SZIMMETRIÁK ÉS SÉRÜLÉSÜK A KVANTUMTÉRELMÉLETBEN

Sailer Kornél

(Speciális előadások)

Debreceni Egyetem
(Kossuth Lajos Tudományegyetem)
Debrecen
1994.-2013.

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

A jelen speciális előadások a kvantumelmélet szimmetriáiról szóló előadásaim folytatását jelentik. A tematika összeállításában nagy mértékben támaszkodtam a [2,3] tankönyvekre. Az előadás feltételezi, hogy az Olvasó rendelkezik azokkal az alapismeretekkel a kvantumtérelméletnek a pályaintegrálok segítségével történő tárgyalását illetően, amelyeket pl. megtanulhat az [1] egyetemi jegyzetből. A jelen jegyzet szemléletében és jelöléseiben is az [1] jegyzetre épít. Talán szokatlan, de mindjárt azt javaslom az Olvasónak, hogy kezdje a jegyzet olvasását az A-D. Függelékkel. Ebben elmagyarázom azokat a fogalmakat, amelyek az [1] jegyzetbe már nem illettek bele, de amelyek nélkül a jelen jegyzet anyagának elmondása nagyon nehézkes lenne. Ezek a fogalmak a kvantumtérelméletek tárgyalásához szükséges matematikai eszköztár kibővítését jelentik, s mint ilyenek, kitérőt jelentenek. Ezért kerültek a Függelékbe.

I. A PERTURBÁCIÓSZÁMÍTÁSON ALAPULÓ RENORMÁLÁS

1. Divergenciák a kvantumtérelméletben

1.1. Naív megközelítés

(Mint arra már a bevezetőben utaltam, ezen fejezet megértéséhez szükség van az **A-D** függelékekben elmondottak ismeretére.)

Az önkölcsönható skalártér példáján, $d = 4$ dimenziós téridőben megmutatjuk, hogy a klasszikus hatás alapján megfogalmazott kvantumtérelméletben a Green-függvények ill. a 1PI vertexek csak formálisan vannak értelmezve, valójában azonban divergens integrálokat tartalmaznak. A divergenciák azért lépnek fel, mert az elméletek nem tartalmaznak semmilyen természetes levágási hosszat, amelynél kisebb távolságokon a részecskék nem propagálhatnak. Ezért a Feynman-diagramok belső vonalainak megfelelő propagátorok e diagramok matematikai kifejezéseinek integrandusában zérus argumentummal is előfordulnak. A 2-pont Green-függvények azonban zérus argumentum esetén szingulárisak. Bizonyos Feynman-diagramokban ráadásul ilyen szinguláris függvények szorzatai szerepelnek az integrandusban, és divergenssé teszik az integrált. Impulzusreprezentációban a fentiek azt jelentik, hogy a diagramok független belső vonalainak impulzusai szerinti integrálok ezen impulzusok nagysága tekintetében a végtelenig mennek. („A Fourier-transzformáció kis távolságokat és nagy impulzusokat kapcsol össze.") A megfelelő improprius integrálok az integrálás felső határának végtelensége miatt divergálnak. Mivel az impulzus szerinti integrálás felső határa okozza a „bajt", azért ultraibolya- (UV-) divergenciákról beszélünk ilyenkor.

Példaként nézzük az önkölcsönható skalártér esetét, amelynek hatásfunkcionálja:

$$S[\phi] \quad = \quad \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right], \tag{1.1}$$

ahol m^2, λ paraméterek.

Először nézzük meg a fagráfok szintjén, hogy melyek az el nem tűnő 1PI vertexfüggvények. Az 1PI vertexek generáló funkcionálja fagráfközelítésben a klasszikus hatás:

$$\Gamma^{[0]}[\varphi] \quad = \quad S[\varphi]. \tag{1.2}$$

Az n-pont vertexfüggvényeket ebből kapjuk úgy, hogy n-szer funkcionálderiválunk, majd az eredményt a $\varphi = 0$ helyen vesszük. Mivel a hatás csak a térmennyiség páros hatványait tartalmazza, ezért csak a $2n$-pont vertexek között találunk zérustól különbözőeket:

$$\Gamma^{(2)}(x, y) = \left. \frac{\delta^2 \Gamma^{[0]}}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} \right|_{\varphi=0} \quad = \quad \Delta^{-1}(x - y); \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(3)}(x,y,z) &= 0; && (1.4)\\
\Gamma^{(4)}(x,y,z,u) &= \lambda\delta(x-y)\delta(y-z)\delta(z-u); && (1.5)\\
\Gamma^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= 0, \text{ha} \qquad k>4, && (1.6)
\end{aligned}$$

ahol $\Delta^{-1}(x,y) = (-\partial_\mu\partial_\mu + m^2)\delta(x-y)$ a szabad skalártér euklideszi propagátorának az inverze. Ugyanezek az 1PI vertexek impulzusreprezentációban:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(2)}(p_1=p, p_2=-p) &= p^2+m^2, && (1.7)\\
\tilde{\Gamma}^{(3)}(p_1,p_2,p_3) &= 0, && (1.8)\\
\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1,p_2,p_3,-p_1-p_2-p_3) &= \lambda, && (1.9)\\
\tilde{\Gamma}^{(k)}(p_1,\ldots,p_k) &= 0, \text{ha} \qquad k>4. && (1.10)
\end{aligned}$$

Számoljuk ki ezután az 1PI vertexfüggvényekhez a járulékokat 1-hurok rendben. Ehhez szükségünk van a potenciál második deriváltjára:

$$V'' = \frac{\lambda}{2}\phi^2. \tag{1.11}$$

Az 1PI vertexek generáló funkcionáljához az 1-hurok járulék:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1[\varphi] &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left(1+\Delta\frac{\lambda}{2}\varphi^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\int dx \,\langle x| \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n\left[\Delta\varphi^2\right]^n|x\rangle\,. && (1.12)
\end{aligned}$$

Most $\varphi=\chi$, mert $\delta W/\delta J|_{J=0}=0$. Innen látjuk, hogy 1-hurok rendben megint csak a $2n$-pont vertexekhez lehetnek zérustól különböző járulékok:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{(2n)}_{1-hurok}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) =\\
&= -n!\frac{1}{2n}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^n\cdot\\
&\quad\cdot\Delta(x_n,x_1)2\delta(x_1-y_1)\Delta(x_1,x_2)2\delta(x_2-y_2)\cdots\\
&\quad\cdots\Delta(x_{n-1},x_n)2\delta(x_n-y_n). && (1.13)
\end{aligned}$$

Képezzük ennek a Fourier-transzformáltját:

$$\begin{aligned}
&\int dx_1\ldots dy_n e^{-\mathrm{i}(p_1x_1+\ldots+p_nx_n+q_1y_1+\ldots+q_ny_n)}\Gamma^{(2n)}_{1-hurok}(x_1,\ldots,y_n)\\
&= -\frac{(n-1)!}{2}(-\lambda)^n\int dx_1\ldots dx_n e^{-\mathrm{i}(p_1x_1+\ldots+p_nx_n+q_1x_1+\ldots+q_nx_n)}\cdot\\
&\quad\cdot\int\frac{dk_1}{(2\pi)^d}\frac{e^{\mathrm{i}k_1(x_1-x_n)}}{k_1^2+m^2}\int\frac{dk_2}{(2\pi)^d}\frac{e^{\mathrm{i}k_2(x_2-x_1)}}{k_2^2+m^2}\cdots\int\frac{dk_n}{(2\pi)^d}\frac{e^{\mathrm{i}k_n(x_n-x_{n-1})}}{k_n^2+m^2}. && (1.14)
\end{aligned}$$

