben tárgyalt tömeges, nem önkölcsönható inflatonmezőnek, vagyis ekkor a szerencsés kimenetel a $p \approx 0$ nyomású porszerű anyag által uralt, lassulva táguló szakaszba történik. Ha a potenciál negyedfokú, $n = 4$, akkor $w \approx 1/3$, ami az ultrarelativisztikus folyadék (sugárzás) állapotegyenlete, úgyhogy ultrarelativisztikus folyadék által uralt szakaszba történik a szerencsés kimenetel.

4.4 Az inflatonmező fejlődésének lecsatolása a skálaparaméter fejlődéséről

A célunk az, hogy az inflatonmező időbeli változását leíró egyenletet lecsatoljuk a skálaparaméter időfüggését leíró egyenletekről [3]. Ennek érdekében vezessük be a Nagy Bummtól mért t idő helyett az

$$N = \ln\frac{a(t)}{a_i} \tag{4.4.1}$$

változót, ahol a_i a skálaparaméter a felfúvódás kezdetén. **Az N változó azt méri, hogy a skálaparaméter mennyi „idő alatt" nő kezdeti értékének e^N-szeresére.** Induljunk ki a (4.3.1) Klein-Gordon-egyenletből, és a (4.3.2) és (2.3.14) Friedmann-egyenletekből, amelyek rendre

$$0 = \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi), \tag{4.4.2}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right), \tag{4.4.3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\left(-\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right) \tag{4.4.4}$$

alakúak. Vegyük észre, hogy $a(t) = a_i e^N$ miatt

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \dot{N}, \tag{4.4.5}$$

ahonnan $dt = dN/H$ adódik, úgyhogy az idő szerinti deriválást N szerinti deriválással helyettesíthetjük a $d/dt = H(d/dN)$ szabály szerint. Ekkor az (4.4.3) Friedmann-egyenlet a

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{1}{2}H^2\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2 + V(\varphi)\right] \tag{4.4.6}$$

alakba írható át, ahonnan azt kapjuk, hogy

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{V(\varphi)}{1 - \frac{4\pi G}{3}\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2}. \tag{4.4.7}$$

Ha felhasználjuk a (4.4.4) Friedmann-egyenletet és a Hubble-paraméter definícióját, akkor a következőket írhatjuk,

$$\dot{H} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2, \tag{4.4.8}$$

aazaz

$$\begin{aligned} H\frac{dH}{dN} &= \frac{8\pi G}{3}\left(-\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right) - H^2 \\ &= \frac{8\pi G}{3}\left[-H^2\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2 + V(\varphi)\right] - H^2 \\ &= -H^2\left[\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2 + 1 - 1 + \frac{4\pi G}{3}\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2\right] \\ &= -4\pi G H^2\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Végül tehát azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dN} = -4\pi G\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2. \tag{4.4.10}$$

Térjünk most át N szerinti deriválásra a (4.4.2) Klein-Gordon-egyenletben is,

$$\begin{aligned} 0 &= H\frac{d}{dN}\left(H\frac{d\varphi}{dN}\right) + 3H^2\frac{d\varphi}{dN} + V'(\varphi) \\ &= H\frac{dH}{dN}\frac{d\varphi}{dN} + H^2\frac{d^2\varphi}{dN^2} + 3H^2\frac{d\varphi}{dN} + V'(\varphi). \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

Használjuk most fel a (4.4.10) és a (4.4.3) egyenletet,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[-4\pi G H^2\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2 + 3H^2\right]\frac{d\varphi}{dN} + H^2\frac{d^2\varphi}{dN^2} + V'(\varphi) \\ &= \left[-4\pi G H^2\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2 + 4\pi G H^2\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2 + 8\pi G V(\varphi)\right]\frac{d\varphi}{dN} + H^2\frac{d^2\varphi}{dN^2} + V'(\varphi) \\ &= H^2\frac{d^2\varphi}{dN^2} + 8\pi G V(\varphi)\frac{d\varphi}{dN} + V'(\varphi). \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $8\pi G V(\varphi)$-vel, majd a jobb oldalon álló első tagban $V(\varphi)$-t fejezzük ki a (4.4.7) egyenletből $d\varphi/dN$-nel,

$$\frac{\frac{d^2\varphi}{dN^2}}{3 - 4\pi G\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2} + \frac{d\varphi}{dN} = -\frac{1}{8\pi G}\frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)}. \tag{4.4.13}$$

Látjuk, hogy az inflatonmező időfejlődését leíró (4.4.13) egyenlet lecsatolódott a (4.4.7) és a (4.4.10) Friedmann-egyenletekről.

4.5 A felfűtés és az előfűtés

A felfúvódás végére lehűlt Világegyetemet valamilyen folyamatoknak vissza kellett fűtenie ahhoz, hogy a Világegyetem későbbi fejlődése során azt – a csillagászati megfigyelésekkel és az elem-gyakoriságokkal jól igazolt – utat járja be, amelyet a felfúvódás gondolatának felmerülése előtt már sikerült a fizikusoknak rekonstruálniuk. Mint már említettük, a felfúvódási modell egyik előnye, hogy az óriási mértékű tágulást kísérő vöröseltolódás következtében a Planck-korszak végén esetleg jelenlevő bármilyen topológiai defektus, sugárzás és anyag kimosódik. A Világegyetemben a felfúvódási korszak végére csak az inflatonmező kondenzátuma lesz jelen. Amikor megszűnnek a lassú gördülés feltételei, akkor az inflatonmező amplitúdója elkezd gyorsan zuhanni a potenciál minimumának az irányába. Kezdetben (a felfúvódás leállását jelentő t_f időpillanatban) a teljes energiasűrűség az inflaton-kondenzátumban van jelen. Ez aztán kétféle okból kezd el csökkenni. Egyrészt a Világegyetem tágulása az energiasűrűség geometriai okokból történő csökkenését okozza. Másrészt az inflaton-kondenzátum részecskéknek, az inflatonoknak a koherens szuperpozíciója, amelyek elbomolhatnak sugárzássá és tömeges részecskékké, bozonokká és fermionokká, az inflatonmező és más kvantummezők közötti kölcsönhatás következtében. Ez vezethet az inflatonmező energiájának további, a lassuló tágulás okozta effektusnál jelentősebb csökkenéséhez és ahhoz, hogy a teljes energiasűrűségben az inflaton-bomlás végtermékeinek energiasűrűsége válik meghatározóvá.

Tegyük fel, hogy csak fermionokra történik bomlás. Akkor az inflatonmező ϵ_ϕ energiasűrűségének változását az

$$\dot{\epsilon}_\phi + (3H + \Gamma_\phi)\epsilon_\phi = 0 \tag{4.5.1}$$

módosított kontinuitási egyenlet írja le, ahol Γ_ϕ fenomenológikus bomlásállandó. Az inflatonmezőből eltűnő energia megjelenik a keletkezett fermionok energiájaként. A bomlástermékek rövidesen termikus egyensúlyba kerülnek, amelyet valamilyen T_{rh} hőmérséklet jellemez. Ez a **felfűtési hőmérséklet („reheating temperature”),** maga a folyamat a **felfűtés („reheating”)**.

Ha bozonokra is történhet bomlás, akkor az inflatonmező oszcillációja miatt **paraméteres rezonancia** léphet fel. Ennek következtében nagyon gyors bomlások következnek be, amelyeknek a bomlástermékei távol vannak a termikus egyensúlytól. Ekkor csak jóval később alakul ki termikus egyensúly valamilyen T_{rh} hőmérsékleten. A paraméteres rezonancia következtében bekövetkező gyors bomlások által kiváltott hőmérséklet-növekedést nevezik **előfűtésnek („preheating")**. Az előfűtésnek az a jelentősége, hogy keletkezhetnek részecskék, amelyeknek az energiája jóval meghaladhatja a felfűtési hőmérsékletnek megfelelő átlagenergiát. Ez egyrészt jelentheti, hogy újra megjelenhetnek esetleg a Világegyetem további fejlődése szempontjából nem kívánatos topológiai defektusok, amelyektől a felfúvódás egyszer már megszabadította a rendszert. Másrészt az előfűtésnek lehet előnye is: új lehetőségeket teremt a sötét anyag keletkezésére és a barion-aszimmetria létrejöttére.

4.6 Mi játszhatja az inflatonmező szerepét?

Az inflatonmező szerepének betöltésére számos jelölt van, hiszen egyetlen követelményt kell csak teljesítenie a jelöltnek, hogy „jól utánozza" a skalármező lassan gördülő kondenzátumának a viselkedését. Néhány fontos lehetőséget érdemes megemlíteni (a teljesség igénye nélkül):

- Az inflatonmező lehet egy alkalmas potenciállal rendelkező skalármező. Utóbbi lehet az alapvető kölcsönhatások valamelyik elméletében (pl. a Nagy Egyesített Elméletekben) szereplő skalármező, és ennek kondenzátuma az inflaton-kondenzátum. Az is elképzelhető azonban, hogy az inflaton-kondenzátum egy fermion-kondenzátum, amelyet skalármezővel írunk le.

- Az inflatonmezőt azonban maga a gravitáció elmélete is szolgáltathatja. Erre a magasabb deriváltas gravitáció a példa. Az ide sorolható gravitáció-elméletek egy széles osztálya az $f(R)$**-gravitáció**, amelyhez tartozó egyes modellekben a hatásfunktionál a téridő R görbületének más és más $f(R)$ függvénye. Az $f(R)$-gravitáció az

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x R\sqrt{-g} \tag{4.6.1}$$

  Einstein-Hilbert-hatás

$$S_{f(R)} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x f(R)\sqrt{-g}, \tag{4.6.2}$$

  általánosításából indul ki, ahol $\kappa = 8\pi G/c^4$ (ill. $\kappa = 8\pi/m_{\rm Pl}^2$) és $g = \det g_{\mu\nu}$ a metrikus tenzor determinánsa. Amennyiben nincsen jelen anyag, akkor a metrikára vonatkozó

$$f'(R)R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu f(R) + [f'(R)]^{;\alpha}_{;\alpha}\delta^\mu_\nu - [f'(R)]^{;\mu}_{;\nu} = 0 \tag{4.6.3}$$

  mozgásegyenletek a hatásból a $g_{\mu\nu}$ metrikus tenzor szerinti variálással kaphatók meg. Ezek az egyenletek az Einstein-egyenletek általánosításai. Meg lehet mutatni, hogy az $f(R)$-gravitáció konform-ekvivalens az Einstein-gravitáció és egy skalármező csatolt elméletével. Ez a skalármező játszhatja az inflatonmező szerepét.

- A skalármező **Born-Infeld-féle elmélete** is szolgáltathat inflatonmezőt. A Born-Infeld-hatásban nincsen potenciáltag, viszont a hatás nem lineáris módon függ a skalármező kinetikus energiájától. Az ilyen típusú elméletben megjelenő felfúvódást

k-inflációnak („k-inflation”) nevezik. A φ Born-Infeld-féle skalármező hatásfunkcionálja

$$S = \int d^4x p(X,\varphi)\sqrt{-g}, \tag{4.6.4}$$

ahol $X = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi$ a skalármező kinetikus energiája, és $p(X,\varphi)$ a φ és X változók tetszőleges függvénye. Megmutatható, hogy a skalármező energiaimpulzus-tenzora olyan alakba írható, mint az ideális folyadéké,

$$T^\mu_\nu = (\epsilon + p)u^\mu u_\nu - p\delta^\mu_\nu, \tag{4.6.5}$$

ahol a Lagrange-sűrűségben szereplő p függvény játssza a nyomás szerepét, az energiasűrűség és a négyessebesség pedig az

$$\epsilon = 2X\frac{\partial p}{\partial X} - p, \qquad u_\mu = \frac{\partial\varphi/\partial x^\mu}{\sqrt{2X}} \tag{4.6.6}$$

kifejezésekkel adható meg. Ha a Lagrange-sűrűségben szereplő p függvény a változóinak valamilyen tartományában eleget tesz a $p \gg |2X\frac{\partial p}{\partial X}|$ feltételnek, akkor az állapotegyenlet a változók ezen tartományában közelítőleg $p \approx -\epsilon$ alakú, úgyhogy oka lehet a felfúvódásnak. A tetszőleges p függvényt felvehetjük

$$p(X,\varphi) = c_0(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\varphi)\frac{X^n}{\Lambda^{4n-4}} \tag{4.6.7}$$

alakban, ahol Λ az UV-levágás szerepét tölti be (a skalártér kanonikus dimenziója $(4-2)/2 = 1$, úgyhogy X dimenziója 4). Ha $X \ll \Lambda^4$, akkor lényegében visszakaphatjuk a $c_0(\varphi)$ potenciál által vezérelt lassú-gördüléses felfúvódási modellt. Új lehetőséget az jelent, ha a skalármező hatásában jelentősek a magasabb deriváltas tagok, azaz $X \sim \mathcal{O}(\Lambda^4)$. Ekkor további szimmetria-megszorítások hiányában az elmélet nem renormálható, úgyhogy az ilyen skalármező nem látszik alkalmas modellnek. Ha azonban az elmélet speciális szimmetriával is rendelkezik, akkor renormálhatóvá válhat, és megbízható eredményeket szolgáltathat. Ilyen választásra az egyik példa a p függvénynek a Born és Infeld által eredetileg javasolt alakja:

$$p_{BI}(X,\varphi) = -\Lambda^4(\varphi)\sqrt{1 + \frac{X}{\Lambda^4(\varphi)}} - V(\varphi). \tag{4.6.8}$$

A p függvénynek mindig valamilyen szimmetria-megszorításnak is eleget kell tennie ahhoz, hogy a kapott skalár-elmélet renormálható maradjon. Ezen túlmenően jönnek azok a megszorítások, amelyeket a felfúvódás és annak szerencsés kimenetele diktál.

Bármelyik módon valósul is meg a felfúvódás, a kozmológiai következményei lényegében azonosak.

4.7 A felfúvódás forgatókönyvei

Ebben a fejezetben röviden áttekintjük azokat az elképzeléseket, amelyek arra nézve születtek, hogy a Természetben a felfúvódás milyen forgatókönyv szerint folyt le. Három

alapvetően különböző **forgatókönyv („scenario”)** jöhet szóba: a **felfúvódás régi forgatókönyve („old inflation”)**, a **felfúvódás új forgatókönyve („new inflation”)** és a **kaotikus felfúvódás forgatókönyve („chaotic inflation”)**. Az előzőekben mi a kaotikus felfúvódást tárgyaltuk részletesen. Mielőtt az egyes forgatókönyvek felvázolására és összehasonlítására rátérnénk, érdemes elmondani, hogy a régi és az új forgatókönyv is a felfúvódást a Nagy Egyesített Elmélet (GUT) alkalmazásának tekinti, amelyről az 1980-as években azt hitték, hogy jól ismert. Az inflatonmezőt a felfúvódás régi és új forgatókönyvében a GUT Higgs-terével azonosították. Ez magyarázza, hogy mindkét forgatókönyv szerint a valódi vákuumállapot spontán szimmetriasértő, amelyben az inflatonmező amplitúdójának értéke a GUT alapján becsült $|\varphi| \approx 10^{15} - 10^{19}$ GeV, ami ahhoz szükséges, hogy az ismert (elemi) részecskék tömege helyesen adódjon. A kezdeti feltételek problémájának elhárítása mellett a régi és az új forgatókönyv magyarázatot adott arra is, hogy miért nincsenek a Világegyetemben monopólusok. A GUT elkerülhetetlen következménye ugyanis, hogy a felfúvódás vagy olyan mértékben szétszór minden korábban keletkezett monopólust a térben, hogy átlagosan kevesebb, mint egy monopólus marad horizont-méretű térfogatonként, vagy pedig egyáltalán nem is keletkeznek monopólusok. Ugyanez az érvelés vonatkozik a nehéz stabil részecskékre, amelyek túl nagy gyakorisággal keletkezhetnek a korai forró termikus egyensúlyi állapotban. Fontos azonban tudatosítanunk, hogy a kezdeti feltételek problémája a Természet alapvető kérdése, ugyanakkor a monopólusok és a nehéz stabil részecskék problémája – ismereteink jelen állapotában – „csupán” a Standard Modellen túli fizika belső problémája, azaz talán csak abból ered, hogy nem tudjuk, mik is az alapvető kölcsönhatások és törvényeik a Standard Modell energiaskálájánál nagyobb energiákon.

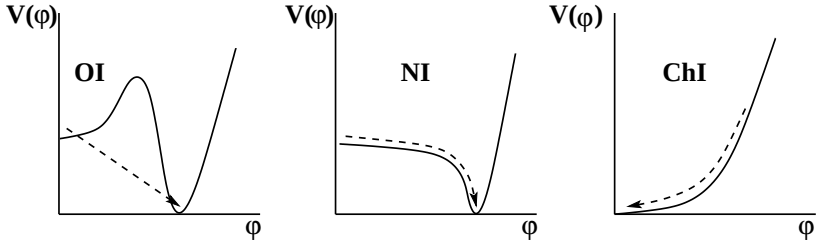

Figure 12: Tipikus potenciálalakok és a „régi” (OI), az „új” (NI) és a kaotikus infláció (ChO) lefolyásának illusztrációja.

4.7.1 A felfúvódás régi forgatókönyve: „old inflation”

Eredetileg Alan Guth javasolta a felfúvódás lefolyására a következő elgondolást, amelyet a 12. OI ábra illusztrál. Amikor a nagyon korai Világegyetem lehűlt, akkor **metastabil állapotba** került, vagy ahogy mondani szokták egy **hamis vákuumállapotba („false vacuum”)**. Ez a potenciális energia olyan lokális minimumának megfelelő állapot, amelyben nagy az energiasűrűség, és amelyet potenciálgát választ el a potenciális energia legmélyebb lokális minimumától, amelyhez a valódi (stabil) vákuumállapot tartozik. A metastabil állapot olyan, mint amikor nagy a kozmológiai állandó. Ebből a túlhűtött („supercooled”) állapotból a Világegyetem csak **kvantummechanikai alagúteffektus révén történő bomlással** tudott eljutni a valódi vákuumállapotba, ami spontán szimmetriasértő. A valódi vákuumállapot várhatóan olyan, amilyennek azt a Nagy Egyesített Elmélet vákuumától meg kell követelni. Az alagúteffektus azonban a teljes Világegyetem kis térfogataiban egymástól függetlenül, spontán módon indul meg, ami **buborékcseppek képződését („bubble nucleation”)** eredményezi. A metastabil vákuumban spontán

módon buborékok keletkeznek, amelyeken belül a valódi vákuumállapot uralkodik. Ezek a buborékok aztán elkezdenek fénysebességgel felfúvódni. Azonban már Guth rájött arra, hogy a felfúvódásnak ez a modellje nem tudja biztosítani, hogy a Világegyetem szükséges mértékben újra felfűtse önmagát. Szükséges mértékű felfűtésen azt kell érteni, hogy a folyamat végén be tudjon a Világegyetem népesülni a Nagy Egyesítés részecskéivel és sugárzással, amelyek termalizációja révén elég magas lenne a hőmérséklet ahhoz, hogy a Világegyetem későbbi fejlődési szakaszaira korábban nyert eredmények ne sérüljenek. Sugárzás a vákuumbuborékok képződése során csak a buborékfalak ütközése révén keletkezhet. Ha azonban a felfúvódás elég soká tart ahhoz, hogy megoldást jelentsen a kezdeti feltételek problémáira, akkor a buborékok ütközése nagyon ritka. Egy kezdetben kauzálisan összefüggő (Hubble-horizontnyi méretű) térfogatból valószínűen csak egyetlen buborék keletkezik. A felfúvódás új forgatókönyve ezt a problémát megoldotta azzal, hogy a kezdeti állapotot nem metastabilnak, hanem **labilis egyensúlyi állapotnak** tételezte fel.

4.7.2 A felfúvódás új forgatókönyve: ,,new inflation"

Andrei Linde, Andreas Albrecht és Paul Steinhardt nevéhez fűződik a felfúvódás új forgatókönyvének kidolgozása, az úgynevezett lassú-gördüléses felfúvódásé, amely ,,új infláció" néven vonult be a szakirodalomba. A folyamatot a 12. NI ábra szemlélteti. Az alapelgondolás ismét az, hogy a kezdeti Világegyetem hűlése során valamilyen nagy energiasűrűségű állapotba került, ami azonban nem metastabil, hanem **labilis egyensúlyi állapot.** A potenciálisenergia-felület azonban nagyon lapos a maximum környékén, úgyhogy onnan az inflatonmező nagyon lassan ,,gördül le" a potenciális energia minimumának irányába; sokkal lassabban, mint amilyen ütemben a Világegyetem tágul. Az új forgatókönyv egyúttal azt is feltételezi, hogy a lassú legördülés az egész térben (az egész Világegyetemben) homogénen megy végbe. Amikor a felfúvódás végeztével az állapot megközelíti a potenciális energia minimumát, a valódi vákuumállapotot, akkor a potenciál meredekebbé válik. Ekkor az inflatonmező kondenzátumának amplitúdója oszcillálni kezd, és energiája az inflatonok bomlása révén átalakulhat a GUT tömeges részecskéinek és sugárzásnak az energiájává, amelyek termalizációja újra felfűti a Világegyetemet. Ez a modell is, hasonlóképpen, mint a régi infláció, azt tételezi fel, hogy a kezdeti Világegyetem hideg, termikus egyensúlyi állapotban van, amelyben az inflatonmező amplitúdója zérus. A termikus egyensúly feltevése a Világegyetem teljes térfogatában, mint arra később rámutattak, aligha valószínű. Márpedig a termikus egyensúly feltevése volt az alapja annak, hogy az infláció előtti kezdeti állapotban a termikus fluktuációk révén helyreállt a szimmetria, és létrejött a sértetlen szimmetriájú $\varphi = 0$ vákuum. Ez a kezdeti feltétel tehát erősen megkérdőjelezhető. Ráadásul az új felfúvódási elképzelés azt is felteszi, hogy az inflatonmező potenciálja nagyon speciális, nagyon lapos a kezdeti energiasűrűséghez, a vákuum energiasűrűségéhez képest és hogy nagyon kicsi az inflatonmező tömege a Planck-tömeghez képest. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a potenciálnak rendkívül finoman hangoltnak kellene lennie. Innen ered a finom hangolás problémája. Ezeket a problémákat is megoldhatja a kaotikus felfúvódás modellje, amelyet részletesen tárgyaltunk a korábbiakban.

4.7.3 A kaotikus felfúvódás

A kaotikus felfúvódás modelljét Andrei Linde javasolta, és sematikusan a 12. ChI ábra szemlélteti. Az alapgondolat az, hogy az infláció természetes módon jelenik meg, ha a Világegyetem kezdetben nagy energiájú, kaotikus állapotban van és a skalármező potenciálja felülről nem korlátos. A kezdeti tágulása során a Világegyetem eljut a Planck-korszak végére, amikor már elhanyagolhatók a kvantumgravitációs effektusok. Tegyük fel, hogy kezdetben a teljes térfogat kicsiny, kauzálisan összefüggő darabjaiban a skalármező

amplitúdója közel állandó, de az egyes ilyen térfogatdarabkákban véletlenszerű értékeket vesz fel, hiszen a Planck-idő eltelte után nincs okunk feltenni, hogy a skalármező értéke mindenütt azonos lenne. Éppen ellenkezőleg, azt gondolhatjuk, hogy a skalármező azonos valószínűséggel minden olyan φ értéket felvehet az egyes kicsiny kauzálisan összefüggő térfogatdarabokban, amelyekre a $|V(\varphi)| \ll m_{\rm Pl}^4$ feltétel teljesül. Az ilyen kezdeti feltételt nevezzük kaotikusnak, és ezért kapta a felfúvódásnak ez a forgatókönyve a kaotikus jelzőt. Valóban, ha figyelembe vesszük, hogy a Planck-korszak kb. $t_{\rm Pl} \sim m_{\rm Pl}^{-1}$ ideig tartott, és feltesszük, hogy annak a végén az energiasűrűség döntő hányada potenciális energiából származik, akkor a határozatlansági relációt $\ell_{\rm Pl}^3$ Planck-térfogat energiájára alkalmazva $\ell_{\rm Pl}^3 \delta V\ t_{\rm Pl} \sim 1$, azaz $\delta V \sim t_{\rm Pl}^{-1} \ell_{\rm Pl}^{-3} \sim m_{\rm Pl}^4$ mértékű kvantumfluktuációkat enged meg, amelyeket a rendszer a megelőző Planck-korszakból megörököl. Másrészt a $t_{\rm Pl}$ pillanatban a részecske-horizont is $\ell_p \sim t_{\rm Pl}$, és a kb. $t_{\rm Pl}$ méretű egyes térfogatdarabok között nincsen korreláció, úgyhogy azokban az inflatonmező értéke független. Ha a potenciál pl. $V \sim \lambda\varphi^4$, akkor minden $-\lambda^{-1/4} m_{\rm Pl} \ll \varphi \ll \lambda^{-1/4} m_{\rm Pl}$ érték előfordulhat. Ha ráadásul $\lambda \ll 1$, akkor a térmennyiség amplitúdója véletlenszerűen lehet $|\varphi| \gg m_{\rm Pl}$, azaz sokkal nagyobb, mint a Planck-tömeg. Láttuk, hogy ez elegendő ahhoz, ha egyébként a potenciál eleget tesz a lassú gördülés feltételeinek, hogy a megfelelő térfogatdarabka gyorsulva táguljon és felfúvódva a látható Világegyetem mai skáláján homogén legyen. Ugyanakkor a horizonton túl a teljes Világegyetem mutathat rendkívül inhomogén, bonyolult globális szerkezetet. A kaotikus felfúvódás modelljének egyik erénye, hogy nem feltételezi a kezdeti Világegyetem homogenitását, azaz elesik a felfúvódás kezdeti feltételével kapcsolatos probléma. A kezdeti (térfogatában végtelen) Világegyetem a $t \sim t_{\rm Pl}$ Planck-időben bármilyen bonyolult globális szerkezetű lehet, akkor is lesz végtelen sok olyan kicsiny, kauzálisan összefüggő darabja, amelyek exponenciális felfúvódásnak indulnak, és végül túlnőnek a mai megfigyelhető Világegyetem méretein. Ezen mini-Világegyetemek egyikének felfúvódás utáni kicsiny része az általunk megfigyelt Világegyetem, ami egyszerre magyarázza a megfigyelhető tér észlelt homogenitását és izotrópiáját, valamint geometriájának közel euklideszi természetét. A korábbi „régi" és „új" felfúvódási elképzelések arra törekedtek, hogy egy globálisan homogén és izotróp Világegyetem magyarázatát adják. A kaotikus kezdeti feltételeken alapuló felfúvódási modell szerint a kezdeti globális Világegyetemnek azon $\ell_p \sim m_{\rm Pl}^{-1}$ méretű darabjai fúvódnak fel $a_f \propto e^{8\pi m_{\rm Pl}^{-2}\varphi^2}$ méretűre, amelyekben az inflatonmező kezdeti amplitúdója lényegesen nagyobb, mint a Planck-tömeg, $|\varphi| \gg m_{\rm Pl}$, úgyhogy a mai globális Világegyetemet lényegében ezek a felfúvódott mini-Világegyetemek alkotják, mert azon részek térfogathányada elhanyagolhatóvá vált, amelyekben kezdetben $|\varphi| < m_{\rm Pl}$ volt. A modell egy további előnye, hogy a részecskefizikai elméletek széles körében elképzelhetővé válik a felfúvódás, ha a skalármezők legalább egyikének az effektív potenciálja elég lapos a $m_{\rm Pl} < |\varphi| < \varphi_{max}$ értékek tartományában, ahol $V(\varphi_{max}) \approx m_{\rm Pl}^4$. Még egy további előny, hogy tulajdonképpen a $|\varphi| > m_{\rm Pl}$ tartományok kaotikus felfúvódása csaknem modellfüggetlen. Vizsgáljuk meg ehhez a $|V| \gg V'' m_{\rm Pl}^2$ feltételt nagy $|\varphi|$ esetén. Ekkor jó becslés, hogy $V'' \sim V(\varphi)/\varphi^2$. Akkor viszont a lassú gördülés $|V| \gg V'' m_{\rm Pl}^2$ feltétele teljesül, ha $|\varphi| \gg m_{\rm Pl}$, lényegében a potenciál alakjától függetlenül. A tanulság az, hogy **a felfúvódás nem valami nagyon speciális, a Természet finom-hangoltságát feltételező jelenség, hanem minden valószínűség szerint elkerülhetetlen következménye a kaotikus kezdeti feltételeknek.**

4.8 A felfúvódás és a de Sitter-téridő

Végül érdemes visszatérnünk a de Sitter-megoldás és a felfúvódás kapcsolatára. Láttuk, hogy a de Sitter-megoldás exponenciálisan növekvő skálaparamétert eredményez, azonban nem rendelkezik szerencsés kimenetellel. A de Sitter-téridő ugyanazokkal a szim-

metriákkal rendelkezik, mint a Minkowski-téridő. Benne a tér homogén és van időbeli eltolási szimmetria. Ezért bármely térszerű hiperfelület mentén állandó az energiasűrűség. Ahhoz, hogy tágulási modellt fogalmazzunk meg, nemcsak a $k = 0$ és ± 1-nek megfelelő Friedmann-koordinátákat használhatjuk, hanem más koordinátarendszert is, pl. a sztatikus koordinátákat. A koordinátarendszer megválasztásától függően az állandó időhöz tartozó hiperfelületek 3-dimenziós geometriája nagyon különböző. Ezek a különbözőségek a magasfokú szimmetriával rendelkező téridő különböző rétegezésének a következményei. Ugyanakkor nincsen semmilyen „első elv", amelynek alapján választani lehetne közöttük.

Az elmondottakból következik, hogy a felfúvódás valójában olyan téridőben valósulhat meg, amelyik különbözik a de Sitter-téridőtől. Kell, hogy az állapotegyenlet legalább valamennyire eltérjen a vákuum $p = -\epsilon$ állapotegyenletétől. Végül ez az eltérés határozhatja meg, hogy mi az a hiperfelület, amelyen megtörténik a szerencsés kimenetel, azaz az átmenet a forró Világegyetem állapotába. Mindemellett a de Sitter-téridő jó nulladik közelítése a legtöbb felfúvódási modellnek. Azalatt, amíg a skálafaktor kb. e^{75}-szörösére nő, teljesülnie kell a $p + 3\epsilon < 0$ feltételnek. Ez pedig általában akkor lehetséges, ha ezalatt szinte végig jó közelítéssel fennáll a $p \approx -\epsilon$ állapotegyenlet. Azt láttuk korábban, hogy a konform koordinátarendszerekben megfogalmazott téridő tud leírni táguló Világegyetemet, míg pl. a sztatikus koordináták által meghatározott térszerű hiperfelületek a horizont skálájánál nagyobb méretben nem tágulnak. A kérdés az lehet, hogy milyen térgeometriához tartozó koordinátákat válasszunk a $k = 0, \ \pm 1$ lehetséges esetek közül. Aszerint, hogy melyik esetet választjuk, más lesz a geometriája annak a térszerű hiperfelületnek, amelyen megtörténik az átmenet a Friedmann-féle lassuló tágulás korszakába. Ennek megfelelően kaphatunk eredményül lapos, nyílt vagy zárt Friedmann-féle Világegyetemet. Ami azonban a Világegyetem megfigyelhető részét illeti, ez a kérdés (k megválasztásának kérdése) érdektelen. Ha ugyanis a felfúvódás e^{75}-szörös növekedést okoz a skálafaktorban, akkor a megfigyelhető rész az egész felfúvódott (mini-)Világegyetemnek csak nagyon parányi része, s mint ilyen, jó közelítéssel laposnak tekinthető. Az, hogy mi, azaz milyen globális szerkezet van a jelenlegi horizontnál sokkal nagyobb (mondjuk 1 nagyságrenddel nagyobb) méretskálán, az elkövetkező kb. 100 milliárd évben teljesen érdektelen. Ehhez jön még hozzá, hogy a kvantumfluktuációk miatt annak a kérdésnek nincs is értelme, hogy mi a Világegyetem görbülete ezeken a globális méretskálákon. Utóbbi kérdéskörre még visszatérünk az inhomogenitások szerepének diszkussziója során.

5 GRAVITÁCIÓS INSTABILITÁS ÉS SZERKEZETKÉPZŐDÉS A LÁTHATÓ VILÁGEGYETEMBEN A NEWTONI GRAVITÁCIÓ ALAPJÁN

5.1 Gravitációs instabilitás a Newton-i fizikában. Jeans elmélete

A gravitációs instabilitást először sztatikus, nem táguló Világegyetemben fogjuk tárgyalni a Newton-i fizika, azaz a nem relativisztikus hidrodinamika keretében (ld. B. függelék). Tegyük fel, hogy az instabilitás homogén és izotróp háttéren jelenik meg, amelyet a helytől és időtől független $\epsilon_0(\vec{r},t)$ =áll. energiasűrűség jellemez. Ez nincsen összhangban a hidrodinamika egyenleteivel, mert homogén anyageloszlás csak akkor jöhet létre, ha az $F \propto -\nabla\phi$ gravitációs erő eltűnik, de akkor a (B.4) Poisson-egyenlet nem teljesül. Az ellentmondás úgy oldható fel, ahogy az Einstein-féle sztatikus Világegyetem esetében: fel kell tételezzük, hogy a gravitációs erőt egy „antigravitációs" erő kompenzálja, ami alkalmasan választott kozmológiai állandó jelenlétének felel meg. Az instabilitást úgy keressük, hogy feltételezzük a fizikai mezők háttér-értékeikhez képesti kicsiny perturbációját, és az utóbbiakban linearizáljuk a hidrodinamika (B.1)-(B.4) egyenleteit, majd megkeressük a linearizált egyenletek megoldásait. Ha találunk az idő függvényében nem korlátos megoldásokat, akkor azokat azonosítjuk az instabilitással. A gravitációs instabilitás így kapott linearizált elméletét kidolgozójáról, Sir James Hopwood Jeansről nevezték el.

Jelöljük $_0$ indexszel a sztatikus hátteret jellemző mennyiségeket, és vezessük be azok kicsiny perturbációit:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 + \delta\epsilon(\vec{r},t), \quad \vec{v} = \delta\vec{v}(\vec{r},t), \\ s &= s_0 + \delta s(\vec{r},t), \quad \phi = \phi_0 + \delta\phi(\vec{r},t), \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

ahol ϵ, $\vec{v}$, s és ϕ rendre a folyadék energiasűrűsége, áramlási sebessége, entrópiasűrűsége és a gravitációs potenciál. A folyadék nyomása, pontosabban állapotegyenlete ekkor

$$p = p(\epsilon_0 + \delta\epsilon, s_0 + \delta s) \equiv p_0 + \delta p(\vec{r},t), \tag{5.1.2}$$

alakba írható, ahol a nyomás perturbációja

$$\delta p = c_s^2 \delta\epsilon + \sigma\delta s \tag{5.1.3}$$

és $c_s^2 = (\partial p/\partial\epsilon)_s$ a hangsebesség négyzete és $\sigma = (\partial p/\partial s)_\epsilon$. Nem relativisztikus folyadék esetében c_s, $|\delta\vec{v}| \ll 1$, vagyis a hangsebesség és a részecskék sebesség-perturbációja sokkal kisebb, mint a vákuumban a fény sebessége.

Helyettesítsük be a mezők perturbált kifejezéseit a hidrodinamika (B.1)-(B.4) alapegyenleteibe, és csak a kicsiny perturbációban lineáris tagokat őrizzük meg:

$$\frac{\partial\delta\epsilon}{\partial t} + \epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{v} = 0, \tag{5.1.4}$$

$$\frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\delta\epsilon + \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\delta s + \vec{\nabla}\delta\phi = 0, \tag{5.1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta s = 0, \tag{5.1.6}$$

$$\Delta\delta\phi = 4\pi G\delta\epsilon. \tag{5.1.7}$$

Az (5.1.6) egyenlet megoldása tetszőleges, időtől független entrópia-perturbáció, $\delta s(\vec{r})$. A (5.1.7) egyenlet lehetővé teszi, hogy a energiasűrűség perturbációjának ismeretében közvetlenül meghatározzuk a gravitációs potenciál perturbációját. Az (5.1.5), (5.1.4) és az (5.1.7) egyenletek segítségével az energiasűrűség perturbációjára inhomogén hullámegyenletet tudunk levezetni,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\epsilon - c_s^2\Delta\delta\epsilon - 4\pi G\epsilon_0\delta\epsilon \quad = \quad \sigma\Delta\delta s(\vec{r}), \tag{5.1.8}$$

amelynek forrástagja az időtől független entrópiasűrűség.

Képezzük az (5.1.5) egyenlet mindkét oldalának divergenciáját:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{v} + \frac{c_s^2}{\epsilon_0}\nabla\delta\epsilon + \frac{\sigma}{\epsilon_0}\Delta\delta s + \Delta\delta\phi \quad = \quad 0. \tag{5.1.9}$$

Az (5.1.4) egyenletet és az (5.1.7) egyenletet felhasználva kifejezzük rendre a (5.1.9) egyenlet bal oldalának első és negyedik tagját az energiasűrűség perturbációjával. Ekkor megkapjuk a (5.1.8) egyenletet.

Érdemes áttekinteni a Jeans-féle, linearizált elmélet keretében a perturbációk osztályozását.

- **Az adiabatikus perturbációk,** az (5.1.8) egyenlet azon nem triviális megoldásai, amelyek zérus entrópiaperturbációhoz tartoznak, $\delta s(\vec{r}) = 0$, vagyis az energiasűrűség perturbációjára vonatkozó

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\epsilon - c_s^2\Delta\delta\epsilon - 4\pi G\epsilon_0\delta\epsilon \quad = \quad 0 \tag{5.1.10}$$

homogén lineáris parciális differenciálegyenlet nem triviális megoldásai. Megkeresésükhöz írjuk az energiasűrűség perturbációját Fourier-integrál alakjába,

$$\delta\epsilon(\vec{r},t) \quad = \quad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}}\delta\epsilon_{\vec{k}}(t), \tag{5.1.11}$$

ahol a $\vec{k}$ hullámvektorú módus időtől függő $\delta\epsilon_{\vec{k}}(t)$ amplitúdója a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\epsilon_{\vec{k}} + (c_s^2k^2 - 4\pi G\epsilon_0)\delta\epsilon_{\vec{k}} \quad = \quad 0 \tag{5.1.12}$$

közönséges másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek tesz eleget. Az egyenlet alakjából látszik, hogy létezik egy kritikus hullámszám, a

$$k_J \quad = \quad \frac{\sqrt{4\pi G\epsilon_0}}{c_s} \tag{5.1.13}$$

Jeans-hullámszám. Ha a hullámszám $k > k_J$, azaz a $\lambda = 2\pi/k$ hullámhossz kisebb, mint a $\lambda_J = 2\pi/k_J$ Jeans-hullámhossz, akkor bevezethetjük a valós

$$\omega(k) = \sqrt{c_s^2k^2 - 4\pi G\epsilon_0} = c_sk\sqrt{1-(k_J/k)^2} \tag{5.1.14}$$

frekvenciát, amelynek segítségével a független megoldások

$$\delta\epsilon_{\vec{k}}(t) \quad \propto \quad e^{\pm i\omega(k)t} \tag{5.1.15}$$

alakúak, azaz a Jeans-hullámhossznál rövidebb hullámhosszú perturbációk, az ultraibolya módusok síkhullámok. Ha azonban a $\lambda > \lambda_J$ hosszúhullámú perturbációkat nézzük, akkor bevezethetjük a $\kappa(k) = c_s k\sqrt{(k_J/k)^2 - 1} > 0$ együttható-függvényt, amelynek segítségével a megoldás $\delta\epsilon_{\vec{k}}(t) \propto e^{\pm\kappa(k)t}$ alakot ölt, ahol az egyik megoldás exponenciálisan csillapodó, a másik viszont divergál az idő függvényében. Utóbbi írja le az euklideszi háttéren a nem relativisztikus folyadék gravitációs instabilitását. Ha $k \to 0$, akkor $t_{gr} = 1/\kappa(0) = (c_s k_J)^{-1} = (4\pi G\epsilon_0)^{-1/2}$ az a karakterisztikus idő, amely alatt a gravitációs instabilitás amplitúdója kezdeti értékének e-szeresére nő. Ezért t_J az a karakterisztikus időtartam, amely alatt az ϵ_0 energiasűrűségű anyag kollapszust szenved. Másrészt nyilvánvalóan $\lambda_J \propto 1/k_J \propto c_s t_{gr}$ az a távolság, ameddig a karakterisztikus idő alatt a hanghullám eljut. Ilyen távolságon belül tud a nyomás ,,idejében" válaszolni a gravitáció okozta energiasűrűség-változásra, s ezért a $\lambda < \lambda_J$ hullámhosszú hanghullámok stabilan terjednek. A gravitációs instabilitás a sztatikus Világegyetemben nagyon hatékony. Ha pl. kezdetben adott egy $\delta\epsilon(0)/\epsilon_0 \approx 10^{-100}$ nagyságrendű sűrűségfluktuáció, akkor az $\delta\epsilon(\Delta t)/\epsilon_0 \approx 1$ nagyságrendűre nő olyan Δt idő alatt, amelyre $10^{-100}e^{\Delta t/t_{gr}} \approx 1$, azaz $\Delta t \approx 230 t_{gr}$.

- **A sebességperturbációk** az (5.1.4)-(5.1.7) egyenletrendszernek a $\delta s \equiv 0$ és $\delta\epsilon = 0$ feltételhez tartozó megoldásai Ekkor a sebességmező $\delta\vec{v}(\vec{r}, t)$ perturbációjára fennállnak a

$$\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v} = 0, \qquad \frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} = 0 \tag{5.1.16}$$

egyenletek. A második egyenlet értelmében tetszőleges, időtől független $\delta\vec{v}(\vec{r})$ sebességperturbáció kialakulhat. Legyen ennek a $\vec{k}$ hullámvektorral jellemzett Fourier-komponense a $\delta\vec{v}_{\vec{k}} = \vec{w}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$ síkhullám. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe, azt találjuk, hogy $\vec{k}\cdot\vec{w}_{\vec{k}} = 0$, ami azt jelenti, hogy a sebességperturbációk transzverzálisak, minden $\vec{k}$ hullámvektorú sebességperturbációnak 2 független módusa van.

- **Az entrópia-perturbációk** az inhomogén (5.1.8) egyenletnek adott $\delta s(\vec{r})$ időtől független entrópia-perturbációhoz tartozó partikuláris megoldásai. A Fourier-amplitúdókra áttérve az (5.1.8) egyenlet a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\epsilon_{\vec{k}} + (c_s^2 k^2 - 4\pi G\epsilon_0)\delta\epsilon_{\vec{k}} \quad = \quad -\sigma k^2 \delta s_{\vec{k}} \tag{5.1.17}$$

alakot ölti, ahol az entrópiasűrűség Fourier-amplitúdója időtől független, zérustól különböző állandó. Az egyenlet partikuláris megoldása írja le az időtől független az entrópia-perturbációt:

$$\delta\epsilon_{\vec{k}} = -\frac{\sigma k^2 \delta s_{\vec{k}}}{c_s^2 k^2 - 4\pi G \epsilon_0} = -\frac{\sigma \delta s_{\vec{k}}}{c_s^2[1-(k_J^2/k^2)]}. \tag{5.1.18}$$

A $k \to \infty$ határesetben a gravitáció elhanyagolható és ekkor $\delta\epsilon_{\vec{k}} \to -\sigma\delta s_{\vec{k}}/c_s^2$, ami maga után vonja, hogy $\delta p = c_s^2 \delta\epsilon_{\vec{k}} + \sigma\delta s_{\vec{k}} \to 0$, azaz a gravitáció okozta energiasűrűség-perturbáció járulékát kompenzálja a nyomásban az entrópiasűrűség fluktuációja.

Entrópia-fluktuációk csak többkomponensű anyagban léphetnek fel. Pl. ha homogén sugárzási háttéren barionok inhomogén módon helyezkednek el. Az entrópiasűrűség ekkor arányos az egy barionra jutó fotonok számával, ami ilyenkor helyről helyre változik.

A különböző típusú perturbációk közül az exponenciálisan növekvő adiabatikus perturbáció érdekes a későbbi szerkezetképződés szempontjából. Ne felejtsük el azonban, hogy nem vettük figyelembe a Világegyetem tágulását, a relativisztikus effektusokat és a nem linearitásból származó effektusokat sem. Ezért a Jeans-féle elmélet alkalmazása a sztatikus, Newton-i Világegyetem esetére csupán a tanulságos iskolapélda szerepét tölti be.

5.2 A táguló Világegyetem gravitációs instabilitásai a Newton-i fizikában

5.2.1 A perturbációk egyenletei

A táguló Világegyetem gravitációs instabilitásait a Newton-i fizika keretében úgy kaphatjuk meg lineáris közelítésben, hogy a (B.1)-(B.4) egyenletekben a mezőket a homogén $\epsilon_0(t)$ és a Hubble-törvénynek eleget tevő $\vec{v}_0(\vec{r}) = H(t)\vec{r}$ háttérhez képesti perturbációnak tekintjük. A (B.1) kontinuitási egyenlet kifejezi, hogy a háttér tágulása a lokális energiamegmaradás törvényével összhangban megy végbe,

$$\frac{\partial \epsilon_0}{\partial t} + 3H(t)\epsilon_0 = 0. \tag{5.2.1}$$

A (B.2) Euler-egyenlet divergenciája pedig a Friedmann-egyenletet eredményezi, ami meghatározza a Hubble-paraméter és áttételesen a skálafaktor időfüggését,

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\epsilon_0. \tag{5.2.2}$$

Tegyük fel, hogy a perturbáció adiabatikus és vegyük fel a perturbált mezőket

$$\epsilon = \epsilon_0(t) + \delta\epsilon, \quad \vec{v} = \vec{v}_0(\vec{r}) + \delta\vec{v}, \quad \phi = \phi_0 + \delta\phi, \tag{5.2.3}$$

$$p = p_0 + \delta p = p_0 + c_s^2 \delta\epsilon \tag{5.2.4}$$

alakban, ahol a p_0 háttér-nyomás homogén, a perturbációk inhomogénok és időtől függők. A homogén sztatikus ϕ_0 potenciált most is egy gondolatban feltételezett, el nem tűnő kozmológiai állandó jelenléte magyarázza. Helyettesítsük be a perturbált mezők kifejezéseit a (B.1), (B.2) és (B.4) egyenletekbe, linearizáljuk azokat a perturbációban, majd használjuk fel az (5.2.1) és (5.2.2) egyenleteket. Ekkor lineáris közelítésben az alábbi egyenletrendszert kapjuk a perturbációkra:

$$\frac{\partial \delta\epsilon}{\partial t} + \epsilon_0 \vec{\nabla}\delta\vec{v} + H\vec{\nabla}(\vec{r}\delta\epsilon) = 0, \tag{5.2.5}$$

$$\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{v} + (\delta\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_0 + \frac{c_s^2}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\delta\epsilon + \vec{\nabla}\delta\phi = 0, \tag{5.2.6}$$

$$\Delta\delta\phi = 4\pi G\delta\epsilon. \tag{5.2.7}$$

Most hiába állítjuk elő a perturbációkat, mint az $\vec{r}$ Euler-koordináták függvényeit, Fourier-integrál alakban, az egyenletrendszer nem csatolódik szét a különböző mezők Fourier-amplitúdóira vonatkozóan, mert a háttér-sebesség is függ az Euler-féle koordinátáktól. Célszerű ezért áttérni a Lagrange-féle, a táguló Világegyetemmel együtt mozgó $\vec{q}$ koordinátákra, és ezután előállítani a perturbációkat Fourier-integrál alakjában. Ekkor ugyanis megtörténik a különböző Fourier-amplitúdók szétcsatolódása. Az Euler-koordináták és a Lagrange-koordináták kapcsolata $\vec{r} = a(t)\vec{q}$, ahol $a(t)$ a skálafaktor és a Hubble-paraméter $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$. A differenciáloperátorok átírásához szükséges szabályokat egy tetszőleges $f(\vec{r} = a\vec{q}, t)$ függvény deriváltjaiból,

$$\left.\frac{\partial f(\vec{r} = a\vec{q}, t)}{\partial t}\right|_{\vec{q}} = \left.\frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + \dot{a}\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f(\vec{r}, t),$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{q}} f(\vec{r} = a\vec{q}, t) = a\vec{\nabla}_{\vec{r}} f(\vec{r}, t) \tag{5.2.8}$$

olvassuk ki:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{r}} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{q}} - H(t)\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{q}},$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} = \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{q}}. \tag{5.2.9}$$

Használjuk fel ezeket a szabályokat, valamint azt, hogy $\dot{\epsilon}_0/\epsilon_0 = -3H$, és vezessük be a $\delta = \delta\epsilon/\epsilon_0$ (energia)sűrűség-perturbációt. Ekkor az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a}\vec{\nabla}\delta\vec{v} = 0, \tag{5.2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\vec{v} + H\delta\vec{v} + \frac{c_s^2}{a}\vec{\nabla}\delta + \frac{1}{a}\vec{\nabla}\delta\phi = 0, \tag{5.2.11}$$

$$\Delta\delta\phi = 4\pi G a^2 \epsilon_0 \delta, \tag{5.2.12}$$

ahol $\vec{\nabla}$ és Δ a $\vec{q}$ koordináták szerinti differenciáloperátorok, az idő szerinti parciális deriválás pedig $\vec{q}$ =áll. mellett értendő. Vegyük ezután az (5.2.11) egyenlet mindkét oldalának divergenciáját, majd használjuk fel az (5.2.12) egyenletet és az (5.2.10) egyenletet ahhoz, hogy $\Delta\delta\phi$-t és $\vec{\nabla}\delta\vec{v}$-t kifejezzük δ segítségével. Végül zárt egyenletet kapunk δ-ra:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2}\Delta\delta - 4\pi G\epsilon_0\delta \quad = \quad 0. \tag{5.2.13}$$

Hasonlítsuk össze a kapott egyenletet az (5.1.8) egyenlettel, ami sztatikus Világegyetemben írja le a fluktuációkat, amikor ϵ_0 időben is állandó. A különbség (adiabatikus perturbációk esetén) csak annyi, hogy a tágulás miatt megjelent egy ,,csillapító erő", amelynek arányossági tényezője az időtől függő Hubble-paraméter, továbbá a Laplace-féle együtt mozgó koordinátákra történt áttérés miatt megjelent az $1/a^2$ szorzó a térbeli inhomogenitást figyelembe vevő tag előtt.

Az (5.2.13) egyenlet nem triviális megoldásai az adiabatikus perturbációk, a triviális $\delta = 0$ megoldáshoz pedig az (5.2.10) és (5.2.11) egyenletek vektorperturbációkat leíró megoldásai tartoznak. Az alábbiakban külön-külön megvizsgáljuk az adiabatikus és a vektorperturbációk viselkedését a Newton-i gravitáció keretében.

5.2.2 Az adiabatikus perturbációk

Fourier-transzformáljuk az (5.2.13) egyenletet az együtt mozgó $\vec{q}$ koordináták vonatkozásában. Ekkor az egyes $\delta = \delta_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{q}}$ Fourier-módusokra vonatkozó egyenletek szétcsatolódnak, és a $\delta_{\vec{k}}(t)$ Fourier-amplitúdókra az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + 2H\dot{\delta}_{\vec{k}} + \left(\frac{c_s^2k^2}{a^2} - 4\pi G\epsilon_0\right)\delta_{\vec{k}} \quad = \quad 0. \tag{5.2.14}$$

Most is bevezethetjük a kritikus fizikai (m-ben mért) hullámhosszat ($\vec{q}$ és $\vec{k}$ most dimenziótlanok!),

$$\lambda_J^{ph} \quad = \quad \frac{2\pi a}{k_J} = c_s\sqrt{\frac{\pi}{G\epsilon_0}}, \tag{5.2.15}$$

ahol $k_J = a\sqrt{4\pi G\epsilon_0}/c_s$. Megjegyezzük, hogy porszerű anyag uralta Világegyetemben $\epsilon_0 = (6\pi Gt^2)^{-1}$, úgyhogy $\lambda_J^{ph} \propto c_s t$, azaz a kritikus hullámhossz nagyságrendileg megegyezik a hanghorizonttal.

Ha a λ^{ph} fizikai hullámhossz sokkal kisebb, mint a kritikus hullámhossz, azaz $\lambda^{ph} = 2\pi a/k \ll \lambda_J^{ph}$, akkor csillapított hanghullámok a megoldások; a csillapodás a Világegyetem tágulásának a következménye. Ha a fizikai hullámhossz viszont lényegesen meghaladja a kritikus értéket, azaz $\lambda^{ph} = 2\pi a/k \gg \lambda_J^{ph}$, akkor a gravitáció

játszik döntő szerepet, és az (5.2.14) egyenlet bal oldalán a kerekzárójeles kifejezésben elhanyagolhatjuk a k-függő tagot:

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + 2H\dot{\delta}_{\vec{k}} - 4\pi G\epsilon_0\delta_{\vec{k}} \approx 0, \qquad k \ll k_J. \tag{5.2.16}$$

A hosszúhullámú adiabatikus perturbációk (5.2.16) egyenletének két független megoldása van. Az (5.2.16) egyik megoldása $\delta_d = H(t)$. Erről a következőképpen győződhetünk meg. Deriváljuk idő szerint az (5.2.2) egyenlet mindkét oldalát, majd használjuk fel az energiára vonatkozó (5.2.1) kontinuitási egyenletet:

$$0 = \ddot{H} + 2H\dot{H} - \frac{4\pi G}{3}\dot{\epsilon}_0 = \ddot{H} + 2H\dot{H} + 4\pi G\epsilon_0 H. \tag{5.2.17}$$

Látjuk, hogy ez az egyenlet pontosan ugyanaz, mint amit akkor kapunk, ha az (5.2.16) egyenletbe, $\delta_{\vec{k}}$ helyére $H(t)$-t helyettesítünk. A porszerű anyag uralta Világegyetemben $H(t)$ csökken, ahogy az idő telik, úgyhogy a $\delta_d(t)$ megoldás lecseng.

Ezután megkeressük az (5.2.16) másodrendű differenciálegyenlet másik δ_i, δ_d-től lineárisan független megoldását. Képezzük ehhez a Wronski-determinánst, $W = \begin{vmatrix} \delta_i & \delta_d \\ \dot{\delta}_i & \dot{\delta}_d \end{vmatrix} = \delta_i\dot{\delta}_d - \delta_d\dot{\delta}_i$, majd differenciáljuk az idő szerint, és fejezzük ki benne a megoldások második deriváltjait magukkal a megoldásokkal és első deriváltjaikkal, felhasználva a δ-ra vonatkozó (5.2.16) differenciálegyenletet:

$$\dot{W} = \ddot{\delta}\delta_i - \delta_d\ddot{\delta}_i = -2H(\delta_i\dot{\delta}_d - \delta_d\dot{\delta}_i) = -2HW. \tag{5.2.18}$$

Ilyen módon differenciálegyenletet kaptunk a Wronski-determinánsra, amelyet könnyű megoldani, ha felhasználjuk, hogy $H = \dot{a}/a$,

$$\frac{\dot{W}}{W} = -2\frac{\dot{a}}{a}, \quad \Rightarrow \quad \ln W = -2\ln a + \ln C, \tag{5.2.19}$$

ahonnan

$$W \equiv \delta_i\dot{\delta}_d - \delta_d\dot{\delta}_i = \frac{C}{a^2}, \tag{5.2.20}$$

ahol C integrációs állandó. Ezt a differenciálegyenletet már egyszerűbb megoldani δ_i-re. Éljünk az ismeretlen megoldásra vonatkozóan a $\delta_i = \delta_d f(t)$ feltevéssel, ekkor a keresett $f(t)$ függvényre az alábbi differenciálegyenletet kapjuk,

$$\dot{f} = -\frac{C}{a^2H^2}, \tag{5.2.21}$$

amelynek a megoldása

$$f(t) = -C\int\frac{dt}{a^2H^2}. \tag{5.2.22}$$

Az energiasűrűség hosszúhullámú fluktuációira vonatkozó (5.2.16) egyenlet általános megoldása tehát

$$\delta(t) \;=\; C_1 H \int \frac{dt}{a^2 H^2} + C_2 H. \tag{5.2.23}$$

Porszerű anyag által uralt Világegyetemben $a \propto t^{2/3}$, $H \propto t^{-1}$, úgyhogy $\delta = C_1' t^{2/3} + C_2' t^{-1}$. **Amíg a sztatikus Világegyetemben a Newton-i elmélet szerint exponenciálisan nő fel a hosszúhullámú módusokban jelentkező gravitációs instabilitás, addig a tágulóó Világegyetemben csak hatványfüggvény szerint, vagyis a tágulás miatt sokkal lassabban.** Ez azonban azt jelenti, hogy sík térgeometriájú, por által uralt Világegyetemben jelentős kezdeti instabilitásnak kellett ahhoz jelen lennie, hogy mára a $\delta \gtrsim 1$ amplitúdójú instabilitások alakuljanak ki. Csakugyan, ha vöröseltolódással mérjük az időt, akkor lapos térgeometria ($k = 0$, azaz $\Omega_0 = 1$) esetén

$$\ln(1+z) = \frac{1}{3}\int_{\epsilon_0}^{\epsilon(z)} \frac{d\epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{3}\ln\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\epsilon(z)}{\epsilon_0} = (1+z)^3, \tag{5.2.24}$$

$$H(z) = H_0(1+z)^{3/2}, \tag{5.2.25}$$

$$t(z) = \int_z^\infty \frac{d\zeta}{H_0(1+\zeta)^{5/2}} = \frac{2}{3H_0(1+z)^{3/2}}, \tag{5.2.26}$$

úgyhogy az instabilitás aszimptotikusan nagy $z \gg 1$ vöröseltolódás esetén

$$\delta(z) \;\sim\; C_1(3H_0/2)^{-2/3}(1/z^{3/2})^{2/3} \sim \delta(0) z^{-1}. \tag{5.2.27}$$

Ha tehát ma $\delta(0) = \mathcal{O}(1)$, akkor $\delta(z = 10^3) \gtrsim 10^{-3}$ kellett legyen, ami elég jelentős fluktuáció. Ezzel szemben a CMB alapján $\delta(z = 10^3) < 10^{-4}$ a becsült érték. A felfúvódás, mint alább látni fogjuk, magyarázatot tud adni arra, hogy hogyan alakulhatott ki ennyire kicsiny amplitúdójú kezdeti fluktuációból gravitáció hatására a Világegyetem mai szerkezetében megfigyelt inhomogenitás.

5.2.3 Vektorperturbációk

Ha $\delta \equiv 0$, akkor az (5.2.12) egyenletből $\delta\phi = 0$ adódik, és az (5.2.10) és (5.2.11) egyenletekből pedig a

$$\vec{\nabla}\delta\vec{v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\delta\vec{v} = -H\delta\vec{v} \tag{5.2.28}$$

egyenleteket kapjuk. Ha a vektorperturbációk $\delta\vec{v} = \delta\vec{v}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{q}}$ síkhullámú módusait tekintjük, akkor az első egyenletből következik, hogy a vektorperturbációk transzverzálisak, $\vec{k}\cdot\delta\vec{v}_{\vec{k}} = 0$. A második egyenlet pedig

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{v}_{\vec{k}} \;=\; -\frac{\dot{a}}{a}\delta\vec{v}_{\vec{k}}, \tag{5.2.29}$$

ahonnan következik, hogy mindkét transzverzális módus $|\delta\vec{v}_{\vec{k}}| \sim 1/a$ szerint lecseng a táguló Világegyetemben. Ezek a perturbációk csak akkor vezethettek volna a mai Világegyetemben megfigyelt szerkezetekhez, ha kezdetben olyan óriásiak lettek volna, hogy teljesen elrontották volna a Világegyetem homogenitását. A vektorperturbációk tehát nem jöhetnek szóba, mint primordiális perturbációk. Vektorperturbációk azonban kialakulhatnak a Világegyetem késői, mai fejlődési szakaszában, amikor szerephez jutnak a nem-linearitások, és a vektorperturbációk magyarázhatják a galaxisok forgását.

5.2.4 Gravitációs instabilitás hideg anyag és sugárzás vagy sötét energia egyidejű jelenlétében

Az előző alfejezetekben a $p \approx 0$ állapotegyenletű (porszerű) hideg anyagban keletkező gravitációs instabilitások időbeli fejlődését vizsgáltuk. A csillagászati megfigyelésekből, mérésekből viszont arra következtetünk, hogy a hideg anyaggal egyidejűleg sugárzás ($w = 1/3$) és sötét energia és/vagy relativisztikus anyag ($-1 \leq w \leq -1/3$) is jelen van a Világegyetemben. A relativisztikus összetevő – akár sugárzás, akár sötét energia, – megváltoztatja a tágulás ütemét és ezáltal a hideg anyag inhomogenitásainak növekedését. Mi itt most olyan játék-modellt vizsgálunk a Newton-i gravitáció keretében, amely azt feltételezi, hogy a Világegyetemben két összetevő van jelen: a hideg anyag (por), amelynek állapotegyenlete $p = 0$ és egy relativisztikus összetevő, amelynek állapotegyenlete $p = w\epsilon$. A relativisztikus anyagban terjedő, a Jeans-hullámhossznál kisebb hullámhosszú inhomogenitások vizsgálatára használhatjuk a Newton-i, nem relativisztikus elméletet, mert a relativisztikus anyagban a hangsebesség a fénysebesség nagyságrendjébe esik, és ezért a Jeans-hullámhossz ebben az esetben megegyezik a horizont nagyságrendjével. Mivel a relativisztikus komponens gyakorlatilag le van csatolódva a hideg anyagról, csak gravitációsan hat vele kölcsön, azért a hideg anyag inhomogenitásai nem zavarják meg a relativisztikus komponens térbeli eloszlását, úgyhogy az utóbbi jó közelítéssel homogén marad. A hideg anyagban megjelenő, a horizontnál kisebb hullámhosszú inhomogenitásokat szintén vizsgálhatjuk a Newton-i elmélet keretében. A hideg anyagban a hangsebesség kisebb, mint a fény sebessége a vákuumban. A Jeans-hullámhossznál nagyobb, hosszúhullámú, de a horizontnál kisebb hullámhosszú instabilitásokat fogjuk vizsgálni.

Jelölje $\delta = \delta\epsilon_d/\epsilon_d$ a hideg anyagban az inhomogenitást, ahol ϵ_d a hideg összetevő energiasűrűsége. Mivel a relativisztikus komponens lecsatolódik a hideg anyagról, ilyenkor is az (5.2.13) egyenlet írja le a hideg anyagban a horizontnál kisebb, de a Jeans-hullámhossznál nagyobb hullámhosszú δ perturbációk időfüggését. A Hubble-paramétert viszont most a teljes ϵ_{tot} energiasűrűség határozza meg. Ez veszi figyelembe, hogy a hideg anyag és a relativisztikus komponens gravitációsan kölcsönhat, azaz hogy együttesen alakítja ki a téridő geometriáját. Pl. sík térgeomet-

riájú Világegyetemben a Hubble-paraméter eleget tesz a

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\epsilon_{tot} \tag{5.2.30}$$

Friedmann-egyenletnek, ahol

$$\epsilon_{tot} = \frac{\epsilon_{eq}}{2}\left[\left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^{3(1+w)}\right] \tag{5.2.31}$$

és a_{eq} a skálafaktor azon értéke, amelynél $\epsilon_d(a_{eq}) = \frac{1}{2}\epsilon_{tot}(a_{eq}) = \epsilon_{eq}$, azaz amelynél egyenlő a hideg anyag és a relativisztikus komponens energiasűrűsége. Az (5.2.13) egyenletben érdemes áttérni a t időváltozóról az átskálázott $x = a(t)/a_{eq}$ skálafaktorra, mint változóra. Az (5.2.13) egyenletben szereplő ϵ_0 most a hideg komponens

$$\epsilon_d = \frac{\epsilon_{eq}}{2}\left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3 \tag{5.2.32}$$

energiasűrűsége. Így az (5.2.13) egyenlet az

$$x^2(1+x^{-3w})\ddot{\delta} + \frac{3}{2}x[1+(1-w)x^{-3w}]\dot{\delta} - \frac{3}{2}\delta = 0 \tag{5.2.33}$$

alakot ölti. Mivel a hideg anyag nyomása a teljes nyomáshoz képest elhanyagolható, a csak a hideg komponens nyomásától függő c_s^2-es tagot elhagytuk az egyenletből.

Az (5.2.33) egyenlet általános megoldása hipergeometrikus függvények lineáris kombinációja. Tanulságos diszkutálni a megoldást a $w = -1$ és a $w = 1/3$ esetekben [1].

- $w = -1$**, amikor hideg anyag és relativisztikus anyag (sötét energia) van jelen a Világegyetemben.** Meg lehet mutatni, hogy a Világegyetem korai szakaszában, vagyis amikor $x \ll 1$ és a hideg anyag uralkodó, a megoldás

$$\delta_{\ll}(x) \approx \frac{C_1}{x^{3/2}} + \frac{2C_2}{5}x + \mathcal{O}(x^{3/2}) \tag{5.2.34}$$

alakú, ahol C_1 és C_2 integrációs állandók. Ekkor a gravitációs instabilitás hatványfüggvény szerint előbb csökken, $\delta \sim x^{-3/2} \sim a^{-3/2} \sim (t^{2/3})^{-3/2} \sim 1/t$, majd növekedésbe csap át, $\delta \sim x \sim a \sim t^{2/3}$, ahogy azt már az előzőekben, a hideg anyag uralta táguló Világegyetemben láttuk. A fejlődés későbbi szakaszában azonban a sötét energia válik uralkodóvá az energiasűrűségben. Ekkor, azaz $x \gg 1$ esetén a megoldás közelítőleg

$$\delta_{\gg}(x) \approx C_1 + IC_2 - \frac{C_2}{2x^2} + \mathcal{O}(1/x^3) \tag{5.2.35}$$

alakot ölt. Innen látjuk, hogy **sötét energia (pl. el nem tűnő kozmológiai állandó) jelenlétében a gravitációs instabilitás növekedése leáll, a perturbáció amplitúdója befagy.** Az (5.2.12) Poisson-egyenlet alapján a hideg anyag befagyott amplitúdójú perturbációja olyan gravitációs potenciált kelt, ami fordítva arányos a skálafaktorral, $\delta\phi \sim 1/a$, hiszen a hideg anyag $\epsilon_0 \Rightarrow \epsilon_d$ energiasűrűsége $\epsilon_d \sim 1/a^3$ szerint skálázik, úgyhogy az (5.2.12) egyenlet jobb oldalán álló $a^2\epsilon_d\delta \sim 1/a$. A gravitációs instabilitás növekedésének leállását és az általa keltett gravitációs potenciál csökkenését $x \gg 1$, azaz $t \to \infty$ aszimptotikus tartományban az magyarázza, hogy a kozmológiai állandó, mint taszító gravitáció, azaz antigravitáció hat. Ha a térben valahol növekedésnek indul a hideg anyag sűrűsége, akkor a gravitációs taszítás elkezd ennek ellene hatni.

- $w = 1/3$**, amikor hideg anyag és sugárzás van jelen a Világegyetemben.** A sugárzásban esetlegesen fellépő perturbációk számára a Jeans-hullámhossz a horizont nagyságrendjébe esik, mert a sugárzásban a hangsebesség azonos nagyságrendű a fénysebességgel. Mivel a hideg anyag csak gravitációsan hat kölcsön a sugárzással, azért a hideg anyag sűrűség-perturbációja nem tudja számottevően befolyásolni a sugárzást, az megmarad jó közelítéssel homogénnak. Ugyanakkor a sugárzási háttér sem tud közvetlenül visszahatni a hideg anyagban terjedő perturbációkra, csak áttételesen azáltal, hogy megváltoztatja a skálafaktor növekedési ütemét. Ezért a hideg anyagban sugárzási háttér jelenlétében terjedő inhomogenitások változatlanul leírhatók az (5.2.13) egyenlettel, ill. a belőle származtatott (5.2.33) egyenlettel, ahol most $w = 1/3$ veszi figyelembe a sugárzást, mint hátteret. Megmutatható (ld. [1]), hogy ekkor a Világegyetem fejlődésének korai szakaszában a hideg anyag energiasűrűségének perturbációja

$$\delta_{\ll}(x) \approx C_1 - 3C_2 - C_2 \ln(x/4) + \mathcal{O}(x), \qquad x \ll 1 \tag{5.2.36}$$

szerint változik, ahol C_1 és C_2 integrációs állandók. A hideg anyag kezdeti inhomogenitása tehát legfeljebb logaritmikus növekedésnek indul a sugárzás uralta korszakban. Később, $x \gg 1$ esetén, amikor a hideg anyag válik uralkodóvá, az (5.2.33) egyenlet megoldása közelítőleg

$$\delta_{\gg}(x) \approx C_1\left(1 + \frac{3x}{2}\right) + \frac{4C_2}{15x^{3/2}} + \mathcal{O}(1/x^{5/2}) \tag{5.2.37}$$

alakot ölt. Innen azt látjuk, hogy ebben a korszakban lineárisan kezd növekedni az inhomogenitás.

A sugárzási korszakban a kezdeti kicsi inhomogenitások nem tudtak lényegesen felerősödni. A hideg anyag uralta korszakban pedig csak akkor tudhattak napjainkra annyira felerősödni, hogy a Világegyetemben a ma megfigyelt nem lineáris struktúrákat létrehozzák, ha a hideg anyag viszonylag hamar uralkodóvá vált. Ez alsó korlátot jelent a hideg anyag mennyiségére vonatkozóan. **A**

CMB fluktuációk értelmében a kezdeti instabilitások nagyságrendje $\delta \sim 10^{-4}$. Meg lehet mutatni [1], hogy ilyen kis perturbáció csak akkor vezethet a ma észlelt struktúrákhoz, ha a hideg anyag uralma korábban elkezdődött, mint a rekombináció. Ehhez viszont azt kell feltételezni, hogy nem barionikus sötét anyag is létezik, amely csak gravitációsan hat kölcsön a sugárzással. Ezen az úton lehet arra következtetni, hogy a jelenlegi kritikus energiasűrűség kb. 26 %-ának nem barionikus sötét anyagnak kell lennie. A sötét anyag nem lehet barionikus, mert a barionikus anyag a rekombináció előtt elektromágnesesen csatolódott a sugárzáshoz, így abban nem tudtak volna a kezdeti kicsi inhomogenitások kellően hamar elkezdeni növekedni. Ugyanakkor a nem barionikus sötét anyag már a rekombináció előtt is el tudott kezdeni a gravitáció révén csomósodni, miután nem hatott elektromágnesesen kölcsön a sugárzással. Ráadásul nagy barionsűrűség feltételezése azért sem megengedhető, mert akkor a nukleoszintézis nem úgy zajlott volna le, ahogy azt az észlelt elemgyakoriságok alapján fel kell tételezzük.

A kapott eredmények a Newton-i fizikán alapulnak, így a horizontnál kisebb méretekben alkalmazhatók a Világegyetemre. Másik korlátjuk, hogy lineáris közelítésen alapulnak, márpedig az inhomogenitások amplitúdójának növekedtével a nemlinearitások szerepe egyre jelentősebbé válik. Következő lépésként még mindig a Newton-i nem relativisztikus közelítésben maradva a nemlinearitások szerepét fogjuk vizsgálni.

5.3 Túl a lineáris közelítésen

Az inhomogenitások növekedése a lineáris tartományban azt jelenti, hogy az energiasűrűség $\epsilon = \epsilon_0[1 + \delta + \mathcal{O}(\delta^2)]$ szerint változik, ami azt jelenti, hogy kicsit lassabban csökken, mint az ϵ_0 háttér-energiasűrűség a tágulás miatt. Természetesen amikor az inhomogenitás relatív amplitúdója eléri a $\delta \sim 1$ nagyságrendet, akkor az energiasűrűségnek a lineáris közelítésben elhanyagolt magasabb rendű tagjai is jelentősekké válnak. Ekkor az inhomogenitások által keltett gravitációs mező kompenzálhatja a gravitációs mező tágulás miatti csökkenését, ahol kellően nagy az anyag sűrűsége. Ezért az anyag az ilyen helyeken kiesik a Hubble-tágulás üteméből, azaz megszűnik együtt mozgó lenni. Az anyag csomósodásának megfelelő inhomogenitás előbb elér egy maximális méretet, majd összezuhan egy stabil, nem lineáris képződménnyé.

A hidrodinamika nem lineáris egyenleteinek egzakt megoldása még porszerű (azaz zérus nyomású) anyag esetében is csak akkor lehetséges, ha az inhomogenitás térbeli alakja valamilyen speciális szimmetriával rendelkezik. Richard Chace Tolmantól származik megoldás arra az esetre, amikor a perturbáció a térben gömbszimmetrikus, Jakov Boriszovics Zeldovicstól pedig az anizotróp egy-dimenziós perturbá-

ció esetére. Ezeknek a megoldásoknak az alapján lehet arra következtetni, hogy általános esetben a kezdeti, még kicsiny δ_i relatív amplitúdójú inhomogenitások térbeli szerkezetének jellemzésében alapvető fontosságúak a J_{ik} deformációs tenzor sajátértékei. Ha $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q}, t)$ írja le az egyes $\vec{q}$ együtt mozgó koordinátákkal „megjelölt" anyagdarabkák pályáját Euler-féle $\vec{r}$ koordinátákban, akkor a deformációs tenzor $J_{ik} = \partial x_i / \partial q_k$. Kezdetben jó közelítéssel

$$\underline{\underline{J}} \approx a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - a\delta_i \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{5.3.1}$$

alakú, ahol a a skálafaktor. Itt az $\alpha(\vec{q})$, $\beta(\vec{q})$ és $\gamma(\vec{q})$ (nem negatív) sajátértékek valójában az együtt mozgó koordináták függvényei. Ezek a függvények jellemzik, hogy a kezdeti inhomogenitások a térben hogyan oszlanak el, milyen alakúak. Ahol $\alpha \gg \beta, \gamma$, ott egy irányban indul meg a kollapszus és **falakat („wall")** hoz létre; ahol $\alpha \approx \beta \gg \gamma$, ott két irányban indul meg a kollapszus és **szál („filament")** jön létre; ott pedig, ahol $\alpha \approx \beta \approx \gamma$ mindhárom térbeli irányban elkezd összezuhanni az anyag és gömbszerű csomósodás indul meg.

A csillagászat történetének egyik legnagyobb szabású és legjelentősebb, világméretű kutatási összefogása a **Sloan Digital Sky Survey (SDSS),** amely – mint azt a neve is elárulja – az égbolt digitális feltérképezésére irányul. Ez a projekt 2000-ben indult és mai napig (2014) is tart. Eddig 10 adatkibocsátással gazdagította a látható Világegyetemre vonatkozó részletes adatainkat. A tevékenység során 230 millió égitestet térképeztek fel 8400 négyzetfok „területen", felvették 930000 galaxis, 120000 kvazár és 225000 csillag spektrumát. Külön célzottan vizsgálták saját galaxisunkat, a Tejútrendszert. Rendkívül jelentős mindemellett a szuparnóva-keresés sikere: kb. 500 új IA típusú, spektroszkópiailag azonosított szupernóvát fedeztek fel, amelyek felhasználhatók a Világegyetem gyorsuló tágulásának vizsgálatában az utolsó 4 milliárd éves fejlődési szakaszra vonatkozóan.

A látható Világegyetem ilyen széleskörű feltérképzése megerősíti azt az elmélet által előrejelzett kvalitatív képet, hogy a galaxisok **kozmikus szövedéket („cosmic web")** alkotnak. A galaxisok **galaxisfürtöket („galaxy cluster") és galaxisszuperfürtöket („galaxy superclusters"),** továbbá **falakat („walls") és szálakat („filaments")** alkotnak, amelyek között üres tartományok, azaz **üregek („voids")** találhatók. A kozmikus szövedék tehát egy óriási méretű, habszerű szerkezet az üregekkel, az őket határoló falakkal, az azokat összekötő szálakkal, amelynek bizonyos csomópontjaiban találhatók a szuperfürtök. Ez a szerkezet kb. a 100 Mpc (kb. 300 millió fényév) méretskála fölött kiátlagolódik. Jelenlegi megfigyeléseink szerint ennél nagyobb méretskálákon a Világegyetem homogén és izotróp, nem mutat további szerkezetet. A kozmikus szövedék szerkezetének magyarázata a kozmológia egyik fejlődésben lévő, izgalmas kutatási területe, amely a kozmológia egyik tudományága.

6 A GRAVITÁCIÓS INSTABILITÁS AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLETBEN

6.1 Általános megfontolások

A Newton-i mechanika keretében csak a nem relativisztikus anyagban terjedő instabilitások vizsgálhatók, és azok is csak akkor, ha a hullámhosszuk nem haladja meg a horizont nagyságát. Az általános relativitáselmélet keretében túl lehet lépni ezeken a korlátokon: a horinzonton túlnyúló instabilitások is vizsgálhatók, és a relativisztikus anyag is tárgyalható. A technikai nehézséget a Newton-i tárgyalásmódhoz képest az jelenti, hogy egyszerre kell tárgyalni az anyag és a metrika perturbációját. Az anyagban keletkező inhomogenitások ugyanis inhomogenitásokat keltenek a metrikában, ami aztán visszahat az anyagra. Mindez annak a következménye, hogy az Einstein-egyenleteket és az anyag mozgásegyenleteit szelf-konzisztens módon, egyidejűleg kell megoldani. Ezzel szemben a Newton-i tárgyalásban a homogén és izotróp háttéren kellett megoldani a hidrodinamikának az anyag mozgására vonatkozó egyenleteit. Így adott volt a Friedmann-féle táguló Világegyetem, mint ,,geometriai színpad", amelyen mozgott a folyadéknak tekintett anyag. Ez azt jelentette, hogy volt egy, a téridő szimmetriái által kitüntetett koordinátarendszer. Az általános relativitás elméletének keretében az inhomogenitásokat úgy kell tárgyaljuk, hogy nincsen ilyen kitüntetett koordinátarendszer. A koordinátarendszer választásának szabadsága mértékszimmetria, és ez a mértékszabadság az elméleti tárgyalásban hamis perturbációk megjelenéséhez vezethet. Olyan hamis módusokat kaphatunk eredményül, amelyek nem felelnek meg valódi fizikai inhomogenitásoknak, hanem csupán az esetleg nem túl szerencsésen választott koordinátarendszer tulajdonságait tükrözik.

Könnyen kimutathatjuk egy egyszerű példával, hogy az inhomogenitások nem kellően gondos, azaz a mértékszimmetriát figyelembe nem vevő leírása azt eredményezheti, hogy hamis perturbációkat is találunk. Képzeljük el a homogén és izotróp Világegyetemet, amelyet nem zavar meg semmilyen inhomogenitás jelenléte, vagyis amelyben $\vec{q}$ az együtt mozgó koordináták, t az idő (az együtt mozgó megfigyelők sajátideje). Ekkor az energiasűrűség a t =const. hiperfelületeken $\epsilon(\vec{q},t) = \epsilon(t)$ állandó. Az általános relativitáselméletében választhatunk azonban másik $\tilde{t} = t + \delta t(\vec{q},t)$ időparamétert, ahol $|\delta t| \ll |t|$. Ekkor a $\tilde{t}$=const. hiperfelületeken az $\epsilon(t(\vec{q},\tilde{t})) = \tilde{\epsilon}(\vec{q},\tilde{t})$ energiasűrűség helyfüggőnek adódik:

$$\epsilon(t(\vec{q},\tilde{t})) \;=\; \epsilon(\tilde{t} - \delta t(\vec{q},t)) \approx \epsilon(\tilde{t}) - \left.\frac{\partial\epsilon}{\partial t}\right|_{\tilde{t}} \delta t \equiv \epsilon(\tilde{t}) + \delta\epsilon(\vec{q},\tilde{t}) \qquad (6.1.1)$$

Itt a jobb oldal első tagját kell háttér-energiasűrűségnek és a második tagot perturbációnak tekinteni. Az energiasűrűségnek ez a felbontása háttérre és perturbációra azonban nem fizikai perturbáció leválasztását jelenti a háttérről, hanem csupán a koordinátarendszer megválasztásának következménye.

A fenti példa mutatja, hogy a koordinátarendszer megválasztásának szabadsága hamis perturbációkhoz vezethet az elméleti leírásban. Fordítva is igaz, hogy az energiasűrűség $\delta\epsilon$ valódi fizikai perturbációját eltüntethetjük, ha olyan koordinátarendszert választunk, amelyben a $\tilde{t}$ =áll. hiperfelületek megegyeznek a $\delta\epsilon$ =áll. hiperfelületekkel. Ahhoz, hogy elkülöníthessük a valódi fizikai perturbációkat a mértékszabadságból származó hamisaktól, az általános relativitáselmélet belső logikájának megfelelően együtt kell kezelnünk a metrika és az anyag perturbációit. Ebből a célból úgy a metrika perturbációinak, mint az anyag perturbációinak leírásához mértékinvariáns mennyiségeket vezetünk be, amelyek nem függnek a koordinátarendszer megválasztásától. Az alábbiakban megmutatjuk, hogyan lehet mértékinvariáns mennyiségeket bevezetni. Ezután néhány speciális esetben lineáris közelítésben megvizsgáljuk a perturbációk fejlődését a Világegyetemben, megmaradva az egyszerűség kedvéért a lapos térgeometriájú esetnél.

6.2 A metrika perturbációi

6.2.1 A metrika perturbációinak irreducibilis felbontása

Tegyük fel, hogy a Friedmann-metrikához képest kicsiny perturbációk vannak jelen, úgyhogy az invariáns ívelem négyzete

$$ds^2 = [{}^{(0)}g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}(x)]dx^\alpha dx^\beta \tag{6.2.1}$$

alakú, ahol konform koordináták használata esetén a Friedmann-metrika

$${}^{(0)}g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = a^2(\eta)(d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j), \tag{6.2.2}$$

és $|\delta g| \ll |{}^{(0)}g_{\alpha\beta}|$. Mivel a háttér homogén és izotróp, adott η konform időpillanatban a tér a 3-dimenziós forgatásokkal és az eltolásokkal szemben szimmetriát mutat. Ezen szimmetriák tekintetében beszélhetünk, a metrika skalár-, vektor- és tenzorperturbációiról. A δg_{00} komponens skalár, invariáns a forgatásokkal szemben,

$$\delta g_{00} = 2a^2\phi, \tag{6.2.3}$$

ahol ϕ 3-asskalár. A δg_{0i} komponensek 3-asvektorként transzformálódnak, de tetszőleges vektormező felbontható egy $B_{,i}$ gradiensmező (ahol B 3-asskalár) és egy divergenciamentes S_i vektormező összegére, úgyhogy

$$\delta g_{0i} = a^2(B_{,i} + S_i), \qquad S^i_{,i} = 0. \tag{6.2.4}$$

Mostantól a vessző az index előtt a megfelelő koordináta szerinti parciális deriválást jelenti, a térszerű indexeket pedig a δ_{ij}, ill. δ^{ij} térmetrikával (lapos térgeometria) lehet le-, ill. felhúzni. Végül a δg_{ij} komponensek 3-astenzorként transzformálódnak

a térbeli forgatások során és legáltalánosabb felbontásuk az egységtenzor, egy gradiensmező deriváltja, egy divergenciamentes vektormező deriváltja és egy irreducibilis 3-astenzormező szerint történik:

$$\delta g_{ij} \quad = \quad a^2(2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij}), \tag{6.2.5}$$

ahol figyelembe vettük, hogy $\delta g_{ij} = \delta g_{ji}$. Itt ψ és E 3-asskalárok, az F_i 3-asvektormező az $F^i_{,i} = 0$ feltételnek, az irreducibilis 3-astenzor pedig zérus spúrú és transzverzális,

$$h^i_i = 0, \qquad h^i_{j,i} = 0. \tag{6.2.6}$$

A metrika perturbációi tehát a ϕ, ψ, B, E 4 darab skalárperturbációval, a 2 darab S_i és F_i transzverzális vektorperturbációval (divergenciájuk zérus) és a h_{ij} irreducibilis tenzorperturbációval jellemezhetők (amelyre 4 feltételi egyenlet vonatkozik). A skalárperturbációkat így 4 db függvény, a vektorperturbációkat $2 \cdot 3 - 2 = 4$ db függvény, és a tenzorperturbációkat $6 - 1 - 3 = 2$ db függvény jellemzi, ha a feltételeket is figyelembe vesszük. Ez összesen 10 db független függvény, amennyi a $\delta g_{\alpha\beta}$ szimmetrikus tenzor független komponenseinek száma.

Ezek a perturbációk lineáris közelítésben szétcsatolódnak, egymástól függetlenül tárgyalhatók. A kozmológia szempontjából a skalárperturbációk a legfontosabbak, mert ezekben jelentkezik a gravitációs instabilitás, és ezért ezek játszanak szerepet a Világegyetem szerkezetének kialakulásában. A vektorperturbációk az anyag forgó mozgásával kapcsolatosak, kozmológiai időskálán hamar lecsengenek, nem jelentősek a Világegyetem fejlődése szempontjából. Egyedül a tenzorperturbációknak nincsenek a Newton-i fizikában analogonjai. Ezek gravitációs hullámokat írnak le, amelyek lineáris közelítésben nem váltanak ki perturbációkat az ideális folyadékban.

6.2.2 A metrika perturbációinak mértékinvariáns jellemzése

Meghatározzuk a metrikus tenzornak, a 4-esskalár- és a 4-esvektormezőnek az infinitezimális mértéktranszformációját, majd ezekből kiindulva a skalár-, vektor- és tenzorperturbációk infinitezimális mértéktranszformációját, valamint az energiasűrűségnek és az anyag 4-essebességének az infinitezimális mértéktranszformációját. Végül pedig megszerkesztjük a skalár-, vektor- és tenzorperturbációk leírására alkalmas mértékinvariáns mennyiségeket.