A koordinátaintegrálok elvégzése után Dirac-delták szorzata jelenik meg az integrandusban:

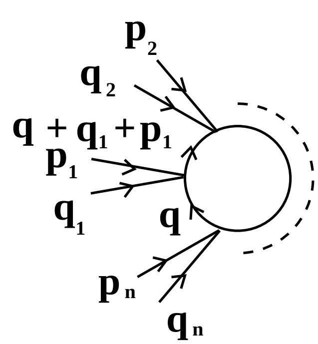
$$\delta(-p_1 - q_1 + k_1 - k_2)\delta(-p_2 - q_2 + k_2 - k_3) \cdots \delta(-p_n - q_n + k_n - k_1), \quad (1.15)$$

ami átírható az alábbi alakba:

$$\begin{aligned} &\delta(p_1 + \ldots + p_n + q_1 + \ldots q_n)\delta(p_{n-1} + q_{n-1} + k_n - k_{n-1}) \cdot \\ &\cdot \delta(p_{n-2} + q_{n-2} + p_{n-1} + q_{n-1} + k_n - k_{n-2}) \cdots \\ &\cdots \delta(p_1 + \ldots + p_{n-1} + q_1 + \ldots q_{n-1} + k_n - k_1). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ezek után könnyen el tudjuk végezni az impulzusok szerinti integrálokat a $k_n = q$ változóra vonatkozó kivételével. Végül a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} &\tilde{\Gamma}^{(2n)}_{1-hurok}(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n) \\ = &-\frac{(n-1)!}{2}(-\lambda)^n \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{(p_1 + q_1 + q)^2 + m^2} \cdots \\ &\cdots \frac{1}{(p_1 + \ldots + p_{n-1} + q_1 + \ldots + q_{n-1} + q)^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (1.17)$$



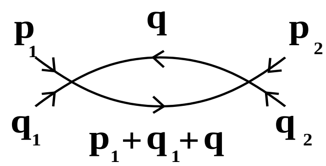
Vizsgáljuk meg a kapott integrál konvergenciáját! Jelöljük Λ-val a q négyesimpulzus abszolútértéke szerinti integrál felső határát. Tudjuk, hogy $\Lambda \to \infty$. Az alábbi becslés mutatja, hogy ha $d - 2n \geq 0$, akkor a d dimenziós elméletben $\Gamma^{(2n)}$ divergens:

$$\tilde{\Gamma}^{(2n)}_{1-hurok} \sim \int^{\Lambda} dq\, q^{d-1} q^{-2n} \sim \begin{cases} \Lambda^{d-2n}, & d - 2n > 0 \\ \ln\Lambda, & d - 2n = 0 \\ < \infty, & d - 2n < 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Például $d = 4$ dimenzióban $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ és $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ 1-hurok rendben divergens járulékot kapnak. A $2n = 4$ esetben:

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}_{1-hurok}(p_1, p_2, q_1, q_2) = -\frac{1}{2}(-\lambda)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{(p_1 + q_1 + q)^2 + m^2}, \quad (1.19)$$

ami a diagramok nyelvén:



A divergens tagokat megkaphatjuk, ha az integrandust Taylor-sorba fejtjük a $Q = p_1 + q_1$ külső impulzus zérus értéke körül. Felhasználva, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial Q_\nu} \left. \frac{1}{(Q+q)^2 + m^2} \right|_0 = -2 \left[\frac{\delta_{\mu\nu}}{(q^2+m^2)^2} - \frac{4 q_\nu q_\mu}{(q^2+m^2)^3} \right], \tag{1.20}$$

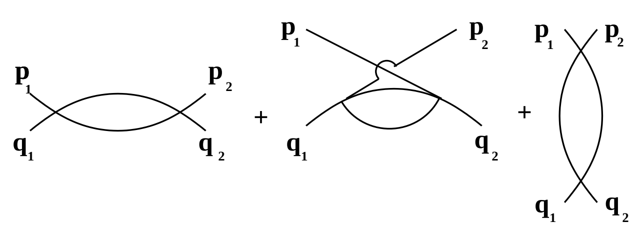
írhatjuk, hogy:

$$\frac{1}{(Q+q)^2+m^2} = \frac{1}{q^2+m^2} + \mathcal{O}(Q^\mu) - Q^\mu Q^\nu \left[\frac{\delta_{\mu\nu}}{(q^2+m^2)^2} - \frac{4 q_\nu q_\mu}{(q^2+m^2)^3} \right] + \mathcal{O}(q^{-6}). \tag{1.21}$$

A lineáris tagot nem érdemes explicit módon kiírni, hiszen hurokintegrál kiszámításakor ennek a járuléka az integrandus $O(d)$ szimmetriája miatt zérus lesz. Végül csak a divergens tagokat tartva meg:

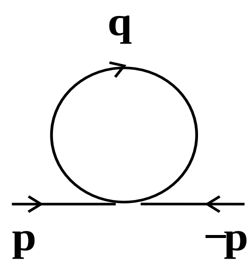
$$\begin{aligned} \left. \tilde{\Gamma}^{(4)}_{1-hurok} \right|_{div} &= -\frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^\Lambda q^3 dq \left[\frac{1}{(q^2+m^2)^2} + \mathcal{O}(q^{-6}) \right] \\ &= -\frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{q^3 dq}{(q^2+m^2)^2} \\ &= -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Valójában a divergens járulék ennek a 3-szorosa, mert 2 további 1-hurok járulékot adnak azok a Feynman-diagramok, amikor a p_1 külső lábat folytató részecskevonal a q_2, ill. a q_1 külső lábban végződik:



Nézzük ezután az 1PI 2-pont vertex 1-hurok rendű járulékát:

$$\left. \tilde{\Gamma}^{(2)}_{1-hurok} \right|_{div} (p) = \frac{1}{2} \lambda \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2+m^2}, \tag{1.23}$$



Az integrál most is divergens:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{(2)}_{1-hurok}\Big|_{div}(p) &= \frac{\lambda}{16\pi^2}\int_0^{\Lambda}\frac{q^3dq}{q^2+m^2}\\ &= \frac{\lambda}{32\pi^2}\int_0^{\Lambda^2}dq^2\left[1-\frac{m^2}{q^2+m^2}\right]\\ &= \frac{\lambda}{32\pi^2}\left[\Lambda^2-m^2\ln\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2}\right].\end{aligned}\tag{1.24}$$

Az 1-hurok rendben divergens vertexfüggvényekből rekonstruálhatjuk az 1PI vertexek generáló funkcionáljában az 1-hurok rendű divergens tagot:

$$\begin{aligned}\Gamma_{1-hurok}\Big|_{div}[\varphi] &= \frac{1}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\tilde{\Gamma}^{(2)}_{1-hurok}\Big|_{div}\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\\ &\quad+\frac{1}{4!}\int\frac{d^4p_1d^4p_2d^4p_3}{(2\pi)^{12}}\,\tilde{\Gamma}^{(4)}_{1-hurok}\Big|_{div}\tilde{\varphi}(p_1)\tilde{\varphi}(p_2)\tilde{\varphi}(p_3)\tilde{\varphi}(-p_1-p_2-p_3)\\ &= \frac{1}{2}\,\tilde{\Gamma}^{(2)}_{1-hurok}\Big|_{div}\int d^4x\varphi^2(x)+\frac{1}{4!}\,\tilde{\Gamma}^{(4)}_{1-hurok}\Big|_{div}\int d^4x\varphi^4(x).\end{aligned}\tag{1.25}$$