- **A metrikus tenzor perturbációjának infinitezimális mértéktranszformációja.** Tekintsük az

$$x^\alpha \quad \longrightarrow \quad \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x) \tag{6.2.7}$$

infinitezimális koordinátatranszformációt, és legyen

$$g_{\alpha\beta}(x) \quad = \quad {}^{(0)}g_{\alpha\beta}(x) + \delta g_{\alpha\beta}(x) \tag{6.2.8}$$

a perturbált metrika, ahol ${}^{(0)}g_{\alpha\beta}(x)$ a (6.2.2) Friedmann-metrika és $\delta g_{\alpha\beta}(x)$ annak perturbációja. A téridő adott, egyik koordinátarendszerben x, a másikban $\tilde{x}$ koordinátájú pontjában a $ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta$ ívelemnégyzet mértékinvariáns, ha

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}) &= \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\gamma\delta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) - {}^{(0)}g_{\alpha\delta}\xi^\delta_{,\beta} - {}^{(0)}g_{\gamma\beta}(x)\xi^\gamma_{,\alpha} \\ &= {}^{(0)}g_{\alpha\beta}(x) + \delta g_{\alpha\beta}(x) - {}^{(0)}g_{\alpha\delta}(x)\xi^\delta_{,\beta} - {}^{(0)}g_{\gamma\beta}(x)\xi^\gamma_{,\alpha}. \qquad (6.2.9)\end{aligned}$$

A transzformált metrika is felírható, mint a most $\tilde{x}$-től függő Friedmann-metrika és a transzformált perturbáció,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}) = {}^{(0)}g_{\alpha\beta}(\tilde{x}) + \delta\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}), \qquad (6.2.10)$$

ahol

$${}^{(0)}g_{\alpha\beta}(\tilde{x}) \approx {}^{(0)}g_{\alpha\beta}(x) + {}^{(0)}g_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\gamma. \qquad (6.2.11)$$

Ha összehasonlítjuk a (6.2.9) és (6.2.10) egyenlőségek jobb oldalait, akkor azt találjuk, hogy **a metrika perturbációjának infinitezimális transzformációja**

$$\delta g_{\alpha\beta} \longrightarrow \delta\tilde{g}_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} - {}^{(0)}g_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\gamma - {}^{(0)}g_{\alpha\delta}(x)\xi^\delta_{,\beta} - {}^{(0)}g_{\gamma\beta}(x)\xi^\gamma_{,\alpha}. \qquad (6.2.12)$$

Keressük meg a metrika perturbációinak infinitezimális mértéktranszformációját leíró (6.2.12) képletek explicit alakját, ha a perturbáció lapos térgeometriájú ($k = 0$) Friedmann-téridőn jelentkezik, mint háttéren. Ha x^α a Friedmann-téridőben bevezetett konform koordináták, akkor

$${}^0g_{00} = a^2(\eta), \quad {}^0g_{0i} = 0, \quad {}^0g_{ij} = -a^2(\eta)\delta_{ij} \qquad (6.2.13)$$

a Friedmann-féle háttér-metrika (lapos térgeometria esetén). Bontsuk fel az infinitezimális koordinátatranszformációt parametrizáló $\xi^\alpha = (\xi^0, \xi^i)$ 4-esvektor térszerű komponensét transzverzális és longitudinális komponensekre,

$$\xi^i = \xi^i_\perp + \zeta^{,i}, \qquad \xi^i_{\perp,i} = 0, \qquad (6.2.14)$$

ahol ζ 3-asskalár függvény. A (6.2.12) képlet alapján a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}\delta\tilde{g}_{00} &= \delta g_{00} - (a^2)'\xi^0 - 2a^2\xi^{0\prime} = \delta g_{00} - 2a(a\xi^0)', \\ \delta\tilde{g}_{0i} &= \delta g_{0i} - a^2\xi^0_{,i} + a^2\xi'_i = \delta g_{0i} + a^2[\xi'_{\perp i} + (\zeta' - \xi^0)_{,i}], \\ \delta\tilde{g}_{ij} &= \delta g_{ij} + (a^2)'\delta_{ij}\xi^0 + a^2(\xi_{i,j} + \xi_{j,i}) \\ &= \delta g_{ij} + a^2\left[\frac{2a'}{a}\delta_{ij}\xi^0 + 2\zeta_{,ij} + (\xi_{\perp i,j} + \xi_{\perp j,i})\right], \qquad (6.2.15)\end{aligned}$$

ahol a felső vessző az η konform idő szerinti deriválást jelent, és $\xi_{\perp i} = \xi^i_\perp$.

- **A $q(x)$ 4-esskalármező perturbációjának infinitezimális mértéktranszformációja.** Legyen az x koordinátarendszerben a skalármező $q(x) = {}^0q(x) + \delta q$, ahol ${}^0q(x)$ és δq rendre a háttér és a perturbáció, a transzformált koordinátarendszerben a skalármező $\tilde{q}(\tilde{x}) = q(x)$, ahol

$$q(x) \;=\; \tilde{q}(\tilde{x}) = \tilde{q}(x+\xi) = \tilde{q}(x) + \tilde{q}_{,\alpha}\xi^\alpha \equiv {}^0q(\tilde{x}) + \delta\tilde{q}, \qquad (6.2.16)$$

ahol a transzformált koordinátákban a háttér

$${}^0q(\tilde{x}) \;=\; {}^0q(x) + {}^0q_{,\alpha}\xi^\alpha. \qquad (6.2.17)$$

Ezt figyelembe véve azt kapjuk $q(x)$-re, hogy

$${}^0q(x) + \delta q \;=\; {}^0q(x) + {}^0q_{,\alpha}\xi^\alpha + \delta\tilde{q}, \qquad (6.2.18)$$

ahonnan **a skalármező perturbációjának infinitezimális mértéktranszformációja**

$$\delta q \;\longrightarrow\; \delta\tilde{q} = \delta q - {}^0q_{,\alpha}\xi^\alpha. \qquad (6.2.19)$$

A levezetésben felhasználtuk, hogy a téridő adott pontjában a skalármező értéke független a koordinátarendszer megválasztásától. Az viszont, hogy hogyan bontjuk a skalármezőt háttérre és perturbációra, már függ a koordinátarendszertől.

- **Az $u_\alpha(x)$ 4-esvektormező perturbációjának infinitezimális mértéktranszformációja.** Legyen az x koordinátarendszerben a vektormező felbontása háttérre és perturbációra $u_\alpha(x) = {}^0u_\alpha(x) + \delta u_\alpha$. A téridő adott pontjában az eredeti és a transzformált koordinátarendszerben az

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\alpha(\tilde{x}) &= \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha} u_\gamma(x) \approx u_\alpha(x) - u_\gamma \xi^\gamma_{,\alpha} \\ &\approx {}^0u_\alpha(x) + \delta u_\alpha - {}^0u_\gamma \xi^\gamma_{,\alpha} \end{aligned} \qquad (6.2.20)$$

kapcsolat áll fenn az eredeti és a transzformált vektormező között. Másrészt pedig a transzformált vektormező felbontása háttérre és perturbációra:

$$\tilde{u}_\alpha(\tilde{x}) \;\equiv\; {}^0u_\alpha(\tilde{x}) + \delta\tilde{u}_\alpha \approx {}^0u_\alpha(x) + {}^0u_{\alpha,\gamma}\xi^\gamma + \delta\tilde{u}_\alpha. \qquad (6.2.21)$$

Összehasonlítjuk $\tilde{u}_\alpha(\tilde{x})$ kétféle felírását, és azt kapjuk, hogy

$${}^0u_\alpha(x) + \delta u_\alpha - {}^0u_\gamma\xi^\gamma_{,\alpha} \;=\; {}^0u_\alpha(x) + {}^0u_{\alpha,\gamma}\xi^\gamma + \delta\tilde{u}_\alpha, \qquad (6.2.22)$$

ahonnan **a 4-esvektormező perturbációjának infinitezimális mértéktranszformációja**

$$\delta\tilde{u}_\alpha \;=\; \delta u_\alpha - {}^0u_{\alpha,\gamma}\xi^\gamma - {}^0u_\gamma\xi^\gamma_{,\alpha}. \qquad (6.2.23)$$

- **A skalár-, vektor- és tenzorperturbációk transzformációja és mértékinvariáns jellemzőik.**

  – **A skalárperturbációk esetén** csak ϕ, B, ψ és E különböznek nullától, és csak a ξ^0 és ζ infinitezimális függvényekkel és a $\xi^i_\perp = 0$-val jellemzett infinitezimális koordinátatranszformációk transzformálják a skalárperturbációkat skalárperturbációkba. Ebben az esetben

$$\delta g_{\alpha\beta} = a^2 \begin{pmatrix} 2\phi & B_{,1} & B_{,2} & B_{,3} \\ B_{,1} & 2\psi + 2E_{,11} & 2E_{,12} & 2E_{,13} \\ B_{,2} & 2E_{,21} & 2\psi + 2E_{,22} & 2E_{,23} \\ B_{,3} & 2E_{,31} & 2E_{,32} & 2\psi + 2E_{,33} \end{pmatrix} \tag{6.2.24}$$

  és ugyanilyen alakba írható a transzformált $\delta\tilde{g}_{\alpha\beta}$ is, csak a transzformált $\tilde{\phi}$, $\tilde{B}$, $\tilde{\psi}$, $\tilde{E}$ segítségével. Másrészt ekkor

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2\Big[(1+2\phi)d\eta^2 + 2B_{,i}d\eta dx^i - \Big((1-2\psi)\delta_{ij} - 2E_{,ij}\Big)dx^i dx^j\Big], \\ \delta\tilde{g}_{00} &= a^2[2\phi - 2a(a\xi^0)'], \\ \delta\tilde{g}_{0i} &= a^2[B_{,i} + (\zeta' - \xi^0)_{,i}], \\ \delta\tilde{g}_{ij} &= a^2\Big[\Big(2\psi + \frac{2a'}{a}\xi^0\Big)\delta_{ij} + 2(\zeta + E)_{,ij}\Big]. \end{aligned} \tag{6.2.25}$$

  Innen tehát kiolvashatjuk a transzformált $\tilde{\phi}$, $\tilde{B}$, $\tilde{\psi}$, $\tilde{E}$ és az eredeti ϕ, B, ψ és E közötti kapcsolatot:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \phi - a(a\xi^0)', \qquad \tilde{B} = B + \zeta' - \xi^0, \\ \tilde{\psi} &= \psi + \frac{a'}{a}\xi^0, \qquad \tilde{E} = E + \zeta. \end{aligned} \tag{6.2.26}$$

  A 4 darab skalárfüggvény transzformációjában 2 darab tetszőleges függvény, ξ^0 és ζ szerepel. Ezért a 4 függvény közül 2 tetszés szerint zérussá tehető a ξ^0 és ζ alkalmas megválasztásával. Valójában tehát **2 darab mérték-független kombinációt tudunk képezni a ϕ, B, ψ és E mennyiségekből.** Közvetlenül meggyőződhetünk róla, hogy pl.

$$\Phi = \phi - \frac{1}{a}[a(B - E')]', \qquad \Psi = \psi + \frac{a'}{a}(B - E') \tag{6.2.27}$$

  mértékinvariáns kombinációk. Ha ezek valamely koordinátarendszerben eltűnnek, akkor minden koordinátarendszerben eltűnnek. Így meg tudjuk különböztetni a valódi, fizikai perturbációkat a koordinátarendszer speciális megválasztásából adódó hamis perturbációktól. Ha Φ és Ψ eltűnnek, akkor a perturbációk hamisak, ha nem, akkor pedig fizikaiak. Természetesen végtelen sok mértékinvariáns mennyiségpárt tudunk

bevezetni; a (6.2.27) választásnál az a szempont, hogy a lehető legegyszerűbb legyen a kifejezés.

Az energiasűrűség $\delta\epsilon$ perturbációja, mint egy skalármező perturbációja, nem mértékinvariáns, ezt az előzőekben beláttuk. A (6.2.19) transzformációs képlet alapján azonban **konstruálhatunk olyan $\overline{\delta\epsilon}$ energiasűrűség-perturbációt, amely mértékinvariáns:**

$$\overline{\delta\epsilon} \;=\; \delta\epsilon - \epsilon_0'(B - E'), \tag{6.2.28}$$

ahol ϵ_0 a Friedmann-Világegyetemben a homogén és izotróp energiasűrűség, amelyre $\epsilon_{0,i} = 0$. Valóban, ekkor közvetlenül ellenőrizhetjük a transzformációs képletek alapján, hogy $\overline{\delta\epsilon}$ mértékinvariáns.

Hasonlóképpen vezethetjük be **a homogén és izotróp háttérrel együtt mozgó, ${}^0u_\alpha = (a, 0, 0, 0)$ 4-essebességű folyadék mértékinvariáns sebesség-perturbációját:**

$$\overline{\delta u}_0 = \delta u_0 - [a(B - E')]', \qquad \overline{\delta u}_i = \delta u_i - a(B - E')_{,i}. \tag{6.2.29}$$

– **A vektorperturbációkat** a transzverzális S_i és F_i vektormezők írják le, $\phi = B = \psi = E = 0$ és $h_{ij} = 0$ ebben az esetben. Az invariáns ívelemnégyzet

$$ds^2 \;=\; a^2\Big[d\eta^2 + 2S_i d\eta dx^i - (\delta_{ij} - F_{i,j} - F_{j,i})dx^i dx^j\Big]. \tag{6.2.30}$$

Ha infinitezimális koordinátatranszformációt hajtunk végre, akkor csak a $\xi_\perp^i$-t tartalmazó tagok adnak járulékot a tiszta vektorperturbációhoz. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\delta\tilde{g}_{00} = \delta g_{00}, \quad \delta\tilde{g}_{0i} = \delta g_{0i} + a^2\xi_{\perp i}' = a^2 S_i + a^2\xi_{\perp i}' \equiv a^2\tilde{S}_i,\\
&\delta\tilde{g}_{ij} = \delta g_{ij} + a^2(\xi_{\perp i,j} + \xi_{\perp j,i}) = a^2(F_{i,j} + F_{j,i}) + a^2(\xi_{\perp i,j} + \xi_{\perp j,i})\\
&\quad \equiv a^2(\tilde{F}_{i,j} + \tilde{F}_{j,i}),
\end{aligned} \tag{6.2.31}$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
S_i \;&\longrightarrow\; \tilde{S}_i = S_i + \xi_{\perp i}',\\
F_i \;&\longrightarrow\; \tilde{F}_i = F_i + \xi_{\perp i}
\end{aligned} \tag{6.2.32}$$

adódik a vektorperturbációkat jellemző függvények infinitezimális koordinátatranszformációjára. Egyetlen mértékinvariáns transzverzális vektor szükséges és elegendő tehát a vektorperturbációk jellemzésére, ez lehet

$$\bar{V}_i \;=\; S_i - F_i'. \tag{6.2.33}$$

Ez a transzverzális vektor a fizikai perturbációk egy 2-dimenziós terét írja le, ezek a perturbációk forgó mozgásnak felelnek meg. A megfelelő forgási sebesség, $\delta u_{\perp i}$ szintén transzverzális vektormező, $(\delta u_{\perp i})^{,i} = 0$ és mértékinvariáns [1].

– **A tenzorperturbációkat** leíró h_{ij} tenzor mértékinvariáns, nem változik infinitezimális koordinátatranszformációk során. Tiszta tenzorperturbációk esetén az invariáns ívelemnégyzet

$$ds^2 = a^2\Big[d\eta^2 - (\delta_{ij} - h_{ij})dx^i dx^j\Big]. \tag{6.2.34}$$

A h_{ij} tenzor a gravitációs hullámokat mértékinvariáns módon írja le.

- **Mértékrögzítés és speciális koordinátarendszerek**

A mértékrögzítésnek a leglényegesebb kihatása a skalárperturbációkra van, és a kozmológia szempontjából is a skalárperturbációk a legfontosabbak, mert ezek között találjuk meg a gravitációs instabilitásnak megfelelő módusokat. Mivel a skalárperturbációk infinitezimális mértéktranszformációját 2 tetszőleges függvény, ξ^0 és ζ határozza meg, azért a ϕ, B, ψ, E mennyiségekre, a $\delta\epsilon$ energiaperturbációra, és a $\delta u_{\|i} = \varphi_{,i}$ longitudinális sebességperturbációra összesen 2 feltételt róhatunk ki. Ezek a mértékfeltételek közvetve rögzítik a ξ^0 és ζ függvényeket. A mértékfeltételek segítségével tehát kiválasztjuk a koordinátarendszerek valamelyik speciális osztályát, vagy esetleg valamelyik speciális koordinátarendszert. Alább a koordinátarendszerek két speciális választására mutatunk példát.

– **A longitudinális (vagy másképpen a konform Newton-i) mérték** megfelel a $B = E = 0$ választásnak. Mivel $\tilde{E} = E + \zeta$, minden $\zeta \neq 0$ választás sérti az $E = \tilde{E} = 0$ feltételt, továbbá ha $\zeta = 0$, akkor $\tilde{B} = B - \xi^0$, úgyhogy minden $\xi^0 \neq 0$ választás sérti a $B = \tilde{B} = 0$ feltételt. Ez azt jelenti, hogy a longitudinális mértékrögzítés egyértelműen rögzíti, hogy melyik koordinátarendszerben dolgozunk, nem marad további választási lehetőségünk. A longitudinális mértékben a skalárperturbációk mértékinvariáns jellemzői

$$\Phi = \phi, \qquad \Psi = \psi. \tag{6.2.35}$$

A longitudinális mértéknek megfelelő **konform Newton-i koordinátarendszerben** a metrika perturbációja $\delta g_{00} = a^2 2\Phi$, $\delta g_{0i} = 0$, $\delta g_{ij} = a^2 2\Psi\delta_{ij}$, az energiasűrűség perturbációja $\delta\epsilon = \overline{\delta\epsilon}$, és a Friedmann-háttérrel együtt mozgó ideális folyadék perturbációja $\delta u_i = \overline{\delta u}_i$. Ebben az esetben Φ a Newton-i gravitációs potenciál általánosítása, ezért nevezik a mértéket konform Newton-i mértéknek. Látjuk, hogy a konform Newton-i koordinátarendszerben minden perturbáció megegyezik annak mértékinvariáns kifejezésével.

– **A szinkron mértéket** a $\phi = B = 0$ feltétel rögzíti. Ebben a mértékben $\delta g_{00} = \delta g_{0i} = 0$, azaz a metrika perturbációja tisztán a mindkét indexükben térszerű komponensekre korlátozódik, $\delta g_{ij} = 2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij}$.

Tegyük fel, hogy $(\eta, \vec{x})$ olyan koordinátarendszer, amelyben teljesülnek a mértékfeltételek. Ekkor $\delta g_{00} = \delta\tilde{g}_{00} = 0$, azaz $(a\xi^0)' = 0$ miatt olyan további koordinátatranszformációk megengedettek, amelyekre $\xi^0(\eta, \vec{x}) = a^{-1}(\eta)C_1(\vec{x})$, ahol a $C_1(\vec{x})$ integrációs állandó tetszőleges függvény. Ekkor a $\delta g_{0i} = \delta\tilde{g}_{0i} = 0$ feltételek maguk után vonják, hogy $(\zeta' - \xi^0)_{,i} = \zeta'_{,i} - a^{-1}[C_1(\vec{x})]_{,i} = 0$, ahonnan $\zeta = \int \frac{d\eta}{a} C_1(\vec{x}) + C_2(\vec{x})$ adódik. Ezek szerint minden olyan $(\eta, \vec{\tilde{x}})$ koordinátarendszerben is kielégülnek a mértékfeltételek, amely az $(\eta, \vec{x})$ koordinátarendszerből az

$$\eta \to \tilde{\eta} = \eta + \xi^0 = \eta + \frac{C_1(\vec{x})}{a(\eta)},$$
$$x_i \to \tilde{x}_i = x_i + \zeta_{,i} = x_i + \int \frac{d\eta}{a}[C_1(\vec{x})]_{,i} + [C_2(\vec{x})]_{,i} \quad (6.2.36)$$

infinitezimális transzformációval adódik, ahol $C_1(\vec{x})$ és $C_2(\vec{x})$ tetszőleges függvények (integrációs állandók). Most tehát a mértékrögzítés a koordinátarendszerek egy egész családját engedi meg. Valamely konkrét koordinátarendszert a $C_1(\vec{x})$ és $C_2(\vec{x})$ függvények speciális megadásával lehet kiválasztani.

A szinkron koordinátarendszerekben $\tilde{\psi} = \psi + \frac{a' C_1(\vec{x})}{a^2}$ és $\tilde{E} = E + \int \frac{d\eta}{a} C_1(\vec{x}) + C_2(\vec{x})$, továbbá a skalárperturbációk mértékinvariáns jellemzői

$$\Phi = \frac{1}{a}(aE')', \qquad \Psi = \psi - \frac{a'E'}{a}. \quad (6.2.37)$$

Ezeket az egyenleteket feloldhatjuk a szinkron koordinátarendszerhez tartozó ψ-re és E-re:

$$\begin{aligned} E &= \int \frac{d\eta}{a} \int^{\eta} d\eta' a\Phi, \\ \psi &= \Psi + \frac{a'}{a^2} \int d\eta a\Phi, \end{aligned} \quad (6.2.38)$$

amelyeket így sikerült kifejeznünk a mértékinvariáns jellemzőkkel.

Az energiasűrűség perturbációja szinkron koordinátarendszerekben

$$\begin{aligned} \delta\epsilon &= \overline{\delta\epsilon} - \epsilon_0' E' \\ &= \overline{\delta\epsilon} - \frac{\epsilon_0'}{a} \int d\eta a\Phi, \end{aligned} \quad (6.2.39)$$

a Friedmann-háttérrel együtt mozgó ideális folyadék sebességperturbációja pedig:

$$\delta u_0 = \overline{\delta u}_0 - (aE')' = \overline{\delta u}_0 - \left(\int d\eta a\Phi\right)' = \overline{\delta u}_0 - a\Phi,$$
$$\delta u_i = \overline{\delta u}_i - aE'_{,i} = \overline{\delta u}_i - \int d\eta a\Phi_{,i}. \quad (6.2.40)$$

Ha az Einstein-egyenletek és az anyag mozgásegyenleteinek szelf-konzisztens megoldásaként ismertek a skalárperturbáció mértékinvariáns jellemzői, Φ és Ψ, akkor ezekből kiszámolhatjuk a perturbációt a konform Newton-i, majd pedig a szinkron koordinátarendszerben, anélkül, hogy újra meg kellene oldanunk az új koordinátarendszerben az egyenleteket. A konform Newton-i koordinátarendszerben az egyedüli el nem tűnő ϕ_l és ψ_l rendre megegyeznek az ismert Φ-vel és Ψ-vel. Másrészt az utóbbiak segítségével tetszőleges szinkron koordinátarendszer ψ_s és E_s változóját ki tudjuk fejezni, mint ezt fentebb láttuk.

6.2.3 A metrika kozmológiai perturbációi

Most vagyunk felkészülve arra, hogy megvizsgáljuk a Világegyetemben az anyag és a metrika szelf-konzisztens perturbációit. Az anyag, azaz az energiaimpulzustenzor perturbációi az Einstein-egyenletek alapján határozzák meg a metrika fizikai, azaz mértékinvariáns perturbációit. Változatlanul a lineáris közelítésnél maradunk. Azt tesszük fel, hogy a homogén és izotróp Világegyetem metrikájához és energiasűrűségéhez képest kicsiny perturbációk jelennek meg a metrikában és az anyagban (szelf-konzisztens módon). A

$$G^\alpha_\beta \equiv R^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta R = 8\pi G T^\alpha_\beta \tag{6.2.41}$$

Einstein-egyenleteket ezért a Friedmann-Világegyetemnek megfelelő háttérre rárakódó kicsiny inhomogenitásokban linearizáljuk. A Friedmann-féle háttérmetrika konform koordinátákban

$$\begin{aligned} &{}^0g_{00} = a^2, \quad {}^0g_{0i} = 0, \quad {}^0g_{ij} = -a^2\delta_{ij}, \\ &{}^0g^{00} = a^{-2}, \quad {}^0g^{0i} = 0, \quad {}^0g^{ij} = -a^{-2}\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{6.2.42}$$

ahol az egyszerűség kedvéért megint lapos térgeometriát ($k = 0$) tételezünk fel. A 2.3 fejezetben megmutattuk, hogy az Einstein-tenzor el nem tűnő komponensei a fizikai idővel parametrizálva

$${}^0G^0_0 = 3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2, \quad {}^0G^i_i = 2\frac{\ddot a}{a} + \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{6.2.43}$$

Ha felhasználjuk a fizikai idő szerinti parametrizálásról a konform idő szerinti parametrizálásra történő áttérés szabályait (ld. 2.4 fejezet), megőrizve a térbeli izotróp koordinátákat, akkor

$$\begin{aligned} {}^0G^0_0 &= 3\frac{(a')^2}{a^4} = \frac{3}{a^2}\mathfrak{H}^2, \\ {}^0G^i_i &= \frac{2}{a^2}\left[\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right] + \frac{(a')^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}\left(2\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}^2\right) \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{6.2.44}$$

Itt bevezettük a Hubble-paraméter általánosítását:

$$\mathfrak{H} = \frac{a'}{a}. \tag{6.2.45}$$

Ennek alapján **a Friedmann-háttér Einstein-egyenletei konform koordinátákban**

$$\begin{aligned} \frac{3}{a^2}\mathfrak{H}^2 &= 8\pi G T^0_0, \\ \frac{1}{a^2}\Big(2\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}^2\Big) &= 8\pi G T^i_i, \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \tag{6.2.46}$$

Nyilvánvalóan, a homogén és izotróp térgeometria feltételezi, hogy a perturbálatlan Világegyetem energiaimpulzus-tenzora $T^0_i = 0$ és $T^i_j \propto \delta^i_j$ alakú.

Legyen $T^\alpha_\beta(x) = {}^0T^\alpha_\beta(x) + \delta T^\alpha_\beta(x)$ az energiaimpulzus-tenzor felbontása a homogén, izotróp háttérre és a perturbációra a Friedmann-féle konform koordinátákban. Infinitezimális $x \longrightarrow \tilde{x}$ koordinátatranszformáció után a felbontás háttérre és perturbációra

$$\begin{aligned} \tilde{T}^\alpha_\beta(\tilde{x}) &\equiv {}^0T^\alpha_\beta(\tilde{x}) + \delta\tilde{T}^\alpha_\beta(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\gamma}\frac{\partial x_\beta}{\partial \tilde{x}_\delta} T^\gamma_\delta(x) \\ &\approx {}^0T^\alpha_\beta(x) + \delta T^\alpha_\beta(x) - \xi^\alpha_{,\gamma}\delta^\delta_\beta\, {}^0T^\gamma_\delta(x) - \delta^\alpha_\beta \xi^{,\delta}_\beta\, {}^0T^\gamma_\delta(x) \\ &\approx {}^0T^\alpha_\beta(x) + \delta T^\alpha_\beta(x) - \xi^\alpha_{,\gamma}\, {}^0T^\gamma_\beta - \xi^{,\delta}_\beta\, {}^0T^\alpha_\delta, \end{aligned} \tag{6.2.47}$$

másrészt viszont

$$\tilde{T}^\alpha_\beta(\tilde{x}) \equiv {}^0T^\alpha_\beta(\tilde{x}) + \delta\tilde{T}^\alpha_\beta(\tilde{x}) \approx {}^0T^\alpha_\beta(x) + ({}^0T^\alpha_\beta)_{,\gamma}\xi^\gamma + \delta\tilde{T}^\alpha_\beta(x). \tag{6.2.48}$$

A kétféle kifejezést összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\delta T^\alpha_\beta \longrightarrow \delta\tilde{T}^\alpha_\beta = \delta T^\alpha_\beta - ({}^0T^\alpha_\beta)_{,\gamma}\xi^\gamma - \xi^\alpha_{,\gamma}\, {}^0T^\gamma_\beta - \xi^{,\gamma}_\beta\, {}^0T^\alpha_\gamma. \tag{6.2.49}$$

Ezen transzformációs szabályok és a metrika perturbációját jellemző ϕ, B, ψ, E skalárok (6.2.26) transzformációja alapján meggyőződhetünk róla, hogy az alábbi kifejezések mértékinvariánsak (azaz a koordinátarendszer megválasztásától függetlenek):

$$\begin{aligned} \overline{\delta T}^0_0 &= \delta T^0_0 - ({}^0T^0_0)'(B - E'), \\ \overline{\delta T}^0_i &= \delta T^0_i - \Big({}^0T^0_0 - \frac{1}{3}\, {}^0T^k_k\Big)(B - E')_{,i}, \\ \overline{\delta T}^i_j &= \delta T^i_j - ({}^0T^i_j)'(B - E'), \end{aligned} \tag{6.2.50}$$

ahol ${}^0T^k_k$ az energiaimpulzus tenzor térszerű blokkjának spúrja. Természetesen ekkor a δG^α_β perturbációkból is ugyanilyen szabály szerint készíthetünk mértékinvariáns

kifejezéseket:

$$\begin{aligned}
\overline{\delta G}^0_0 &= \delta G^0_0 - ({}^0G^0_0)'(B - E'), \\
\overline{\delta G}^0_i &= \delta G^0_i - \left({}^0G^0_0 - \frac{1}{3}{}^0G^k_k\right)(B - E')_{,i}, \\
\overline{\delta G}^i_j &= \delta G^i_j - ({}^0G^i_j)'(B - E'). \qquad (6.2.51)
\end{aligned}$$

Ezeket felhasználva végül **a perturbációkban lineárisan közelített Einstein-egyenletek mértékinvariáns alakja**

$$\overline{\delta G}^\alpha_\beta = 8\pi G \overline{\delta T}^\alpha_\beta. \qquad (6.2.52)$$

Itt mindkét oldalon a tenzorok felbonthatók skalár-, vektor- és tenzorperturbációknak megfelelő irreducibilis részekre, és az energiaimpulzus-tenzor irreducibilis perturbációi a megfelelő irreducibilis perturbációkat keltik az Einstein-tenzorban, ill. a téridő metrikában, vagyis **az irreducibilis perturbációk a lineáris közelítésben szétcsatolódnak.**

Az egyes irreducibilis összetevőkre vetített (6.2.52) egyenletek bal oldalának explicit alakját úgy kapjuk meg, hogy az Einstein-tenzor megfelelő irreducibilis összetevőjének mértékinvariáns perturbációját kifejezzük a metrika megfelelő irreducibilis összetevője perturbációjának mértékinvariáns jellemzőivel.

- **Skalárperturbációk.** A (6.2.52) egyenlet bal oldalát kifejezzük Φ-vel és Ψ-vel. Ehhez a longitudinális mértékben a skalárperturbációkhoz tartozó (6.2.25) metrika, azaz a

$$ds^2 = a^2(\eta)\Big((1 + 2\phi)d\eta^2 - (1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j\Big) \qquad (6.2.53)$$

metrika esetén meghatározzuk δG^α_β-t, majd, ha ebben figyelembe vesszük, hogy $\phi = \Phi$ és $\psi = \Psi$ a longitudinális mértékben, akkor megkapjuk $\overline{\delta G}^\alpha_\beta$-t. Hosszadalmas számolás után (ld. [1]):

$$\begin{aligned}
\Delta\Psi - 3\mathfrak{H}(\Psi' + \mathfrak{H}\Phi) &= 4\pi G a^2 \overline{\delta T}^0_0, \\
(\Psi' + \mathfrak{H}\Phi)_{,i} &= 4\pi G a^2 \overline{\delta T}^0_i, \\
\Big(\Psi'' + \mathfrak{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\Delta(\Phi - \Psi)\Big)\delta_{ij} & \\
-\frac{1}{2}(\Phi - \Psi)_{,ij} &= -4\pi G a^2 \overline{\delta T}^i_j. \qquad (6.2.54)
\end{aligned}$$

Itt $\overline{\delta T}^\alpha_\beta$ az energiaimpulzus-tenzor perturbációjának skalárperturbációs része. Az egyenleteknek ez az alakja általános, nem követeli meg a mérték rögzítését.

Tetszőleges koordinátarendszerben megkaphatjuk az egyenletek alakját, ha megkeressük Φ és Ψ alakját az adott koordinátarendszerben. A konform Newton-i koordinátarendszerben az egyenletek pontosan ilyen alakúak, a mértékinvariáns potenciálokkal vannak kifejezve a bal oldalaik. Ez kényelmes koordinátarendszer, nem kell a további, nem független B és E jellemzőket hurcolni, és a perturbációk fizikaiak.

- **Vektorperturbációk** esetén $\phi,\ B,\ \psi,\ E = 0$ és $h_{ij} = 0$, és a (6.2.30) metrika esetén a (6.2.52) egyenletből a $\bar{V}_i$ mértékinvariáns, transzverzális vektorperturbációra (ld. a (6.2.33) egyenletet) a

$$\begin{aligned} \Delta\overline{V}_i &= 16\pi G a^2 \overline{\delta T}^0_{i(V)}, \\ (\overline{V}_{i,j} + \overline{V}_{j,i})' + 2\mathfrak{H}(\overline{V}_{i,j} + \overline{V}_{j,i}) &= -16\pi G a^2 \overline{\delta T}^i_{j(V)} \end{aligned} \tag{6.2.55}$$

  egyenletek adódnak, ahol $\delta T^\alpha_{\beta(V)}$ az energiaimpulzus-tenzor vektorperturbációs része.

- **Tenzorperturbációk** esetén a metrika irreducibilis h_{ij} tenzor-komponenséhez tartozó (6.2.52) Einstein-egyenletek:

$$h''_{ij} + 2\mathfrak{H}h'_{ij} - \Delta h_{ij} = 16\pi G a^2 \overline{\delta T}^i_{j(T)} \tag{6.2.56}$$

  alakot öltenek, ahol $\overline{\delta T}^\alpha_{\beta(T)}$ az energiaimpulzus-tenzor tenzorperturbációs része.

Miután most már rendelkezünk a perturbációkat leíró mértékinvariáns egyenletekkel, amelyek bal oldala explicit alakban is ismert, az maradt hátra, hogy az egyenletek jobb oldalát is explicit módon megadjuk. Ehhez szükséges, hogy valamilyen fizikai modellünk legyen az anyagról, amely jelen van a Világegyetemben. Egyik lehetőség azt feltételezni, hogy az anyag ideális folyadék. Ekkor az Einstein-egyenletek **hidrodinamikai perturbációkat** írnak le. A CMB-ből szerzett tapasztalatok szerint a rekombináció korszakának végén kicsiny inhomogenitások vannak jelen. Ezek további fejlődésének kezdeti szakaszát leírhatjuk lineáris közelítésben. Ráadásul a későbbi korszakokban az anyagot tekinthetjük leegyszerűsítve porszerű anyagnak ($p = 0$ nyomású ideális folyadék). Kevésbé egyszerű modellben többféle folyadék keveréke, azaz sugárzás, barionikus anyag (ez a világító porszerű anyag) és sötét anyag egyidejű jelenlétét kell figyelembe venni. A következő fejezetekben ezt a két esetet vizsgáljuk meg részletesebben.

6.3 Kozmikus perturbációk

6.3.1 A hidrodinamikai perturbációk egyenletei

A Világegyetem anyagának hidrodinamikai modelljéből indulunk ki. Ekkor az anyagot ideális folyadéknak tekintjük, amelynek energiaimpulzus-tenzora

$$T^\alpha_\beta = (\epsilon + p)u^\alpha u_\beta - p\delta^\alpha_\beta. \tag{6.3.1}$$

Bontsuk fel háttérre és perturbációra az energiaimpulzus-tenzort konform Newton-i koordinátarendszerben, amikor ϵ_0, p_0 a háttér-energiasűrűség és a háttér-nyomás, ${}^0u_\alpha = (a, 0, 0, 0)$, ${}^0u^\alpha = {}^0g^{\alpha\beta}{}^0u_\beta = a^{-2}(a, 0, 0, 0) = (1/a, 0, 0, 0)$ a háttér-négyessebesség. Tegyük fel továbbá, hogy a konform Newton-i koordinátarendszerben (longitudinális mérték esetén ebben a koordinátarendszerben dolgozunk) $\delta\epsilon$ energia-, δp nyomás- és δu_i sebesség-perturbáció van jelen.

Ekkor

$$\begin{aligned}
T^0_0 &= (\epsilon_0 + p_0 + \delta\epsilon + \delta p)((1/a) + \delta u^0)(a + \delta u_0) - p_0 - \delta p \\
&= {}^0T^0_0 + \delta\epsilon + (\epsilon_0 + p_0)[(1/a)\delta u_0 + a\delta u^0] \\
&= {}^0T^0_0 + \delta\epsilon, \\
T^0_i &= (\epsilon + p)u_i u^0 = (\epsilon_0 + p_0 + \delta\epsilon + \delta p)\delta u_i\left(\frac{1}{a} + \delta u^0\right) \\
&= \frac{\epsilon_0 + p_0}{a}\delta u_i, \\
T^i_j &= (\epsilon + p)u^i u_j - p\delta^i_j \\
&= (\epsilon_0 + p_0 + \delta\epsilon + \delta p)\delta u^i \delta u_j - (p_0 + \delta p)\delta^i_j \\
&= -(p_0 + \delta p)\delta^i_j,
\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
\overline{\delta T^0_0} &= \overline{\delta\epsilon}, \\
\overline{\delta T^0_i} &= \frac{\epsilon_0 + p_0}{a}\overline{\delta u_i}, \\
\overline{\delta T^i_j} &= -\overline{\delta p}\delta^i_j.
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Itt felhasználtuk, hogy konform Newton-i mértékben $B = E = 0$ és ezért a nyomás, az energiasűrűség és a 4-essebesség perturbációja megegegyezik a megfelelő perturbációk mértékinvariáns kifejezéseivel. A következő lépés, hogy elkülönítjük a (6.3.3) mértékinvariáns perturbációkban az irreducibilis skalár-, vektor, és tenzorkomponenseket. Ugyanúgy járunk el, mint amikor a metrikát bontottuk fel irreducibilis összetevőkre (ld. a 6.2.1, fejezetet). Ez azt jelenti, hogy felbontjuk δT^μ_ν kifejezését

$$\delta T^0_0 = \alpha, \tag{6.3.4}$$

$$\delta T^0_i = b_{,i} + s_i \tag{6.3.5}$$

$$\delta T^i_j = \beta\delta^i_j + e^{,i}_{,j} + f^i_{,j} + f^{,i}_j + \chi^i_j \tag{6.3.6}$$

alakban, ahol α, β, e, f 3-asskalárok, s^i transzverzális vektor és χ^i_j zérus spúrú, transzverzális 3-astenzor. Nyilvánvaló, hogy $\alpha = \overline{\delta\epsilon}$ skalárperturbáció. A 3-assebesség $\overline{\delta u_i}$ perturbációja felbontható a zérus divergenciájú transzverzális és a longitudinális komponensre, $\overline{\delta u_i} = \delta u_{\perp i} + \overline{\delta u}_{\|i}$, ahol $\delta u^{,i}_{\perp i} = 0$. A transzverzális vektorperturbáció $s_i = \frac{\epsilon_0+p_0}{a}\overline{\delta u}_{\perp\ i}$. Ugyanakkor az $\frac{\epsilon_0+p_0}{a}\overline{\delta u}_{\|\ i}$ kifejezésben $\delta u_{\|\ i}$ tekinthető (definíció szerint) egy 3-asskalár sebességpotenciál 3-asgradiensének, úgyhogy a megfelelő összetevő a skalárperturbációkhoz tartozik. A $\delta p\delta^i_j$ összetevő pedig ismét skalárperturbációnak felel meg, $\beta = -\delta p$. Esetünkben az e, $f = 0$ és a valódi tenzorperturbáció is zérus, $\chi_{ij} = 0$. **A hidrodinamikai anyag (az ideális folyadék) inhomogenitásai lineáris közlítésben lecsatolódnak a metrika tenzorperturbációiról, azaz a gravitációs hullámokról.**

- **Hidrodinamikai skalárperturbációkat** tehát az energiaimpulzus-tenzor

$$\overline{\delta T}^0_0 = \overline{\delta\epsilon}, \tag{6.3.7}$$

$$\overline{\delta T}^0_i = \frac{\epsilon_0 + p_0}{a}\overline{\delta u}_{\|\ i}, \tag{6.3.8}$$

$$\overline{\delta T}^i_j = -\overline{\delta p}\delta^i_j \tag{6.3.9}$$

perturbációi írják le. Helyettesítsük be ezeket a skalárperturbációkra vonatkozó (6.2.54) Einstein-egyenletek jobb oldalába,

$$\Delta\Psi - 3\mathfrak{H}(\Psi' + \mathfrak{H}\Phi) = 4\pi G a^2\overline{\delta\epsilon}, \tag{6.3.10}$$

$$(\Psi' + \mathfrak{H}\Phi)_{,i} = 4\pi G a^2\frac{\epsilon_0 + p_0}{a}\overline{\delta u}_{\|\ i}, \tag{6.3.11}$$

$$\left(\Psi'' + \mathfrak{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\Delta(\Phi - \Psi)\right)\delta_{ij} - \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)_{,ij} = 4\pi G a^2\overline{\delta p}\delta^i_j. \tag{6.3.12}$$

A (6.3.12) egyenletből $i \neq j$ esetén

$$(\Phi - \Psi)_{,ij} = 0, \quad i \neq j \tag{6.3.13}$$

adódik, amelynek egyetlen (perturbációnak minősülő) megoldása $\Psi = \Phi$. Ezt behelyettesítve a többi egyenletbe, a skalárperturbációkra az alábbi egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi - 3\mathfrak{H}(\Phi' + \mathfrak{H}\Phi) &= 4\pi G a^2\overline{\delta\epsilon}, \\ a(\Phi' + \mathfrak{H}\Phi)_{,i} = (a\Phi)'_{,i} &= 4\pi G a^2(\epsilon_0 + p_0)\overline{\delta}u_{\|i}, \\ \Phi'' + 3\mathfrak{H}\Phi' + (2\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}^2)\Phi &= 4\pi G a^2\overline{\delta p}. \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

- **Hidrodinamikai vektorperturbációk.** Mivel az energiaimpulzus-tenzor perturbációjának vektorrésze

$$\overline{\delta T}^0_{i(V)} = \frac{\epsilon_0 + p_0}{a}\overline{\delta u}_{\perp i}, \tag{6.3.15}$$

azért a vektorperturbációk (6.2.55) egyenletei

$$\Delta\overline{V}_i = 16\pi G a(\epsilon_0 + p_0)\overline{\delta u}_{\perp i}, \tag{6.3.16}$$

$$(\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{j,i})' + 2\mathfrak{H}(\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{j,i}) = 0 \tag{6.3.17}$$

alakot öltenek.