Látjuk, hogy az 1-hurok rendű divergens járulék a térmennyiségnek ugyanolyan monomjait tartalmazza, mint az eredeti hatás:

$$\begin{aligned}\Gamma_{1-hurok}\Big|_{div}[\varphi] &= \int d^4x\left[\frac{1}{2}a_1(\Lambda)(\partial_\mu\varphi)^2+\frac{1}{2}\lambda a_2(\Lambda)\varphi^2\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{4!}\lambda^2a_3(\Lambda)\varphi^4\right],\end{aligned}\tag{1.26}$$

ahol

$$a_1(\Lambda) = 0,\tag{1.27}$$

$$a_2(\Lambda) = \frac{1}{32\pi^2}\left[\Lambda^2-m^2\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right],\tag{1.28}$$

$$a_3(\Lambda) = -\frac{1}{32\pi^2}\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2}\right).\tag{1.29}$$

Úgy gondoljuk, hogy a divergens tagok azért jelennek meg, mert a klasszikus hatás, amelyet felírtunk, kis távolságokon (nagy impulzusoknál) olyan viselkedést jelent, ami nem egyeztethető össze egy konzisztens kvantumtérelmélettel. Ezért az elmélet viselkedését kis távolságokon módosítani kell. Ezt 1-hurok renddel bezárólag úgy érhetjük el a fenti példában, hogy az eredeti $S[\phi]$ hatáshoz hozzáadjuk a $\delta S_1[\phi]$ korrekciós tagot:

$$\begin{aligned} \delta S_1[\phi] &= -\int d^4x \left[\frac{1}{2}b_1(\Lambda)(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}\lambda b_2(\Lambda)\phi^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4!}\lambda^2 b_3(\Lambda)\phi^4\right], \end{aligned} \tag{1.30}$$

ahol a $b_i(\Lambda)$ együtthatókat úgy választjuk meg, hogy a $\lim_{\Lambda\to\infty}[b_i(\Lambda) - a_i(\Lambda)]$ határérték létezzen, de tetszőleges véges értékét megengedjük. Ezek után az új

$$S_1[\phi] = S[\phi] + \delta S_1[\phi] \tag{1.31}$$

hatás az eredetitől csak a paramétereiben különbözik:

$$\begin{aligned} S_1[\phi] &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}(1 - b_1(\Lambda))(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2 - \lambda b_2(\Lambda))\phi^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4!}\lambda(1 - \lambda b_3(\Lambda))\phi^4\right]. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Ekkor az elméletben az 1PI vertexek generáló funkcionálja 1-hurok renddel bezárólag:

$$\Gamma[\varphi] = S_1[\varphi] + \Gamma_1[\varphi], \tag{1.33}$$

ahol $\Gamma_1[\varphi]$ az $S[\varphi]$ hatásból számolt 1-hurok rendű tagokat jelenti. Ez a generáló funkcionál a $\Lambda \to \infty$ határesetben véges.

A fentieket a 4-dimenziós térben a ϕ^4 elméletben az 1-hurok effektív hatás szintjén láttuk, hogy a divergens járulékok koordinátareprezentációban *lokálisak és valósak*. Ennek következtében a $\delta S_1[\phi]$ korrekció tagjai, amelyeket ellentagoknak (pontosabban 1-hurok ellentagoknak) szokás nevezni, szintén lokálisak és valósak. Ezek az effektív hatásban ellentétes előjellel tartalmazzák a csupasz $S[\phi]$ hatás alapján meghatározott 1-hurok járulékok divergenciáit, s így kiejtik azokat. Ennek alapján felsejlik, hogy a renormálás programja úgy kerülhet megvalósításra, hogy a divergens diagramokból levonjuk a megfelelő divergens járulékokat, azaz – szakkifejezéssel élve – valamilyen levonási sémát alkalmazunk. A valódi 2-pont vertexfüggvény példáján ezt úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a divergens 1-hurok diagram járulékát,

$$\gamma_2(x - y) = \frac{\lambda}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip\cdot(x-y)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2}, \tag{1.34}$$

helyettesítjük a véges

$$\sigma_2(x-y) \;=\; \gamma_2(x-y) - A_2\delta^{(4)}(x-y) \tag{1.35}$$

kifejezéssel, ahol $A_2 = \lambda b_2(\Lambda)$ végtelen konstans, amelynek véges részét azáltal tudjuk rögzíteni, hogy Σ-ra valamilyen jól definiált normálási feltételt írunk elő. Ezt a feltételt renbormálási feltételnek fogjuk nevezni. A szóban forgó példában arról van szó, hogy az eredeti, azaz csupasz m tömegnek nem tulajdonítunk fizikai jelentést, hanem a renormálási feltétellel az $m^2+\lambda[a_2(\Lambda)-b_2(\Lambda)] \equiv m_r^2$ állandó értékét rögzítjük. Hasonlóan, 1-hurok rendben az effektív hatásban koordinátareprezentációban megjelenik egy divergens, lokális és valós

$$\begin{aligned}\gamma_4(x,y,z,u) \;=\; & \int \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3}{(2\pi)^{12}} e^{ip_1x+ip_2y+ip_3z-i(p_1+p_2+p_3)u} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2} \\ & \times\Big(\frac{1}{(q-p_1-p_2)^2+m^2}+\frac{1}{[q-(p_1-p_3)]^2+m^2} \\ & +\frac{1}{[q-(p_1-p_4)]^2+m^2}\Big)\end{aligned} \tag{1.36}$$

járulék. Ezt helyettesítjük egy divergens együtthatójú, lokális és valós tag levonása után a

$$\sigma_4(x,y,z,u) \;=\; \gamma_4(x,y,z,u) - A_4\delta^{(4)}(x-y)\delta^{(4)}(x-z)\delta^{(4)}(x-u) \tag{1.37}$$

kifejezéssel, ahol $A_4 = \lambda^2 b_3(\Lambda)$. Ha $\lambda + \lambda^2[a_3(\Lambda) - b_3(\Lambda)] \equiv \lambda_r$ értékét rögzítő feltételt rovunk ki az 1PI 4-pont vertexfüggvényre, akkor a bevezetett 2 renormálási feltétel alkalmas arra, hogy a levonási tagok végez részeit rögzítsük. Egyúttal a csupasz m^2 és λ paramétereket is kifejezhetjük a renormálási feltételek segítségével, mint a Λ levágás és a renormált m_r^2 és λ_r tömeg és csatolási állandó segítségével. Az utóbbiak értéke véges és nekik tudunk közvetlenül vagy közvetve fizikai jelentést tulajdonítani.

A fenti példán vázoltuk annak az eljárásnak a lényegét, amellyel értelmes kvantumtérelméletet fogalmazhatunk meg, amely mentes a matematikailag értelmetlen divergens integráloktól. Ennek érdekében az elmélet rövid távolságú viselkedését kell módosítanunk pl. a Λ levágás bevezetésével. A kérdés általánosan úgy fogalmazható meg, hogy ha kiindulunk egy klasszikus hatásból, akkor meg tudjuk-e úgy választani az eredeti elmélet paramétereit, mint a levágási paraméter függvényeit, hogy a Green-függvények generáló funkcionálja (s így maguk a Green-függvények is) véges határértékkel rendelkezzenek $\Lambda \to \infty$ esetén. Mivel a Green-függvények 1PI vertexfüggvényekből épülnek fel, ezért elegendő ezek végességének biztosítása (erre még részletesebben visszatérünk). Az elmélet rövid távolságú viselkedésének módosítására számos lehetőség van, ezeket a módokat regularizációs eljárásoknak nevezzük. Ha lehetséges az elmélet rövid távolságú viselkedésének olyan módosítása, hogy az 1PI vertexek generáló funkcionáljának a határértéke véges és független a regularizáció módjától, akkor az elméletet renormálhatónak nevezzük. Ha ezenkívül még az is kiderül, hogy a fenti eljárás során módosított hatás paraméterei függetlenek a levágási paramétertől, akkor az elméletet szuperrenormálhatónak nevezzük. A renormálhatóság a fentiek alapján azt jelenti, hogy az elmélet érzéketlen a rövidtávolságú viselkedésre.

A fenti renormálási eljárás a perturbációszámításon alapul. A végtelenségeket először 1-hurok rendben tüntetjük el, majd ezután 2-hurok rendben, 3-hurok rendben stb. A renormálható elméletben a hatás mindvégig megőrzi eredeti alakját. Az elmélet paramétereihez azonban minden rendben további, a kölcsönhatás eredeti csatolási állandója szerint növekvő rendű korrekciók adódnak hozzá. A hatáshoz hozzáadott korrekciós tagokat ellentagoknak szokás nevezni. Egy elmélet perturbatív renormálhatóságának bizonyítása azt jelenti, hogy a perturbációszámítás valamennyi rendjében igazolni kell, hogy az ellentagok hozzáadásával a hatás megőrzi eredeti alakját és az 1PI vertexek generáló funkcionálja a regularizáció módjától független véges értékű kifejezés.

A következő fejezetekben először megvizsgáljuk általánosabban, hogy milyen típusú UV-divergenciák léphetnek fel és mikor. Bemutatunk néhány regularizációs eljárást. Végül foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy a fenti renormálási eljárás nem mentes minden önkényességtől. Emlékezzünk vissza, hogy példánkban a $b_i(\Lambda)$ paramétereket úgy vezettük be, hogy a $b_i(\Lambda) - a_i(\Lambda)$ különbség határértéke $\Lambda \to \infty$ esetben tetszőleges c_i véges állandó lehetett. Ezek a c_i állandók önkényesen megválaszthatók. Ezeknek az állandóknak az eredete az alábbi: A naiv módon használt klasszikus hatás a kvantumtérelméletben végtelenségekre vezetett. Ezeket a végtelenségeket úgy kezeltük, hogy ellentétes előjelű, $\Lambda \to \infty$ határesetben ugyancsak végtelennek adódó tagokat adtunk hozzájuk. A c_i állandók ,, mint két végtelen mennyiség különbsége" léptek fel. Ezért a fizikai elméletnek ezen c_i paraméterek értékeitől függetlennek kell lennie. A ,,végtelenek renormálása" mellett beszélhetünk tehát egy véges renormálásról, amikor a véges c_i paraméterek értékeit változtatjuk. Ezeket a transzformációkat renormálási transzformációknak nevezzük; ezek alkotják a renormálási csoportot. A fizikai elméleteknek a renormálási csoport szimmetriája. A regularizációs eljárásokkal való ismerkedés után foglalkozni fogunk a renormálási csoporttal.

1.2. A látszólagos dimenzió

A kvantumtérelméletben is (mint minden fizikai elméletben) a fizikai mennyiségeknek van egy természetes dimenziója, amelyet a kvantumtérelméletben a tömeg dimenziójával szoktunk kifejezni:

$$[p] = [m] = 1; \qquad [x] = -1; \qquad [\partial_x] = 1. \tag{1.38}$$

A térmennyiségek természetes dimenzióját annak alapján állapíthatjuk meg, hogy a hatás ,,kinetikus energia tagjának" dimenziótlannak kell lenni:
skalártér esetén:

$$\left[\int d^D x(\partial_\mu\phi)^2\right] = 0, \qquad -D + 2[\phi] + 2 = 0,$$
$$[\phi] = \frac{D-2}{2}; \tag{1.39}$$

1/2-spinű tér esetén:

$$\left[\int d^D x\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/\psi\right] = 0, \qquad -D + 2[\psi] + 1 = 0,$$
$$[\psi] = \frac{D-1}{2}; \tag{1.40}$$

vektortér esetén:

$$\left[\int d^D x(\partial_\mu A_\nu)^2\right] = 0, \qquad -D + 2[A_\nu] + 2 = 0,$$
$$[A_\nu] = \frac{D-2}{2}. \tag{1.41}$$

A fenti természetes dimenzió mellett a kvantumtérelméletben szokás a terek ún. kanonikus dimenzióját is értelmezni. A kanonikus dimenziót az szabja meg, hogy a tér propagátora nagy impulzusoknál hogyan viselkedik. Ha $\lambda \to \infty$ esetén a propagátor eleget tesz az

$$C_1\lambda^{-\sigma} < |\Delta(\lambda p)| < C_2\lambda^{-\sigma} \tag{1.42}$$

egyenlőtlenségnek alkalmas C_1, C_2 állandókkal és σ kitevővel, akkor a propagátor kanonikus dimenziója $[\Delta]_c = -\sigma$. Mivel a propagátor két téroperátor időrendezett szorzatának várható értéke,

$$\int d^D p e^{\mathrm{i}px}\Delta(p) \quad \sim \quad \langle T(\phi(x)\phi(0))\rangle, \tag{1.43}$$

a térmennyiség kanonikus dimenziója:

$$[\phi]_c \quad = \quad \frac{D-\sigma}{2}. \tag{1.44}$$

A kanonikus dimenzió:
skalártér esetén:

$$\Delta(p) = (p^2 + m^2)^{-1}, \qquad \sigma = 2,$$
$$[\phi]_c = \frac{D-2}{2} = [\phi]; \tag{1.45}$$

1/2-spinű tér esetén:

$$\Delta(p) = (\not p + m)^{-1}, \qquad \sigma = 1,$$
$$[\psi]_c = \frac{D-1}{2} = [\psi]. \tag{1.46}$$

vektortér esetén, ha $m \neq 0$:

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}}{p^2+m^2}, \qquad \Delta_{\mu\nu}(\lambda p) \to \lambda^0,$$
$$\sigma = 0 \qquad [A_\mu]_c = \frac{D}{2} \neq [A_\mu]; \tag{1.47}$$

vektortér esetén, ha $m = 0$:

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2}, \qquad \Delta_{\mu\nu}(\lambda p) \to \lambda^{-2},$$
$$\sigma = 2 \qquad [A_\mu]_c = \frac{D-2}{2} = [A_\mu]. \tag{1.48}$$

Ezekben a példákban egyedül a tömeges vektortér kanonikus dimenziója különbözik a természetes dimenziótól, a többi esetben a kanonikus és a természetes dimenzió megegyezik.