- **Tenzorperturbációk hidrodinamikai modellben.** Az energiaimpulzus-tenzor perturbációjának tenzorrésze zérus, ezért a gravitációs hullámok egyenlete:

$$h''_{ij} + 2\mathfrak{H}h'_{ij} - \Delta h_{ij} = 0. \tag{6.3.18}$$

6.3.2 A hidrodinamikai perturbációk egyenleteinek megoldásai

Vizsgáljuk most meg a fenti egyenletek megoldását a különböző esetekben:

- **Skalárperturbációk a hidrodinamikai modellben.** A (6.3.14) egyenletek megoldásának tulajdonságait vizsgáljuk meg különböző esetekben. Mielőtt erre rátérnénk, vegyük észre a következőket. Az első egyenlet nyilvánvalóan a nem tágulló Világegyetem gravitációs potenciáljára vonatkozó Poisson-egyenlet általánosítása a tágulló Világegyetem esetére, hiszen ha $\mathfrak{H} = 0$, akkor éppen a Poisson-egyenletet kapjuk belőle. Az egyenlet bal oldalának 2. és 3. tagja a tágulás miatt jelenik meg; ezek a tagok elhanyagolhatók, ha a perturbáció hullámhossza kisebb, mint a Hubble-sugár. A (6.3.14) egyenletek közül a másodikból azt látjuk, hogy a longitudinális sebességhez tartozó sebességpotenciál $(a\Phi)'(4\pi G a^2)^{-1}(\epsilon_0 + p_0)^{-1}$.

  Amikor a nem relativisztikus Jeans-féle elméletet tágulló háttéren alkalmaztuk, akkor az energiasűrűség perturbációjára tudtunk egyenletet levezetni, amelynek forrástagját az entrópiasűrűség perturbációja határozta meg. A perturbációkra vonatkozó linearizált Einstein-egyenletekből kiindulva most az általánosított gravitációs potenciálra tudunk hasonló egyenletet levezetni. Használjuk fel ehhez, hogy a $p = p(\epsilon, s)$ állapotegyenletből azt kapjuk, hogy

$$\overline{\delta p} = c_s^2\overline{\delta\epsilon} + \tau\delta s, \tag{6.3.19}$$

  ahol c_s a hangsebesség és $\tau = (\partial p/\partial s)_\epsilon$. Írjuk ezt be a (6.3.14) 3. egyenletébe, majd használjuk fel az 1. egyenletet, ekkor a következő egyenletet kapjuk az

általánosított gravitációs potenciálra:

$$\begin{aligned}
\Phi'' + 3\mathfrak{H}\Phi' + (2\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}^2)\Phi - 4\pi G a^2 c_s^2 \overline{\delta\epsilon} &= 4\pi G a^2 \tau \delta s, \\
\Phi'' + 3\mathfrak{H}\Phi' + (2\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}^2)\Phi - c_s^2[\Delta\Phi - 3\mathfrak{H}(\Phi' + \mathfrak{H}\Phi)] &= 4\pi G a^2 \tau \delta s, \\
\Phi'' + 3(1+c_s^2)\mathfrak{H}\Phi' - c_s^2\Delta\Phi + [2\mathfrak{H}' + (1+c_s^2)\mathfrak{H}^2]\Phi &= 4\pi G a^2 \tau \delta s.
\end{aligned} \tag{6.3.20}$$

Ha ezt az egyenletet megoldjuk, akkor Φ-t visszahelyettesíthetjük az 1. és a 2. egyenletbe, hogy megkapjuk rendre az energiasűrűség és a longitudinális sebességmező perturbációját.

Nézzük a (6.3.20) egyenlet megoldásának speciális eseteit.

– **Adiabatikus $\delta s = 0$ perturbációk nem relativisztikus, $p = 0$ nyomású porszerű anyagban.** Ebben az esetben a skálafaktor $a \propto \eta^2$ szerint skálázik, úgyhogy $\mathfrak{H} = 2/\eta$, a hangsebesség zérus, és a (6.3.20) egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\Phi'' + \frac{6}{\eta}\Phi' = 0. \tag{6.3.21}$$

Mivel $p = 0$, ezért $\tau = 0$, úgyhogy **porszerű anyagban csak adiabatikus perturbációk vannak**. Ezt várjuk is, hiszen porszerű anyag kicsiny, makroszkopikus „darabkái” között nincsen kölcsönhatás, mintha ezek a darabkák egymástól hőszigetelő falakkal lennének elválasztva. A (6.3.21) egyenlet megoldása:

$$\Phi = C_1(\vec{x}) + \frac{C_2(\vec{x})}{\eta^5}, \tag{6.3.22}$$

ahol $C_a(\vec{x})$ $(a = 1, 2)$ tetszőleges, csak az együtt mozgó (izotróp) térkoordinátáktól függő függvények. Helyettesítsük be az eredményt (6.3.14) 1. egyenletébe, hogy megkapjuk az energiasűrűség perturbációját:

$$\frac{\overline{\delta\epsilon}}{\epsilon_0} \equiv \frac{4\pi G a^2 \eta^2 \overline{\delta\epsilon}}{6} = \frac{1}{6}\Big[\eta^2 \Delta C_1 - 12 C_1 + (\eta^2 \Delta C_2 - 18 C_2)\frac{1}{\eta^5}\Big]. \tag{6.3.23}$$

Itt $\epsilon_0(\eta)$ a Friedmann-féle Világegyetemben a porszerű anyag homogén energiasűrűsége, amelyen megjelennek a perturbációk. Por uralta Világegyetemben $a = (a_m/2)\eta^2$, $H = a'/a^2 = \frac{2}{(a_m/2)\eta^3}$ és $\epsilon_0 = \frac{3}{8\pi G}H^2 = \frac{6}{4\pi G (a_m/2)^2 \eta^6} = \frac{6}{4\pi G a^2 \eta^2}$, amit felhasználva kapjuk, hogy a bal oldalon valóban $\overline{\delta\epsilon}/\epsilon_0$ áll.

A (6.3.23) egyenlőség jobb oldalán, a szögletes zárójelben a második tag időben állandó, amplitúdója független attól, hogy a perturbáció hullámhossza hogyan viszonyul a Hubble-sugárhoz. A többi tag viselkedése viszont függ attól, hogy mekkora a perturbáció hullámhossza. Ha a perturbáció síkhullám, $C_a = C_{a0}e^{i\vec{k}\vec{x}}$ $(a = 1, 2)$, akkor

$$\frac{\overline{\delta\epsilon}}{\epsilon_0} = \frac{1}{6}\Big[(-k^2\eta^2 - 12)C_1 + (-k^2\eta^2 - 18)\frac{C_2}{\eta^5}\Big]. \tag{6.3.24}$$

Ha a perturbáció fizikai hullámhossza $\lambda_{ph} \sim a/k$ a $H^{-1} \sim a\eta$ Hubble-horizontnál jóval nagyobb, $\lambda_{ph} \gg H^{-1} \Rightarrow k\eta \ll 1$, akkor

$$\frac{\overline{\delta\epsilon}}{\epsilon_0} \approx -2C_1 - \frac{3C_2}{\eta^5} \tag{6.3.25}$$

adódik. A horizont skáláján elhanyagolhatjuk a lebomló módust, úgyhogy a horizont közelében $\frac{\overline{\delta\epsilon}}{\epsilon_0} \approx -2\Phi$.
Ezzel szemben, ha a perturbáció fizikai hullámhossza sokkal kisebb, mint a Hubble-horizont, $\lambda_{ph} \ll H^{-1}$, azaz $k\eta \gg 1$ és

$$\frac{\overline{\delta\epsilon}}{\epsilon_0} = -\frac{1}{6}k^2\Big(C_1\eta^2 + \frac{C_2}{\eta^3} + \mathcal{O}(\eta^{-5})\Big) = \tilde{C}_1 t^{2/3} + \tilde{C}_2 t^{-1} + \mathcal{O}(t^{-5/3}), \tag{6.3.26}$$

mert $\eta \sim t^{1/3}$ a por uralta Világegyetemben. A rövidhullámú perturbációkra tehát visszakaptuk a Newton-i közelítés eredményét.

- **Adiabatikus $\delta s = 0$ perturbációk ultrarelativisztikus, $p = w\epsilon$ állapotegyenletű folyadékban,** ahol $w > 0$ állandó. Meglehet mutatni, hogy a gravitációs Φ potenciál $\Phi = \Phi_{\vec{k}}(\eta)e^{i\vec{k}\vec{x}}$ síkhullámú perturbációi (ahol $\vec{x}$ izotróp koordináták) másképpen viselkednek a hosszúhullámú $\sqrt{w}k\eta \ll 1$ és a rövidhullámú $\sqrt{w}k\eta \gg 1$ határesetekben. A $\sqrt{w}k\eta \approx 1$ megfelel a $\lambda_J \approx c_s t$ Jeans-hullámhossznak (c_s a hangsebesség, t a fizikai idő). A gravitációs potenciál hosszúhullámú, nem bomló perturbációja konstans amplitúdójú, és ekkor az energiasűrűség perturbációja $\overline{\delta\epsilon}/\epsilon_0 \approx -2\Phi$ szintén állandó amplitúdójú. A gravitációs potenciál rövidhullámú perturbációi viszont lecsengő amplitúdójú hanghullámok, $\Phi_{\vec{k}}(\eta) \propto \eta^{-\nu-(1/2)}\exp(\pm i\sqrt{w}k\eta)$, ahol $2\nu = (5+3w)/(1+3w)$. A sugárzás uralta Világegyetemben az adiabatikus perturbációkat $w = 1/3$ esetben kapjuk meg. (További részleteket ld. [1].)
- **Adiabatikus $\delta s = 0$ perturbációk tetszőleges állapotegyenlet esetén.** Ekkor is le lehet vezetni egyenleteket a hosszú- ($c_s k\eta \ll 1$) és a rövidhullámú ($c_S k\eta \gg 1$) perturbációk határesetére. A skalárperturbációkra vonatkozó (6.3.20) egyenlet „súrlódási” (azaz Φ'-vel arányos) tagját

el tudjuk tüntetni, ha bevezetjük az

$$\mathfrak{u} \equiv \Phi \exp\Big(\frac{3}{2}\int d\eta(1+c_s^2)\mathfrak{H}\Big) = \frac{\Phi}{(\epsilon_0+p_0)^{1/2}} \tag{6.3.27}$$

változót. Ekkor az $\mathfrak{u}$ mennyiségre az alábbi egyenlet vezethető le [1],

$$\mathfrak{u}'' - c_s^2\Delta\mathfrak{u} - \frac{\theta''}{\theta}\mathfrak{u} = 0, \tag{6.3.28}$$

ahol

$$\theta \equiv \frac{1}{a}\Big(1+\frac{p_0}{\epsilon_0}\Big)^{-1}. \tag{6.3.29}$$

A hosszúhullámú perturbációk, azaz $c_s k\eta \ll 1$ esetén ezt megoldhatjuk $\mathfrak{u}$-ra, és a megoldást felhasználva kapjuk, hogy

$$\Phi = (\epsilon_0+p_0)^{1/2}\mathfrak{u} = A\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{a}\int a dt\Big). \tag{6.3.30}$$

Tegyük fel, hogy a Világegyetemben sugárzás és hideg barionok (nem relativisztikus porszerű anyag) van jelen (ld. a 2.4.4. alfejezetet), ekkor a skálafaktor, mint azt korábban megmutattuk, $a(\eta) = a_{eq}(\xi^2+2\xi)$, ahol $\xi = \eta/\eta_\star$ (korábbi jelöléseink szerint). Ezt behelyettesítve a perturbációt jellemző gravitációs potenciál, majd pedig az energiasűrűség perturbációja meghatározható. Az eredményt a 13. ábra szemlélteti.

Látjuk, hogy mind a sugárzás uralta korszakban, $\eta < \eta_{eq}$, mind pedig a hideg barionokból álló por által uralt korszakban, $\eta > \eta_{eq}$, a perturbációk amplitúdója állandó, attól eltekintve, hogy az energiaperturbációk $\eta > k^{-1}$ esetén négyzetesen megnövekednek.

A rövidhullámú perturbációk, azaz $c_s k\eta \gg 1$ esetén a (6.3.28) egyenlet bal oldalán a 3. tagot elhanyagolhatjuk a 2. tag mellett. Az így kapott egyenlet megoldásai lassan változó hangsebesség esetén időben változó amplitúdójú hanghullámok.

– **Az entrópiaperturbációkkal** nem foglalkozunk ebben a jegyzetben (az érdeklődő Olvasó az [1] tankönyvben találhatja meg az entrópiaperturbációk diszkusszióját).

- **Vektorperturbációk.** Ideális folyadék vektorperturbációit a (6.3.16) és a (6.3.17) egyenletek írják le. Nem nehéz észrevenni, hogy $\mathfrak{H} = a'/a$ miatt a (6.3.17) egyenlet megoldása

$$\bar{V}_i = \frac{C_{\perp\, i}(\vec{x})}{a^2}, \tag{6.3.31}$$

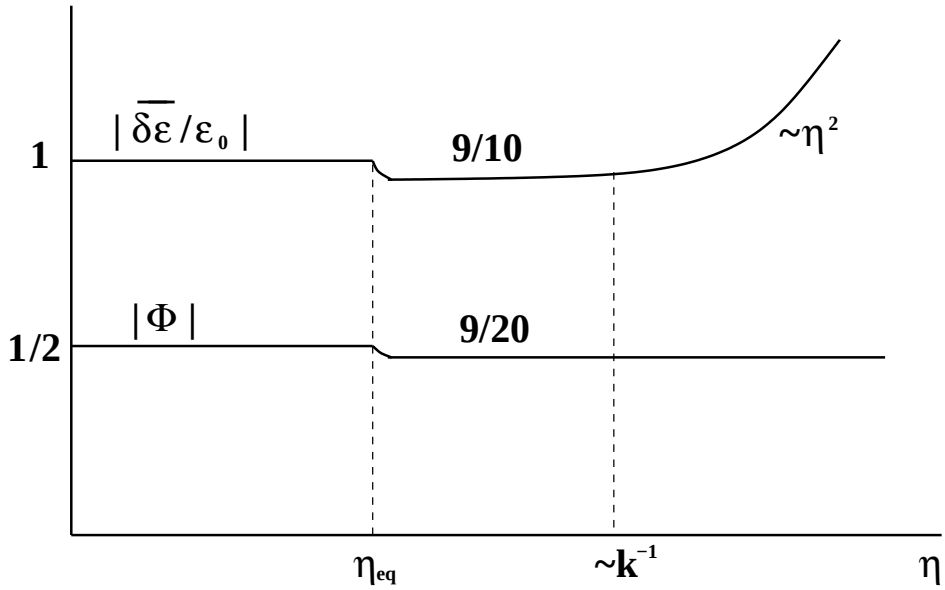

Figure 13: Hosszúhullámú síkhullámú adiabatikus perturbációk amplitúdója a konform idő függvényében, ha a Világegyetemben hideg barionok porszerű anyaga és sugárzás van jelen.

ahol $C_{\perp\ i}$ integrációs állandók. Helyettesítsük be a metrikus tenzor (6.3.31) perturbációját a (6.3.16) egyenletbe,

$$\frac{\Delta C_{\perp\ i}(\vec{x})}{a^2} = 16\pi G a(\epsilon_0 + p_0)\delta u_{\perp\ i}. \tag{6.3.32}$$

A folyadék valamely folyadékelemének perturbációból adódó világvonala együtt mozgó koordinátákkal kifejezve $x^i = x^i(s)$, ahol s a folyadékelem ívhosszparamétere. A folyadékelem perturbációból adódó **fizikai sebessége**

$$\delta v^i = a\frac{dx^i}{ds} = a^0 g^{ij}\delta u_{\perp\ j} = -\frac{1}{a}\delta u_{\perp\ i}. \tag{6.3.33}$$

Használjuk ezt fel és fejezzük ki a (6.3.32) egyenletből a perturbáció fizikai sebességét:

$$\delta v^i = -\frac{C_{\perp\ i}(\vec{x})}{16\pi G a^4(\epsilon_0 + p_0)}. \tag{6.3.34}$$

Por uralta Világegyetemben $p_0 = 0$ és $\epsilon_0 \propto a^{-3}$, úgyhogy a perturbációból származó forgási sebesség a skálafaktorral fordított arányban épül le, $\delta v^i \propto 1/a$. Sugárzás uralta Világegyetemben $p_0 = \epsilon_0/3$ és $\epsilon_0 \propto a^{-4}$, úgyhogy a perturbációból származó forgási sebesség állandó marad a tágulás során, δv^i =áll. A (6.3.31) metrikus tenzor vektorperturbációi mindkét esetben

nagyon gyorsan, a skálaparaméter négyzetével fordított arányban csökkennek. Ezért a primordiális vektorperturbációk jelenlegi amplitúdója akkor és csak akkor lehetne számottevő, ha kezdetben nagyon nagy lett volna a vektorperturbációk amplitúdója. Nincsen azonban okunk feltételezni, hogy kezdetben óriási amplitúdójú vektorperturbációk lettek volna jelen, ezért elhanyagolhatjuk a továbbiakban a vektorperturbációkat.

- **Tenzorperturbációk.** Ideális folyadék uralta Világegyetemben a mértékinvariáns energiaimpulzus-tenzor 3-dimenziós tenzorrésze zérus, $\bar{T}^i_j = 0$, és a tenzorperturbációk egyenlete (6.3.18) alakot ölt. Éljünk most a következő munkahipotézissel, figyelembe véve, hogy a perturbálatlan háttér az a skálafaktorral jellemzett homogén és izotróp Világegyetem. Vezessük be az e_{ij} időtől független polarizációs tenzort, ill. segítségével a

$$h_{ij} = \frac{v}{a} e_{ij} \tag{6.3.35}$$

összefüggéssel az átskálázott skaláris v változót a fluktuáció leírására. Ha van a (6.3.18) egyenletnek ilyen alakú megoldása, akkor az igazolja a munkahipotézist. Keressünk az átskálázott változóban $v = v_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}}$ módusú megoldást, ekkor a

$$v''_{\vec{k}} + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) v_{\vec{k}} = 0 \tag{6.3.36}$$

egyenletet kapjuk.

Sugárzás uralta Világegyetemben $a \propto \eta$, úgyhogy $a'' = 0$, aminek következtében a k-módusok az η konform-időben egyszerű síkhullámok, $v_{\vec{k}}(\eta) = e^{\pm ik\eta}$. A valós h_{ij} k-módusa ekkor

$$h_{ij} = \frac{1}{\eta}\Big(C_1 \sin(k\eta) + C_2 \cos(k\eta)\Big) e_{ij} \tag{6.3.37}$$

alakú. A szuperhorizont skálán, azaz amikor $k\eta \ll 1$ és a fizikai hullámhossz nagyobb, mint a Hubble-sugár, a gravitációs hullámot az első, állandó tag dominálja, $h_{ij} \approx C_1 k e_{ij}$, azaz be van fagyva. A rövidhullámú módusok ($k\eta \gg 1$) amplitúdója pedig η-val, azaz az a skálaparaméterrel fordított arányban cseng le.

Tetszőleges állapotegyenlet esetén hasonló állítás érvényes. Ha $k\eta \ll 1$, azaz a szuperhorizont skálán a (6.3.36) egyenletben k^2 elhanyagolható a''/a mellett, akkor az egyenlet megoldása

$$v_{\vec{k}}(\eta) = C_1 a + C_2 a \int \frac{d\eta}{a^2}, \tag{6.3.38}$$

ahonnan

$$h_{ij} = \left(C_1 + C_2 \int \frac{d\eta}{a^2}\right) e_{ij} \tag{6.3.39}$$

a gravitációs hullám alakja. Itt a második tag az idő függvényében lebomlik (ha $p < \epsilon$), az első tag pedig mutatja, hogy a gravitációs hullám a szuperhorizont skálán tetszőleges állapotegyenlet esetén állandó, be van fagyva. Ha a rövidhullámok esetét nézzük, amikor $k\eta \gg 1$, akkor a (6.3.36) egyenletben a''/a elhanyagolható k^2 mellett, és ekkor a megoldás $v_{\vec{k}} \propto e^{\pm ik\eta}$ és a gravitációs hullám $h_{ij} \propto (1/a(\eta))e^{\pm ik\eta}e_{ij}$ szerint, azaz az a skálafaktorral fordítottan arányosan bomlik le.

7 A PRIMORDIÁLIS INHOMOGENITÁSOK

7.1 Kezdeti inhomogenitások és a felfúvódó Világegyetem

A felfúvódó Világegyetem modellje az őseredeti inhomogenitások magyarázatában fontos előrelépést tett lehetővé. Korábban, amikor nem feltételezték, hogy a Planck-korszakot egy felfúvódási korszak követte, a kezdeti inhomogenitásokat nem tudták megmagyarázni, hanem úgy választották meg a kezdeti inhomogenitások spektrumát, hogy az adjon magyarázatot a tapasztalati tényekre. Azáltal, hogy a kozmológiai Standard Modellbe beépítették a felfúvódási korszakot, lehetővé vált, hogy megmagyarázzák az őseredeti inhomogenitások megjelenését és spektrumát a rekombináció (az elektromágneses sugárzásnak az anyagról történő lecsatolódása) idején. Így a kozmológiai modell ellenőrizhetővé válik azáltal, hogy ebből az elméleti előrejelzésből meghatározzuk a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás anizotrópiáját, és azt összehasonlítjuk a megfigyelésekkel.

A felfúvódó Világegyetem modellje szerint az őseredeti inhomogenitások a Planck-korszakból származnak, a kvantumfluktuációk következményei. Ezeknek jelentősek az amplitúdói, ha a hullámhosszuk a Planck-hossz nagyságrendjébe esik. A felfúvódás során ezek az inhomogenitások lényegében változatlan amplitúdóval óriási kiterjedésűvé válnak, mintegy ,,megnyúlnak", azaz óriási mértékben megnő a hullámhosszuk. A felfúvódás végére kialakult inhomogenitások a csírái annak a kozmikus szerekzetnek, amelyet ma mutat a látható Világegyetem. Ennek következtében a felfúvódás összekapcsolja a mikrofizikát és a Világegyetem kozmikus méretekben mutatott szerkezetét. Az, hogy milyen az inhomogenitások spektruma a felfúvódás időszakának végén, nem érzékeny a felfúvódó Világegyetem modelljének részleteire. Ez a modell-független spektrum határozza meg, hogy milyen lesz a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás anizotrópiája. A felfúvódás szerencsés kimenetele után az inhomogenitások a hidrodinamikai anyag és a gravitációs mező szelfkonzisztens inhomogenitásai, amelyek az előző fejezetben leírtak szerint fejlődnek a rekombináció időpillanatáig. A CMB tanúsága szerint ekkor is kicsinyek az inhomogenitások, ezért a felfúvódás szerencsés kimenetelétől egészen a rekombináció bekövetkeztéig az inhomogenitások fejlődése az általános relativitás elmélet lineáris közelítésében tárgyalható. Ezek azok az inhomogenitások, amelyek aztán a Világegyetem későbbi feljődésében a kozmikus szerkezet kialakulásának csírájául szolgálnak.

Most arra törekszünk, hogy megértsük a gravitációs instabilitásokat a felfúvódás korszakában. Ezért a perturbációk, ill. a gravitációs instabilitások elméletét ki kell terjesztenünk a felfúvódás időszakára, és meg kell határozzuk az instabilitások spektrumát. A legegyszerűbb felfúvódási modell az, amikor egy skalármező, az inflatonmező kondenzátuma van jelen a Világegyetemben, ennek lassú ,,legördülése" okozza a felfúvódást, és a perturbációk is ezen a háttéren jelennek meg. Következő

lépés lehet az általános kvantumtérelméleti megközelítés.

7.2 A perturbációk, mint véletlen folyamatok eredményei

A Planck-korszakban a teljes Világegyetem számos, vagy végtelen sok, kauzálisan nem összefüggő tartományból áll. A felfúvódást megelőzően és/vagy annak kezdetén jelenlevő inhomogenitások a Planck-korszakban jelenlevő kvantumfluktuációk következményei. A kauzálisan nem összefüggő tartományokban azonban ezek minden bizonnyal függetlenek egymástól. Ezért az a várakozásunk, hogy a gravitációs potenciál Φ fluktuációja és az energiasűrűség $\overline{\delta\epsilon}/\epsilon_0$ fluktuációja a felfúvódási időszak kezdetén, alatt és végén úgy tekinthetők, mint véletlen folyamatokban keletkezett mezők. Jelöljük ezeket a **véletlen mezőket** egységesen $f(\vec{x})$-szel. Az, hogy $f(\vec{x})$ véletlen mező, azt jelenti, hogy az egyes térkonfigurációknak, amelyeket a mező felvehet, jól definiált valószínűségi eloszlása van. Ennek a valószínűségi eloszlásnak a következőképpen lehet jelentést adni. A Világegyetem teljes térfogatát osszuk fel (nagy) V térfogatú tartományokra, ahol V sokkal kisebb, mint a teljes Világegyetem térfogata. A véletlen folyamat eredményeként $f(\vec{x})$ minden egyes tartományban felvesz valamilyen mintázatot (konfigurációt). Számoljuk le, hogy mekkora relatív gyakorisággal jelenik meg ugyanaz a térkonfiguráció az egyes tartományokban, ez meghatározza az adott konfiguráció előfordulási valószínűségét. Ezután meghatározhatunk a teljes Világegyetem térfogatára vonatkozó átlagokat. Más szemlélettel is eljuthatunk ugyanezekhez az átlagokhoz. Elképzeljük a Világegyetem egyetlen nagy térfogatú darabjának igen nagy számú másolatát, kópiáját és a kópiákon az egyes konfigurációk előfordulási valószínűségét azonosítjuk az előbbi valószínűséggel, majd az így kapott statisztikus sokaságra vonatkozó várható értéket pedig a teljes Világegyetemre vett térfogati átlaggal. A felfúvódásra vonatkozó modellek segítségével meg fogjuk mutatni, hogy a térkonfigurációk homogén és izotróp Gauss-eloszlású (normális eloszlású) véletlen folyamatok eredményei.

A véletlen mezők jellemzése Fourier-kifejtés segítségével tehető meg egyszerűen. Legyen a V térfogatú tartományban $f(\vec{x})$ a térkonfiguráció, ennek Fourier-kifejtése

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}}. \tag{7.2.1}$$

Az $f_{\vec{k}} = a_{\vec{k}} + ib_{\vec{k}}$ Fourier-amplitúdók komplexek; mivel esetünkben f dimenziótlan, ezért $[f_{\vec{k}}] = \mathrm{m}^{3/2}$. Továbbá f valós, úgyhogy $f_{-\vec{k}} = f^*_{\vec{k}}$, ill. $a_{-\vec{k}} = a_{\vec{k}}$ és $b_{-\vec{k}} = -b_{\vec{k}}$. Ezek a Fourier-amplitúdók az egyes kauzálisan nem összefüggő V térfogatú tartományokban más-más értékeket vesznek fel. Ha N darab tartományban dN olyan fordul elő, amelyben az értékük az $(a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}} + da_{\vec{k}})$, $(b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}} + db_{\vec{k}})$ intervallumba esik, akkor

$$dN = N \prod_{\vec{k}} w(a_{\vec{k}}, b_{\vec{k}}) da_{\vec{k}} db_{\vec{k}} \tag{7.2.2}$$

definiálja a Fourier-együtthatók $w(a_{\vec{k}}, b_{\vec{k}})$ valószínűségi sűrűségét. **Feltettük, hogy az egyes $\vec{k}$-módusok együtthatói függetlenek. A kozmikus felfúvódás modellje véletlen mezőket jósol, amelyeknek az $a_{\vec{k}}$ és $b_{\vec{k}}$ Fourier-együtthatói független, zérus várható értékű, azonos Gauss-eloszlású véletlen változók,**

$$w(a_{\vec{k}}, b_{\vec{k}}) = \frac{1}{\pi\sigma_k^2} e^{-a_{\vec{k}}^2/\sigma_k^2} e^{-b_{\vec{k}}^2/\sigma_k^2}, \tag{7.2.3}$$

amelyek $\sigma_k^2/2$ szórásnégyzete csak a hullámvektor nagyságától, $k = |\vec{k}|$-tól (izotróp eloszlás). A homogenitást az biztosítja, hogy a w sűrűségfüggvény az egész térben azonos, nem függ a helytől. A homogenitás következménye, hogy $a_{\vec{k}}$ és $b_{\vec{k}}$ változók σ_k^2 szórásnégyzete azonos, az izotrópia következtében pedig a σ_k^2 szórásnégyzet nem függ $\vec{k}$ irányától, hanem csak annak k nagyságától. Ahhoz, hogy akár egyetlen kauzálisan összefüggő tartományon belül is fel lehessen tenni a Fourier-együtthatók függetlenségét, az kell, hogy a fluktuációk kicsinyek legyenek, amelyeket lineáris egyenletek írnak le. Amikor a fluktuációk nemlineárisakká válnak, akkor a különböző Fourier-módusok összecsatolódnak, már nem tekinthetők független eloszlásúaknak.

Legyen $f(\vec{x})$ véges V térfogatban értelmezett véletlen mező, a mező Fourier-módusainak $f_{\vec{k}}$ amplitúdói pedig normális eloszlású, diszkrét, független véletlen változók. Ekkor

$$\begin{aligned} \langle f_{\vec{k}} f_{\vec{k}'} \rangle &= \langle a_{\vec{k}} a_{\vec{k}'} \rangle - \langle b_{\vec{k}} b_{\vec{k}'} \rangle + i(\langle a_{\vec{k}} b_{\vec{k}'} \rangle + \langle b_{\vec{k}} a_{\vec{k}'} \rangle) \\ &= \sigma_k^2 \delta_{\vec{k},-\vec{k}'}, \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

ahol $\langle \ldots \rangle$ a várható értéket jelöli, $f_{\vec{k}} = a_{\vec{k}} + ib_{\vec{k}}$, ahol $a_{\vec{k}}$ és $b_{\vec{k}}$ azonos normális eloszlású, független változók, amelyek szórásnégyzete $\sigma_k^2/2$ és várható értéke zérus. Mivel $[f_{\vec{k}}] = [a_{\vec{k}}] = [b_{\vec{k}}] = m^{3/2}$, azért $[\sigma_k] = m^{3/2}$.

Folytonos határesetben ($V \to \infty$) a megfelelő formulák

$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} f_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}}, \tag{7.2.5}$$

ahol $f_{\vec{k}}$ a megfelelő véges térfogati Fourier-együtthatók $\sqrt{V}$-szerese, úgyhogy most $[f_{\vec{k}}]$ =m^3. A valószínűségi sűrűség változatlanul (7.2.3) alakú, az (7.2.4) várható érték pedig

$$\langle f_{\vec{k}} f_{\vec{k}'} \rangle = \sigma_k^2 \delta(\vec{k} + \vec{k}') \tag{7.2.6}$$

alakot ölt, ahol $\delta(\vec{k} + \vec{k}')$ a 3-dimenziós Dirac-delta. Utóbbi dimenziója $[k^{-3}]$ =m^3, úgyhogy $[\sigma_k^2]$ =m^3.

A véletlen mezők a fentivel egyenértékű módon jellemezhetők **a 2-pont térkorrelációs függvénnyel:**

$$\xi_f(\vec{x} - \vec{y}) = \langle f(\vec{x}) f(\vec{y}) \rangle, \tag{7.2.7}$$

ahol figyelembe vettük, hogy $\langle f(\vec{x})\rangle = 0$. Homogén és izotróp térben a korrelációs függvény csak az $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ távolságtól függ. A Fourier-kifejtést felhasználva,

$$\begin{aligned}
\xi_f(\vec{x}-\vec{y}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \langle f_{\vec{k}} f_{\vec{k}'}\rangle e^{i\vec{k}\vec{x}+i\vec{k}'\vec{y}} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_k^2 \delta(\vec{k}+\vec{k}') e^{i\vec{k}\vec{x}+i\vec{k}'\vec{y}} \\
&= \int \frac{\sigma_k^2 d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} \frac{\sigma_k^2 k^2 dk}{(2\pi)^2} e^{ikr\cos\theta} \\
&= \int_{-1}^{1} du \int_0^{\infty} \frac{\sigma_k^2 k^2 dk}{(2\pi)^2} e^{ikru} = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_k^2 k^2 dk}{4\pi^2} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{\sigma_k^2 k^3}{2\pi^2} \frac{\sin kr}{kr}.
\end{aligned} \tag{7.2.8}$$

A (végtelen térfogatban értelmezett véletlen mezők) térkorrelációs függvényét egyértelműen jellemzi a σ_k^2 szórásnégyzet. Helyette azonban a

$$\delta_f^2(k) = \frac{\sigma_k^2 k^3}{2\pi^2} \tag{7.2.9}$$

dimenziótlan szórásnégyzetet szokás megadni; $[\delta_f^2 = [\sigma_k^2]\times[k^3] = m^3 m^{-3} = 1$. A (7.2.9) dimenziótlan szórásnégyzetnek fontos jelentése van, amit az alábbi becslésből olvashatunk ki:

$$\left\langle \left(\frac{1}{V} \int d^3x f(\vec{x}) \right)^2 \right\rangle^{1/2} \sim \mathcal{O}(1)\delta_f(k \sim 1/\lambda), \quad \text{ha} \quad V \sim \lambda^3 \sim k^{-3}. \tag{7.2.10}$$

A dimenziótlan szórásnégyzet meghatározza a fluktuációk négyzetes amplitúdójának jellemző értékét a $\lambda \sim 1/k$ méretskálán. Másképpen mondva, **az adott λ hullámhossznak megfelelő $V \sim \lambda^3$ nagyságrendű térfogatra átlagolt fluktuációk négyzetes középértéke a dimenziótlan szórásnégyzet nagyságrendjébe esik.**

A (7.2.10) nagyságrendi becslésnek a belátásához induljunk ki abból, hogy

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{1}{V} \int d^3x f(\vec{x}) \right)^2 \right\rangle &\sim \frac{1}{\lambda^6} \int_V d^3x \int_V d^3y \langle f(\vec{x}) f(\vec{y})\rangle = \frac{1}{\lambda^6} \int_V d^3x \int_V d^3y \xi_f(\vec{x}-\vec{y}) \\
&= \frac{1}{\lambda^6} \int_V d^3x \int_V d^3y \int \frac{\sigma_k^2 d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} = \frac{1}{\lambda^3} \int_V d^3x \int \frac{\sigma_k^2 d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}}.
\end{aligned} \tag{7.2.11}$$

Végezzük el először a $V \sim \lambda^3$ térfogatra az integrált,

$$\left\langle \left(\frac{1}{V} \int d^3x f(\vec{x}) \right)^2 \right\rangle \sim \frac{1}{\lambda^3} \int \frac{\sigma_k^2 d^3k}{(2\pi)^3} 2\pi \int_{-1}^{1} du \int_0^{\lambda} dr\, r^2 e^{ikru}$$

$$
\begin{aligned}
&\sim \frac{1}{\lambda^3}\int \frac{\sigma_k^2 d^3k}{(2\pi)^2}\int_0^\lambda dr\ r^2 \frac{1}{ikr}(e^{ikr}-e^{-ikr}) \\
&\sim \frac{1}{\lambda^3}\int \frac{2\sigma_k^2 d^3k}{(2\pi)^2}\int_0^\lambda dr\ r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} \\
&\sim \frac{1}{\lambda^3}\frac{4\pi}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\ k\sigma_k^2 \int_0^\lambda dr\ r\sin(kr), \qquad (7.2.12)
\end{aligned}
$$

ahol

$$
\int_0^\lambda dr\ r\sin(kr) \sim k^{-2}\int_0^{2\pi} ds\ s\sin s \sim k^{-2}\Big[\sin s - s\cos s\Big]_0^{2\pi} \sim \frac{2\pi}{k^2}, \qquad (7.2.13)
$$

úgyhogy

$$
\left\langle \left(\frac{1}{V}\int d^3x f(\vec{x})\right)^2 \right\rangle \sim \frac{1}{\lambda^3}\frac{4\pi}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\ k\sigma_k^2 \frac{2\pi}{k^2}. \qquad (7.2.14)
$$

A $V \sim \lambda^3$ térfogatban azonban csak a nagyfrekvenciás, λ-nál kisebb hullámhosszú módusok adnak járulékot a térfogati átlaghoz, ezért a k-integrál alsó határát $2\pi/\lambda$-nak vehetjük,

$$
\left\langle \left(\frac{1}{V}\int d^3x f(\vec{x})\right)^2 \right\rangle \sim \frac{1}{\lambda^3}\frac{4\pi}{(2\pi)}\int_{2\pi/\lambda}^\infty \frac{dk\sigma_k^2}{k}. \qquad (7.2.15)
$$

Az integrálhoz a lényeges járulék $k \sim 2\pi/\lambda$ környékéről jön (feltéve, hogy a szórásnégyzet nagy k-k esetén gyorsan lecseng), ezért $\sigma^2_{k\sim 1/\lambda}$-t kiemelhetjük jó közelítéssel az integrál elé, és akkor a keresett várható érték nagyságrendje

$$
\left\langle \left(\frac{1}{V}\int d^3x f(\vec{x})\right)^2 \right\rangle \sim \frac{1}{\lambda^3}\sigma^2_{k\sim 1/\lambda} \sim \delta_f^2(k\sim 1/\lambda). \qquad (7.2.16)
$$

Ezt akartuk belátni.

A $\delta_f^2(k)$ dimenziótlan szórásnégyzetet **az f véletlen mező erőspektrumának („power spectrum")** nevezik. Esetünkben azt szeretnénk alább meghatározni, hogy a felfúvódás a perturbációk milyen kezdeti erőspektrumát generálja, azaz hogy a felfúvódás korszakának befejeződése után milyen a gravitációs potenciál Φ fluktuációjának, ill. az energiasűrűség fluktuációjának az erőspektruma. A gravitációs potenciál esetén $\sigma_k^2 = |\Phi_k|^2$ és a gravitációs potenciál erőspektruma

$$
\delta_\Phi^2(k) = \frac{|\Phi_k|^2 k^3}{2\pi^2}. \qquad (7.2.17)
$$

7.3 A perturbációk erőspektruma a felfúvódás inflatonmezős modelljében

7.3.1 Skalárperturbációk egyenletei

Ebben a fejezetben a felfúvódás egy-komponensű, lassan gördülő inflaton-mezőn alapuló modelljében határozzuk meg a perturbációk erőspektrumát. Abból indulunk tehát ki, hogy a Világegyetemben a $\varphi(\vec{x},\eta)$ inflatonmező van jelen, amelynek

klasszikus hatásfunkcionálja

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - V(\varphi)\Big) \equiv \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}(\varphi) \qquad (7.3.1)$$

a görbült téridőben. Innen az inflatonmező mozgásegyenlete, a Klein-Gordon-egyenlet φ szerinti variálással adódik,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta}\Big) + V'(\varphi) = 0; \qquad (7.3.2)$$

az energiaimpulzus-tenzor, $T^\alpha_\beta = (\partial\mathcal{L}/\partial\varphi_{,\alpha})\varphi_{,\beta} - \delta^\alpha_\beta\mathcal{L}$, pedig az alábbi alakot ölti:

$$T^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma}\varphi_{,\gamma}\varphi_{,\beta} - \Big(\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\varphi_{,\gamma}\varphi_{,\delta} - V(\varphi)\Big)\delta^\alpha_\beta. \qquad (7.3.3)$$

Tegyük fel, hogy az inflatonmező a térben homogén $\varphi_0(\eta)$ háttér és az arra ráépülő $\delta\varphi(\vec{x},\eta)$ perturbáció összege,

$$\varphi = \varphi_0(\eta) + \delta\varphi(\vec{x},\eta), \qquad (7.3.4)$$

ahol η a konform idő és $\vec{x}$ együtt mozgó térkoordináták. A skalármező perturbációja maga után vonja a

$${}^0g_{00} = a^2, \quad {}^0g_{0i} = 0, \quad {}^0g_{ij} = -a^2\delta_{ij} \qquad (7.3.5)$$

Friedmann- metrika (6.2.24) perturbációját, ill. az invariáns ívhossznégyzet alakjának (6.2.25) módosulását:

$$\delta g_{00} = a^2 2\phi, \quad \delta g_{0i} = a^2 B_{,i}, \quad \delta g_{ij} = a^2(2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij}). \qquad (7.3.6)$$

Ezeket egyrészt behelyettesítjük a Klein-Gordon-egyenletbe, másrészt az Einstein-egyenletekbe, majd linearizáljuk az egyenleteket a perturbációkban, így megkapjuk a háttérre és a perturbációkra vonatkozó egyenletrendszert. Az inflatontérre és annak perturbációjára vonatkozó egyenletek:

$$\varphi_0'' + 2\mathfrak{H}\varphi_0' + a^2V_{,\varphi}(\varphi_0) = 0, \qquad (7.3.7)$$

$$\delta\varphi'' + 2\mathfrak{H}\delta\varphi' - \Delta(\delta\varphi - (B - E')\varphi_0') + a^2V_{,\varphi\varphi}\delta\varphi$$
$$-(3\psi + \phi)'\varphi_0' + 2a^2\phi V_{,\varphi}(\varphi_0) = 0. \qquad (7.3.8)$$

A részletszámolásokhoz szükségünk lesz még $\delta g^{\alpha\beta}$ kifejezéseire. Abból kiindulva, hogy

$$({}^0g^{\alpha\gamma} + \delta g^{\alpha\gamma})({}^0g_{\gamma\beta} + \delta g_{\gamma\beta}) = \delta^\alpha_\beta, \qquad (7.3.9)$$

az elsőrendű tagokkal bezárólag

$${}^0g^{\alpha\gamma}\delta g_{\gamma\beta} + \delta g^{\alpha\gamma}{}^0g_{\gamma\beta} = 0 \qquad (7.3.10)$$

adódik, ahonnan ${}^0g^{\beta\delta}$-val szorozva mindkét oldalt kapjuk, hogy

$$\delta g^{\alpha\delta} \quad = \quad -{}^0g^{\alpha\gamma}\delta g_{\alpha\beta}{}^0g^{\beta\delta}. \tag{7.3.11}$$

Ha az $(\vec{x},\eta)$ konform koordinátákat használjuk, akkor innen azt kapjuk, hogy

$$\delta g^{00} = -a^{-4}\delta g_{00}, \quad \delta g^{0i} = a^{-4}\delta g_{0i}, \quad \delta g^{ij} = -a^{-4}\delta g_{ij}. \tag{7.3.12}$$

Szükségünk van még $\sqrt{-g}$-re. A háttér metrika esetében ez:

$$\sqrt{-{}^0g} \quad = \quad \sqrt{-\det{}^0g_{\alpha\beta}} = \sqrt{(a^2)^4} = a^4. \tag{7.3.13}$$

Írjuk a determináns δg perturbációját

$$\delta g \quad = \quad \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}}\delta g_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = {}^0g\ {}^0g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} \tag{7.3.14}$$

alakba, ahol $D_{\alpha\beta}$ a $g_{\alpha\beta}$ elemhez tartozó aldetermináns a háttéren véve. Másrészt $\delta\sqrt{-g} = -\delta g/(2\sqrt{-g})$, úgyhogy

$$\delta\sqrt{-g} \quad = \quad \frac{1}{2a^4}a^8\left(\frac{1}{a^2}\delta g_{00} - \frac{1}{a^2}\sum_i \delta g_{ii}\right) = \frac{a^2}{2}(\delta g_{00} - \sum_i \delta g_{ii}). \tag{7.3.15}$$

Helyettesítsük be az inflatonmező (7.3.4) felbontását a (7.3.2) Klein-Gordon-egyenletbe:

$$\begin{aligned}&\partial_\alpha(a^4\ {}^0g^{\alpha\beta}\varphi_{0,\beta} + \frac{a^2}{2}(\delta g_{00} - \sum_i \delta g_{ii})\ {}^0g^{\alpha\beta}\varphi_{0,\beta} + a^4\delta g^{\alpha\beta}\varphi_{0,\beta} + a^4\ {}^0g^{\alpha\beta}\delta\varphi_{,\beta})\\ &+a^4V_{,\varphi}(\varphi_0) + V_{,\varphi}(\varphi_0)\delta\sqrt{-g} + a^4V_{,\varphi\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi = 0.\end{aligned} \tag{7.3.16}$$

Ez a nulladrendű és az első rendű tagokra rendre az alábbi egyenleteket jelenti:

$$\partial_\alpha(a^4\ {}^0g^{\alpha\beta}\varphi_{0,\beta}) + a^4V_{,\varphi}(\varphi_0) = 0, \tag{7.3.17}$$

$$\begin{aligned}&\partial_\alpha\left(a^4\delta g^{\alpha\beta}\varphi_{0,\beta} + a^4\ {}^0g^{\alpha\beta}\delta\varphi_{,\beta} + \frac{a^2}{2}(\delta g_{00} - \sum_i \delta g_{ii})\ {}^0g^{\alpha\beta}\varphi_{0,\beta}\right)\\ &+\frac{a^2}{2}(\delta g_{00} - \sum_i \delta g_{ii})V_{,\varphi}(\varphi_0) + a^4V_{,\varphi\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi = 0.\end{aligned} \tag{7.3.18}$$

A (7.3.17) egyenlet bal oldalán az első tag:

$$\begin{aligned}\partial_\alpha(a^4\ {}^0g^{\alpha\beta}\varphi_{0,\beta}) \quad &= \quad (a^4\ {}^0g^{00}\varphi_0')' = (a^2\varphi_0')'\\ &= \quad 2aa' + a^2\varphi_0''.\end{aligned} \tag{7.3.19}$$

Ezt behelyettesítve a (7.3.17) egyenletbe, majd elosztva annak mindkét oldalát a^2-tel megkapjuk a (7.3.7) egyenletet a $\varphi_0(\eta)$ homogén háttérre.