A kanonikus dimenzió segítségével meghatározhatjuk a kvantumtérelméletben előforduló Feynman-diagramok ill. a nekik megfelelő integrálok látszólagos divergenciafokát. Go Tetszőleges valódi vertexfüggvényhez járulékot adó γ 1PI diagram esetén a $\delta(\gamma)$ látszólagos dimenzió megadja, hogy ha a belső impulzusokat átskálázzuk, $k_l \to \lambda k_l$, és a λ skálafaktorral végtelenhez tartunk, akkor a diagram járuléka $\tilde{I}_\gamma(P) \sim \lambda^{\delta(\gamma)}$ szerint skálázik. Használjuk fel megfontolásainkhoz a diagram általános szerekezetét, ill. paraméteres előállítását. (A belső impulzusok átskálázásának az α_l paraméterek $\alpha_l \to \lambda^{-2}\alpha_l$ átskálázása felel meg.) Az i típusú propagátor $\Delta_i(k_l) \sim \lambda^{\sigma_i}$ szerint skálázik, legyen I_i az ilyen típusú belső vonalak száma. Legyen a V_α típusú vertexből v_α darab a diagramban, s legyen egy ilyen vertexnek δ_α darab deriváltas lába, akkor a vertex λ^{δ_α} faktort ad a $\tilde{I}_\gamma$ kifejezéshez. Legyen L a független hurkok (hurokimpulxusok) száma. Minden hurokimpulzus szerinti D-dimenziós integrál λ^D szorzót eredményez. Ezért a γ diagram látszólagos divergenciafoka

$$\begin{aligned}
\delta(\gamma) &= DL + \sum_\alpha v_\alpha \delta_\alpha - \sum_i I_i \sigma_i \\
&= D[I-(V-1)] + \sum_\alpha v_\alpha \delta_\alpha - \sum_i I_i \sigma_i \\
&= D[\sum_i I_i - \sum_\alpha v_\alpha + 1] + \sum_\alpha v_\alpha \delta_\alpha - \sum_i I_i \sigma_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i (D-\sigma_i) I_i + \sum_\alpha v_\alpha(\delta_\alpha - D) + D \\
&= \sum_i 2 I_i [\phi_i]_c + \sum_\alpha v_\alpha(\delta_\alpha - D) + D. \qquad (1.49)
\end{aligned}
$$

Ha $n_{\alpha i}$ az i-típusú terek v vertexbe futó propagátorainak (belső vonalak) száma, akkor $I_i = \frac{1}{2}\sum_\alpha v_\alpha n_{\alpha i}$. Az összes belső vonal száma $\sum_i I_i = I$. Így tehát

$$
\begin{aligned}
\delta(\gamma) - D &= \sum_\alpha v_\alpha \Big(\sum_i n_{\alpha i}[\phi_i]_c + \delta_\alpha - D \Big) \\
&= \sum_\alpha v_\alpha \delta(V_\alpha) \qquad (1.50)
\end{aligned}
$$

adódik, ami indokolja, hogy az egyes vertexekhez a

$$
\delta(V_\alpha) = \sum_i n_{\alpha i}[\phi_i]_c + \delta_\alpha - D \qquad (1.51)
$$

kanonikus dimenziót rendeljük, és a látszólagos divergenciafokot, pontosabban $[\delta(\gamma) - D]$-t, mint az egyes vertexek kanonikus dimenzióinak összegét fogjuk fel.

Mivel minden V_α vertexet a hatásban valamilyen g_α csatolási állandó szoroz meg, és mivel a hatás dimenziótlan, azért a csatolási állandó kanonikus dimenziója, $[g_\alpha]$ egyenlő a vertex kanonikus dimenziójának minusz egyszeresével:

$$
[g_\alpha] = -\delta(V_\alpha). \qquad (1.52)
$$

Be lehet látni, hogy

$$
\delta(\gamma) = D - \sum_i E_i[\phi_i]_c + \sum_\alpha v_\alpha \delta(V_\alpha), \qquad (1.53)
$$

ahol E_i a külső vonalak száma (pontosabban az amputált lábak száma).

Használjuk fel, hogy $L = I - (V-1) = \sum_i I_i - \sum_\alpha v_\alpha + 1$ továbbá, hogy az i típusú külső lábak E_i számának és az i típusú belsőlábak I_i száma 2-szeresének összege megegyezik az egyes α típusu vertexekbe befutó i típusú $n_{\alpha\ i}$ láb összes $\sum_\alpha v_\alpha n_{\alpha\ i}$ számával valamint, hogy $2[\phi_i]_c = D - \sigma_i$. Ezeket figyelembe véve kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\delta(\gamma) &= DL - \sum_i I_i \sigma_i + \sum_\alpha v_\alpha \delta_\alpha \\
&= \sum_i I_i (D-\sigma_i) - \sum_\alpha v_\alpha (D - \delta_\alpha) + D \\
&= D + \sum_i I_i (D-\sigma_i) - \sum_\alpha v_\alpha \Big(\sum_i n_{\alpha\ i}[\phi_i]_c - \delta(V_\alpha) \Big) \\
&= D + \sum_\alpha v_\alpha \delta(V_\alpha) - \sum_i \Big(\sum_\alpha v_\alpha n_{\alpha\ i} - 2I_i \Big) [\phi_i]_c \\
&= D + \sum_\alpha v_\alpha \delta(V_\alpha) - \sum_i E_i [\phi_i]_c, \qquad (1.54)
\end{aligned}
$$

amit bizonyítani akartunk.

Ha a γ 1PI Feynman-diagram látszólagos divergenciafoka $\delta(\gamma)$, akkor ez azt jelenti, hogy ha az összes független impulzusokat, amelyekre integrálni kell, λ-val szorozzuk, majd a $\lambda \to \infty$ határesetet vesszük, akkor az 1PI diagram $\lambda^{\delta(\gamma)}$-val szorzódik, és a regularizált diagramm a Λ ultraibolya levágás tekintetében az alábbi aszimptotikus viselkedést mutatja:

$$\begin{aligned}
\delta(\gamma) > 0 \quad &\Rightarrow \quad \gamma \gtrsim \Lambda^{\delta(\gamma)}, \\
\delta(\gamma) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \gamma \gtrsim \ln\Lambda, \\
\delta(\gamma) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \gamma \text{ látszólag konvergens.}
\end{aligned} \tag{1.55}$$

A legutolsó esetben csak az egyes részdiagramok okozhatnak divergenciát.

A kölcsönhatási vertexek $\delta(V_\alpha)$ kanonikus dimenziója alapján erős megszorítást kapunk arra, hogy milyen kölcsönhatás lehetséges egy renormálható elméletben. A renormálhatóság feltétele ugyanis, hogy minden kölcsönhatási tag esetén $\delta(V_\alpha) \leq 0$ legyen. Jelöljön ϕ (pszeudoskalár v.) skalárteret, ψ Dirac-fermionteret, A_μ (axiálvektor v.) vektorteret (Stückelberg-féle mértékben). Ekkor $D = 4$ téridő-dimenzióban a Lorentz-skalár, hermitikus monomok között a $\bar\psi\psi\phi$, $\bar\psi\gamma_5\psi\phi$, ϕ^4, $(A^2)^2$, $\bar\psi \not{A}\psi$, $\bar\psi \not{A}\gamma_5\psi$, $\phi^\dagger(\partial_\mu\phi)A^\mu$, $\phi^\dagger\phi A^2$ kimerítik a lehetséges renormálható kölcsönhatási tagokat, ehhez vehetjük hozzá a lehetséges renormálható kinetikus energia tagokat, mint $\bar\psi \not{\partial}\psi$, $(\partial\phi)^2$, $(\partial_\mu A^\nu)^2$, $(\partial_\mu A^\mu)^2$, amelyekkel gyakorlatilag ki is merül a Lagrange-sűrűség $\delta(V_\alpha) = 0$ kanonikus dimenziójú lehetséges tagjainak listája. A ϕ^3, $\bar\psi\psi$, $\bar\psi\gamma_5\psi$ tagokra $\delta(V_\alpha) = -1$, a ϕ^2 és A^2 tagokra pedig $\delta(V_\alpha) = -2$ $D = 4$ dimenzió esetén. Tipikus nem renormálható kölcsönhatás $D = 4$ esetén a $\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi\partial^\mu\phi$ pszeudovektor csatolás a fermionok axiálvektorárama és a skalártér deriváltja közt, a $V - A$ típusú $\bar\psi\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi\bar\psi\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi$ Fermi-csatolás fermionáramok között, ill. a skalártér magasabbrendű monomjai, mint ϕ^5, ϕ^6, stb.