A (7.3.18) egyenlet bal oldalán a zárójeles kifejezés első két tagja:

$$\begin{aligned}\partial_\alpha(a^4\delta g^{\alpha\beta}\varphi_{0,\beta} + a^4\ {}^0g^{\alpha\beta}\delta\varphi_{,\beta}) \quad &= \quad \partial_\alpha(a^4\delta g^{\alpha 0}\varphi_0' + a^4\ {}^0g^{\alpha\beta}\delta\varphi_{,\beta})\\ &= \quad (a^4\delta g^{00}\varphi_0' + a^4\ {}^0g^{0\beta}\delta\varphi_{,\beta})' + \partial_i(a^4\delta g^{i0}\varphi_0' + a^4\ {}^0g^{i\beta}\delta\varphi_{,\beta})\\ &= \quad (-\delta g_{00}\varphi_0' + a^4\ {}^0g^{00}\delta\varphi')' + \partial_i(\delta g_{i0}\varphi_0' + a^4\ {}^0g^{ii}\delta\varphi_{,i})\\ &= \quad (-\delta g_{00}\varphi_0' + a^2\delta\varphi')' + \partial_i(\delta g_{i0}\varphi_0' - a^2\delta\varphi_{,i})\\ &= \quad (-a^2 2\phi\varphi_0')' + (a^2\delta\varphi')' + \partial_i(a^2B_{,i}\varphi_0') - \partial_i(a^2\delta\varphi_{,i})\\ &= \quad 2aa'(-2\phi\varphi_0' + \delta\varphi') + a^2(-2\phi\varphi_0' + \delta\varphi')' + a^2\varphi_0'\Delta B - a^2\Delta\delta\varphi.\end{aligned} \tag{7.3.20}$$

A (7.3.18) egyenlet bal oldalán a zárójeles kifejezés harmadik tagja:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_\alpha\left(a^2(\delta g_{00}-\sum_i \delta g_{ii})\ {}^0g^{\alpha\beta}\varphi_{0,\beta}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(a^2(\delta g_{00}-\sum_i \delta g_{ii})\ {}^0g^{00}\varphi_0'\right)'\\
&= \frac{1}{2}\left((\delta g_{00}-\sum_i \delta g_{ii})\varphi_0'\right)'\\
&= \frac{1}{2}(\delta g_{00}-\sum_i \delta g_{ii})'\varphi_0'+\frac{1}{2}(\delta g_{00}-\sum_i \delta g_{ii})\varphi_0''\\
&= \frac{1}{2}[a^2 2\phi-a^2(6\psi+2\Delta E)]'\varphi_0'+\frac{a^2}{2}[2\phi-(6\psi+2\Delta E)]\varphi_0''\\
&= aa'[2\phi-(6\psi+2\Delta E)]\varphi_0'+\frac{a^2}{2}[2\phi'-(6\psi'+2\Delta E')\varphi_0'+\frac{a^2}{2}[2\phi-(6\psi+2\Delta E)]\varphi_0''.
\end{aligned}
\tag{7.3.21}
$$

A (7.3.18) egyenlet bal oldalán a negyedik tag:

$$
\frac{a^2}{2}(\delta g_{00}-\sum_i \delta g_{ii})V_{,\varphi}(\varphi_0) = \frac{a^2}{2}[a^2 2\phi-a^2(6\psi+2\Delta E)]V_{,\varphi}(\varphi_0). \tag{7.3.22}
$$

Ezeket felhasználva, majd a^2-tel osztva mindkét oldalt, az (7.3.18) egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$
\begin{aligned}
&2\mathfrak{H}(-2\phi\varphi_0')+2\mathfrak{H}\delta\varphi'-(2\phi\varphi_0')'+\delta\varphi''+\varphi_0'\Delta B-\Delta\delta\varphi\\
&+(2\mathfrak{H}\varphi_0'+\varphi_0''+a^2V_{,\varphi}(\varphi_0))[\phi-(3\psi+\Delta E)]+[\phi-(3\psi+\Delta E)]'\varphi_0'+a^2V_{,\varphi\varphi}\delta\varphi\\
=\ &0,
\end{aligned}
\tag{7.3.23}
$$

ami a háttérre vonatkozó egyenlet értelmében a

$$
\begin{aligned}
&2\mathfrak{H}(-2\phi\varphi_0')+2\mathfrak{H}\delta\varphi'-(2\phi\varphi_0')'+\delta\varphi''+\varphi_0'\Delta B-\Delta\delta\varphi\\
&+[\phi-(3\psi+\Delta E)]'\varphi_0'+a^2V_{,\varphi\varphi}\delta\varphi\\
=\ &0
\end{aligned}
\tag{7.3.24}
$$

alakra egyszerűsödik. A tagok átrendezése után azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\delta\varphi''+2\mathfrak{H}\delta\varphi'-\Delta(\delta\varphi-\varphi_0'(B-E'))+a^2V_{,\varphi\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi\\
&-4\mathfrak{H}\phi\varphi_0'-2\phi\varphi_0''-2\phi'\varphi_0'+\phi'\varphi_0'-3\psi'\varphi_0'\\
=\ &0,
\end{aligned}
\tag{7.3.25}
$$

ahonnan a háttérre vonatkozó egyenlet ismételt felhasználása után a második sorra

$$
+2a^2\phi V_{,\varphi}(\varphi_0)-(\phi+3\psi)'\varphi_0' \tag{7.3.26}
$$

adódik. Ezzel megkaptuk a (7.3.8) egyenletet.

A (7.3.8) egyenlet tetszőleges koordinátarendszerben érvényes. A mértékinvariáns mennyiségekre legegyszerűbben úgy térhetünk át, hogy longitudinális mértéket választunk, amikor $B=E=0$, és $\phi=\Phi$, $\psi=\Psi$, és $\overline{\delta\varphi}=\delta\varphi-\varphi_0'(B-E')=\delta\varphi$:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\delta\varphi}''+2\mathfrak{H}\overline{\delta\varphi}'-\Delta\overline{\delta\varphi}+a^2V_{,\varphi\varphi}\overline{\delta\varphi}\\
&-(3\Psi+\Phi)'\varphi_0'+2a^2\Phi V_{,\varphi}(\varphi_0) = 0.
\end{aligned}
\tag{7.3.27}
$$

A (7.3.27) egyenletben 3 darab ismeretlen, Ψ, Φ, és $\overline{\delta\varphi}$ szerepel. Zárt egyenletrendszert akkor kapunk, ha a (7.3.27) egyenlethez hozzávesszük a perturbációban linearizált Einstein-egyenleteket.

Az Einstein-egyenletek felírásához szükségünk van az energiaimpulzus-tenzor perturbációjára. Írjuk ezért az energiaimpulzus-tenzort

$$T^\alpha_\beta = {}^0T^\alpha_\beta + \delta T^\alpha_\beta \tag{7.3.28}$$

linearizált alakba. Az energiaimpulzus-tenzor perturbációja:

$$\begin{aligned}
\delta T^\alpha_\beta &= \delta g^{\alpha\gamma}\varphi_{0,\gamma}\varphi_{0,\beta} + {}^0g^{\alpha\gamma}\delta\varphi_{,\gamma}\varphi_{0,\beta} + {}^0g^{\alpha\gamma}\varphi_{0,\gamma}\delta\varphi_{,\beta} \\
&\quad -\delta^\alpha_\beta\left[\frac{1}{2}\delta g^{\gamma\delta}\varphi_{0,\gamma}\varphi_{0,\delta} + \frac{1}{2}{}^0g^{\gamma\delta}\delta\varphi_{,\gamma}\varphi_{0,\delta} + \frac{1}{2}{}^0g^{\gamma\delta}\varphi_{0,\gamma}\delta\varphi_{,\delta} - V_{,\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi\right] \\
&= \delta^{\alpha 0}\delta g^{00}\varphi_0'\varphi_{0,\beta} + \delta_{\beta 0}{}^0g^{\alpha\alpha}\delta\varphi_{,\alpha}\varphi_0' + \delta^{\alpha 00}g^{00}\varphi_0'\delta\varphi_{,\beta} \\
&\quad -\delta^\alpha_\beta\left[\frac{1}{2}\delta g^{00}(\varphi_0')^2 + {}^0g^{00}\delta\varphi'\varphi_0' - V_{,\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi\right].
\end{aligned} \tag{7.3.29}$$

Írjuk ki ezt az egyes komponensekre:

$$\begin{aligned}
\delta T^0_0 &= \delta g^{00}(\varphi_0')^2 + 2{}^0g^{00}\delta\varphi'\varphi_0' \\
&\quad -\delta g^{00}(\varphi_0')^2 - 2{}^0g^{00}\delta\varphi'\varphi_0' + V_{,\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi \\
&= V_{,\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi + \frac{1}{a^2}\varphi_0'\delta\varphi' + \frac{1}{2}\delta g^{00}\varphi_0'^2, \\
&= V_{,\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi + \frac{1}{a^2}\varphi_0'\delta\varphi' - \frac{1}{a^2}\phi\varphi_0'^2,
\end{aligned} \tag{7.3.30}$$

$$\delta T^0_i = +{}^0g^{00}\varphi_0'\delta\varphi_{,i} = \frac{1}{a^2}\varphi_0'\delta\varphi_{,i}, \tag{7.3.31}$$

$$\begin{aligned}
\delta T^i_j &= -\delta^i_j\left[\frac{1}{2}\delta g^{00}(\varphi_0')^2 + {}^0g^{00}\delta\varphi'\varphi_0' - V_{,\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi\right] \\
&= -\delta^i_j\left[-\frac{1}{2}a^{-4}\delta g_{00}(\varphi_0')^2 - a^{-4}\delta\varphi'\varphi_0' - V_{,\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi\right] \\
&= -\delta^i_j[-a^{-2}\phi(\varphi_0')^2 + a^{-2}\delta\varphi'\varphi_0' - V_{,\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi],
\end{aligned} \tag{7.3.32}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\delta g^{00} = -\frac{\delta g_{00}}{a^4} = -\frac{2a^2\phi}{a^4} = -\frac{2}{a^2}\phi. \tag{7.3.33}$$

Ha longitudinális mértéket rögzítünk, akkor ezek az összefüggések megadják az energiaimpulzus-tenzor perturbációjának mértékinvariáns kifejezéseit, ha ϕ és $\delta\varphi$ helyére a megfelelő mértékinvariáns mennyiségeket írjuk. Látjuk, hogy $\overline{\delta T}^i_j = 0$, ha $j \neq i$, ezért $\Psi = \Phi$. A (6.2.54) egyenletek jobb oldalába behelyettesítjük az így kapott $\overline{\delta T}^\alpha_\beta$ komponenseket:

$$\Delta\Phi - 3\mathfrak{H}(\Phi' + \mathfrak{H}\Phi) = 4\pi G[a^2V_{,\varphi}(\varphi_0)\overline{\delta\varphi} + \varphi_0'\overline{\delta\varphi} - \varphi_0'^2\Phi], \tag{7.3.34}$$

$$(\Phi' + \mathfrak{H}\Phi)_{,i} = 4\pi G\varphi_0'\overline{\delta\varphi}_{,i}, \tag{7.3.35}$$

$$\Phi'' + 3\mathfrak{H}\Phi' + (2\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}^2)\Phi = 4\pi G[-\Phi(\varphi_0')^2 + \overline{\delta\varphi}'\varphi_0' - a^2V_{,\varphi}(\varphi_0)\overline{\delta\varphi}]. \tag{7.3.36}$$

A (7.3.35) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\Phi' + \mathfrak{H}\Phi = 4\pi G\varphi_0'\overline{\delta\varphi}. \tag{7.3.37}$$

A (7.3.34) és a (7.3.36) egyenletek azonosságként teljesülnek. A Φ és $\overline{\delta\varphi}$ perturbációkat a (7.3.27) és (7.3.37) egyenletek megoldása határozza meg. Most is külön vizsgáljuk a rövid fizikai hullámhosszú, $\lambda_{ph} \ll H^{-1}$ és a hosszúhullámú, $\lambda_{ph} \gg H^{-1}$ perturbációkat, ahol H^{-1} a görbületi sugár nagyságrendje. A felfúvódás során a görbületi sugár csak kicsit, a skálafaktor és vele együtt az adott k-módus $\lambda_{ph} \sim a/k$ fizikai hullámhossza jelentősen megnő. Ezért adott k-módus fizikai hullámhossza lehet kezdetben kisebb, mint a Hubble-sugár, de a tágulás során túlnőhet rajta. A Hubble-sugarat általában, mint az esemény-horizont méretskáláját szokás emlegetni. Az η konform idő növekedtével (a felfúvódás során) az esemény-horizont konform koordinátája lineárisan csökken, az együtt mozgó megfigyelőtől mért fizikai távolsága (kb. H^{-1}) alig nő. Meg kell jegyezni, hogy ugyanekkor a részecske-horizont konform koordinátája η-val lineárisan nő és ezért az utóbbinak az együtt mozgó megfigyelőtől mért fizikai távolsága exponenciálisan, a skálafaktorral arányosan nő. Tehát, ha az adott k-módusú perturbáció hullámhossza kezdetben kisebb, mint a Hubble-sugár, azaz rövidhullámú, akkor a felfúvódás során a hullámhossz nagyobbá válik, mint a Hubble-sugár, azaz a perturbáció átlépi az esemény-horizontot.

A továbbiakban fel fogjuk tételezni, hogy kezdetben a perturbációk amplitúdója a lehető legkisebb, azaz a kvantummechanikai vákuumfluktuációkra jellemző érték. Ezután a rövidhullámú fluktuációk fejlődését két szakaszban követjük nyomon, amíg a hullámhosszuk a Hubble-sugárnál kisebb, majd amikor a hullámhosszuk meghaladja azt, azaz amikor a perturbációk „átlépik" a (Hubble-, ill. esemény-) horizontot. Meg fogjuk mutatni, hogy adott k-módusú (k az együtt mozgó koordinátarendszerben a hullámszám) fluktuáció amplitúdója a skálafaktor növekedésével csökken, amíg a fluktuáció $\lambda_{ph} = 2\pi a/k$ fizikai hullámhossza kisebb, mint a Hubble-sugár, azaz amíg a fluktuáció rövidhullámú, amíg – a szokásos szóhasználat szerint – a fluktuáció nem lépi át a (Hubble-)horizontot. A rövidhullámú fluktuációk lehetnek klasszikusak és kvantumfluktuációk. A klasszikus inhomogenitások fizikai hullámhossza keletkezésük idején biztosan kisebb, mint a kauzálisan összefüggő tartományok Hubble-sugárral jellemezhető mérete, így ezek az inhomogenitások a tágulás során lecsengenek, mire elérnék a horizontot. A kvantumfluktuációkkal más a helyzet: minden hullámhosszú kvantumfluktuáció kezdettől fogva jelen van a rendszerben a határozatlansági reláció által meghatározott minimális amplitúdóval, ezért mindig vannak a horizontot ilyen amplitúdóval átlépő kvantumfluktuációk. Megmutatjuk, hogy a horizontot átlépve ezeknek a most már hosszúhullámú fluktuációknak az amplitúdója a felfúvódás alatt lényegében állandó marad, csak nagyon lassan növekszik. A felfúvódás végén aztán a hosszúhullámú perturbációk amplitúdója hirtelen felugrik

egy olyan konstans értékre, amelyet az amplitúdónak és az inflatonmezőnek az az értéke határoz meg, amelyet ezek akkor vettek fel, amikor a fluktuáció átlépte a horizontot. Egyúttal meg fogjuk határozni, hogy a felfúvódás befejeződésekor milyen a fluktuációk erőspektruma. Ki kell hangsúlyozni, hogy a felfúvódó Világegyetem modelljében az erőspektrum következményként adódik. Ebben a felfúvódásos modell meghaladja a korábbi ősrobbanásos kozmológiai modellt, amelyben a kezdeti inhomogenitások erőspektruma szabadon választható kezdeti feltételként szerepelt. Az azonban, hogy mekkora az inhomogenitások amplitúdója a felfúvódás végén, továbbra is szabad paraméter marad, amelyre a CMB-megfigyelések tapasztalataiból kell visszakövetkeztetni.

7.3.2 Rövidhullámú perturbációk

A (7.3.27) és (7.3.37) egyenletek lineárisak, úgyhogy a perturbációk Fourier-módusaira ugyanilyen alakú, független egyenletek állnak fenn. A megoldásokat $\overline{\delta\varphi} = \overline{\varphi}_k e^{i\vec{k}\vec{x}}$ és $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_k e^{i\vec{k}\vec{x}}$ alakban keresve a

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_k'' + 2\mathfrak{H}\overline{\varphi}_k' + k^2\overline{\varphi}_k + a^2 V_{,\varphi\varphi}\overline{\varphi}_k - 4\Phi_k'\varphi_0' + 2a^2\Phi_k V_{,\varphi} &= 0, \\ \Phi_k' + \mathfrak{H}\Phi_k &= 4\pi G\varphi_0'\overline{\varphi}_k \end{aligned} \quad (7.3.38)$$

egyenleteket kapjuk. Legyen a perturbáció rövidhullámú, $\lambda_{ph} \ll H^{-1}$, azaz $k \gg Ha \sim |\eta|^{-1}$. Ekkor élhetünk azzal a munkahipotézissel, hogy a perturbációk Fourier-amplitúdói vezető rendben oszcillálnak, $\overline{\varphi}_k \sim e^{\pm ik\eta}$ és $\Phi_k \sim e^{\pm ik\eta}$. Ekkor a (7.3.38) egyenlet alapján $\Phi_k \sim k^{-1}\varphi_0'\overline{\varphi}_k$, úgyhogy elég nagy k esetén a (7.3.38) egyenlet bal oldalának 6. tagja $1/k$ faktorral el van nyomva. Másrészt a felfúvódás során $V_{,\varphi\varphi} \ll V \sim H^2$, ezért a (7.3.38) egyenlet bal oldalának 4. tagja sokkal kisebb, mint $a^2H^2\overline{\varphi}_k \ll k^2\overline{\varphi}_k$, úgyhogy a 3. tag mellett ez is elhanyagolható. A (7.3.38) egyenlet bal oldalának 5. tagja pedig $\sim \varphi_0'^2\overline{\varphi}_k$ rendű, ahol viszont a φ_0 háttér nagyon lassan változik, úgyhogy jó közelítéssel ez a tag is elhanyagolható. Ezeket figyelembe véve a (7.3.38) egyenlet vezető rendben

$$\overline{\varphi}_k'' + 2\mathfrak{H}\overline{\varphi}_k' + k^2\overline{\varphi}_k \approx 0 \quad (7.3.39)$$

alakot ölt. Keressük a (7.3.39) egyenlet megoldását $\overline{\varphi}_k = u_k/a$ alakban. Ekkor u_k-ra az alábbi egyenletet kapjuk:

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)u_k \approx 0. \quad (7.3.40)$$

Ha $k|\eta| \gg 1$, akkor a 3. tag a (7.3.40) egyenlet bal oldalán elhanyagolható hiszen a felfúvódás során aszimptotikusan nagy η esetén $a \sim e^{H_\Lambda t}$; ekkor $dt = ad\eta$ miatt $\eta \sim \int dt e^{-H_\Lambda t} \sim -H_\Lambda^{-1}e^{-H_\Lambda t}$ és ezért $a''/a \sim 2/\eta^2$. Ha elhanyagoljuk a (7.3.40)

egyenlet bal oldalán a 3. tagot, akkor az egyenlet megoldása

$$\overline{\varphi}_k \approx \frac{C_k}{a} e^{\pm ik\eta} \tag{7.3.41}$$

alakú. Ez viszont azt jelenti, hogy a (7.3.38) egyenletben $\overline{\varphi}_k$ gyorsan oszcillál a $\varphi_0(\eta)$ háttér lassú változásához képest. Élhetünk tehát a $\Phi_k \approx B_k e^{\pm ik\eta}$ feltevéssel, és ekkor vezető rendben azt kapjuk, hogy

$$\pm ik\Phi_k \approx 4\pi G\varphi_0'\overline{\varphi}_k, \tag{7.3.42}$$

vagyis a gravitációs potenciál amplitúdója is periódikusan oszcillál, csak annak amplitúdója $1/k$ faktorral el van nyomva. Ez indokolja, hogy az első egyenletben elhanyagoltuk a megfelelő tagokat.

Az amplitúdók nagyságát a C_k konstans határozza meg, amelynek értéke a kezdeti feltételektől függ. **A kezdeti feltételeket illetően abból az elgondolásból indulunk ki, hogy a felfúvódás kezdetén az inflaton-kondenzátum és az arra ülő zérusponti kvantumfluktuációk vannak jelen.** Ennek szellemében kezdetben az amplitúdók a kvantumfluktuációk lehetséges legkisebb amplitúdóinak, azaz a vákuumfluktuációk amplitúdóinak felelnek meg.

Becsüljük meg, hogy mekkora a skalártér $\delta\varphi_L$ kvantumfluktuációinak az amplitúdója az L fizikai méretskálán. Képzeljünk el ehhez egy véges $V \sim L^3$ térfogatot, amelyben a skalártér L hullámhosszú síkhullámmódusának hatásfunkcionálja $S = \int dt[\dot{X}^2 + \ldots]$ alakú, ahol t a fizikai idő. Itt nyilván X játssza a kanonikus koordináta szerepét, és dimenziójánál fogva $X = L^{3/2}\varphi_L$ (a Világegyetem 3-dimenziós), ahol φ_L dimenziótlan. Ha a skalármező zérus tömegű, azaz a síkhullámok benne vákuumbeli fénysebességgel terjednek, akkor $X \sim \cos((2\pi/L)(x-t))$ és a kanonikus impulzus, $P = \dot{X}$ nagyságrendileg $P \sim X/L$. A $\hbar = 1$ választás esetén a Heisenberg-féle határozatlansági reláció szerint $\delta X\ \delta P \sim (\delta X)^2/L \sim 1$, azaz $\delta X \sim \sqrt{L}$; másrészt esetünkben $\delta X = L^{3/2}\delta\varphi_L \sim \sqrt{L}$, úgyhogy a dimenziótlan fluktuáció $\delta\varphi_L \sim 1/L$ amplitúdójú. Ez azt jelenti, hogy egy tömeg nélküli skalártér kvantumfluktuációjának minimális amplitúdója fordítva arányos a fizikai méretskálával. Figyelembe véve, hogy $\varphi_L \sim (V/a^3)^{-1/2}\sum_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}}$, a $\delta\varphi_L \sim (L/a)^{-3/2}\delta\varphi_{\vec{k}}$ relációt kapjuk, ahol $k \sim a/L$. Ezért $\delta\varphi_L \sim k^{3/2}\delta\varphi_{\vec{k}} \sim 1/L \sim k/a$, úgyhogy

$$\delta\varphi_{\vec{k}} \sim \frac{k^{-1/2}}{a} \tag{7.3.43}$$

adódik. Ez azonos a (7.3.41) klasszikus megoldással, ha a $|C_k| \sim k^{-1/2}$ kezdőfeltételt választjuk. Látjuk tehát, hogy **a rövid ($\lambda_{ph} < H^{-1}$) hullámhosszú fluktuációk spektruma a felfúvódás során változatlanul megmarad ugyanolyannak, mint amilyen spektrum jellemzi a minimális kvantumfluktuációkat.** A rövidhullámú fluktuációk erőspektruma

$$\delta_{\delta\varphi}(k) \sim \sigma_k k^{3/2} \sim |\delta\varphi_k| k^{3/2} \sim \frac{k}{a}. \tag{7.3.44}$$

Ha éppen abban az $\eta \sim k^{-1}$ pillanatban nézzük a k hullámszámnál az erőspektrumot, amikor a megfelelő $2\pi a/k$ hullámhossz éppen eléri a Hubble-horizont H^{-1} skáláját, akkor $Ha \sim k$ és

$$\delta_{\delta\varphi}(k) \quad \sim \quad H_{k\sim Ha}. \tag{7.3.45}$$

Azt szokás mondani, hogy **a k-módusú fluktuáció ekkor lépi át a horizontot.**

Az eredmény fizikai interpretációja az alábbi. A H^{-1} görbületi sugárnál kisebb méretskálán mindig használhatunk lokális inerciarendszert, amelyben a téridő Minkowski-féle. Ha ebből a vonatkoztatási rendszerből nézzük a perturbációkat, akkor bármely $\lambda_{ph} < H^{-1}$ hullámhosszú perturbáció úgy látja, mintha a téridő Minkowski maradna, ezért nem változik az erőspektrum. Ha a fluktuációkat a táguló (együtt mozgó) koordinátarendszerben írjuk le, akkor az adott együtt mozgó k hullámszámú módus hullámhossza a felfúvódás során folytonosan nyúlik, $\lambda_k \sim a/k$. Ha tehát adott, a Planck-hossznál nagyobb fizikai hullámhosszt figyelünk, akkor az ilyen hullámhosszon kezdetben jelenlevő fluktuáció helyét átveszi idővel egy olyan fluktuáció, amelynek kezdetben kisebb volt a hullámhossza, mint a Planck-hossz. Ezért a kiszemelt hullámhosszon mindig jelen lesz ugyanolyan amplitúdójú fluktuáció. Ez mégsem jelenti azt, hogy szükségünk lenne kvantumgravitációs elméletre, hiszen az adott hullámhosszon jelenlevő fluktuáció ugyanolyan, mint a lokális inerciarendszerben öröktől fogva jelenlevő ilyen fluktuáció. Az, hogy az együtt mozgó koordinátarendszerből úgy látjuk, mintha ez a fluktuáció a Planck-hossznál kisebb hullámhosszú perturbáció hullámhosszának a felfúvódás miatti megnyúlásával jönne létre, csak a választott koordinátarendszernek tudható be.

Korábban (ld. a (4.2.7) egyenletet és az utána következő érvelést) beláttuk, hogy a felfúvódás során az energiasűrűség kezdeti klasszikus perturbációi elenyésznek, mert a fizikai hullámhosszuk gyorsabban nő, mint a Hubble-sugár, miközben az energiasűrűség együtt mozgó koordináták szerinti gradiense nagyságrendileg nem változik. Mostani eredményünk szerint a kvantumfluktuációk a felfúvódás során nem enyésznek el, hanem változatlan erőspektrummal fennmaradnak, mert ha egy fluktuáció eltolódik a nagyobb fizikai hullámhosszak irányába, akkor a Heisenberg-féle határozatlansági relációnak köszönhetően lesz mindig olyan rövidebb hullámhosszú fluktuáció, amelyik megjelenik az eltolódott fluktuáció eredeti hullámhosszán. **A fluktációkat úgy szokás emlegetni, mint a Világegyetem „haját". Azt szokás mondani, hogy a felfúvódás „lenyírja a Világegyetem klasszikus haját" („the inflation removes the classical hairs"), „de nem tudja lenyírni a Világegyetem kvantumhaját."**

A felfúvódás során $Ha = \dot{a}$ nő és az adott k-módusú perturbáció „átlépi a horizontot" (a hullámhossza nagyobb lesz, mint H^{-1}). Ezután az a kérdés, hogy a horizonton túli méretskálán („on the superhorizon scale") a perturbáció amplitúdója elég nagy marad-e ahhoz, hogy idővel kifejlődjön belőle a Világegyetem mai szerkezete.

7.3.3 Hosszúhullámú perturbációk

A hosszúhullámú perturbációk fejlődését is a felfúvódás lassú gördüléses közelítésében vizsgáljuk. Ehhez a

$$d\eta = dt/a, \qquad X' = a\dot{X}, \qquad X'' = a\dot{a}\dot{X} + a^2\ddot{X} \tag{7.3.46}$$

transzformáció segítségével áttérünk először a t fizikai időre (a homogén és izotróp felfúvódó Világegyetemmel együtt mozgó izotróp megfigyelők sajátidejére) a (7.3.27) és a (7.3.37) egyenletekben:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} - a^{-2}\Delta\delta\varphi + V_{,\varphi\varphi}\delta\varphi - 4\dot{\Phi}\dot{\varphi}_0 + 2\Phi V_{,\varphi}(\varphi_0) &= 0, & (7.3.47)\\ \dot{\Phi} + H\Phi &= 4\pi G\dot{\varphi}_0\delta\varphi. & (7.3.48) \end{aligned}$$

A lassú gördüléses közelítés abban áll, hogy a háttérre vonatkozó klasszikus téregyenletben elhanyagoltuk a „súrlódási tag” mellett a tér $\ddot{\varphi}_0$ második deriváltját. Így a háttérre korábban a

$$3H\dot{\varphi}_0 + V_{,\varphi}(\varphi_0) \approx 0 \tag{7.3.49}$$

egyenletet kaptuk. Most elhanyagoljuk a $\ddot{\delta\varphi}$-t és a $\dot{\Phi}$-t tartalmazó tagokat, valamint a hosszúhullámokra szorítkozva a $\Delta\delta\varphi$ tagot. Így nem csillapodó hosszúhullámú inhomogenitásokat leíró egyenleteket kapunk:

$$\begin{aligned} 3H\dot{\delta\varphi} + V_{,\varphi\varphi}\delta\varphi + 2\Phi V_{,\varphi}(\varphi_0) &\approx 0, & (7.3.50)\\ H\Phi &\approx 4\pi G\dot{\varphi}_0\delta\varphi. & (7.3.51) \end{aligned}$$

Osszuk el a (7.3.50) egyenletet $V_{,\varphi}$-vel,

$$3H\frac{\dot{\delta\varphi}}{V_{,\varphi}} + \frac{V_{,\varphi\varphi}\delta\varphi}{V_{,\varphi}} + 2\Phi \approx 0, \tag{7.3.52}$$

majd vezessük be az

$$y = \frac{\delta\varphi}{V_{,\varphi}(\varphi_0)} \tag{7.3.53}$$

új változót. Ekkor

$$\dot{y} = \frac{\dot{\delta\varphi}}{V_{,\varphi}(\varphi_0)} - \frac{V_{,\varphi\varphi}\dot{\varphi}_0\delta\varphi}{[V_{,\varphi}(\varphi_0)]^2}, \tag{7.3.54}$$

ahonnan

$$\frac{\dot{\delta\varphi}}{V_{,\varphi}(\varphi_0)} = \dot{y} + \frac{V_{,\varphi\varphi}\dot{\varphi}_0\delta\varphi}{[V_{,\varphi}(\varphi_0)]^2}, \tag{7.3.55}$$

amelynek segítségével a (7.3.50) egyenlet

$$3H\left[\dot{y}+\frac{V_{,\varphi\varphi}\dot{\varphi}_0\delta\varphi}{[V_{,\varphi}(\varphi_0)]^2}\right]+\frac{V_{,\varphi\varphi}\delta\varphi}{V_{,\varphi}}+2\Phi \;=\; 0 \tag{7.3.56}$$

alakot ölt. Másrészt a (7.3.49) egyenletből $V_{,\varphi} \approx -3H\dot{\varphi}_0$ adódik, amit behelyettesítve a (7.3.56) egyenletbe azt kapjuk, hogy a $\delta\varphi$-vel arányos tagok kiejtik egymást

$$3H\dot{y}+2\Phi \;=\; 0. \tag{7.3.57}$$

A (7.3.51) egyenletbe bevezetve az új y változót, az adódik, hogy

$$H\Phi \;\approx\; 4\pi G V_{,\varphi}(\varphi_0)\dot{\varphi}_0 y = 4\pi G\dot{V}y. \tag{7.3.58}$$

Szorozzuk a (7.3.57) egyenletet H-val, fejezzük ki belőle $2H\Phi$-t és tegyük egyenlővé a (7.3.58) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés 2-szeresével:

$$2H\Phi \;\approx\; -3H^2\dot{y} = 8\pi G\dot{V}y. \tag{7.3.59}$$

Lassú gördülés esetén $\dot{\varphi}^2 \ll |V|$, úgyhogy $3H^2 \approx 8\pi G V(\varphi_0)$. Használjuk ezt fel és írjuk, hogy

$$8\pi G V(\varphi_0)\dot{y} \;\approx\; 8\pi G\dot{V}y, \tag{7.3.60}$$

ahonnan rendezés után kapjuk, hogy

$$0 \;\approx\; 8\pi G(V\dot{y}+\dot{V}y), \tag{7.3.61}$$

azaz

$$\frac{d(yV)}{dt} \;\approx\; 0. \tag{7.3.62}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása

$$y \;\approx\; \frac{A}{V(\varphi_0)}, \tag{7.3.63}$$

ahol $A =$áll. A nem csillapodó k-módus tehát

$$\delta\varphi_k \;\approx\; A_k\left.\frac{V_{,\varphi}}{V}\right|_{\varphi_0}, \tag{7.3.64}$$

$$\Phi_k \;\approx\; A_k\frac{4\pi G\dot{\varphi}_0}{H}\left.\frac{V_{,\varphi}}{V}\right|_{\varphi_0}. \tag{7.3.65}$$

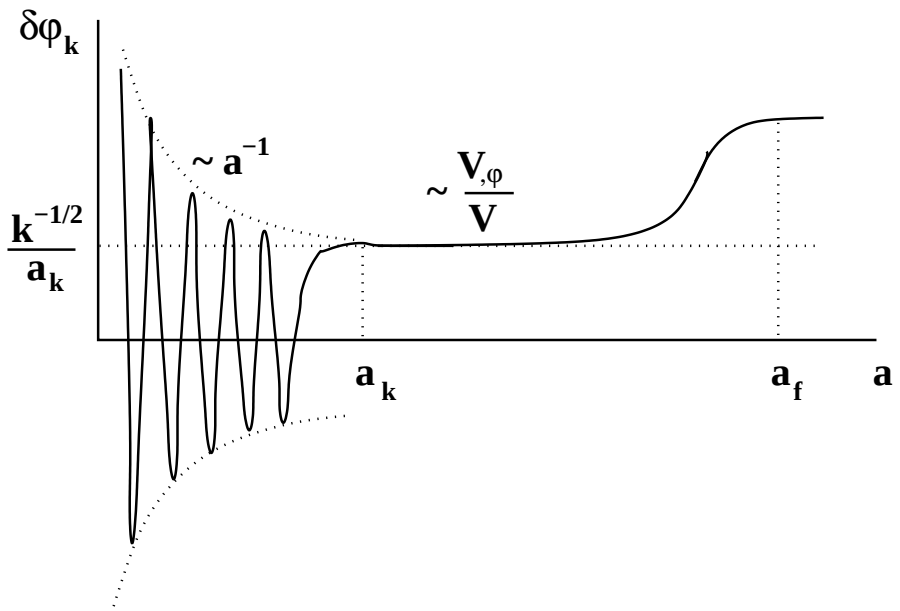

Figure 14: Az inflatonmező k-módusa amplitúdójának változása a növekvő a skálafaktor függvényében.

A felfúvódás során $\dot{\varphi}_0 \sim V_{,\varphi}/H$, úgyhogy $\dot{\varphi}_0/H \sim -V_{,\varphi}/3H^2 \sim -V_{,\varphi}/8\pi GV$ és ezért

$$\Phi_k \approx -\frac{1}{2}A_k\Big(\frac{V_{,\varphi}}{V}\Big)^2\Big|_{\varphi_0}. \tag{7.3.66}$$

Az inflatonmező k-módusa amplitúdójának viselkedését a növekvő fizikai idő, pontosabban a növekvő a skálafaktor függvényében a 14. ábra mutatja.

Amíg a k-módus rövidhullámú fluktuáció, addig oszcillál és amplitúdója $1/a$-val arányosan csökken. Amikor a hullámhossz az $a_k \sim k/H$ skálafaktornál eléri a görbületi sugár értékét, azaz az inhomogenitás átlépi a horizontot, akkor az inhomogenitás amplitúdója a $k^{-1/2}/a_k$ értékről $\sim V_{,\varphi}/V$-val arányosan nagyon lassan növekedni kezd. Ez a növekedés addig tart, amíg a lassú gördüléses felfúvódás feltételei teljesülnek. A felfúvódás végén ($a \sim a_f$) ezek a feltételek már nem állnak fenn és $V_{,\varphi}/V$ és vele együtt a fluktuáció amplitúdója is ugrásszerűen megnő, $V_{,\varphi}/V \sim \mathcal{O}(1)$ értékű lesz. Hatványfüggvény alakú $V \sim \varphi^n$ potenciál esetén a növekedés $\delta\varphi_k \sim 1/\varphi_0$ szerinti, φ_0 csökkenése miatt. Az A_k integrációs állandót az határozza meg, hogy a horizonton történő áthaladás pillanatában (amikor $a \approx a_k \sim k/H$) az amplitúdó egyezzen meg a k-módusú minimális amplitúdójú kvantumfluktuációkával:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_k &\sim \frac{k^{-1/2}}{a_k} \sim A_k\Big(\frac{V_{,\varphi}(\varphi_0)}{V(\varphi_0)}\Big)_{a=a_k\sim k/H}, \\ A_k &\sim \frac{k^{-1/2}}{a_k}\Big(\frac{V(\varphi_0)}{V_{,\varphi}(\varphi_0)}\Big)_{a=a_k\sim k/H}. \end{aligned} \tag{7.3.67}$$

A horizonton túli skálán (amikor $a > a_k \sim k/H$) $\Phi_k \sim A_k$ nagyságrendű lesz és a metrika skalárfluktuációjának erőspektruma

$$\delta_\Phi(k) \approx A_k k^{3/2} \sim \frac{k}{a_k}\Big(\frac{V(\varphi_0)}{V_{,\varphi}(\varphi_0)}\Big)_{k\sim Ha} \sim \Big(H\frac{V(\varphi_0)}{V_{,\varphi}(\varphi_0)}\Big)_{k\sim Ha} \sim m_{Pl}^{-1}\Big(\frac{V^{3/2}(\varphi_0)}{V_{,\varphi}(\varphi_0)}\Big)_{k\sim Ha}, \tag{7.3.68}$$

ahol felhasználtuk, hogy a lassú gördülés feltételei mellett $H \sim m_{Pl}^{-1}\sqrt{V}$. Tegyük fel, hogy a potenciál $V = (1/n)\lambda\varphi^n$, ekkor

$$V^{3/2}(\varphi_0)/V_{,\varphi}(\varphi_0) \sim \lambda^{1/2}(\varphi_0^2)^{\frac{n+2}{4}}. \tag{7.3.69}$$

Használjuk most fel a skálafaktor

$$a(t) = a_i \exp\Big(\frac{4\pi}{nm_{Pl}^2}[\varphi_{0i}^2 - \varphi_0^2(t)]\Big) \sim \exp\Big(-(4\pi/n)m_{Pl}^{-2}\varphi_0^2(t)\Big) \tag{7.3.70}$$

változását, amelyből

$$\varphi_0^2(t) = \varphi_{0i}^2 - \frac{nm_{Pl}^2}{4\pi}\ln(a/a_i) \tag{7.3.71}$$

ill.

$$\varphi_0^2(t) = \varphi_{0f}^2 + \frac{nm_{Pl}^2}{4\pi}\ln(a_f/a) \sim \frac{nm_{Pl}^2}{4\pi}\ln(a_f/a) \tag{7.3.72}$$

ha felhasználjuk, hogy az infláció végére φ_0 lecsökken $\mathcal{O}(m_{Pl})$ értékre, míg a_f/a óriási szám és a logaritmusa $\ln(a_f/a) \gg 1$. Innen azt kapjuk, hogy amikor a k-módus átlépi a horizontot, azaz $k \sim Ha$ teljesül valamilyen a_k és H_k mellett, akkor

$$\begin{aligned}\delta_\Phi(k) &\sim m_{Pl}^{-1}\lambda^{1/2}(\varphi_0^2)^{\frac{n+2}{4}}\Big|_{k\sim Ha} \sim m_{Pl}^{-1}\lambda^{1/2}(\ln(a_f/a_k))^{\frac{n+2}{4}} \\ &\sim m_{Pl}^{-1}\lambda^{1/2}\Big(\ln\frac{a_f H_k}{k}\Big)^{\frac{n+2}{4}} \sim m_{Pl}^{-1}\lambda^{1/2}\Big(\ln(\lambda_{ph}H_k)\Big)^{\frac{n+2}{4}},\end{aligned} \tag{7.3.73}$$

ahol $\lambda_{ph} \sim a_f/k$ a k-módus fizikai hullámhossza az infláció végén.