1.3. Az elméletek osztályozása

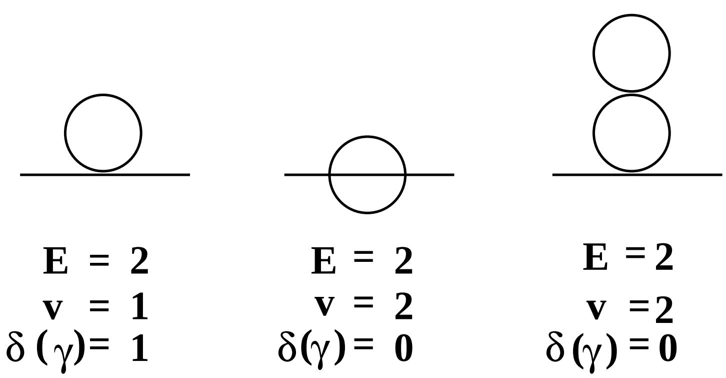
Ha feltesszük, hogy a renormálás fentebb vázolt programja a perturbációszámítás növekvő rendjei szerint haladva kivitelezhető, akkor az elméleteket az 1PI vertexek látszólagos dimenziója alapján lehet osztályozni. Ez az osztályozás tehát a hurokintegrálokban szereplő hatványkitevők leszámlálásán alapul. Az elméletek három nagy csoportba oszthatók.

- *Nem renormálható elméletek:*
  Ezekben az elméletekben létezik legalább egy V elemi vertex, amelynek a kanonikus dimenziója pozitív, $\delta(V) > 0$, ill. létezik legalább egy negatív dimenziójú csatolási állandó, $[g_V] < 0$. A perturbációszámítás rendjében

előre haladva (bármely 1PI vertexfüggvényben) tetszőlegesen megnőhet az előforduló V vertexek száma. Ennek következtében a perturbációs sorokban tetszőlegesen nagy látszólagos divergenciafokkal rendelkező diagramok fordulnak elő. Ez azt jelenti, hogy a V típusú vertexek v számának növekedtével egyre újabb és újabb típusú UV-divergenciák lépnek fel, és azok kompenzálásához újabb és újabb típusú ellentagokra van szükség. Utóbbi pl. skalárelméletben abból látszik, hogy egy V darab pozitív dimenziójú vertexet tartalmazó 1PI γ diagram $\delta(\gamma) = V\delta(V) + D$ divergenciájának kompenzálásához annyi n lábat tartalmazó V_{CT} ellentagvertexre van szükség, hogy $\delta(\gamma_{CT}) = \delta(V_{CT}) + D = n(D-2)/2 + D = V\delta(V) + D$ legyen, azaz ha a divergens γ diagram vertexeinek V száma nő, akkor nő az egyre magasabb fokú divergencia kiejtéséhez szükséges ellentagvertex külsőlábainak n száma, ez pedig azt jelenti, hogy az elemi tér egyre magasabb rendű monomjait kell ellentagokként bevezetnünk. Az új típusú ellentagok mindig újabb és újabb csatolási állandókat hoznak be az elméletbe. Így, ha végre akarjuk hajtani a renormálás perturbatív programját, akkor végtelen sok csatolási állandót kell bevezetni.

- *Szuperrenormálható elméletek:*
  Ilyen elméletet akkor kapunk, ha csak véges számú Feynman-diagram látszólagos divergenciafoka pozitív. Ide tartoznak azok az elméletek, amelyekben minden elemi vertex kanonikus dimenziója negatív, azaz minden csatolási állandó dimenziója pozitív, $[g_{V_\alpha}] > 0$ minden α esetén.

  Pl. a ϕ^4 elmélet $D = 3$ dimenzióban szuperrenormálható. Az egyetlen elemi vertex 4 részecskevonal találkozási pontja, ennek kanonikus dimenziója $\delta(V) = -3 + 4 \cdot \frac{1}{2} = -1$. Az E külső vonalat (amputált lábat) és v elemi vertexet tartalmazó γ 1PI vertexfüggvények látszólagos divergenciafoka: $\delta(\gamma) = 3 - \frac{1}{2}E - 1 \cdot v$. A divergens 1PI vertexfüggvények azok, amelyeknek a látszólagos divergenciafoka nemnegatív:



- *Renormálható elméletek:*
  Ha valamennyi V_α elemi vertex kanonikus dimenziója nem pozitív és létezik legalább egy V_0 elemi vertex, amelynek a kanonikus dimenziója zérus, $\delta(V_0) = 0$,

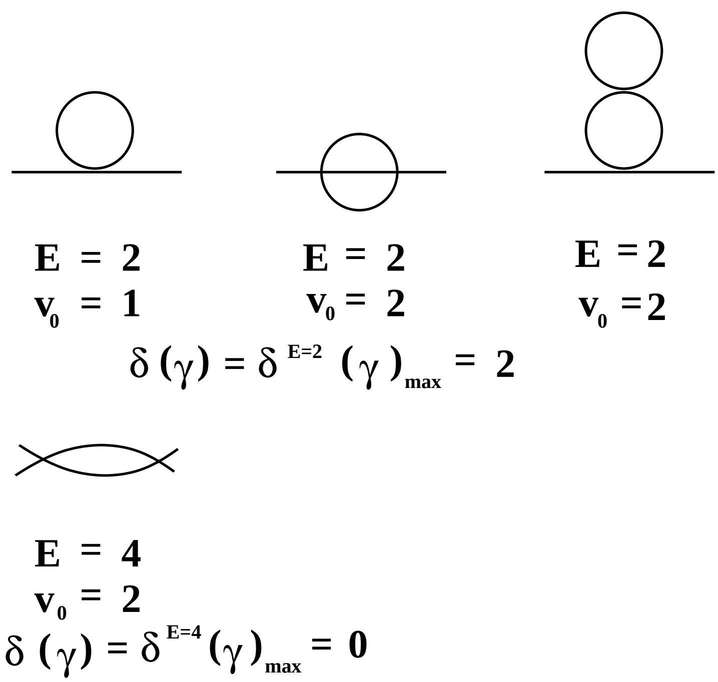
azaz valamennyi csatolási állandó dimenziója nem negatív és létezik legalább 1 dimenziótlan csatolási állandó, akkor az elmélet renormálható. Ilyenkor végtelen sok diagram látszólagosan divergens, de a látszólagosan divergens diagramok típusainak a száma véges.