A metrika skalárfluktuációinak spektrumára vonatkozó

$$\delta_\Phi(k) \sim m_{Pl}^{-1}\lambda^{1/2}\Big(\ln(\lambda_{ph}H_k)\Big)^{\frac{n+2}{4}} \tag{7.3.74}$$

becslés meglehetősen általános és független attól, hogy milyen részecskefizikai elmélet (ill. kvantumtérelmélet) törvényei működnek a felfúvódás hátterében. A spektrum tehát lassan, logaritmikusan nő a nagyobb hullámhosszak felé haladva. Amíg a metrika fluktuációinak spektrumára vonatkozó becslésünk nagyon szilárd alapokon

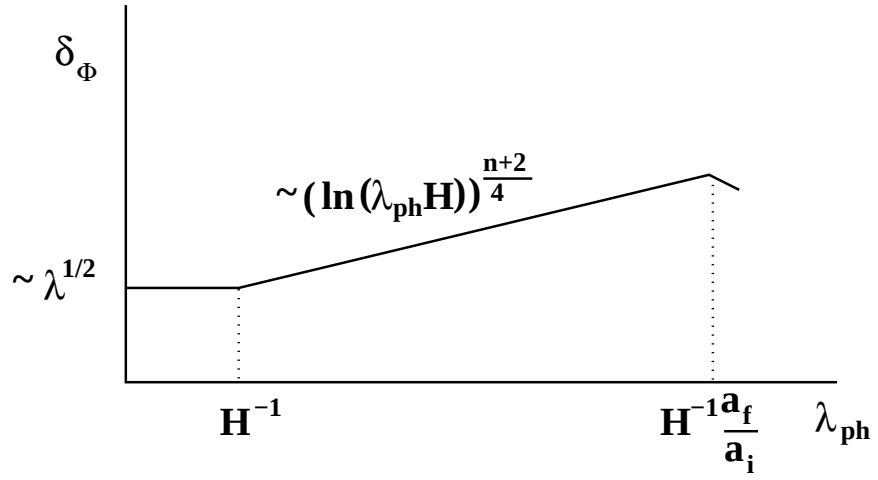

Figure 15: A gravitációs mező fluktuációinak $\delta_\Phi(k)$ erőspektruma a $\lambda_{ph} \sim a/k$ fizikai hullámhossz függvényében ($m_{Pl} = 1$ egységekben).

áll **(„robust”),** addig a fluktuációk amplitúdóját nem tudjuk pontosan megmondani a részecskefizikai elmélet hiányában. Ez szabad paraméter a felfúvódás modelljében, amelynek értékére a tapasztalatok alapján lehet visszakövetkeztetni. Tömeges, nem önkölcsönható inflatonmező esetén $V = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$ és a metrika skalárfluktuációinak spektruma

$$\delta_\Phi(k) \quad \sim \quad (m/m_{Pl})\ln(\lambda_{ph}H_k). \tag{7.3.75}$$

(Felfúvódás során a skálafaktor növekedésének nagyságrendje $a_f/a_i \approx e^{H_i t_f} > 10^{33}$, azaz $H_i t_f > 75$.) Galaktikus skálán $\ln(\lambda_{ph}H_k) \sim 50$ [1], és a CMB tapasztalatai alapján a gravitációs potenciál fluktuációinak amplitúdóiról tudjuk, hogy $\sim \mathcal{O}(1) \cdot 10^{-5}$ nagyságrendűek. Így az inflatonmező tömegére az $m \sim 10^{-6}m_{Pl} \sim 10^{13}$ GeV becslést kapjuk. A felfúvódás végére $\varphi_0 \sim m_{Pl}$ értékre csökken, úgyhogy az energiasűrűség ekkor kb. $\epsilon \sim m^2 m_{Pl}^2 \sim 10^{-12}\epsilon_{pl}$, ahol $\epsilon_{Pl} = m_{Pl}^4$.

7.3.4 A felfúvódás szerepe

Joggal **feltehetjük a kérdést, hogy vajon a vákuumfluktuációk felnőhettek volna akkor is olyan nagyokká a rekombináció idejére, amekkorának a CMB-megfigyelések mondják őket, ha nem lett volna felfúvódás, azaz ha a Világegyetem mindvégig lassulva tágult volna. A válasz az, hogy nem.** A lényeg az, hogy lassuló, ill. gyorsuló tágulás esetén a $H^{-1} = a/\dot{a}$ Hubble-sugár rendre gyorsabban, ill. lassabban nő, mint az a skálafaktor. Adott k-módusú fluktuációnak a fizikai hullámhossza viszont az a skálafaktorral arányosan nő, azaz lassulva táguló Világegyetemben lassabban, gyorsulva táguló Világegyetemben gyorsabban nő, mint a Hubble-sugár. Ezért a lassulva táguló Világegyetemben a kvantumfluktuációk okozta inhomogenitások sohasem fogják átlépni a horizontot, azaz

fizikai hullámhosszuk mindig kisebb marad, mint a Hubble-sugár, és végül, mint rövidhullámú fluktuációk, el fognak enyészni. Ezt szemlélteti a 16. ábra. A kvan-

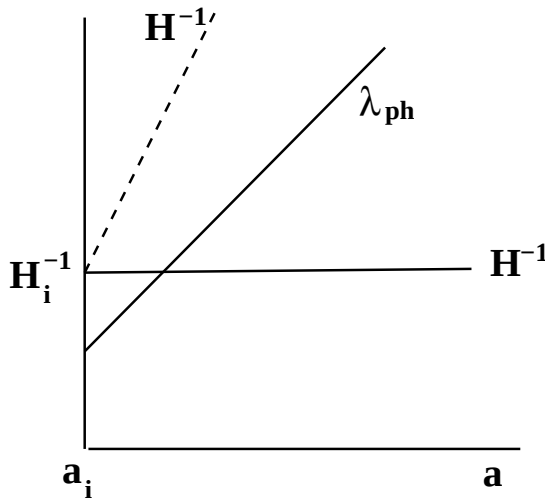

Figure 16: Adott k-módusú fluktuáció fizikai hullámhosszának és a Hubble-sugárnak a változása az a skálafaktor függvényében lassulva táguló (szaggatott vonal) és gyorsulva táguló (folytonos vonal) Világegyetemben.

tumfluktuációk Gauss-eloszlásúak. A felfúvódás nem növeli meg, hanem lényegében változatlanul hagyja a fluktuációk amplitúdójának nagyságrendjét. Ezért a fenti lineáris közlítés alkalmazható a teljes felfúvódási szakaszban. Akkor viszont a különböző k-módusú fluktuációkra vonatkozó egyenletek szétcsatolódnak, azaz az egyes módusok függetlenek maradnak. Ezért a fluktuációk továbbra is Gauss-eloszlásúak maradnak. A felfúvódás csak az erőspektrumukat változtatja meg, az eloszlásukat nem.

7.4 A kozmológiai perturbációk kvantumelmélete

7.4.1 A kvantumtérelméleti modell

Ebben a fejezetben a kozmológiai perturbációkat a kvantumelmélet alapján tárgyaljuk. Feltesszük, hogy az inflatonmező egy Born-Infeld-féle, magasabb deriváltakat tartalmazó hatás által definiált skalártér. Ennek a kondenzátuma vezérli a felfúvódást. A klasszikus hatás

$$S = \int p(X,\varphi)\sqrt{-g}d^4x, \tag{7.4.1}$$

ahol

$$X = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} \tag{7.4.2}$$

és a $p(X,\varphi)$ Lagrange-sűrűség egy olyan ideális hidrodinamikai folyadék nyomásának tekinthető, amelynek energiaimpulzus-tenzora

$$T^\alpha_\beta = (\epsilon + p)u^\alpha u_\beta - p\delta^\alpha_\beta, \tag{7.4.3}$$

négyessebessége

$$u_\alpha = \frac{\varphi_{,\alpha}}{\sqrt{2X}} \tag{7.4.4}$$

és energiasűrűsége

$$\epsilon = 2Xp_{,X} - p, \tag{7.4.5}$$

ahol $p_{,X} = \partial p/\partial X$.

Ez az elméleti keret a felfúvódási modellek egy széles osztályát képviseli. Egyúttal rámutat a hidrodinamikai potenciáláramlás és a klasszikus skalármező közti analógiára. Ebben a keretben minden olyan felfúvódási modell benne foglaltatik, amelyben a felfúvódást egyetlen skalármező kondenzátumának időbeli változása okozza.

- Ha $p = p(X)$ csak X-től függ **(k-infláció),** akkor az energiasűrűség $\epsilon = \epsilon(X)$ is csak X függvénye, és sok esetben ez a függés olyan, hogy a (7.4.5) egyenlet átalakítható $p = p(\epsilon)$ alakú állapotegyenletté. Ha pl. $p \sim X^n$, akkor $\epsilon = (2n-1)p$, így pl. $p \sim X^2$ esetén $p = \epsilon/3$, ami az ultrarelativisztikus ideális folyadék állapotegyenlete.

- Ha p a φ skalármezőtől is függ, akkor X és φ, mint független változók szerepelnek p-ben, és az ϵ energiasűrűséget nem tudjuk csak p-vel kifejezni. A hidrodinamikai analógia azonban ekkor is megvan. Pl. magasabb deriváltakat nem tartalmazó, $V(\varphi)$ potenciállal jellemzett skalártér esetén $p = X - V(\varphi)$ és $\epsilon = X + V(\varphi)$.

7.4.2 A Friedmann-féle háttér és a lineáris perturbációk egyenletei

Az első lépés az, hogy levezetjük a fluktuációkra vonatkozó egyenleteket. A háttér a homogén és izotróp, táguló Világegyetem, amelyet teljes egészében jellemez az $a(\eta)$ skálafaktor és a $\varphi_0(\eta)$ skalárkondenzátum változása az η konform idő függvényében. Használjuk fel a (7.3.46) transzformációs képleteket. Sík térgeometriájú ($k = 0$) téridőben a (2.3.13) Friedmann-egyenlet

$$\mathfrak{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}a^2\epsilon_0 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2}a^2\epsilon_0 \tag{7.4.6}$$

és a lokális energiamegmaradást kifejező (2.3.20) egyenlet (az energiaimpulzus-tenzorra vonatkozó konzisztencia-egyenlet)

$$\epsilon_0' \equiv \epsilon_{,X_0} X_0' + \epsilon_{,\varphi_0}\varphi_0' \quad = \quad -3\mathfrak{H}(\epsilon_0 + p_0) \tag{7.4.7}$$

alakot ölt, ahol $X_0 = \frac{(\varphi_0')^2}{2a^2}$, $\epsilon_0 = \epsilon(X_0, \varphi_0) = X_0 + p_0$ és $p_0 = p(X_0, \varphi_0)$. További hasznos összefüggést kapunk, ha a (7.4.6) egyenletből kifejezzük ϵ_0-t és behelyettesítjük a (7.4.7) egyenlet bal oldalába:

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 &= \frac{3}{8\pi G a^2}\mathfrak{H}^2, \\
\epsilon_0' &= \frac{3}{8\pi G}(-2a^{-3})a'\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{3}{8\pi G a^2}2\mathfrak{H}\mathfrak{H}' = -3\mathfrak{H}(\epsilon + p),
\end{aligned} \tag{7.4.8}$$

ahonnan

$$\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}^2 \quad = \quad -4\pi G a^2(\epsilon_0 + p_0) = -4\pi m_{Pl}^{-2}(\epsilon_0 + p_0). \tag{7.4.9}$$

Írjuk fel ezek után a skalárperturbációkra vonatkozó egyenleteket.

A legegyszerűbb, ha megint longitudinális mértéket használunk, amikor – mint azt korábban láttuk – az invariáns ívelemnégyzet alakja:

$$ds^2 \quad = \quad a^2(\eta)\Big[(1+2\Phi)d\eta^2 - (1-2\Psi)\delta_{jk}dx^j dx^k\Big]. \tag{7.4.10}$$

Ha a hidrodinamikai analógia alapján dolgozunk, akkor a (6.3.2) egyenletekből kiolvashatjuk az energiaimpulzus-tenzor skalárperturbációját:

$$\begin{aligned}
\delta T_0^0 &= \delta\epsilon, \\
\delta T_i^0 &= (\epsilon_0 + p_0)\,{}^0u^0\,\delta u_i, \\
\delta T_j^i &= -\delta_j^i \delta p,
\end{aligned} \tag{7.4.11}$$

ahol felhasználtuk, hogy $a^{-1}\delta u_0 + a\delta u^0 = a^{-1}\delta u_0 + a^0 g^{00}\delta u_0 = a^{-1}\delta u_0 - a^{-1}\delta u_0 = 0$, továbbá, hogy a perturbálatlan 3-assebesség az együtt mozgó rendszerben zérus. Írjuk a skalármezőt $\varphi = \varphi_0(\eta) + \delta\varphi$ alakba, ekkor

$$\begin{aligned}
{}^0u_0 &= \frac{\varphi_0'}{\sqrt{2X_0}}, \\
u_i &= \delta u_i = \frac{\delta\varphi_{,i}}{\sqrt{2X_0}},
\end{aligned} \tag{7.4.12}$$

továbbá lineáris közelítésben

$$\delta\epsilon \quad = \quad \epsilon_{,X}\delta X + \epsilon_{,\varphi}\delta\varphi, \tag{7.4.13}$$

ahol

$$\begin{aligned}
\delta X &= \frac{1}{2}\delta g^{00}(\varphi_0')^2 + {}^0g^{00}\varphi_0'\delta\varphi' \\
&= -\frac{1}{2}({}^0g^{00})^2\delta g_{00}(\varphi_0')^2 + {}^0g^{00}\varphi_0'\delta\varphi' \\
&= -\frac{1}{2}{}^0g^{00}a^{-2}a^2 2\Phi(\varphi_0')^2 + {}^0g^{00}\varphi_0'\delta\varphi' \\
&= 2X_0\left(-\Phi + \frac{\delta\varphi'}{\varphi_0'}\right),
\end{aligned} \tag{7.4.14}$$

mivel $\delta g^{\alpha\beta} = -{}^0g^{\alpha\gamma}\delta g_{\gamma\delta}{}^0g^{\delta\beta}$. Másrészt ϵ' (7.4.7) kifejezéséből

$$\epsilon_{,\varphi} = -\epsilon_{,X}\frac{X_0'}{\varphi_0'} - \frac{3\mathfrak{H}(\epsilon_0+p_0)}{\varphi_0'}. \tag{7.4.15}$$

Ezeket felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\delta\epsilon &= \epsilon_{,X}\delta X + \epsilon_{,\varphi}\delta\varphi \\ &= \epsilon_{,X}\delta X + \left(-\epsilon_{,X}X_0' - 3\mathfrak{H}(\epsilon_0+p_0)\right)\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'} \\ &= \epsilon_{,X}\left(\delta X - X_0'\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'}\right) - 3\mathfrak{H}(\epsilon_0+p_0)\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'}.\end{aligned} \tag{7.4.16}$$

Vezessük be a hidrodinamikai analógia szerinti c_s hangsebességet, ami valójában a skalármezőben a hullámterjedés sebessége (kanonikus skalármező esetén ez a vákuumbeli fénysebesség, $c_s = 1$):

$$c_s^2 = \frac{p_{,X}}{\epsilon_{,X}} = \frac{\epsilon_0+p_0}{2X_0\epsilon_{,X}}, \tag{7.4.17}$$

ahol felhasználtuk a (7.4.5) összefüggést. Ekkor azt találjuk, hogy

$$\begin{aligned}\delta T_0^0 &= \delta\epsilon = \frac{\epsilon_0+p_0}{c_s^2}\left(\frac{\delta X}{2X_0} - \frac{X_0'}{2X_0}\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'}\right) - 3\mathfrak{H}(\epsilon_0+p_0)\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'} \\ &= \frac{\epsilon_0+p_0}{c_s^2}\left(-\Phi + \frac{\delta\varphi'}{\varphi_0'} - \frac{X_0'}{2X_0}\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'}\right) - 3\mathfrak{H}(\epsilon_0+p_0)\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'}.\end{aligned} \tag{7.4.18}$$

Itt $X_0 = \frac{1}{2a^2}(\varphi_0')^2$ és

$$\begin{aligned}X_0' &= \frac{1}{2a^2}2\varphi_0'\varphi_0'' - \frac{1}{a^3}a'\varphi_0', \\ \frac{X_0'}{2X_0} &= \frac{\varphi_0''}{\varphi_0'} - \mathfrak{H}, \\ -\frac{X_0'}{2X_0}\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'} &= \left(\mathfrak{H} - \frac{\varphi_0''}{\varphi_0'}\right)\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'};\end{aligned} \tag{7.4.19}$$

továbbá

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'}\right)' = \frac{\delta\varphi'}{\varphi_0'} - \frac{\varphi_0''\delta\varphi}{(\varphi_0')^2}, \tag{7.4.20}$$

úgyhogy végül

$$\begin{aligned}-\Phi + \frac{\delta\varphi'}{\varphi_0'} - \frac{X_0'}{2X_0}\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'} &= -\Phi + \left(\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'}\right)' + \frac{\varphi_0''\delta\varphi}{(\varphi_0')^2} + \left(\mathfrak{H} - \frac{\varphi_0''}{\varphi_0'}\right)\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'} \\ &= \left(\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'}\right)' + \mathfrak{H}\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'} - \Phi,\end{aligned} \tag{7.4.21}$$

amit felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\delta T_0^0 = \frac{\epsilon_0+p_0}{c_s^2}\left[\left(\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'}\right)' + \mathfrak{H}\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'} - \Phi\right] - 3\mathfrak{H}(\epsilon_0+p_0)\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'}. \tag{7.4.22}$$

Nézzük most az energiaimpulzus-tenzor másik, független komponensét:

$$\begin{aligned}\delta T_i^0 &= (\epsilon_0+p_0)\,{}^0g^{00}\,{}^0u_0\delta u_i = (\epsilon_0+p_0)\,{}^0g^{00}\frac{\varphi_0'}{\sqrt{2X_0}}\frac{\delta\varphi_{,i}}{\sqrt{2X_0}} = (\epsilon_0+p_0)\frac{{}^0g^{00}}{{}^0g^{00}(\varphi_0')^2}\varphi_0'\delta\varphi_{,i}\\ &= (\epsilon_0+p_0)\left(\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'}\right)_{,i}. \qquad (7.4.23)\end{aligned}$$

Vegyük továbbá észre, hogy δT_j^i nem diagonális komponensei nullák, ami a longitudinális mértékben azt jelenti, hogy a metrika skalárperturbációja a $\Psi = \Phi$ egyetlen mértékinvariáns paraméterrel jellemezhető.

Longitudinális mértékben annyi a dolgunk, hogy $\delta\varphi$-t azonosítjuk a mértékinvariáns $\overline{\delta\varphi}$ perturbációval, majd az energiaimpulzus-tenzor így kapott mértékinvariáns komponenseit behelyettesítjük a (6.2.54) egyenletekbe. Ekkor (az első kettőből) az alábbi egyenletek adódnak a Φ és $\overline{\delta\varphi}$ ismeretlen perturbációkra:

$$\Delta\Phi - 3\mathfrak{H}(\Phi' + \mathfrak{H}\Phi) = 4\pi m_{Pl}^{-2}a^2(\epsilon_0+p_0)\left\{\frac{1}{c_s^2}\left[\left(\frac{\overline{\delta\varphi}}{\varphi_0'}\right)' + \mathfrak{H}\frac{\overline{\delta\varphi}}{\varphi_0'} - \Phi\right] - 3\mathfrak{H}\frac{\overline{\delta\varphi}}{\varphi_0'}\right\}, \qquad (7.4.24)$$

$$(\Phi' + \mathfrak{H}\Phi)_{,i} = 4\pi m_{Pl}^{-2}a^2(\epsilon_0+p_0)\left(\frac{\overline{\delta\varphi}}{\varphi_0'}\right)_{,i}, \qquad (7.4.25)$$

de –perturbációkról lévén szó – a második egyenlet azonnal átírható az alábbi alakba:

$$\Phi' + \mathfrak{H}\Phi = 4\pi m_{Pl}^{-2}a^2(\epsilon_0+p_0)\frac{\overline{\delta\varphi}}{\varphi_0'}. \qquad (7.4.26)$$

A továbbiak céljából érdemes ezeket az egyenleteket még tovább alakítani. Helyettesítsük be $\Phi' + \mathfrak{H}\Phi$ kifejezését a (7.4.26) egyenletből a (7.4.24) egyenlet bal oldalába, ekkor

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi m_{Pl}^{-2}a^2(\epsilon_0+p_0)}{c_s^2\mathfrak{H}}\Big(\mathfrak{H}\delta' + \mathfrak{H}^2\delta - \mathfrak{H}\Phi\Big) \qquad (7.4.27)$$

adódik, ahol $\delta = \overline{\delta\varphi}/\varphi_0'$. Helyettesítsük itt a jobboldali kerekzárójeles kifejezésben $\mathfrak{H}\Phi$ helyére a (7.4.26) egyenletből kapott $4\pi m_{Pl}^{-2}a^2(\epsilon_0+p_0)\delta - \Phi'$ kifejezést, majd használjuk fel a háttér Hubble-paraméterére vonatkozó (7.4.9) egyenletet, amelynek segítségével a jobboldali kerekzárójeles kifejezés

$$\mathfrak{H}\delta' + \mathfrak{H}^2\delta + \mathfrak{H}'\delta = (\mathfrak{H}\delta + \Phi)'. \qquad (7.4.28)$$

Így a metrika mértékinvariáns skalárperturbációjára a

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi a^2(\epsilon_0+p_0)}{m_{Pl}^2c_s^2\mathfrak{H}}\left(\mathfrak{H}\frac{\overline{\delta\varphi}}{\varphi_0'} + \Phi\right)' \qquad (7.4.29)$$

egyenletet nyerjük.

A (7.4.26) egyenletet a következőképpen alakítjuk át. Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát $\mathfrak{H}$-val,

$$\mathfrak{H}(\Phi' + \mathfrak{H}\Phi) = 4\pi m_{Pl}^{-2} a^2(\epsilon + p)\mathfrak{H}\delta, \tag{7.4.30}$$

majd adjuk hozzá mindkét oldalhoz a $4\pi m_{Pl}^{-2} a^2(\epsilon_0 + p_0)\Phi$ tagot, és a bal oldalon használjuk fel a (7.4.9) összefüggést,

$$\mathfrak{H}(\Phi' + \mathfrak{H}\Phi) + (\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}')\Phi = 4\pi m_{Pl}^{-2} a^2(\epsilon + p)(\mathfrak{H}\delta + \Phi). \tag{7.4.31}$$

Az így kapott egyenlet mindkét oldalát szorozzuk $a^2/\mathfrak{H}^2$-tel:

$$a^2\left(\frac{\Phi'}{\mathfrak{H}} + 2\Phi - \frac{\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}^2}\Phi\right) = \frac{4\pi m_{Pl}^{-2} a^4(\epsilon + p)}{\mathfrak{H}^2}(\mathfrak{H}\delta + \Phi). \tag{7.4.32}$$

Vegyük ezután észre, hogy

$$\left(\frac{a^2\Phi}{\mathfrak{H}}\right)' = \frac{2aa'\Phi}{\mathfrak{H}} + \frac{a^2\Phi'}{\mathfrak{H}} - \frac{a^2\Phi\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}^2} = 2a^2\Phi + \frac{a^2\Phi'}{\mathfrak{H}} - \frac{a^2\Phi\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}^2} \tag{7.4.33}$$

pontosan megegyezik az egyenlet bal oldalán álló kifejezéssel.

Végül tehát a (7.4.26) egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\left(\frac{a^2\Phi}{\mathfrak{H}}\right)' = \frac{4\pi a^4(\epsilon_0 + p_0)}{m_{Pl}^2\mathfrak{H}^2}\left(\mathfrak{H}\frac{\overline{\delta\varphi}}{\varphi_0'} + \Phi\right). \tag{7.4.34}$$

Végül a (7.4.29) és (7.4.34) egyenleteket átírjuk az

$$\begin{aligned} u &\equiv \frac{m_{Pl}^{1/2}\Phi}{4\pi(\epsilon_0 + p_0)^{1/2}}, \\ v &\equiv m_{Pl}^{-3/2} a\sqrt{\epsilon_{,X}}\left(\overline{\delta\varphi} + \frac{\varphi_0'}{\mathfrak{H}}\Phi\right) \end{aligned} \tag{7.4.35}$$

új változókra vonatkozó egyenletekké:

$$c_s\Delta u = z\left(\frac{v}{z}\right)', \tag{7.4.36}$$

$$c_s v = \theta\left(\frac{u}{\theta}\right)', \tag{7.4.37}$$

ahol

$$z = \frac{a^2(\epsilon_0 + p_0)^{1/2}}{c_s\mathfrak{H}}, \qquad \theta = \frac{1}{c_s z} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1}{a}\left(1 + \frac{p_0}{\epsilon_0}\right)^{-1/2}. \tag{7.4.38}$$

Vegyük észre, hogy a ,,hangsebesség”

$$c_s = \sqrt{\frac{\epsilon + p}{2X_0\epsilon_{,X}}} = \sqrt{\frac{a^2(\epsilon + p)}{(\varphi_0')^2\epsilon_{,X}}} = \frac{a(\epsilon + p)^{1/2}}{\varphi_0'\sqrt{\epsilon_{,X}}}. \tag{7.4.39}$$

A (7.4.34) egyenletet a következőképpen alakítjuk át,

$$\begin{aligned}
\frac{a^4(\epsilon+p)}{m_{Pl}^{3/2}\mathfrak{H}\varphi_0'}\left(\overline{\delta\varphi}+\frac{\varphi_0'}{\mathfrak{H}}\Phi\right) &= \left(m_{Pl}^{1/2}\frac{a^2\Phi}{4\pi\mathfrak{H}}\right)', \\
\frac{a^4(\epsilon+p)}{\mathfrak{H}\varphi_0'}\frac{v}{a\sqrt{\epsilon_{,X}}} &= \left(m_{Pl}^{1/2}\frac{a^2\Phi}{4\pi\mathfrak{H}}\right)', \\
c_s v &= \frac{\mathfrak{H}}{a^2(\epsilon+p)^{1/2}}\left(\frac{a^2 m_{Pl}^{1/2}\Phi}{4\pi\mathfrak{H}}\right)', \\
c_s v &= \theta\left(\frac{u}{\theta}\right)'. \qquad (7.4.40)
\end{aligned}$$

A (7.4.29) egyenletet a következőképpen alakítjuk át:

$$\begin{aligned}
\frac{m_{Pl}^{1/2}\Delta\Phi}{4\pi(\epsilon+p)^{1/2}} &= \frac{a^2(\epsilon+p)}{m_{Pl}^{3/2}c_s^2\mathfrak{H}(\epsilon+p)^{1/2}}\left(\frac{\mathfrak{H}}{\varphi_0'}\left(\overline{\delta\varphi}+\frac{\varphi_0'}{\mathfrak{H}}\Phi\right)\right)', \\
c_s\Delta u &= \frac{a^2(\epsilon+p)^{1/2}}{c_s\mathfrak{H}}\left(\frac{\mathfrak{H}}{\varphi_0'}\frac{v}{a\sqrt{\epsilon_{,X}}}\right)' \\
&= z\left(\frac{\mathfrak{H}c_s}{a^2(\epsilon+p)^{1/2}}v\right)' = z\left(\frac{v}{z}\right)'. \qquad (7.4.41)
\end{aligned}$$

Az alábbiakban először megkeressük a perturbációkra vonatkozó (7.4.36) és (7.4.37) klasszikus egyenletek megoldását. Ezt követően kvantáljuk az u és v tereket, és meghatározzuk a kvantumfluktuációk spektrumát. A lineáris közelítésnek köszönhetően az u és v terek egyszerűen kvantálhatók.

7.4.3 A klasszikus egyenletek megoldásai

Ha kifejezzük a (7.4.37) egyenletből v-t és behelyettesítjük a (7.4.36) egyenletbe, akkor zárt egyenletet kapunk u-ra:

$$u'' - c_s^2\Delta u - \frac{\theta''}{\theta}u = 0. \qquad (7.4.42)$$

A mondottak értelmében

$$\begin{aligned}
c_s\Delta u &= z\left[\frac{1}{c_s z}\theta\left(\frac{u}{\theta}\right)'\right]' = z\left[\theta^2\left(\frac{u}{\theta}\right)'\right]' \\
&= z[\theta u' - u\theta']' = z[\theta u'' - u\theta''] \\
&= \frac{1}{c_s}u'' - zu\theta'', \qquad (7.4.43)
\end{aligned}$$

ahonnan átrendezés után

$$u'' - c_s^2\Delta u - c_s zu\theta'' = 0 \qquad (7.4.44)$$

adódik, ami éppen a keresett (7.4.42) egyenlet.

Mint korábban láttuk (ld. a (6.3.28) egyenletet) a (7.4.42) egyenlet hidrodinamikai modellben tetszőleges állapotegyenlet esetén fennáll. A (7.4.42) egyenletnek a k (együtt mozgó) hullámszámú, rövidhullámú ($c_s^2k^2 \gg |\theta''/\theta|$) síkhullám megoldása

$$u \approx \frac{C}{\sqrt{c_s}} \exp\Big(\pm ik \int c_s d\eta\Big), \tag{7.4.45}$$

ahol C integrációs állandó. A hosszúhullámú ($c_s^2k^2 \ll |\theta''/\theta|$) megoldások pedig

$$u \approx C_1\theta + C_2\theta \int_{\eta_0} \frac{d\eta}{\theta^2} + \mathcal{O}((k\eta)^2) \tag{7.4.46}$$

alakúak, ahol C_1 és C_2 integrációs állandók.

Ha a (7.4.42) egyenletet megoldottuk u-ra, akkor a perturbáció keltette gravitációs potenciál a

$$\Phi = 4\pi m_{Pl}^{-1/2}(\epsilon_0 + p_0)^{1/2} u \tag{7.4.47}$$

kifejezéssel határozható meg. Az inflatonmező perturbációját pedig a

$$\Phi' + \mathfrak{H}\Phi = \frac{(a\Phi)'}{a} = 4\pi m_{Pl}^{-2} a^2 (\epsilon_0 + p_0) \frac{\overline{\delta\varphi}}{\varphi_0'} \tag{7.4.48}$$

egyenletből határozzuk meg:

$$\overline{\delta\varphi} = \frac{m_{Pl}^2 (a\Phi)'}{4\pi a^3(\epsilon_0 + p_0)} \varphi_0' = \frac{m_{Pl}^2(\dot{\Phi} + H\Phi)}{4\pi(\epsilon_0 + p_0)} \dot{\varphi}_0, \tag{7.4.49}$$

ahol $H = \dot{a}/a$ a Világegyetem tágulását jellemző Hubble-paraméter. Ha figyelembe vesszük, hogy

$$\epsilon_0 + p_0 = 2X_0 p_{,X} = \frac{1}{a^2}(\varphi_0')^2 p_{,X} = \dot{\varphi}_0^2 p_{,X}, \tag{7.4.50}$$

akkor

$$\Phi = 4\pi m_{Pl}^{-1/2} \dot{\varphi}_0 \sqrt{p_{,X}}\, u, \tag{7.4.51}$$

és

$$\overline{\delta\varphi} = m_{Pl}^2 \frac{\dot{\Phi} + H\Phi}{4\pi \dot{\varphi}_0 p_{,X}}. \tag{7.4.52}$$

Helyettesítsük be ide a (7.4.45) megoldást, akkor a rövidhullámú síkhullámú perturbációkra a következő adódik:

$$\Phi \approx 4\pi m_{Pl}^{-1/2} C \dot{\varphi}_0 \sqrt{\frac{p_{,X}}{c_s}} \exp\Big(\pm ik \int dt \frac{c_s}{a}\Big), \tag{7.4.53}$$

$$\overline{\delta\varphi} \approx \frac{m_{Pl}^2 C}{\sqrt{c_s p_{,X}}} \Big(\pm ik \frac{a}{c_s} + H + \ldots\Big) \exp\Big(\pm ik \int dt \frac{c_s}{a}\Big). \tag{7.4.54}$$

A (7.4.42) egyenlet hosszúhullámú megoldásai (6.3.30) alakúak:

$$\Phi \approx Am_{Pl}^{-1/2}\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{a}\int adt\Big) = Am_{Pl}^{-1/2}\Big(1-\frac{H}{a}\int adt\Big), \tag{7.4.55}$$

$$\overline{\delta\varphi} \approx \frac{Am_{Pl}^2\dot{\varphi}_0}{4\pi(\epsilon_0+p_0)}\Big(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\dot{a}}{a}\frac{d}{dt}\Big)\Big(\frac{1}{a}\int adt\Big). \tag{7.4.56}$$

Az utóbbi egyenlet jobb oldalán

$$\Big(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\dot{a}}{a}\frac{d}{dt}\Big)\Big(\frac{1}{a}\int adt\Big) = \Big(\frac{\dot{a}^2}{a^2}-\frac{\ddot{a}}{a}\Big)\Big(\frac{1}{a}\int adt\Big) = -\dot{H}\Big(\frac{1}{a}\int adt\Big), \tag{7.4.57}$$

amit visszahelyettesítve az adódik, hogy

$$\overline{\delta\varphi} \approx -\frac{Am_{Pl}^2\dot{\varphi}_0\dot{H}}{4\pi(\epsilon_0+p_0)}\Big(\frac{1}{a}\int adt\Big). \tag{7.4.58}$$

A Világegyetem tágulását meghatározó (7.4.9) egyenletet a (7.3.46) transzformációval a fizikai időre áttérve

$$\frac{\ddot{a}}{a}-\Big(\frac{\dot{a}}{a}\Big)^2 = \dot{H} = -4\pi m_{Pl}^{-2}(\epsilon_0+p_0) \tag{7.4.59}$$

alakra hozhatjuk, ahonnan látjuk, hogy $-\frac{\dot{H}}{4\pi(\epsilon_0+p_0)} = m_{Pl}^{-2}$. A skalármező hosszúhullámú perturbációjára tehát azt kapjuk, hogy

$$\overline{\delta\varphi} \approx A\dot{\varphi}_0\frac{1}{a}\int adt. \tag{7.4.60}$$

Hogyan is fejlődik a felfúvódás során valamely (adott k-módusú) perturbáció? Amíg a perturbáció rövidhullámú, addig oszcillál, ezt mutatják a (7.4.53) és (7.4.54) megoldások; a gravitációs potenciál $\dot{\varphi}_0$-tal arányos és lassan nő a felfúvódási szakasz vége felé; ugyanakkor a skalármező perturbációjának amplitúdója a skálafaktorral fordított arányban csökken. Amikor $Ha \sim c_s k$ lesz, azaz a perturbáció hosszúhullámúvá válik, akkor a perturbáció további időbeli fejlődését a (7.4.55) és (7.4.60) megoldások írják le. Ha teljesülnek a lassú gördülés feltételei, akkor ezeknek a megoldásoknak az alakja tovább egyszerűsödik. Egymást követő parciális integrálások segítségével a következő sorfejtést kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\int adt &= \frac{1}{a}\int a\frac{da}{\dot{a}} = \frac{1}{a}\int 1\cdot H^{-1}da \\
&= H^{-1}-\frac{1}{a}\int\frac{a}{\dot{a}}(H^{-1})^{\bullet}da = H^{-1}-\frac{1}{a}\int H^{-1}(H^{-1})^{\bullet}da \\
&= H^{-1}-\frac{1}{a}\int 1\cdot H^{-1}(H^{-1})^{\bullet}da \\
&= H^{-1}-\frac{1}{a}aH^{-1}(H^{-1})^{\bullet}+\frac{1}{a}\int a[H^{-1}(H^{-1})^{\bullet}]^{\bullet} \\
&= H^{-1}\Big(1-(H^{-1})^{\bullet}+[H^{-1}(H^{-1})^{\bullet}]^{\bullet}-+\ldots\Big)+\frac{B}{a},
\end{aligned} \tag{7.4.61}$$

ahol a görbületi sugár deriváltja szerint halad a sorfejtés. Az utolsó tag lebomlik a felfúvódás során, elhanyagolhatjuk. Ezt felhasználva, vezető rendben azt találjuk, hogy

$$\Phi \approx A m_{Pl}^{-1/2} (H^{-1})^{\bullet} = -A m_{Pl}^{-1/2} \frac{\dot{H}}{H^2}, \qquad \overline{\delta\varphi} \approx A \frac{\dot{\varphi}_0}{H}. \tag{7.4.62}$$

Ez a közelítés csak addig alkalmazható, amíg a lassú gördülés feltételei teljesülnek. A felfúvódás végén bekövetkező oszcillációs szakaszban a (7.4.55) és (7.4.60) megoldások eredeti alakját kell használni. Ebben a szakaszban $\lambda\varphi^n$ alakú inflatonpotenciál esetén a skálafaktor $a(t) \sim t^{\nu}$ alakú hatványfüggvény-viselkedést mutat, ahol $n = 2$ esetén (ld. a felfúvódásról szóló részt kvadratikus potenciál, azaz nem önkölcsönható inflatonmezős modell esetén) $\nu = 2/3$-nak adódott; kvartikus potenciál ($n = 4$) esetén $\nu = 1/2$. Ebben a szakaszban a (7.4.55) és (7.4.56) összefüggésekből

$$\Phi \approx \frac{A m_{Pl}^{-1/2}}{\nu + 1}, \qquad \overline{\delta\varphi} \approx \frac{A \dot{\varphi}_0 t}{\nu + 1}, \tag{7.4.63}$$

ami azt jelenti, hogy a gravitációs potenciál perturbációja befagy, amikor megtörténik a szerencsés kimenetel a felfúvódási szakaszból. Ezt követően az inflaton-kondenzátum energiája átalakul ultrarelativisztikus anyag (lényegében zérustömegűnek tekinthető részecskék sugárzási) energiájává a felfűtés (és az előfűtés) során, aminek következtében a skálafaktor $a(t) \sim t^{1/2}$ időfüggés szerinti skálázásra vált át (hiszen megváltozott az állapotegyenlet, $w = 1/3$). A gravitációs potenciál továbbra is marad befagyott állapotban, az új állapotegyenletnek megfelelő

$$\Phi \approx \frac{2}{3} A m_{Pl}^{-2} \tag{7.4.64}$$

értéken. A felfúvódási szakaszban érvényes (7.4.62) összefüggések alapján megbecsülhetjük az A integrációs állandó értékét az inflatonmező fluktuációjának azon amplitúdója alapján, amit akkor vesz fel, amikor a perturbáció átlépi a Hubble-horizontot, azaz hosszúhullámúvá válik:

$$A \approx \left. \frac{H \overline{\delta\varphi}}{\dot{\varphi}_0 m_{Pl}^2} \right|_{c_s k \sim Ha}, \tag{7.4.65}$$

amit felhasználva kapjuk, hogy a horizonton történt átlépés után

$$\Phi \approx \frac{2}{3} A m_{Pl}^{-2} \approx \frac{2}{3} \left. \frac{H \overline{\delta\varphi}}{\dot{\varphi}_0 m_{Pl}^4} \right|_{c_s k \sim Ha}. \tag{7.4.66}$$

Ez a képlet összhangban van a korábbi (7.3.64) becsléssel, és azt mutatja, hogy a gravitációs potenciál perturbációjának amplitúdója a sugárzási korszakban csak 1 nagyságrendű számfaktorban különbözik attól az értéktől, ami a felfúvódás végére már kialakult.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a gravitációs potenciál amplitúdóját a felfúvódást követő sugárzási korszakban, elegendő ismerni, hogy mekkora az inflatonmező perturbációjának az amplitúdója abban a pillanatban, amikor a perturbáció átlépi a horizontot (ld. a (7.4.66) egyenlőséget). Ezt a kvantumfluktuációk határozzák meg. Az is kérdés azonban, hogy melyik mértékben kell $\delta\varphi$-t a kanonikus változóval azonosítani, mert ez a választás különböző számfaktorokat eredményezhet az amplitúdó becslése során. Ez nem meglepő, mert a horizont átlépésékor nem tekinthetünk el a metrika perturbációjától, így a Minkowski-metrika, mint közelítés, nem alkalmazható. Ahhoz, hogy a mértékszabadságot helyesen kezeljük, szükség van a perturbációk kvantumelméletére, vagyis az inflatonmező kvantumelméletére.

7.4.4 A perturbációk kvantálása

A kozmikus perturbációk kvantumelméletéhez több lépésben jutunk el.

- **Az $S = S_{EH} + S_{inf}$ hatás,** amiből kiindulhatunk, az $S_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\, R$ Einstein-Hilbert-hatás és a skaláris inflatonmezőre vonatkozó S_{inf} hatás összege, amelyet az időtől függő háttér (a Friedmann-metrika és az inflaton-kondenzátum) körüli perturbációkban sorba fejtünk, majd a másodrendű tagokkal bezárólag őrizzük meg a tagokat. Ezt a programot azonban lerövidíthetjük, ha eleve a perturbációkra vonatkozó, az előzőekben már levezetett linearizált klasszikus mozgásegyenletekből indulunk ki, és olyan hatást szerkesztünk, amelyből ezek az egyenletek a legkisebb hatás elve alapján visszanyerhetők. Nem nehéz belátni, hogy a (7.4.36) és (7.4.37) egyenletek az alábbi alakú hatásból nyerhetők:

$$S = \int d\eta d^3x \Big[\Big(\frac{v}{z}\Big)' \hat{O}\Big(\frac{u}{\theta}\Big) - \frac{1}{2}c_s^2(\Delta u)\hat{O}u + \frac{1}{2}c_s^2 v\hat{O}v\Big]. \qquad (7.4.67)$$

Itt $\hat{O} = \hat{O}(\Delta)$ egyelőre meghatározatlan, időtől független operátor, ahol $\Delta = \nabla^2$ az együtt mozgó koordinátákban, 3-dimenziós térben felírt Laplace-Beltrami-operátor, formálisan a 3-dimenziós ∇ kovariáns gradiens négyzete (konkrét alakja attól függ, hogy milyen a tér: lapos, gömbi, vagy hiperbolikus).

Csakugyan, az első funkcionális deriváltak eltűnését követelve visszakapjuk a mozgásegyenleteket:

$$0 = \frac{\delta S}{\delta u} = \frac{1}{\theta}\hat{O}\Big(\frac{v}{z}\Big)' - c_s^2\hat{O}(\Delta u) = c_s\hat{O}\Big[z\Big(\frac{v}{z}\Big)' - c_s\Delta u\Big], \qquad (7.4.68)$$

$$0 = \frac{\delta S}{\delta v} = -\frac{1}{z}\hat{O}\Big(\frac{u}{\theta}\Big)' + c_s^2\hat{O}v = c_s\hat{O}\Big[\theta\Big(\frac{u}{\theta}\Big)' + c_s v\Big]. \qquad (7.4.69)$$

Itt szokás az u teret kifejezni a (7.4.36) klasszikus téregyenletből,

$$u = \frac{z}{c_s}\Delta^{-1}\Big(\frac{v}{z}\Big)' \qquad (7.4.70)$$

és az eredményt behelyettesíteni a klasszikus hatás kifejezésébe, ami így kizárólag a v tér funkcionáljaként áll elő:

$$\begin{aligned} S &= \int d\eta d^3x \Big[z^2 \Big(\frac{v}{z}\Big)' \hat{O}\Delta^{-1} \Big(\frac{v}{z}\Big)' - \frac{1}{2} z^2 \Big(\frac{v}{z}\Big)' \hat{O}\Delta^{-1} \Big(\frac{v}{z}\Big)' + \frac{1}{2} c_s^2 v \hat{O} v \Big] \\ &= \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \Big[z^2 \Big(\frac{v}{z}\Big)' \hat{O}\Delta^{-1} \Big(\frac{v}{z}\Big)' + c_s^2 v \hat{O} v \Big]. \end{aligned} \tag{7.4.71}$$

Az $\hat{O}$ operátort a következőképpen szokás megválasztani. Felírjuk a tömeg nélküli szabad skalármező hatásfunkcionálját lapos térgeometriájú de Sitter-téridőben, majd az így kapott hatás $\dot{\varphi}_0/H \to 0$ határesetét képezzük és azt hasonlítjuk össze a (7.4.71) hatással; ekkor $\hat{O} = \Delta$ adódik. (Emlékezzünk, hogy a de Sitter-téridőt kapjuk a Friedmann-egyenletek megoldásaként, ha anyagmentes homogén és izotróp Világegyetem felfúvódását vizsgáljuk az inflatonmező hatására. Másrészt a felfúvódás feltétele, hogy $\dot{\varphi}_0^2 \ll V \sim H^2$, azaz, hogy $|\dot{\varphi}_0|/H \ll 1$. Ez a két körülmény indokolja, hogy a fenti módon rögzítsük az $\hat{O}$ operátort.)