Tegyük fel, hogy azokat az 1PI vertexfüggvényeket vizsgáljuk, amelyek amputált külső lábainak E_i számai rögzítettek; ekkor: $\delta(\gamma) = D - \sum_i E_i[\phi]_c + \sum_\alpha v_\alpha \delta(V_\alpha)$. Ezen diagramok látszólagos divergenciafokának van maximuma: $\delta(\gamma)_{max} = D - \sum_i E_i[\phi]_c$. Ha további V_0 vertexeket építünk be a diagramba, a látszólagos divergenciafok akkor sem nő. Ha tehát elértük a maximális divergenciafokot, akkor a hurkok számának növelésével az nem fog nőni.

Tegyük fel még, hogy valamennyi tér kanonikus dimenziója pozitív, $[\phi_i]_c > 0$. Ekkor csak véges sok 1PI vertexfüggvény látszólagosan divergens.

Növeljük ui. az amputált lábak számát, akkor a látszólagos divergenciafok maximális értéke negatívvá válik. Ezért csak véges sok (viszonylag kevés lábbal rendelkező) diagram lesz látszólagosan divergens.

Pl. a ϕ^4 elmélet $D = 4$ dimenzióban renormálható. Az elemi vertex kanonikus dimenziója $\delta(V_0) = -4 + 4 \cdot 1 = 0$. A látszólagosan divergens diagramok az alábbiak:



A hatványkitevők leszámlálásának módszere, ill. a γ Feynman-diagramok látszólagos divergenciafoka és a a megfelelő $\tilde{I}_\gamma(P)$ Feynman-integrálok konvergenciája között szoros kapcsolat van, amelyet egy konvergencia-tétel mond ki. Előre bocsátjuk, hogy amíg az infinitezimális képzetes résszel kiegészített $m_l^2 \to m_l^2 - i\epsilon$ tömegnégyzetet tartalmazó Feynman-propagátorokat használjuk, addig mindegy a konvergencia szempontjából, hogy a Feynman-integrált a Minkowski-térben vagy az euklideszi tartományban vizsgáljuk. (Ezt be lehet bizonyítani.) Alábbiakban az euklideszi tartományban fogjuk megfogalmazni a Feynman-integrál konvergenciájának feltételét. Erre vonatkozik a konvergencia-tétel.

Ahhoz, hogy kimondhassuk a konvergenciatételt, szükségünk van a szigorú értelemben vett részdiagram definíciójára. A g diagramot a γ diagram szigorú értelemben vett részdiagramjának nevezzük, ha g minden vertexe γ-nak is vertexe, és g tartalmazza a vertexeit összekötő összes belső vonalat is. (Általában a részdiagram kevésbé szigorú értelmezésében ez az utóbbi kitétel nem szerepel.) Minden összefüggő, 1PI γ diagramhoz tartozik az összefüggő, 1PI, szigorú értelemben vett g részdiagramok egy $\mathcal{F}$ családja. Természetesen maga γ is benne van, mint triviális részdiagram ebben az $\mathcal{F}$ családban. A konvergenciatétel kimondja, hogy ha a γ összefüggő, 1PI diagramhoz tartozó $\mathcal{F}$ család minden összefüggő, 1PI szigorú értelemben vett $g \in \mathcal{F}$ részdiagramjának látszólagos divergenciafoka negatív, azaz $\delta(g) < 0$, akkor a γ-hoz tartozó $\tilde{I}_\gamma(P)$ Feynman-integrál abszolút konvergens az euklideszi tartományon. (Az egyszerűség kedvéért elhagytuk a ,,kalapot" az euklideszi tartományból vett P külső impulzusok jelölésében.) A tétel bizonyítása meghaladja a jelen jegyzet kereteit, megtalálható pl. az [5] tankönyvben.

A tétel egyik következménye, hogy deriváltas csatolást nem tartalmazó skalártér elméletében mihelyt valamelyik öszefüggő, 1PI, szigorú értelemben vett részdiagram látszólagos divergenciafoka nem negatív, akkor az összefüggő, 1PI γ diagramhoz tartozó Feynman-integrál divergens. (Ezzel szemben pl. a kvantumelektrodinamikában megtörténhet bizonyos részdiagramok divergenciáinak kiejtése.) A renormálás egyik lépése, annak a bizonyítása, hogy a divergens Feynman-integrálok abszolút konvergenssé válnak, ha az összes olyan részdiagramot levonjuk, amelyek látszólagos divergenciafoka $\delta(g) \geq 0$.

Egy további következmény olyan γ diagramra vonatkozik, amely maga divergens, azaz amelynek látszólagos divergenciafoka $\delta(\gamma) \geq 0$, de amelynek minden szigorú értelemben vett g részdiagramja negatív látszólagos divergenciafokú, $\delta(g) < 0$. Ekkor a megfelelő $\tilde{I})\gamma(P)$ Feynman-integrál divergens része a P külső impulzusokban és az m_l belső tömegekben $\delta(\gamma)$-nál nem magasabb fokú polinom. (Ez annak köszönhető, hogy $\delta(\gamma)$ egyúttal $\tilde{I}_\gamma(P)$-nek, mint a külső impulzusok (és belső tömegek) függvényének a homogenitási foka is. Ezért a külső impulzusok szerinti (belső tömegek) szerinti $[\delta(\gamma) + 1]$-edik derivált homogenitási foka -1, ami azt is jelenti, hogy ezek a deriváltak már végesek.) A mondottak értelmében ilyen esetben a regularizált Feynman-integrál

$$\tilde{I}_{\gamma,reg}(P; m, \Lambda) \;\; = \;\; \tilde{I}_{veges}(P) + D(P; m, \Lambda) \tag{1.56}$$

alakú, ahol $\tilde{I}_{veges}(P)$ véges marad a $\Lambda \to \infty$ határesetben, míg a divergens D rész P-nek és m_l-eknek $\delta(\gamma)$-nál nem nagyobb fokú polinomja.

1.4. Regularizációs eljárások

Az elmondottakból kitűnik, hogy a klasszikus hatás alapján megfogalmazott kvantumtérelmélet csak akkor tehető értelmessé, ha módosítjuk az elmélet rövidtávolságú viselkedését. Ezt az eljárást regularizációnak nevezzük. Az eljárás lényege, hogy önkényesen bevezetünk valamilyen paraméter(eke)t, amely(ek) véges értéke esetén az elméletben fellépő integrálok UV-végesek. A regularizációt úgy végezzük, hogy a regularizált elméletből formálisan határértékképzéssel kapjuk vissza az eredeti elméletet. Csak a regularizációs eljárás elvégzése után tudjuk a regularizációs paraméter(ek) határértékének képzése esetén divergenssé váló diagramokat osztályozni és divergenssé váló részeiket a hatás alkalmas módosításával eltávolítani.

1.4.1. UV levágás az euklideszi térben

Az UV divergenciák regularizálásának talán legegyszerűbb módja, hogy az euklideszi elméletben az impulzusintegrálokat egy Λ sugarú gömbre korlátozzuk. Ennek az egyik hátránya, hogy elveszítjük a Poincaré-, pontosabban az euklideszi invarianciát (az impulzustérbeli eltolásokkal szembeni invarianciát). Egy további hátrány, hogy mértékelméletek esetén a mértékszimmetriát is sérti ez az eljárás. Ugyanakkor ezzel a módszerrel közvetlen, szemléletes képet kaphatunk az UV divergenciák jellegéről, mint ezt az előzőekben már láthattuk.