Végül tehát írhatjuk, hogy

$$S = \int d\eta d^3x \left[\frac{1}{2} z^2 \Big[\Big(\frac{v}{z}\Big)' \Big]^2 + \frac{1}{2} c_s^2 v \Delta v \right]. \tag{7.4.72}$$

A kifejezés első tagját parciális integrálással átalakítjuk:

$$\begin{aligned} \int d\eta d^3x \frac{1}{2} z^2 \Big[\Big(\frac{v}{z}\Big)' \Big]^2 &= -\frac{1}{2} \int d\eta d^3x \frac{v}{z} \Big[z^2 \Big(\frac{v}{z}\Big)' \Big]' \\ &= -\frac{1}{2} \int d\eta d^3x \frac{v}{z} \Big[2zz' \Big(\frac{v}{z}\Big)' + z^2 \Big(\frac{v}{z}\Big)'' \Big] \\ &= -\frac{1}{2} \int d\eta d^3x \frac{v}{z} \Big[2zz' \Big(\frac{v'}{z} - \frac{vz'}{z^2}\Big) + z^2 \Big(\frac{v'}{z} - \frac{vz'}{z^2}\Big)' \Big] \\ &= -\frac{1}{2} \int d\eta d^3x \frac{v}{z} \Big[2zz' \Big(\frac{v'}{z} - \frac{vz'}{z^2}\Big) \\ &\quad + z^2 \Big(\frac{v''}{z} - \frac{v'z'}{z^2} - \frac{v'z'}{z^2} - \frac{vz''}{z^2} + \frac{2v(z')^2}{z^3}\Big) \Big] \\ &= -\frac{1}{2} \int d\eta d^3x \frac{v}{z} \Big[z^2 \Big(\frac{v''}{z} - \frac{vz''}{z^2}\Big) \Big] \\ &= \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \Big(-vv'' + \frac{z''}{z} v^2 \Big) \\ &= \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \Big((v')^2 + \frac{z''}{z} v^2 \Big). \end{aligned} \tag{7.4.73}$$

Végezetül tehát a hatás

$$S \equiv \int d\eta d^3x \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \Big((v')^2 + c_s^2 v \Delta v + \frac{z''}{z} v^2 \Big) \tag{7.4.74}$$

alakot ölt. Innen a klasszikus téregyenlet

$$0 \;=\; v'' - c_s^2 \Delta v - \frac{z''}{z} v \tag{7.4.75}$$

alakban adódik, amit úgy is megkaphattunk volna közvetlenül, hogy a (7.4.36) egyenletből kifejezett u-t behelyettesítjük a (7.4.37) egyenletbe.

Mielőtt rátérnénk a kvantálásra, **vegyük észre, hogy a klasszikus hatás, ill. téregyenlet formálisan az $m^2(\eta) = -z''/z$ időtől függő tömegparaméterű, szabad v skalárteret írja le.** A perturbációk ,,tömege" a táguló Világegyetemet jellemző homogén φ_0 háttérrel történő kölcsönhatás miatt függ az időtől. Következésképpen a tér, vagyis a perturbáció energiája nem marad meg, hanem a perturbációk gerjesztődhetnek a táguló Világegyetem energiájának rovására.

- **A kvantálást** a Heisenberg-féle kanonikus kvantálással végezzük el. A hatás (7.4.74) kifejezése alapján v a kanonikus koordináta,

$$v \;=\; a\sqrt{\epsilon_{,X}}\left(\overline{\delta\varphi} + \frac{\varphi_0'}{\mathfrak{H}}\Psi\right), \tag{7.4.76}$$

ami definíció szerint mértékinvariáns változó. A hozzá tartozó kanonikus impulzus

$$\pi \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'} = v'. \tag{7.4.77}$$

Kirójuk a kanonikus változókra a Heisenberg-féle egyidejű csererelációkat:

$$\begin{aligned} &[\hat{v}(\eta,\vec{x}), \hat{v}(\eta,\vec{y})] = [\hat{\pi}(\eta,\vec{x}), \hat{\pi}(\eta,\vec{y})] = 0, \\ &[\hat{v}(\eta,\vec{x}), \hat{\pi}(\eta,\vec{y})] = i\delta(\vec{x}-\vec{y}). \end{aligned} \tag{7.4.78}$$

Ezáltal v és π térmennyiségek a $\hat{v}$ és $\hat{\pi}$ téroperátorokká válnak, a klasszikus téregyenletből pedig hasonló alakú operátor-egyenlet lesz:

$$0 \;=\; \hat{v}'' - c_s^2 \Delta \hat{v} - \frac{z''}{z}\hat{v}. \tag{7.4.79}$$

Keressük a klasszikus téregyenlet $f_{\vec{k}} = v_{\vec{k}}(\eta) e^{-i\vec{k}\vec{x}}$ alakú, időfüggő módusoknak megfelelő megoldásait. Ezeknek az időtől függő amplitúdóira

$$v_{\vec{k}}'' + \omega_k^2(\eta) v_{\vec{k}} \;=\; 0 \tag{7.4.80}$$

alakú egyenletek adódnak, ahol a körfrekvencia maga is függ az időtől,

$$\omega_k^2(\eta) \;=\; c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z}. \tag{7.4.81}$$

A klasszikus téregyenlet általános megoldása ilyen **időfüggő módusfüggvények („temporal mode functions”)** lineáris kombinációja,

$$v(\eta,\vec{x}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}[a^-_{\vec{k}}v^*_{\vec{k}}(\eta)e^{i\vec{k}\vec{x}} + a^+_{\vec{k}}v_{\vec{k}}(\eta)e^{-i\vec{k}\vec{x}}]. \qquad (7.4.82)$$

Mivel v valós térmennyiség, így minden módus mellett szerepel additív módon a komplex konjugáltja is a lineáris kombinációban. Az általános megoldásban $a^+_{\vec{k}}$ és $a^-_{\vec{k}}$ jelöli rendre az $f_{\vec{k}}$ és az $f^*_{\vec{k}}$ módusok lineárkombinációs együtthatóit. Ezek az időtől független együtthatók operátorokká kell váljanak, ha elvégezzük a kanonikus kvantálást. Könnyű belátni, hogy ha kirójuk rájuk a szokásos bozonikus

$$\begin{aligned}[\hat{a}^+_{\vec{k}},\hat{a}^+_{\vec{k}'}] = [\hat{a}^-_{\vec{k}},\hat{a}^-_{\vec{k}'}] &= 0,\\ [\hat{a}^-_{\vec{k}},\hat{a}^+_{\vec{k}'}] &= \delta(\vec{k}-\vec{k}') \qquad (7.4.83)\end{aligned}$$

csererelációkat, akkor a (7.4.78) Heisenberg-féle csererelációkkal akkor és csak akkor leszünk összhangban, ha teljesül a módusfüggvények amplitúdóinak normálására a

$$v'_{\vec{k}}v^*_{\vec{k}} - v_{\vec{k}}v^{*\prime}_{\vec{k}} \;=\; 2i \qquad (7.4.84)$$

egyenlőség. Itt a jobb oldal nem függ az időtől, a bal oldalra ez azért igaz, mert az nem más, mint a módusokra vonatkozó (7.4.80) differenciálegyenlet két független megoldásából, a $v_{\vec{k}}$ és a $v^*_{\vec{k}}$ megoldásokból alkotott Wronski-determináns.

A (7.4.80) egyenletnek a megoldásai és ezáltal az $\hat{a}^\pm_{\vec{k}}$ operátorok is akkor lesznek egyértelműen meghatározva, ha **megadjuk valamilyen $\eta=\eta_i$ kezdeti időpillanatban a $v_{\vec{k}}$-ra és $v'_{\vec{k}}$-re vonatkozó kezdőfeltételeket. A kezdőfeltételeket úgy választjuk, hogy azok a határozatlansági reláció által megengedett legkisebb fluktuációknak feleljenek meg.** Vezessük be az $r_{\vec{k}}(\eta)$ és $\alpha_{\vec{k}}(\eta)$ valós függvényeket a

$$v_{\vec{k}}(\eta) \;=\; r_{\vec{k}}(\eta)e^{i\alpha_{\vec{k}}(\eta)} \qquad (7.4.85)$$

definícióval. Ekkor a módusfüggvények normálási feltételéből (azaz a (7.4.84) Wronski-determinánsból)

$$r^2_{\vec{k}}\alpha'_{\vec{k}} \;=\; 1 \qquad (7.4.86)$$

adódik. A $\vec{k}$-módust reprezentáló lineáris harmonikus oszcillátor energiája

$$\begin{aligned}E_{\vec{k}} &= \frac{1}{2}\Big(|v'_{\vec{k}}|^2 + \omega^2_{\vec{k}}(\eta)|v_{\vec{k}}|^2\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big((r'_{\vec{k}})^2 + r^2_{\vec{k}}(\alpha'_{\vec{k}})^2 + \omega^2_{\vec{k}}r^2_{\vec{k}}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big((r'_{\vec{k}})^2 + \frac{1}{r^2_{\vec{k}}} + \omega^2_{\vec{k}}r^2_{\vec{k}}\Big). \qquad (7.4.87)\end{aligned}$$

Ezt az energiát az η_i kezdeti időpillanatban minimalizáljuk. Az energiaminimum szükséges feltételei:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{2}{r^3} + 2\omega^2 r, \\ 0 &= \frac{\partial E}{\partial r'} = r', \end{aligned} \tag{7.4.88}$$

ahonnan $r' = 0$, $r = \omega^{-1/2}$, feltéve, hogy $\omega^2 > 0$ és ezért ω valós pozitív szám. Jegyezzük meg azonban, hogy csak azoknak a módusoknak az energiája rendelkezik minimummal az η_i kezdeti időpillanatban, amelyekre $\omega^2(\eta_i) > 0$, azaz amelyekre a $c_s^2 k^2 > (z''/z)_{\eta_i}$ feltétel teljesül. Ezek a rövidhullámú módusok, és az energiájuk minimumát az

$$r'_{\vec{k}}(\eta_i) = 0, \qquad r_{\vec{k}}(\eta_i) = [\omega_{\vec{k}}(\eta_i)]^{-1/2} \tag{7.4.89}$$

kezdeti feltételek jelentik, amelyekkel

$$\begin{aligned} v_{\vec{k}}(\eta_i) &= \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}(\eta_i)}} e^{i\alpha_{\vec{k}}(\eta_i)}, \\ v'_{\vec{k}}(\eta_i) &= i\alpha'_{\vec{k}}(\eta_i) v_{\vec{k}}(\eta_i) = i\sqrt{\omega_{\vec{k}}(\eta_i)} e^{i\alpha_{\vec{k}}(\eta_i)}. \end{aligned} \tag{7.4.90}$$

Meg kell jegyezni, hogy a fluktuációk $\alpha_{\vec{k}}(\eta_i)$ kezdeti fázisaira nem kapunk megszorítást. Mivel ezek lényegtelenek, – később látjuk, hogy nem lépnek fel az erőspektrum kifejezésében, – azért zérussá tehetők.

A vákuumállapotot az

$$\hat{a}^-_{\vec{k}} |0\rangle = 0 \tag{7.4.91}$$

feltételek definiálják. A Hilbert-tér független állapotainak teljes rendszerét pedig az $a^+_{\vec{k}}$ operátorok ismételt alkalmazásával kaphatjuk meg a vákuumállapotból. Ha $\omega_{\vec{k}}$ nem függne az időtől, akkor a Minkowski-téridőben szokásos vákuumot és Hilbert-teret kapnánk meg.

Az $\omega_{\vec{k}}$ frekvencia időfüggése azonban további megfontolásokat tesz szükségessé. Egyrészt, ha feltesszük, hogy c_s adiabatikusan, azaz időben nagyon lassan változik, akkor a nagyon rövidhullámú módusok, $c_s^2 k^2 \gg (z''/z)$ nem gerjesztődnek (hiszen $\omega^2_{\vec{k}}$ csak nagyon lassan változik a felfúvódás során), és a minimális fluktuációk jól definiáltak. A hosszúhullámú módusok, $c_s^2 k^2 < (z''/z)$ esetében viszont $\omega^2_{\vec{k}} < 0$ és a minimális fluktuációk nem értelmezhetők egyértelműen. Szerencsére azonban ezek olyan módusok, amelyeknek a fizikai hullámhossza már kezdetben is meghaladja a Hubble-sugarat, s így a felfúvódás során olyan rendkívül hosszú hullámúvá válnak, amilyen méretű inhomogenitások messze meghaladják a megfigyelhető Világegyetem méretskáláját. A megfigyelhető méretskálán észlelt szerkezetekért olyan, kezdetben rövidhullámú fluktuációk felelősek, amelyek esetében a minimális fluktuációk egyértelműen definiálhatók.

- **A fluktuációk által keltett gravitációs potenciál erőspektrumát** (és annak időfüggését) a gravitációs potenciál térkorrelációs függvényéből határozzuk meg. Idézzük ehhez vissza, hogy a klasszikus elméletben a

$$\Phi = 4\pi m_{Pl}^{-2}(\epsilon_0 + p_0)^{1/2} u, \tag{7.4.92}$$

és az

$$u = \frac{z}{c_s}\Delta^{-1}\left(\frac{v}{z}\right)' \tag{7.4.93}$$

összefüggések állnak fenn, ahol u kielégíti a

$$u'' - c_s^2 \Delta u - \frac{\theta''}{\theta} u = 0 \tag{7.4.94}$$

egyenletet. Ha tehát a v teret kifejtjük lineárisan $e^{-i\vec{k}\vec{x}}$ és $e^{i\vec{k}\vec{x}}$ módusokba rendre $v_{\vec{k}}(\eta)$ és $v^*_{\vec{k}}(\eta)$ időfüggő módusfüggvények és időtől független $a^+_{\vec{k}}$ és $a^-_{\vec{k}}$ együtthatók segítségével, akkor az u tér ugyancsak előáll az $e^{-i\vec{k}\vec{x}}$ és $e^{i\vec{k}\vec{x}}$ módusok lineáris kombinációjaként rendre ugyanezen $a^+_{\vec{k}}$ és $a^-_{\vec{k}}$ együtthatók és olyan $u_{\vec{k}}(\eta)$ és $u^*_{\vec{k}}(\eta)$ módusfüggvények segítségével, amelyek kielégítik az u-ra vonatkozó differenciálegyenletet, azaz amelyekre

$$u''_{\vec{k}} + \left(c_s^2 k^2 - \frac{\theta''}{\theta}\right) u_{\vec{k}} = 0. \tag{7.4.95}$$

A megfelelő módusfüggvényekre az

$$u_{\vec{k}}(\eta) = -\frac{z}{c_s k^2}\left(\frac{v_{\vec{k}}}{z}\right)' \tag{7.4.96}$$

összefüggések állnak fenn.

A v mező kvantálása a fenti összefüggések alapján maga után vonja, hogy u és vele együtt a fluktuációk által keltett gravitációs potenciál is kvantált lesz,

$$\hat{\Phi}(\eta, \vec{x}) = \frac{4\pi(\epsilon_0 + p_0)^{1/2}}{m_{Pl}^2\sqrt{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} [a^-_{\vec{k}} u^*_{\vec{k}}(\eta) e^{i\vec{k}\vec{x}} + a^+_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\eta) e^{-i\vec{k}\vec{x}}]. \tag{7.4.97}$$

A gravitációs potenciál korrelációs függvénye, mint az $\eta > \eta_i$ idő függvénye a kezdeti $|0\rangle$ vákuumállapotra vonatkoztatva

$$C(\vec{x} - \vec{y}) = \langle 0|\hat{\Phi}(\eta, \vec{x})\hat{\Phi}(\eta, \vec{y})|0\rangle. \tag{7.4.98}$$

Helyettesítsük be ide a gravitációs potenciál operátorának móduskifejtését. Felhasználva a keltő és eltüntető operátorok csererelációt, majd a térszög szerinti integrálást elvégezve, az adódik, hogy

$$C(\vec{x} - \vec{y}) = m_{Pl}^{-4} \int_0^\infty \frac{dk}{k} 4(\epsilon_0 + p_0)|u_{\vec{k}}|^2 k^3 \frac{\sin(kr)}{kr}, \tag{7.4.99}$$

ahol $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ és kihasználtuk, hogy $u_{\vec{k}}$ izotróp. Innen kiolvashatjuk a korábbi definíciónak megfelelően, hogy a gravitációs potenciál fluktuációjának erőspektruma

$$\delta_\Phi^2(k,\eta) = 4m_{Pl}^{-4}[\epsilon_0(\eta) + p_0(\eta)]|u_{\vec{k}}(\eta)|^2 k^3. \tag{7.4.100}$$

Az erőspektrum explicit kifejezését akkor kapjuk meg, ha meghatározzuk az $u_{\vec{k}}(\eta)$ függvényeket, az u-tér módusai amplitúdóinak időfüggését. Ehhez először átírjuk a $v_{\vec{k}}$ és $v'_{\vec{k}}$ kezdeti értékeire vonatkozó feltételeket az u-tér módusai amplitúdóinak kezdőfeltételeivé.

Használjuk fel az u és v tér közötti lineáris kapcsolatokat. Ekkor azt kapjuk, hogy egyrészt

$$\begin{aligned} u_{\vec{k}} &= -\frac{z}{c_s k^2}\left(\frac{v'_{\vec{k}}}{z} - \frac{z' v_{\vec{k}}}{z^2}\right) = \frac{1}{c_s k^2}\left(-v'_{\vec{k}} + \frac{z'}{z} v_{\vec{k}}\right), \\ u_{\vec{k}}(\eta_i) &= \frac{1}{c_s k^2}\left(-i\sqrt{\omega_{\vec{k}}} - \frac{z'}{z\sqrt{\omega_{\vec{k}}}}\right), \end{aligned} \tag{7.4.101}$$

másrészt pedig

$$\begin{aligned} c_s v_{\vec{k}} &= \theta\left(\frac{u_{\vec{k}}}{\theta}\right)' = u'_{\vec{k}} - \frac{\theta'}{\theta} u_{\vec{k}}, \\ u'_{\vec{k}} &= c_s v_{\vec{k}} + \frac{\theta'}{\theta} u_{\vec{k}} = \frac{c_s}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}} + \frac{\theta'}{\theta} u_{\vec{k}}. \end{aligned} \tag{7.4.102}$$

Rövidhullámú módusok esetén, amikor $\omega_{\vec{k}}^2 = c_s^2 k^2 - (z''/z) \approx c_s^2 k^2$ (mert az első tag sokkal nagyobb, mint a második), azt kapjuk közelítőleg, hogy

$$\begin{aligned} u_{\vec{k}}(\eta_i) &\approx -\frac{i}{\sqrt{c_s} k^{3/2}}, \\ u'_{\vec{k}}(\eta_i) &\approx \frac{\sqrt{c_s}}{k^{1/2}}. \end{aligned} \tag{7.4.103}$$

(Mindkét esetben elhanyagoltuk a kifejezések második tagját, amelyek magasabb rendűek a $(c_s k \eta_i)^{-1} \ll 1$ kicsiny paraméterben.) Ezután $c_s^2 k^2 \gg |\theta''/\theta|$ esetén az $u_{\vec{k}}(\eta)$-ra vonatkozó differenciálegyenlet közelítő (WKB-közelítésben kapott) megoldása

$$u_{\vec{k}}(\eta) \approx u_{\vec{k}}(\eta_i) \exp\left(ik \int_{\eta_i}^{\eta} c_s(\tilde{\theta}) d\tilde{\eta}\right) \approx -\frac{i}{\sqrt{c_s(\eta_i)} k^{3/2}} \exp\left(ik \int_{\eta_i}^{\eta} c_s(\tilde{\theta}) d\tilde{\eta}\right). \tag{7.4.104}$$

Rövidhullámú módusok esetén, amelyekre $c_s k > Ha(t)$, az erőspektrum,

$$\delta_\Phi^2(k,t) = 4m_{Pl}^{-4}(\epsilon_0 + p_0)\left(\frac{1}{\sqrt{c_s} k^{3/2}}\right)^2 k^3 = \frac{4(\epsilon_0 + p_0)}{m_{Pl}^4 c_s}, \tag{7.4.105}$$

skála-független, minden hullámhosszra azonos az értéke.

Határozzuk most meg a fluktuációk amplitúdóját közvetlenül azután, hogy a k-módusú perturbáció átlépi a hanghorizontot. A felfúvódás során $|\theta''/\theta| \sim \eta^{-2}|\dot{H}/H^2|$ [1], ahol $|\dot{H}/H^2| \ll 1$, ezért létezik olyan időintervallum, amikor fennáll, hogy

$$\frac{1}{c_s k} > \eta > \frac{1}{k}|\dot{H}/H^2|^{1/2}. \tag{7.4.106}$$

Ez a hanghorizont (Hubble-horizont) átlépése utáni *nagyon rövid* időintervallum, amikor a rövidhullámok esetében talált (7.4.104) megoldásunk még mindig alkalmazható. Ezalatt az exponenciális függvény kitevője majdnem állandó (hiszen η az intervallumot befutva alig változik meg), és ezért az $u_{\vec{k}}$ amplitudó be van fagyva. Másrészről amikor a perturbáció hosszúhullámúvá válik a tágulás során, akkor a megoldás (ld. korábban)

$$\begin{aligned} u_{\vec{k}} &= \frac{m_{Pl}^2 \Phi_{\vec{k}}}{4\pi(\epsilon_0+p_0)^{1/2}} = \frac{m_{Pl}^2 A_{\vec{k}}}{4\pi(\epsilon_0+p_0)^{1/2}} \exp\Big(1 - \frac{H}{a}\int a dt\Big) \\ &\approx -\frac{m_{Pl}^2 A_{\vec{k}}}{4\pi(\epsilon_0+p_0)^{1/2}} \frac{\dot{H}}{H^2} \\ &\approx -\frac{m_{Pl}^2 A_{\vec{k}}}{4\pi(\epsilon_0+p_0)^{1/2}} \frac{H^2 - 4\pi(\epsilon_0+p_0)}{H^2} \approx m_{Pl}^2 A_{\vec{k}} \frac{(\epsilon_0+p_0)^{1/2}}{H^2}, \end{aligned} \tag{7.4.107}$$

ahol a második sorban felhasználtuk a Hubble-sugár szerinti sorfejtés vezető rendű tagját (ld. a klasszikus megoldásnál), a harmadik sorban pedig, hogy $H^2 \ll |\dot{H}|$ a felfúvódás során. Ha összehasonlítjuk a hosszúhullámú megoldás (7.4.104) és (7.4.107) alakját a (7.4.106) időintervallumban, akkor meg tudjuk határozni $A_{\vec{k}}$-t. Ilymódon „összevarrjuk” a rövidhullámú közelítő megoldást a hosszúhullámú közelítő megoldással, kihasználva azt, hogy létezik az a rövid időintervallum, amikor a perturbáció már hanghorizonton túli, de még alkalmazható rá a rövidhullámú közelítés is. A (7.4.106) időintervallumban $\frac{(\epsilon_0+p_0)^{1/2}}{H^2}$ csaknem állandó, ezért

$$A_{\vec{k}} \approx -\frac{i}{\sqrt{c_s}k^{3/2}} \frac{m_{Pl}^{-2} H^2}{(\epsilon_0+p_0)^{1/2}} \tag{7.4.108}$$

valóban közel állandó, és ekkor

$$u_{\vec{k}}(\eta) = \frac{m_{Pl}^2 A_{\vec{k}}}{4\pi(\epsilon_0+p_0)^{1/2}} \Big(1 - \frac{H}{a}\int a dt\Big), \tag{7.4.109}$$

úgyhogy

$$\delta_\Phi^2(k,t) \approx 4 m_{Pl}^{-4}(\epsilon_0+p_0)|u_k|^2 k^3$$

$$
\begin{aligned}
&\approx 4m_{Pl}^{-4}(\epsilon_0+p_0)\frac{m_{Pl}^4|A_{\vec{k}}|^2}{16\pi^2(\epsilon_0+p_0)}\Big(1-\frac{H}{a}\int adt\Big)^2 \\
&\approx \frac{|A_{\vec{k}}|^2k^3}{4\pi^2}\Big(1-\frac{H}{a}\int adt\Big)^2 \\
&\approx \frac{1}{4\pi^2c_s}\frac{H^4}{\epsilon_0+p_0}\Big(1-\frac{H}{a}\int adt\Big)^2. \qquad (7.4.110)
\end{aligned}
$$

Mivel $3H^2 = 8\pi m_{Pl}^{-2}\epsilon_0$, ezért

$$
\delta_\Phi^2(k,t) \approx \left[\frac{16}{9c_s}\frac{m_{Pl}^{-4}\epsilon_0}{1+(p_0/\epsilon_0)}\right]_{c_sk\sim Ha(t)}\Big(1-\frac{H}{a}\int adt\Big)^2 \qquad (7.4.111)
$$

a hosszúhullámú módusok erőspektrumára, amelyeknek együtt mozgó hullámszáma $Ha(t)/c_s > k > Ha(t_i)/c_s$.

- **Határozzuk meg az erőspektrumot** $V = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$ potenciálú, tömeges, nem önkölcsönható inflatontér esetén a $\lambda_{ph} \sim a(t)/k$ fizikai hullámhossz függvényében, ami az idő függvényében növekszik, ha adott k-módusú fluktuációt vizsgálunk. Ekkor $c_s = 1$ (a klasszikus téregyenletből), továbbá a felfúvódás során $|\dot{H}| \gg H^2$ miatt $4\pi m_{Pl}^{-2}(\epsilon_0+p_0) \approx -\dot{H}$ a H-ra vonatkozó Friedmann-egyenletből, úgyhogy a rövidhullámú $k > Ha(t)$, azaz $\lambda_{ph} = 2\pi a(t)/k < H^{-1}$, fluktuációk erőspektruma

$$
\delta_\Phi \approx \sqrt{\frac{4m_{Pl}^{-4}(\epsilon_0+p_0)}{c_s}} \approx \sqrt{\frac{-\dot{H}}{m_{Pl}^2\pi}} = \frac{m}{m_{Pl}\sqrt{3\pi}}, \qquad (7.4.112)
$$

ahol felhasználtuk, hogy $H(t) = \frac{m^2}{3}(t_f - t)$, azaz $\dot{H} = -m^2/3$. A rövidhullámú erőspektrum tehát nem függ a fizikai hullámhossztól. Meg lehet mutatni, hogy a hosszúhullámú spektrum logaritmikus, azaz

$$
\delta_\Phi \approx \frac{m}{m_{Pl}\sqrt{3\pi}}\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \lambda_{ph} < H^{-1}, \\ \left(1+\frac{\ln(\lambda_{ph}H)}{\ln(a_f/a(t))}\right), & \text{ha} \quad H^{-1} < \lambda_{ph} < H^{-1}\frac{a(t)}{a_i} \end{cases} \qquad (7.4.113)
$$

ha $a_i < a(t) < a_f$, azaz a felfúvódási szakaszban. A hosszúhullámú fluktuációk erőspektruma logaritmikusan nő a fizikai hullámhosszal. **Amikor tehát valamilyen instabilitások fizikai hullámhossza meghaladja a Hubble-sugarat, akkor az ilyen instabilitások közti térbeli korreláció logaritmikusan megnő, és ez lehet a csírája a kozmikus szerkezetképződésnek.**

Amikor megtörténik a szerencsés kimenetel a felfúvódási szakaszból, akkor az inflaton-kondenzátum részecskékre bomlik (ld. elő- és visszamelegedés), amelyek ultrarelativisztikus gázként, lényegében sugárzásként viselkednek. Ebben a sugárzás által uralt szakaszban $a(t) \sim t^{1/2}$, $\dot{a} \sim (1/2)t^{-1/2}$, $H = 1/(2t)$,

$H/a = 1/(2t^{3/2})$, $\int adt \sim (2/3)t^{3/2}$, $(1-(H/a)\int adt) = 2/3$, úgyhogy a hosszúhullámú komponens erőspektruma

$$\delta_\Phi^2 \approx \frac{16}{81}\left[\frac{1}{c_s}\frac{m_{Pl}^{-4}\epsilon_0}{1+(p_0/\epsilon_0)}\right]_{c_s k\sim Ha(t)}, \qquad (Ha/c_s)_f > k > (Ha/c_s)_i \tag{7.4.114}$$

a $(Ha/c_s)_f > k > (Ha/c_s)_i$ intervallumba eső módusokra. Ez az intervallum a fizikai hullámhosszban akkora, ami magába foglalja a megfigyelt Világegyetem méretét. Ezért azt mondhatjuk, hogy **a Hubble-sugárnál nagyobb hullámhosszú fluktuációk („fluctuations on supercurvature scales")** erőspektruma be van fagyva, és ezek a fluktuációk egészen a rekombinációs korszakig túlélnek evvel az erőspektrummal. Kivételt csak azok a fluktuációk képeznek, amelyek hullámhossza a lassuló tágulás során újra kisebbé válik a görbületi sugárnál, vagyis „amely fluktuációk újra belépnek a horizonton belülre."

Meg lehet mutatni, hogy $V(\varphi) = (\lambda/n)\varphi^n$ potenciállal jellemzett, önkölcsönható inflatontér esetén a hosszúhullámú fluktuációk erőspektruma szintén logaritmikusan függ a fizikai hullámhossztól,

$$\delta_\Phi^2 = \frac{128}{27}\frac{(nm_{Pl}^2)^{(n/2)-2}}{(4\pi)^{n/2}}\lambda\left[\ln\left(\frac{\lambda_{ph}}{\lambda_\gamma}\right)\right]^{(n+2)/2}, \tag{7.4.115}$$

ahol λ_γ a háttérsugárzás tipikus hullámhossza.

- **Az erőspektrum dőlése („spectral tilt").** Az erőspektrum (7.4.114) képlete alapján lehet arra következtetni, hogy a fluktuációk erőspektruma kisebb együtt mozgó k skálán nagyobb, mint a nagyobb skálákon, azaz, hogy a spektrum a „vörös felől a nagyobb frekvenciák felé haladva lejt". A (7.4.114) képlet azt mutatja, hogy az erőspektrumot részben az ϵ_0 energiasűrűség határozza meg, részben pedig az állapotegyenlet eltérése a vákuumétól, azaz hogy $1+(p_0/\epsilon_0)$ mennyire különbözik nullától. A felfúvódás, tágulás során ϵ_0 mindvégig csökken, a nevezőben szereplő $1+(p_0/\epsilon_0)$ viszont a felfúvódás végén jelentősebbé kell, hogy váljon, ami biztosítja a szerencsés kimenetelt a felfúvódásból. Ezért a (7.4.114) egyenlet jobboldali kifejezése az idő függvényében lassan csökken. Ebből következik, hogy azok a fluktuációk, amelyek hamarább lépik át a Hubble-horizontot (kisebb a k-juk és nagyobb a kezdeti fizikai hullámhosszuk), erősebbek, mint azok, amelyek később lépik át a Hubble-horizontot (amelyeknek nagyobb a k-juk és kisebb a kezdeti hullámhosszuk). Elegendően kis skálatartományon a k-függést hatványfüggvénnyel közelíthetjük,

$$\delta_\Phi^2 \propto k^{n_S-1} \tag{7.4.116}$$

ahol n_S a **spektrális index („spectral index"),**

$$n_S - 1 = \frac{d\ln\delta_\Phi^2}{d\ln k}. \tag{7.4.117}$$

Ha figyelembe vesszük, hogy (7.4.114) jobb oldalát a horizont átlépésekor kell kiszámolni, amikor $c_s k \approx Ha$, akkor $d\ln k \approx d\ln a = Hdt$ (ha elhanyagoljuk c_s és H változását),

$$\begin{aligned}\frac{d\ln\delta_\Phi^2}{d\ln k} &= \frac{1}{H}\frac{d}{dt}\Big(\ln\epsilon - \ln(1+(p/\epsilon)) - \ln c_s\Big) \\ &= \frac{1}{H}\dot{\epsilon}\epsilon - \frac{1}{H}\frac{d}{dt}\ln(1+(p/\epsilon)) - \frac{1}{H}\frac{d\ln c_s}{dt}, \end{aligned} \tag{7.4.118}$$

de homogén és izotróp, táguló Világegyetemben $\dot{\epsilon} = -3H(\epsilon + p)$, úgyhogy

$$n_S - 1 = -3(1+(p_0/\epsilon_0)) - \frac{1}{H}\frac{d}{dt}\ln(1+(p_0/\epsilon_0)) - \frac{1}{H}\frac{d\ln c_s}{dt}, \tag{7.4.119}$$

ahol a jobb oldalt azon t_k időpillanatban kell venni, amikor a k-módus átlépi a horizontot, azaz amikor $c_s k \approx Ha(t_k)$. Mivel a kifejezés minden tagja negatív, ezért **a spektrális index kisebb, mint 1,** $n_S < 1$**. Ez a különböző felfúvódási modellek általános vonása, mint ahogy az is, hogy** $n_s \approx 1$**. A különböző modellek alapján kapott becslések alapján** $0,92 < n_S < 0,97$ **adódik.**

7.4.5 A felfúvódás által keltett gravitációs hullámok

A felfúvódás a skalárfluktuációkhoz hasonlóan hosszúhullámú gravitációs hullámokat is tud kelteni, amelyekért a tenzorfluktuációk a felelősek. A tenzorfluktuációkat hasonlóképpen kvantálhatjuk, mint a skalárfluktuációkat. Értelmezhetjük a tenzorfluktuációk térkorrelációs függvényét, és abból kiolvashatjuk a tenzorfluktuációk erőspektrumát.

- **Térelméleti modell és az erőspektrum leszármaztatása.** Az Einstein-egyenletekből, vagy – ami ezekkel egyenértékű – az $S = (16\pi)^{-1} m_{Pl}^2 \int d^4x\sqrt{-g}$ R Einstein-Hilbert-hatásból indulunk ki. Láttuk, hogy lineáris közelítésben a skalár- és a tenzorperturbációk szétcsatolódnak, továbbá azt is láttuk, hogy a tenzorfluktuációk lecsatolódnak lineáris közelítésben az anyagról. Ezért feltehetjük, hogy a keletkező gravitációs hullámoknak elhanyagolható a visszahatása a felfúvódásra. Tehát a felfúvódó homogén, izotróp Világegyetemet jellemző háttér-metrika körül végezzük az Einstein-egyenletek linearizálását a perturbációkban. Ez azt jelenti, hogy a hatást a transzverzális, zérus spúrú h^i_j tenzorfluktuációkban kvadratikus tagokkal bezárólag fejtjük sorba (i, j térindexek). Ekkor a tenzorperturbációkra a

$$S = \frac{m_{Pl}^2}{64\pi}\int d\eta d^3x\; a^2(h^{i\prime}_j h^{j\prime}_i - h^i_{j,l}h^{j,l}_i) \tag{7.4.120}$$

hatást kapjuk [1], ahol δ_{ik}-val lehet fel- és lehúzni a térindexeket. Fejtsük itt ki az együtt mozgó $\vec{k}$ hullámvektor szerinti módusokba a fluktuációt:

$$h^i_j(\vec{x},\eta) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} h_{\vec{k}}(\eta) e^i_j(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}}, \tag{7.4.121}$$

ahol $e^i_j(\vec{k})$ a polarizációs tenzor. Ezt a felbontást behelyettesítjük a (7.4.120) hatás kifejezésébe:

$$S \;=\; \frac{m_{Pl}^2}{64\pi} \int d\eta d^3k \; a^2 e^i_j e^j_i (h'_{\vec{k}} h'_{-\vec{k}} - \vec{k}^2 h_{\vec{k}} h_{-\vec{k}}). \tag{7.4.122}$$

Vezessük be a

$$v_{\vec{k}} \;=\; m_{Pl} \sqrt{\frac{e^i_j e^j_i}{32\pi}} a h_{\vec{k}} \tag{7.4.123}$$

új változókat, amelyek egy valós skalártér Fourier-módusainak tekinthetők. Ezek segítségével a hatás

$$S \;=\; \frac{1}{2} \int\int d\eta d^3k \Big[v'_{\vec{k}} v'_{-\vec{k}} - \Big(k^2 - \frac{a''}{a}\Big) v_{\vec{k}} v_{-\vec{k}} \Big] \tag{7.4.124}$$

alakot ölt. Innen a módusokra vonatkozó klasszikus mozgásegyenletek

$$v''_{\vec{k}} + \omega_k^2(\eta) v_{\vec{k}} \;=\; 0, \qquad \omega_k^2(\eta) = k^2 - \frac{a''(\eta)}{a(\eta)}. \tag{7.4.125}$$

A kvantálás ezután ugyanúgy történik, mint a skalárfluktuációk esetében. Az erőspektrumot pedig ismét a fluktuációk térkorrelációs függvényének integrandusából olvassuk ki:

$$\begin{aligned} C_h(r = \vec{x} - \vec{y}) \;&\equiv\; \langle 0 | h^i_j(\eta,\vec{x}) h^j_i(\eta,\vec{x}) | 0 \rangle \\ &=\; \int \frac{dk}{k} \frac{8}{\pi a^2} |v_{\vec{k}}|^2 k^3 \frac{\sin(kr)}{kr}. \end{aligned} \tag{7.4.126}$$

(Fel kell használni $v_{\vec{k}}$ definícióját, a h-tér móduskifejtését, továbbá a Wronski-determináns alapján $v_{\vec{k}}$ helyes normálását.) A kezdőfeltételek most is (a skalárperturbációk $v_{\vec{k}}$ módusaival való analógia alapján)

$$v_{\vec{k}}(\eta_i) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}}, \qquad v'_{\vec{k}}(\eta_i) = i\sqrt{\omega_k}, \tag{7.4.127}$$

s ezek megint csak a kezdetben rövidhullámú módusokra értelmesek, amelyekre $k^2 > (a''/a)_{\eta_i}$. Végülis a k együtt mozgó hullámszámmal jellemzett, kezdetben rövidhullámú fluktuációk erőspektruma

$$\delta_h^2(k,\eta) \;=\; \frac{8 m_{Pl}^{-1}}{\pi a^2} |v_{\vec{k}}|^2 k^3. \tag{7.4.128}$$

- **Az erőspektrum a felfúvódás során.** Az erőspektrumot tanulságos de Sitter-téridőben megvizsgálni. Mint az előzőekben, didaktikai okokból most is a lapos térgeometriájú Világegyetem esetére szorítkozunk (de Sitter-téridőben ez egy speciális koordinátarendszer választását jelenti, mint korábban erről szó volt). A ($p = -\epsilon$ állapotegyenletű vákuumnak megfelelő) de Sitter-téridőben történő tárgyalást utólag az indokolja [1], hogy a tenzoriális fluktuációk szempontjából az állapotegyenlet nem olyan fontos, mint a skalárfluktuációk szempontjából. Most tehát azt képzeljük, hogy a felfúvódás jó közelítéssel de Sitter-téridőben megy végbe, s ezen a háttéren, ill. ehhez a (klasszikus, ill. kváziklasszikus) háttérhez képest jelennek meg tenzoriális h_{ij} kvantumfluktuációk. Lapos rétegzésű de Sitter-téridőben

$$\begin{aligned}
a &= H_\Lambda^{-1} e^{H_\Lambda t}, \\
\eta &= \int \frac{dt}{a(t)} = H_\Lambda \int dt\; e^{-H_\Lambda t} = e^{-H_\Lambda t} = \frac{1}{e^{H_\Lambda t}} = \frac{1}{H_\Lambda a}, \\
a(\eta) &= -(H_\Lambda \eta)^{-1}, \\
a' &= H_\Lambda^{-1} \eta^{-2}, \\
a'' &= -2 H_\Lambda^{-1} \eta^{-3}, \\
\frac{a''}{a} &= \frac{2}{\eta^2},
\end{aligned} \tag{7.4.129}$$

úgyhogy a $v_{\vec{k}}$ mósudokra vonatkozó (7.4.125) egyenletben szereplő frekvencia

$$\omega_{\vec{k}}^2(\eta) = k^2 - \frac{2}{\eta^2}, \tag{7.4.130}$$

maga az egyenlet pedig

$$v_{\vec{k}}'' + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right) v_{\vec{k}} = 0 \tag{7.4.131}$$

alakot ölt. Vegyük észre, hogy $0 < t_i < t_f$-nek $\eta_i < \eta_f < 0$ felel meg, vagyis $\eta(t)$ szigorúan monoton növekvő függvény, amely $t \to \infty$ esetén nullához tart. A (7.4.131) egyenlet egzakt megoldása analitikus alakban felírható:

$$v_{\vec{k}}(\eta) = \frac{1}{\eta}\Big(C_1[k\eta\cos(k\eta) - \sin(k\eta)] + C_2[k\eta\sin(k\eta) + \cos(k\eta)]\Big). \tag{7.4.132}$$

Vizsgáljunk olyan gravitációs hullámokat, amelyekre $k|\eta_i| \gg 1$ a felfúvódás kezdetén, azaz amelyekre kezdetben $\omega_{\vec{k}}(\eta_i) \approx k$. Ekkor a (7.4.127) kezdőfeltételekből meghatározhatjuk a C_1 és C_2 együtthatókat, és a megoldás

$$v_{\vec{k}}(\eta) \approx \frac{1}{\sqrt{k}}\left(1 + \frac{i}{k\eta}\right) e^{ik(\eta - \eta_i)}. \tag{7.4.133}$$

A kezdőfeltételek az

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k\sqrt{k}} &\approx \frac{1}{\eta_i}\Big(C_1\eta_i\cos(k\eta_i)+C_2\eta_i\sin(k\eta_i)\Big) = C_1\cos(k\eta_i)+C_2\sin(k\eta_i),\\
i\sqrt{k} &\approx -\frac{1}{\eta_i}\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\eta_i}\Big(-C_1k^2\sin(k\eta_i)+C_2k^2\cos(k\eta_i)\Big) \qquad (7.4.134)
\end{aligned}$$

egyenleteket jelentik, ahonnan a C_1 és a C_2 állandókra az

$$\begin{aligned}
\alpha \equiv \frac{1}{k\sqrt{k}} &\approx C_1\cos(k\eta_i)+C_2\sin(k\eta_i),\\
\beta \equiv \frac{i}{k\sqrt{k}}+\frac{1}{k\eta_i}\frac{1}{k\sqrt{k}} &\approx -C_1\sin(k\eta_i)+C_2\cos(k\eta_i) \qquad (7.4.135)
\end{aligned}$$

algebrai egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása

$$\begin{aligned}
C_1 &= \alpha\cos(k\eta_i)-\beta\sin(k\eta_i),\\
C_2 &= \beta\cos(k\eta_i)+\alpha\sin(k\eta_i). \qquad (7.4.136)
\end{aligned}$$

Helyettesítsük be ezeket a $v_{\vec{k}}(\eta)$ általános megoldás alakjába, csak a $k\eta$-ban vezető rendű tagokat hagyva meg:

$$\begin{aligned}
v_{\vec{k}}(\eta) &\approx k\Big(C_1\cos(k\eta)+C_2\sin(k\eta)\Big)\\
&\approx k\Big[\alpha\Big(\cos(k\eta)\cos(k\eta_i)+\sin(k\eta)\sin(k\eta_i)\Big)\\
&\quad +\beta\Big(\sin(k\eta)\cos(k\eta_i)-\cos(k\eta)\sin(k\eta_i)\Big)\Big]\\
&\approx k\Big(\alpha\cos(k(\eta-\eta_i))+\beta\sin(k(\eta-\eta_i))\Big)\\
&\approx k\Big[\frac{1}{k\sqrt{k}}\cos(k(\eta-\eta_i))+\frac{1}{k\sqrt{k}}\Big(i+\frac{1}{k\eta_i}\Big)\sin(k(\eta-\eta_i))\Big]\\
&\approx \frac{1}{\sqrt{k}}\Big(1-\frac{i}{k\eta_i}\Big)e^{ik(\eta-\eta_i)}. \qquad (7.4.137)
\end{aligned}$$

Ezen közelítést az indokolja, hogy az exponenciális tágulás viszonylag rövid $\eta_f-\eta_i$ idő alatt létrehozza az $e^{50}-e^{70}$-szeres felfúvódást, úgyhogy $k\eta\approx k\eta_i$.

Ennek segítségével az erőspektrum:

$$\begin{aligned}
\delta_h^2(k,\eta) &\approx \frac{8m_{Pl}^{-2}k^3}{\pi}H_\Lambda^2\eta^2\frac{1}{k}\Big(1+\frac{1}{k^2\eta^2}\Big) \approx m_{Pl}^{-2}\frac{8H_\Lambda^2}{\pi}[1+(k\eta)^2]\\
&\approx \frac{8m_{Pl}^{-2}H_\Lambda^2}{\pi}\Big[1+\Big(\frac{k_{ph}}{H_\Lambda}\Big)^2\Big], \qquad (7.4.138)
\end{aligned}$$

ahol $k_{ph}=k/a$ a fizikai hullámszám, ami $2\pi/k_{ph}=\lambda_{ph}$ kapcsolatban áll a fizikai hullámhosszal. A kapott összefüggés akkor használható, ha $k|\eta_i|\gg 1$, azaz

$$k_{ph}=\frac{k}{a} \gg \frac{1}{|\eta_i|a}=H_\Lambda\frac{\eta}{\eta_i}. \qquad (7.4.139)$$

Amíg $\lambda_{ph} \propto 1/k_{ph}$ nagyon kicsi, $\lambda_{ph} \ll H_\Lambda^{-1}$, addig $\delta_h \sim \sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{2\pi m_{Pl}^{-1}}{\lambda_{ph}}$, azaz **amíg a k-módus fizikai hullámhossza kicsi, addig az erőspektrum a fizikai hullámhosszal kb. fordított arányban csökken, majd amikor $H_\Lambda^{-1} < \lambda_{ph} < H_\Lambda^{-1}(\eta_i/\eta)$, akkor az erőspektrum állandó (lapos), $\delta_h \approx \sqrt{\frac{8}{\pi m_{Pl}^2}}H_\Lambda$.** Ez az érték a de Sitter-téridőben állandó, de realisztikus felfúvódási modellekben a Hubble-paraméter lassan növekszik. A gravitációs hullámok hosszúhullámú módusai azonban ilyen modellekben is be vannak fagyva,

$$\delta_h^2 \approx \frac{8}{\pi m_{Pl}^2}H_{k\approx Ha}^2 \approx \frac{64}{3m_{Pl}^4}\epsilon_{k\approx Ha}, \tag{7.4.140}$$

ahol felhasználtuk, hogy a háttér energiasűrűsége $H^2 = (8\pi/3)m_{Pl}^{-2}\epsilon$ a Friedmann-egyenletek egyike szerint. A tenzoriális fluktuációk erőspektrumának indexe, **a tenzoriális spektrális index („tensor spectral index")** tehát

$$n_T = \frac{d\ln\delta_h^2}{d\ln k} = -3\left(1+\frac{p_0}{\epsilon_0}\right)_{k\sim Ha}. \tag{7.4.141}$$

A spektrálindexet megint olyan t_k időpillanatban kell kiszámolni, amikor a k együtt mozgó hullámszámú módus éppen átlépi a horizontot, azaz amikor $k \approx H(t_k)a(t_k) = \dot{a}(t_k)$. A lapos rétegzésű de Sitter-téridőben ezért $t_k - t_i = H_\Lambda^{-1}\ln[k/(H_\Lambda a_i)]$. Vegyük észre, hogy a tenzor- és a skalárfluktuációk erőspektrumának indexe különbözőképpen van definiálva. A jobboldali kifejezés negatív, és ennek következtében **a tenzorfluktuációk spektruma $\delta_h^2 \sim k^{n_T}$ szerint gyengén a vörös felé emelkedik („is tilted to the red").**

A $k \sim Ha$ kapcsolat miatt,

$$d\ln k \approx d\ln a = Hdt \tag{7.4.142}$$

és ezért $\ln\delta_h^2 = \ln\epsilon + const.$ deriváltja

$$\begin{aligned} n_T &= \frac{d\ln\delta_h^2}{d\ln k} = \frac{d\ln\epsilon}{Hdt} = H^{-1}\epsilon\dot{\epsilon} \\ &= -3\left(1+\frac{p_0}{\epsilon_0}\right)_{k\sim Ha} \end{aligned} \tag{7.4.143}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\dot{\epsilon} = -3H(\epsilon + p)$.

- **Határozzuk meg, hogy milyen az erőspektrum a felfúvódást követően.** A felfúvódást követően a perturbációk már klasszikusan viselkednek. Függetlenül attól, hogy hogyan változik az állapotegyenlet, a szuperhorizont-skálán a gravitációs hullámok amplitúdója állandó, amint ezt a klasszikus tenzorperturbációk vizsgálata során tárgyaltuk. A felfúvódást követő, lassulva táguló Világegyetemben azonban a gravitációs hullám újra beléphet a horizonton belülre, azaz egy adott k-módus fizikai hullámhossza újra kisebbé válhat, mint a Hubble-sugár. Attól kezdve, hogy ez bekövetkezik, a hullám rövidhullámú

perturbáció lesz, amelynek amplitúdója viszont a skálafaktorral fordítottan arányosan csökken. Erről ugyancsak meggyőződtünk a klasszikus tenzorperturbációk diszkussziója során.

A fentiek miatt a felfúvódást követően a spektrum csak a szuperhorizontskálán marad változatlan, azaz olyan, mint a felfúvódási korszak végén, a Hubble-sugáron belül azonban megváltozik. Tegyük fel, hogy a Világegyetemet a felfúvódást követően sugárzás és hideg sötét anyag ,,keveréke" uralja. Megmutatható, hogy ekkor a korábbi $H(a)$ és a jelenlegi H_0 Hubble-paraméter a z relatív vöröseltolódás segítségével az alábbi kapcsolatban vannak egymással:

$$H(a) \approx \begin{cases} (a_0/a)^{3/2}, & \text{ha} \quad z < z_{eq} \\ z_{eq}^{-1/2}(a_0/a)^2, & \text{ha} \quad z > z_{eq} \end{cases}, \tag{7.4.144}$$

ahol z_{eq} a vöröseltolódás, amikor a sötét anyag és a sugárzás energiasűrűsége megegyezik, a_0 pedig a skálafaktor jelenlegi értéke.

A por és sugárzás keverékét tartalmazó Világegyetemben

$$\begin{aligned} a &= a_{eq}\left(\frac{\eta^2}{\eta_*^2} + \frac{2\eta}{\eta_*}\right), \\ a' &= a_{eq}\left(\frac{2\eta}{\eta_*^2} + \frac{2}{\eta_*}\right), \end{aligned} \tag{7.4.145}$$

továbbá a Hubble-paraméter $H = a'/a^2$ és a vöröseltolódás $z = a_0/a$. A sugárzás uralta korszakban $z > z_{eq}$ és

$$\begin{aligned} a &= a_{eq}\frac{2\eta}{\eta_*}, \\ a'_r &= a_{eq}\frac{2}{\eta_*}, \\ H_> &= \frac{a'_r}{a^2}, \\ H_{eq} &= \frac{a'_r}{a_{eq}^2}, \end{aligned} \tag{7.4.146}$$

ahonnan

$$H_> = \frac{a_{eq}^2}{a^2} H_{eq}. \tag{7.4.147}$$

A por uralta korszakban $z < z_{eq}$ jó közelítéssel

$$\begin{aligned} a &= a_{eq}\frac{\eta^2}{\eta_*^2}, \\ a'_d &= \frac{2a_{eq}}{\eta_*^2}\eta, \\ H_< &= \frac{a'_d}{a^2} = \frac{2a_{eq}}{\eta_*^2}\frac{\eta}{a^2}, \\ H_0 &= \frac{a'_d(\eta_0)}{a_0^2} = \frac{2a_{eq}}{\eta_*^2}\frac{\eta_0}{a_0^2}, \end{aligned} \tag{7.4.148}$$

ahonnan

$$\begin{aligned}\frac{2a_{eq}}{\eta_*^2} &= \frac{H_0 a_0^2}{\eta_0},\\ H_< &= H_0\frac{a_0^2}{a^2}\frac{\eta}{\eta_0} = H_0\frac{a_0^2}{a^2}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{1/2} = H_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2}.\end{aligned} \tag{7.4.149}$$

A por és a sugárzás egyensúlya idején ezért

$$H_{eq} = H_0\left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^{3/2}, \tag{7.4.150}$$

amit beírva $H_>$ kifejezésébe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}H_> &= \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^2 H_0\left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^{3/2} = H_0\left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^{1/2}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\\ &= H_0 z_{eq}^{-1/2}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2.\end{aligned} \tag{7.4.151}$$

Ezzel beláttuk, hogy a Hubble-paraméter hogyan viselkedik a vöröseltolódás függvényében.

Abban a pillanatban, amikor a k-módusú tenzorperturbáció újra belép a horizonton belülre, a Hubble-paraméter a $H_{k\sim Ha} \approx H(a_k) = k/a_k$ relációnak tesz eleget. Ez abban a t_k időpillanatban történik meg, amikor $\dot{a}(t_k) = k$. A belépés után a gravitációs hullám amplitúdója a skálaparaméterrel fordított arányban csökken, jelenleg a t_k pillanatbeli amplitúdó a_k/a_0-szorosa. A jelenben mérhető fizikai hullámhossz $\lambda_{ph} \propto a_0/k$ függvényében végül a spektrumra a következő adódik [1]:

$$\delta_h(\lambda_{ph}) \propto \frac{H_\Lambda}{m_{Pl}}\begin{cases} z_{eq}^{-1/2}(\lambda_{ph}H_0), & \text{ha} \quad \lambda_{ph} < (H_0 z_{eq})^{-1}\\ (\lambda_{ph}H_0)^2, & \text{ha} \quad (H_0 z_{eq})^{-1} < \lambda_{ph} < H_0^{-1}\\ 1, & \text{ha} \quad H_0^{-1} < \lambda_{ph}\end{cases}, \tag{7.4.152}$$

ahol H_Λ a Hubble-paraméter értéke a felfúvódás végén. Az utolsó sor azokra a hullámokra vonatkozik, amelyek hullámhossza annyira nagy, hogy a mai napig sem léptek be újra a horizonton; a második sor azokra, amelyek a por (hideg sötét anyag) uralta korszakban léptek be, és végül az első sor azokra, amelyek már a sugárzás uralta korszakban újra beléptek a horizonton.

Ezeknek a gravitációs hullámoknak az erőssége kb. 10^{-17} a néhány fényévnyi hullámhossz esetén a realisztikus felfúvódási modellekben, a kisebb hullámhosszak felé haladva pedig lineárisan csökken [1], úgyhogy a közvetlen detektálásuk nem látszik reményteljesnek. Ugyanakkor ezek a gravitációs hullámok kihatással vannak a CMB hőmérsékleti fluktuációira, ami lehetővé teheti a közvetett észlelésüket.

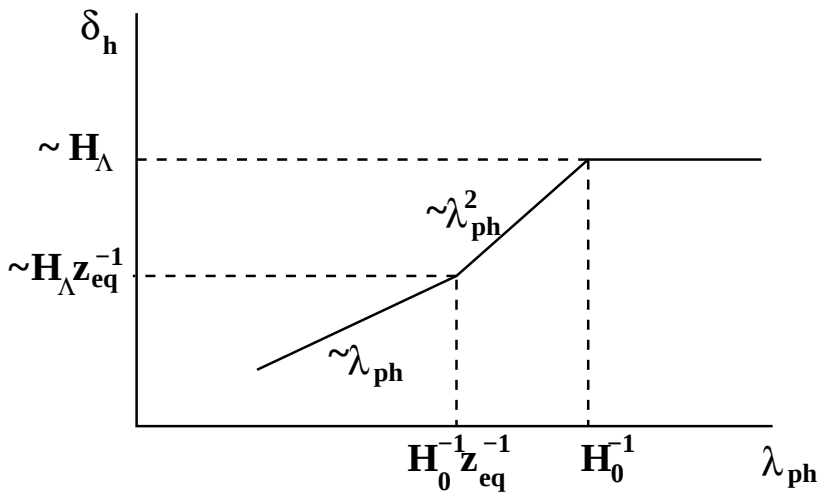

Figure 17: A gravitációs hullámok erőspektruma napjainkban a sugárzás és hideg sötét anyag keveréke által uralt Világegyetemben.

7.4.6 Az önfenntartó Világegyetem („self-reproduction of the Universe")

A (7.3.73) egyenlet határozza meg a skalárperturbációk erőspektrumát a hosszúhullámú tartományban,

$$\delta_\Phi \sim m_{Pl}^{(n/2)-2}\lambda^{1/2}(\ln(a_f/a_k))^{\frac{n+2}{4}} \sim m_{Pl}^{(n/2)-2}\lambda^{1/2}\Big(\ln(\lambda_{ph}H_k)\Big)^{\frac{n+2}{4}}, \quad (7.4.153)$$

ahol $k \approx H_k a_k$ és $\lambda_{ph} = 2\pi a_f/k$, ha a felfúvódást $V = (1/n)\lambda\varphi^n$ potenciállal jellemzett önkölcsönható inflatonmező idézi elő. Azok a fluktuációk a legerősebbek, amelyek a legnagyobb fizikai hullámhosszra tettek szert, vagyis amelyek a felfúvódás kezdetén lépték át a horizontot. Ezekre $k \approx H_i a_i$. Vegyük a tömeges, nem önkölcsönható inflatonmező esetét. Azok a fluktuációk, amelyek a felfúvódás kezdetén lépték át a horizontot, azaz amelyekre $k \approx H_i a_i$, a felfúvódás végén $\lambda_{ph} \sim H_i^{-1}(a_f/a_i)$ hullámhosszúak és erősségük $(\delta_\Phi)_{max} = \delta_\Phi(k \sim H_i a_i) \approx (m/m_{Pl})\ln(a_f/a_i)$. Másrészt a felfúvódás során az inflatonmező kondenzátumának amplitúdója $\varphi_f^2 \approx \varphi_i^2 - (2\pi)^{-1}m_{Pl}^2\ln(a_f/a_i)$, ahonnan azonban $\varphi_i^2 \gg \varphi_f^2$ lévén közelítőleg $m_{Pl}^2\ln(a_f/a_i) \approx \varphi_i^2$. Ezért a legerősebb fluktuációk hullámhosszára $\lambda_{ph} \sim H_i^{-1}(a_f/a_i) \sim H_i^{-1}e^{(\varphi_i/m_{Pl})^2}$, erősségére pedig a (7.3.73) összefüggés alapján a

$$(\delta_\Phi)_{max} \approx (m/m_{Pl})\ln(a_f/a_i) \approx m m_{Pl}^{-3}\varphi_i^2 \quad (7.4.154)$$

becslés adható. A kezdeti kondenzátum amplitúdójától meg kell követelni (mint arról a felfúvódás általános követelményeinek tárgyalásakor beszéltünk), hogy a kondenzátum értéke a felfúvódási szakasz kezdetére $\varphi_i \sim m_{Pl}^2 m^{-1}$ nagyságrendűre vagy az alá essen vissza. Ez biztosítja, hogy a felfúvódást megelőzően a kondenzátum $m^2\varphi^2/2$ energiája az m_{Pl}^4 Planck-skála feletti értékről visszaessen az alá,

az $\sim m^2 m_{Pl}^2$ értékre, azaz az inflatonmező kezdeti kvantumfluktuációi klasszikus fluktuációkká válhassanak a felfúvódási szakasz kezdetére. Másrészt, ha feltesszük, hogy ugyanakkor $\varphi_i > m_{Pl}(m/m_{Pl})^{-1/2}$, akkor a $\lambda_{ph} \sim H_i^{-1}(a/a_i)$ hullámhosszakon a fluktuációk nagyon erősek lesznek, $\delta_\Phi > 1$ és teljesen megszüntetik a homogenitást. Ezek azonban az m tömeg realisztikus értékei esetén is óriásiak. Pl. $m/m_{Pl} \sim 10^{-6}$ esetén közelítőleg $\lambda_{ph} \sim H_i^{-1}\exp(m_{Pl}/m) \sim H_i^{-1}\exp(10^6)$, ami messze meghaladja a megfigyelhető $\sim H_i^{-1}\exp(70)$ méretskálát. Ugyanakkor a Világegyetem a $\lambda_{ph} < H_i^{-1}\exp(m_{Pl}/m)$ skálán közelítőleg homogén marad („quasi-homogeneous"). A kezdeti inflaton-amplitúdó $m_{Pl}(m/m_{Pl})^{-1} > \varphi_i > m_{Pl}(m/m_{Pl})^{-1/2}$ intervalluma tehát egyidejűleg tudja biztosítani, hogy a Világegyetem egy a megfigyelhetőt jócskán magába foglaló része homogén és izotróp marad, míg a látható Világegyetem méretét messze meghaladó skálán a kezdeti kvantumfluktuációk óriási inhomogenitást hoznak létre.

Érvek szólnak amellett, hogy a Világegyetem jelenleg látható tartományán túli részében a felfúvódás a végtelenségig folytatódik valahol a térben. Tegyük fel, hogy a $t_i \approx t_{Pl}$ pillanatbeli Világegyetem egy H_i^{-1} méretű kauzálisan összefüggő tartományában az inflaton-kondenzátum értéke $\varphi_i > m_{Pl}(m_{Pl}/m)$. Ennek a tartománynak a mérete $\Delta t_H \approx H_i^{-1}$ Hubble-idő alatt H_i^{-1} $e^{H_i \Delta t_H} = eH_i^{-1}$ méretűre nő, azaz a térfogata az eredeti térfogat $e^3 \approx 20$-szorosára. Az egyes H_i^{-1} méretű tartományokban az inflatonmező jó közelítéssel homogén, viszont az egyes ilyen tartományokban a mező átlagértéke erősen ingadozik. A klasszikus inflatonmező értéke Δt_H idő alatt $\Delta\varphi_{kl}$ megváltozást szenved, amit a lassú gördülésnek megfelelő $3H_i\dot{\varphi} = -V_{,\varphi}$ téregyenletből ($V = \frac{1}{2}m\varphi^2$ potenciál esetén)

$$\Delta\varphi_{kl} \approx -\frac{V_{,\varphi}}{3H_i}\Delta t_H \approx -\frac{m}{\kappa}\Delta t_H \sim -m m_{Pl} H_i^{-1} \tag{7.4.155}$$

nagyságúnak becsülünk, másrészt viszont $H_i^2 \approx \frac{\kappa^2 m^2}{9}\varphi_i^2 \sim \left(\frac{m}{m_{Pl}}\right)^2 \varphi_i^2$ miatt $H_i \sim (m/m_{Pl})\varphi_i$, úgyhogy

$$\Delta\varphi_{kl} \sim -3m_{Pl}^2\varphi_i^{-1}. \tag{7.4.156}$$

Az inflatonmező várható értéke az egyes H_i^{-1} méretű tartományokban részben a $\Delta\varphi_{kl}$ klasszikus megváltozásból, részben a kvantumfluktuációk okozta $\Delta\varphi_{kv}$ megváltozásból adódik. Itt azokról a kvantumfluktuációkról van szó, amelyek a t_i pillanatban a Hubble-sugárnál kisebb hullámhosszúak, de a Δt_H Hubble-idő alatt a felfúvódás következtében a Hubble-sugárnál nagyobb hullámhosszúvá válnak. Az utóbbiak nagyságrendje $|\Delta\varphi_{kv}| \sim H_i \sim (m/m_{Pl})\varphi_i$. A tartományok felében a kvantumjárulék véletlenszerűen csökkenti, a tartományok másik felében meg növeli az inflatonmező várható értékét. Egy olyan tartományban, amelyben a kvantumfluktuáció megnöveli a mező várható értékét, az inflatonmező teljes megváltozása

$$\Delta^{>}\varphi = \Delta\varphi_{kl} + |\Delta\varphi_{kv}| \sim -m_{Pl}^2\varphi_i^{-1} + (m/m_{Pl})\varphi_i. \tag{7.4.157}$$

Ha $\varphi_i > m_{Pl}(m_{Pl}/m)^{1/2}$, akkor $m_{Pl}^2\varphi_i^{-1} < (m_{Pl}m)^{1/2}$ és $(m/m_{Pl})\varphi_i > (m_{Pl}m)^{1/2}$, úgyhogy $\Delta^{>}\varphi > 0$. A Hubble-idő eltelte után mindig lesz tehát a teljes Világegyetem megnőtt térfogatában olyan homogén tartomány, amelyben tovább folyhat a felfúvódás.

A teljes Világegyetemben tehát exponenciálisan nő azon tartományok száma, amelyekben a kvantumfluktuációk hosszának növekedése miatt az inflatonmező amplitúdója nagyobb lesz, mint annak kezdeti értéke. Így a térben valahol mindig tovább folyik a felfúvódás, a Világegyetem önfenntartóvá válik. Azokban a tartományokban, amelyekben az inflatonmező az önfenntartási $\varphi_c \sim m_{Pl}(m_{Pl}/m)^{1/2}$ érték alá kerül, a kvantumfluktuációk szerepe elhanyagolhatóvá válik. Ezek a tartományok is exponenciálisan nőnek és belőlük nagyon nagy méretű homogén tartományok fejlődnek ki. Mindez azt jelenti, hogy a Világegyetem szerkezete nagyon nagy (a mai látható Világegyetem méretét jóval meghaladó) méretskálákon igen bonyolult lehet. Ennek a globális szerkezetnek a közvetlen megfigyelése csak soksok milliárd év múlva lesz lehetséges.

FÜGGELÉK

A Mértékegységek

A.1 Természetes egységek

A kozmológiában kényelmes Planck-féle (másképpen: természetes) egységeket használni, amikor a G gravitációs állandó, a $\hbar$ redukált Planck-állandó, a c fénysebesség és a k_B Boltzmann-állandó értékét egységnyinek tekintjük:

$$G = \hbar = c = k_B = 1. \tag{A.1}$$

A fenti univerzális állandókból felépíthetjük egyszerű dimenzionális megfontolások alapján a Planck-hosszúságot, a Planck-időt, a Planck-tömeget és a Planck-hőmérsékletet, amelyeknek értékét SI mértékegységekben is megkapjuk, ha behelyettesítjük G, $\hbar$, c, k_B SI egységekben adott értékeit:

$$\begin{aligned}
\ell_{Pl} &= (G\hbar/c^3)^{\frac{1}{2}} = 1,616 \cdot 10^{-35} \text{ m}, \\
t_{Pl} &= \ell_{Pl}/c = 5,391 \cdot 10^{-44} \text{ s}, \\
m_{Pl} &= (\hbar c/G)^{\frac{1}{2}} = 2,177 \cdot 10^{-8} \text{ kg} = 1,2209 \cdot 10^{19} \text{GeV}/c^2, \\
T_{Pl} &= m_{Pl}c^2/k_B = 1,416 \cdot 10^{32} \text{ K} = 1,221 \cdot 10^{19} \text{ GeV}.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Természetesen a Planck-i ℓ_{Pl}, t_{Pl}, m_{Pl}, T_{Pl} egységek segítségével bármilyen más mennyiség Planck-i egysége megszerkeszthető, pl. a térfogaté $V_{Pl} = \ell_{Pl}^3 = 4,220 \cdot 10^{-105}\text{m}^3$ és az energiasűrűségé $\epsilon_{Pl} = m_{Pl}/\ell_{Pl}^3 = 5,159 \cdot 10^{97}\text{kg/m}^3$. Hasonlóképpen, ha adott valamely mennyiség értéke SI egységekben, akkor a Planck-i egységekben könnyen kiszámolhatjuk a megfelelő természetes egységekben mért (dimenziótlan) mennyiséget, pl. a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás $T = 2,73$ K hőmérséklete természetes egységekben

$$T = \frac{2,73 \text{ K}}{1,416 \cdot 10^{32} \text{ K}} = 1,93 \cdot 10^{-32}. \tag{A.3}$$

Néha kényelmes a kvantumtérelméletben használatos $\hbar = c = k_B = 1$ egységrendszerben dolgozni. Ekkor

$$\ell_{Pl} = t_{Pl} = m_{Pl}^{-1}, \quad G^{-1/2} = m_{Pl}, \quad T_{Pl} = m_{Pl} \tag{A.4}$$

adódik, az energiasűrűség egysége pedig $\epsilon_{Pl} = m_{Pl}^4$, továbbá 4-dimenziós téridőben a φ skalármező mértékegysége m_{Pl}.

A.2 Csillagászati egységek

A csillagászatban a távolságokat parsec (parszek),

$$1 \text{ pc } = 3,26 \text{ fény év } = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}, \tag{A.5}$$

és megaparsec, azaz 1 Mpc= 10^6 pc egységekben szokás megadni; a galaxisok és galaxisklaszterek tömegét pedig az

$$m_\odot = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \tag{A.6}$$

Naptömegben.

A csillagászati objektumok L **luminozitása** az égitest által időegység alatt kibocsátott energia, egysége a watt. Az égitestből a megfigyelőhöz érkező F **bolometrikus fluxus** az égitestből a megfigyelőhöz időegység alatt, a sugárzás irányára merőleges egységfelületen érkező energia, egysége $J/s/m^2$. Az m_{bol} bolometrikus magnitúdó a bolometrikus fluxus negatív logaritmusa, $m_{bol} = -2,5\text{lg}_{10}F$.

A.3 Töltés

Az e elemi töltést a Heaviside-Lorentz-rendszer szerint fogjuk használni, mint ahogy azt számos részecskefizikai tankönyv teszi. Ekkor két, egymástól r távolságra elhelyezkedő, nyugvó elektron közötti Coulomb-erő $F = e^2/(4\pi r^2)$ és a finomszerkezeti állandó $\alpha = e^2/(4\pi) = 1/137$.

A.4 Téridő-sokaság szignatúrája

Mindenütt a $(+,-,-,-)$ Lorentz-szignatúrát fogjuk használni, úgyhogy a Minkowski-téridőben az elemi ívhossz négyzete $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.

A.5 Kozmológiai paraméterek

A Világegyetemet mai állapotában az alábbi kozmológiai paraméterek jellemzik:

- a kritikus energiasűrűség: $\epsilon_{kr}(t_0) \approx 10^{-29}$ g/ cm^3,
- a CMB energiasűrűsége: $\epsilon_\gamma(t_0) \approx 10^{-5}\epsilon_{kr}(t_0)$,
- a barion-hányad: $\Omega_{B\ 0} \approx 0,04$,
- a sötét anyag hányada: $\Omega_{d.m.\ 0} \approx 0,26$,
- a sötét energia hányada: $\Omega_{\Lambda\ 0} \approx 0,7$,
- a teljes energiasűrűség és a kritikus energiasűrűség hányadosa: $\Omega_0 \approx 1$.

B Nem relativisztikus ideális folyadék

Emlékeztetőül a nem relativisztikus hidrodinamika egyenleteit foglaljuk össze súrlódásmentes folyadék áramlása esetén. Az áramlás jellemzői,

- a $\vec{v}(\vec{r},t)$ sebességmező, ami megadja, hogy a t időpillanatban éppen az $\vec{r}$ helyen tartózkodó anyagdarabnak mekkora a sebessége,

- az $\epsilon(\vec{r},t)$ tömegsűrűség-mező,
- az $s(\vec{r},t)$ entrópiasűrűség-mező, azaz az egységnyi tömeg entrópiája,
- a $p(\vec{r},t)$ nyomásmező,
- a $\phi(\vec{r},t)$ gravitációs potenciál.

Összesen 7 független mezőt vezettünk be, közülük 3 (a sebességmező komponensei) egy térbeli polárvektor 3 komponenseként transzformálódik térbeli elforgatások során, a másik 4 mező skalár. Ezeknek a mezőknek a bevezetése hallgatólagosan feltételezi, hogy lokálisan, a folyadék kis darabkáiban termodinamikai egyensúlyi állapot alakul ki, amelyet ezekkel az intenzív mennyiségekkel lehet jellemezni. Ehhez az szükséges, hogy a bevezetett mezők időbeli és térbeli változásának karakterisztikus ideje és térbeli változásának karakterisztikus távolsága sokkal nagyobb legyen, mint rendre az atomok átlagos szabad repülési ideje és átlagos szabad úthossza. A folyadék mozgását a hidrodinamika egyenletei írják le. Feltesszük a továbbiakban, hogy a folyadék nem viszkózus.

Az ideális folyadék hidrodinamikai egyenletei az alábbiak:

- A tömegre érvényes a lokális tömegmegmaradás törvénye, amit a

$$0 = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla}(\epsilon \vec{v}) \tag{B.1}$$

  kontinuitási egyenlet fejez ki.

- Ha Newton II. törvényét tetszőlegesen kiszemelt tömegdarabra alkalmazzuk, akkor az Euler-egyenleteket kapjuk a sebességmezőre:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\vec{\nabla} p}{\epsilon} + \vec{\nabla}\phi = 0. \tag{B.2}$$

- Ha elhanyagoljuk az energiadisszipációt (azaz a folyadék ideális, nem viszkózus), akkor minden tömegdarabka entrópiája állandó; ha $\vec{r}(t)$ az anyagdarabka pályája, akkor entrópiájának állandóságát a

$$\frac{ds(\vec{r}(t),t)}{dt} \equiv \frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})s = 0 \tag{B.3}$$

  egyenlet írja le.

- A tömegsűrűség a Poisson-egyenlet alapján határozza meg a gravitációs potenciált:

$$\Delta\phi = 4\pi G\epsilon. \tag{B.4}$$

- Az egyenletek rendszere akkor válik zárttá, ha megadjuk a folyadék

$$p = p(\epsilon, s) \tag{B.5}$$

  állapotegyenletét.

Az egyenletekben a $\vec{\nabla}_{\vec{r}} = \vec{\nabla}$ egyszerűsítő jelölést használtuk.

C A viriáltétel

A viriál definíció szerint egy N-részecskés klasszikus mechanikai rendszer skaláris tehetetlenségi nyomatéka idő szerinti első deriváltjának az 1/2-edszerese. A Newton-i mechanikában a skaláris tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta = \sum_{a=1}^{N} m_a \vec{r}_a^{\,2}, \tag{C.1}$$

ahol m_a, ill. $\vec{r}_a$ rendre az a-adik részecske tömege, ill. helyzetvektora. Képezzük ebből a $\mathfrak{V}$ skaláris viriált,

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{2}\frac{d\Theta}{dt} = \sum_{a=1}^{N} m_a \vec{v}_a \vec{r}_a = \sum_{a=1}^{N} \vec{p}_a \vec{r}_a, \tag{C.2}$$

ahol $\vec{v}_a$ és $\vec{p}_a = m_a \vec{v}_a$ rendre az a-adik részecske sebessége és impulzusa. Képezzük a skaláris viriál idő szerinti első deriváltját:

$$\frac{d\mathfrak{V}}{dt} = \sum_{a=1}^{N} m_a \vec{v}_a^{\,2} + \sum_{a=1}^{N} m_a \ddot{\vec{r}}_a \vec{r}_a = 2K + \sum_{a=1}^{N} \vec{F}_a \vec{r}_a, \tag{C.3}$$

ahol K a részecskerendszer kinetikus energiája, $\vec{F}_a$ az a-adik részecskére ható eredő erő.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy az erők párkölcsönhatásból származnak és konzervatívak. Legyen $u(r)$ bármely részecskepár kölcsönhatási potenciális energiája (centrális kölcsönhatást tételezünk fel), ahol az a-adik és b-edik részecskéből alkotott pár esetén r helyére $r_{ab} = |\vec{r}_a - \vec{r}_b|$-t kell helyettesíteni. Fejezzük ki a (C.3) egyenlet jobb oldalán álló összeget a potenciállal. Az a-adik részecskére ható erő $\vec{F}_a = \sum_{b\neq a}^{N} \vec{F}_{a\leftarrow b}$, ahol $\vec{F}_{a\leftarrow b}$ a b-edik részecske által az a-adikra kifejtett erő. Ekkor

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{N} \vec{F}_a \vec{r}_a &= \sum_{a=1}^{N} \sum_{b\neq a}^{N} \vec{F}_{a\leftarrow b} \vec{r}_a \\
&= \sum_{a=1}^{N} \sum_{b<a} \vec{F}_{a\leftarrow b} \vec{r}_a + \sum_{a=1}^{N} \sum_{b>a} \vec{F}_{a\leftarrow b} \vec{r}_a.
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Alakítsuk át a második összeget:

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{N} \sum_{b>a} \vec{F}_{a\leftarrow b} \vec{r}_a &= \begin{array}{lllll}
\vec{F}_{1\leftarrow 2}\vec{r}_1 & +\vec{F}_{1\leftarrow 3}\vec{r}_1 & +\vec{F}_{1\leftarrow 4}\vec{r}_1 & \dots & +\vec{F}_{1\leftarrow N}\vec{r}_1 \\
 & +\vec{F}_{2\leftarrow 3}\vec{r}_2 & +\vec{F}_{2\leftarrow 4}\vec{r}_2 & \dots & +\vec{F}_{2\leftarrow N}\vec{r}_2 \\
 & & +\vec{F}_{3\leftarrow 4}\vec{r}_3 & \dots & +\vec{F}_{3\leftarrow N}\vec{r}_3 \\
\vdots & & & & \\
 & & & & +\vec{F}_{N-1\leftarrow N}\vec{r}_{N-1}
\end{array} \\
&= \vec{F}_{1\leftarrow 2}\vec{r}_1 \\
&\quad +\vec{F}_{1\leftarrow 3}\vec{r}_1 + \vec{F}_{2\leftarrow 3}\vec{r}_2 \\
&\quad +\vec{F}_{1\leftarrow 4}\vec{r}_1 + \vec{F}_{2\leftarrow 4}\vec{r}_2 + \vec{F}_{3\leftarrow 4}\vec{r}_3 \\
&\quad \dots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\vec{F}_{1\leftarrow N}\vec{r}_1 + \vec{F}_{2\leftarrow N}\vec{r}_2 + \ldots + \vec{F}_{N-1\leftarrow N}\vec{r}_{N-1} \\
= & \sum_{a=1}^{N}\sum_{b<a}\vec{F}_{b\leftarrow a}\vec{r}_b
\end{aligned} \tag{C.5}
$$

Ezt és a hatás-ellenhatás törvényét felhasználva a következő egyenlőségre jutunk:

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{N}\vec{F}_a\vec{r}_a &= \sum_{a=1}^{N}\sum_{b<a}\vec{F}_{a\leftarrow b}\vec{r}_a + \sum_{a=1}^{N}\sum_{b<a}\vec{F}_{b\leftarrow a}\vec{r}_b \\
&= \sum_{a=1}^{N}\sum_{b<a}\vec{F}_{a\leftarrow b}(\vec{r}_a - \vec{r}_b).
\end{aligned} \tag{C.6}
$$

Mivel $\vec{F}_{a\leftarrow b} = u'(r_{ab})(\vec{r}_b - \vec{r}_a)/r_{ab}$, ahol $u'(r) = du(r)/dr$, az adódik, hogy

$$
\sum_{a=1}^{N}\vec{F}_a\vec{r}_a = -\sum_{a=1}^{N}\sum_{b<a}u'(r_{ab})r_{ab}. \tag{C.7}
$$

A skaláris viriál idő szerinti első deriváltja tehát

$$
\frac{d\mathfrak{V}}{dt} = 2K - \sum_{a=1}^{N}\vec{F}_a\vec{r}_a = 2K - \sum_{a=1}^{N}\sum_{b<a}u'(r_{ab})r_{ab}. \tag{C.8}
$$

Speciális esetben, amikor a párkölcsönhatás potenciális energiája hatványfüggvény alakú, $u(r) = \alpha r^\beta$, akkor $u'(r)r = \alpha\beta r^\beta = \beta u(r)$, úgyhogy ebben az esetben

$$
\frac{d\mathfrak{V}}{dt} = 2K - \sum_{a=1}^{N}\vec{F}_a\vec{r}_a = 2K - \beta U_{tot}, \tag{C.9}
$$

ahol U_{tot} a mechanikai rendszer teljes potenciális energiája. Gravitációs kölcsönhatás esetén $\beta = -1$, úgyhogy

$$
\frac{d\mathfrak{V}}{dt} = 2K + U_{tot}. \tag{C.10}
$$

Idő szerinti átlagolás után,

$$
\langle f\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt \tag{C.11}
$$

a (C.8) egyenletből az alábbi, egzakt egyenletet kapjuk:

$$
\left\langle\frac{d\mathfrak{V}}{dt}\right\rangle_\tau = 2\langle K\rangle_\tau + \sum_{a=1}^{N}\langle\vec{F}_a\vec{r}_a\rangle_\tau. \tag{C.12}
$$

A viriáltétel azt mondja ki, hogy ha a skaláris viriál idő szerinti első deriváltja zérus, akkor az átlagos kinetikus energia meghatározható a részecskék mozgásának és a rájuk ható erőknek az ismeretében:

$$
2\langle K\rangle_\tau = -\sum_{a=1}^{N}\langle\vec{F}_a\vec{r}_a\rangle_\tau. \tag{C.13}
$$

Gravitációs párkölcsönhatás esetén

$$2\langle K\rangle_\tau = -\langle U_{tot}\rangle_\tau. \tag{C.14}$$

A tétel lehetővé teszi, hogy nem egyensúlyi rendszer átlagos kinetikus energiáját is megbecsüljük, amikor nem értelmezhető a hőmérséklet.

Egyetlen kérdés marad, hogy mikor alkalmazható a tétel, mikor tűnik el a skaláris viriál első deriváltja. Általában kötött rendszerek esetén, amikor a részecskék örökké együttmaradnak $\left\langle \frac{d\mathfrak{V}}{dt}\right\rangle_\tau$ eltűnik a $\tau \to \infty$ határesetben. Ekkor ugyanis a részecskék sebességei és koordinátái alulról és felülről is korlátosak, így a $\mathfrak{V} = \sum_a \vec{p}_a\vec{r}_a$ összeg is korlátos, $\mathfrak{V}_{min} \le \mathfrak{V} \le \mathfrak{V}_{max}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to\infty}\left|\left\langle\frac{d\mathfrak{V}}{dt}\right\rangle\right| &= \lim_{\tau\to\infty}\left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d\mathfrak{V}}{dt}\right| \\ &= \lim_{\tau\to\infty}\left|\frac{\mathfrak{V}(\tau)-\mathfrak{V}(0)}{\tau}\right| \le \lim_{\tau\to\infty}\frac{\mathfrak{V}_{max}-\mathfrak{V}_{min}}{\tau} = 0.\end{aligned} \tag{C.15}$$

Számunkra az lesz a kozmológiában az érdekes, amikor egy kozmológiai nemlineáris struktúra, pl. galaxis, galaxishalmaz már elegendően stabillá vált és hosszú ideje együtt van. Ekkor alkalmazhatjuk jó közelítéssel a viriáltételt, és azt mondjuk, hogy az adott struktúra **virializálódott**.

D Négyzetes középértékek

Legyen $f(\vec{x})$ zérus várható értékű véletlen mező. A véletlen $f(\vec{x})$ mező 2-pont korrelációs függvénye,

$$\xi_f(\vec{x}-\vec{y}) = \langle f(\vec{x}f(\vec{y})\rangle \tag{D.1}$$

lehetővé teszi, hogy a véletlen mező bármely lineáris függvényének szórásnégyzetét kiszámolhassuk. Erre a legegyszerűbb példa magának a véletlen mezőnek a szórásnégyzete:

$$\langle f^2\rangle = \xi_f(0). \tag{D.2}$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy a rendszer térben homogén és izotróp, azaz a korrelációs függvény csak az $r = |\vec{x}-\vec{y}|$ távolság függvénye.

Gyakran az is érdekes, hogy a véletlen mező $\bar{f} = \frac{1}{V}\int_V dV f(\vec{x})$ térfogati átlagának mi a $\langle \bar{f}^2\rangle$ szórásnégyzete, ahol a térfogati átlagot a mező értelmezési tartományát képező teljes térfogatnak valamely kisebb V térfogatú cellájára képezzük. Ekkor

$$\begin{aligned}\langle \bar{f}^2\rangle &= \left\langle \frac{1}{V}\int_V d^3x f(\vec{x})\frac{1}{V}\int_V d^3y f(\vec{y}\right\rangle \\ &= \frac{1}{V^2}\int_V d^3x\int_V d^3y\,\xi_f(|\vec{x}-\vec{y}|).\end{aligned} \tag{D.3}$$

Tegyük fel, hogy a korrelációs függvény csak valamilyen $r \ll r_c$ távolságok esetén különbözik lényegesen zérustól, ahol r_c a **korrelációs hossz**. Legyen továbbá az átlagoláshoz

használt cella lineáris mérete jóval nagyobb, mint a korrelációs hossz, $V \gg r_c^3$. Ilyen esetben jó közelítéssel

$$\int_V d^3y \xi_f(|\vec{x} - \vec{y}|) \approx \int_V d^3y \xi_f(|\vec{y}|), \tag{D.4}$$

és

$$\langle \bar{f}^2 \rangle = \frac{1}{V} \int_V d^3y \xi_f(|\vec{y}|). \tag{D.5}$$

Ha felhasználjuk, hogy a korrelációs függvény csak a korrelációs hosszon belül különbözik lényegesen zérustól, akkor az alábbi becslést tehetjük:

$$\langle \bar{f}^2 \rangle = \frac{r_c^3}{V} \xi_f(0). \tag{D.6}$$

Azt mondhatjuk , hogy a véletlen mező térfogati átlagának négyzetes középértéke („root mean square, rms") a véletlen mező négyzetes középértéke osztva $\sqrt{N}$-nel, ahol $N = r_c^3/V$ a **koherencia-térfogatok** száma az átlagoláshoz használt térfogatban.

References

[1] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, (Cambridge University Press, New York, 2005).

[2] R. Penrose, *Cycles of Time*, (The Bodley Head, London, 2010).

[3] S. Clesse, *An introduction to inflation after Planck: From theory to observations*, pp. 39. arXiv:1501.00460 [astro-ph.CO].