1.4.2. A Pauli–Villars-féle regularizáció

Ennek a lényege, hogy ϕ_k segédtereket vezetünk be, amelyek M_k tömegparaméterével a divergenciákat kompenzáló ellentagok bevezetése után végtelenhez tartunk. A Pauli-Villars-regularizáció egyik legfőbb vonása, hogy euklideszi térben $O(D)$-invariáns, Minkowski-téridőben pedig Lorentz-invariáns. Érdemes már most megjegyezni, a Pauli-Villars-regularizáció egyúttal megőrzi az ábeli lokális mértékszimmetriát is, pl. a kvantumelektrodinamikában a bevezetett segédterek minimális csatolással csatolódnak a fotontérhez. Nem ábeli mértékelméletekben azonban nem alkalmazható ez az eljárás, mert megsérti a nem ábeli lokális mértékszimmetriát.

A módszer lényegének megismerése érdekében vegyük a skalártér példáját. Az eredeti ϕ tér

$$S[\phi] = \int dx \left(\frac{1}{2}\phi(-\partial^2 + m^2)\phi + V(\phi)\right) \tag{1.57}$$

hatását a segédterek bevezetésével módosítjuk:

$$S_{reg}[\phi, \phi_k] = \int dx \left(\frac{1}{2}\phi(-\partial^2 + m^2)\phi\right.$$

$$- \sum_k \frac{1}{2c_k}\phi_k(-\partial^2 + M_k^2)\phi_k + V(\phi + \sum_k \phi_k)\Bigg), \tag{1.58}$$

ahol a c_k-k dimenziótlan valós paraméterek, azaz $[\phi_k] = [\phi]$, ill. $[\phi_k]_c = [\phi]_c$ mert $\sigma_k = \sigma$. Alább majd kitérünk rá, hogy hogyan kell a segédterek számát és a c_k együtthatókat a célnak megfelelően megválasztani.

A $Z[J]$ generáló funkcionál definícióját is megfelelően módosítjuk:

$$Z_{reg}[J] \;=\; \int \mathcal{D}\phi \int \left(\prod_k \mathcal{D}\phi_k\right) e^{-S_{reg}[\phi,\phi_k]}. \tag{1.59}$$

Az eljárás lényegét megértjük, ha elvégezzük a segédterekre vonatkozó pályaintegrálokat. Az eredmény a következő:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S_{reg}(\phi)} \;=\; \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\int dx \left[\frac{1}{2}\phi\Delta_{reg}^{-1}\phi + V(\phi)\right]\right\}, \tag{1.60}$$

ahol a regularizált elméletben a propagátor

$$\Delta_{reg} \;=\; (-\partial^2 + m^2)^{-1} - \sum_k c_k(-\partial^2 + M_k^2)^{-1} \tag{1.61}$$

alakot ölt, a Fourier-transzformáltja pedig

$$\tilde{\Delta}_{reg}(p) \;=\; \frac{1}{p^2 + m^2} - \sum_k c_k \frac{1}{p^2 + M_k^2} \tag{1.62}$$

alakú.

Vezessük be a

$$\phi' = \phi + \sum_k \phi_k \tag{1.63}$$

integrálási változót. Segítségével a pályaintegrál átírható olyan alakba, hogy a segédterek szerinti integrálok Gauss-integrálok és el lehet őket végezni:

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\phi' \int \left(\prod_k \mathcal{D}\phi_k\right) \exp\left\{-\int dx \left[\frac{1}{2}\left(\phi' - \sum_k \phi_k\right)(-\partial^2 + m^2)\left(\phi' - \sum_k \phi_k\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. - \sum_k \frac{1}{2c_k}\phi_k(-\partial^2 + M_k^2)\phi_k + V(\phi')\right]\right\} \\
&\quad = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\int dx \left[\frac{1}{2}\phi\Delta_{reg}^{-1}\phi + V(\phi)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Legyen ℓ a bevezetett segédterek száma. A propagátor inverzének különböző alakjait az alábbi átalakításokkal kaphatjuk meg:

$$\Delta_{reg} \;=\; \Delta - \sum_{k=1}^{\ell} c_k \Delta_k, \tag{1.65}$$

ahonnan

$$\Delta_{reg}^{-1} = (\Delta - \sum_{k=1}^{\ell} c_k \Delta_k)^{-1} = (1 - \sum_{k=1}^{\ell} c_k \Delta^{-1}\Delta_k)^{-1}\Delta^{-1} \tag{1.66}$$

amit impulzusreprezentációban az alábbi alakba írhatunk:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{reg}^{-1}(p) &= \Big(1 - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{c_k}{p^2+M_k^2}(p^2+m^2)\Big)(p^2+m^2) \\ &= (p^2+m^2)\Big(\frac{\prod_{k=1}^{\ell}(p^2+M_k^2) - (p^2+m^2)\sum_{k'=1}^{\ell} c_{k'}\prod_{k\neq k'}(p^2+M_k^2)}{\prod_{k=1}^{\ell}(p^2+M_k^2)}\Big)^{-1} \\ &= \frac{(p^2+m^2)\prod_{k=1}^{\ell}(p^2+M_k^2)}{\prod_{k=1}^{\ell}(p^2+M_k^2) - (p^2+m^2)\sum_{k'=1}^{\ell} c_{k'}\prod_{k\neq k'}(p^2+M_k^2)}\end{aligned} \tag{1.67}$$

A nevező p^2-nek l–edrendű polinomja, ha l darab segédteret vezettünk be. Az l darab c_k paraméter alkalmas megválasztásával el lehet érni, hogy a nevezőnek, mint p^2 polinomjának csak a tiszta tagja maradjon zérustól különböző:

$$\prod_{k=1}^{\ell}(p^2+M_k^2) - (p^2+m^2)\sum_{k'=1}^{\ell} c_{k'}\prod_{k\neq k'}(p^2+M_k^2) = A_\ell p^{2\ell} + A_{\ell-1}p^{2(\ell-1)} + \ldots + A_0, \tag{1.68}$$

ahol $A_j = 0$, ha $j = 1, 2, \ldots, \ell$ választással rögzítjük az ℓ darab c_k együttható értékét. A tiszta tag pedig függ az eredeti és a regulátor tömegektől:

$$A_0 = \prod_{k=1}^{\ell} M_k^2 - m^2 \sum_{k'=1}^{\ell} c_{k'} \prod_{k\neq k'} M_k^2. \tag{1.69}$$

Az $A_\ell = 1 - \sum_{k=1}^{\ell} c_k = 0$ feltétel azt jelenti, hogy az együtthatók összege egyenlő eggyel, $\sum_{k=1}^{\ell} c_k = 1$. Ez azt jelenti, hogy legalább egy darab együtthatónak pozitívnak kell lennie, azaz legalább egy segédtér propagátora rossz (negatív) előjellel szerepel a regularizált propagátor kifejezésében. A regulátor terek tehát nem fizikai részecske-gerjesztéseket leíró terek, hanem inkább matematikai segédeszközök, amelyekkel a fizikai skalártér ultraibolya viselkedését tudjuk úgy módosítani, hogy renormálható (vagy szuperrenormálható) elméletben regularizáljuk a hurokintegrálok ultraibolya divergenciáját. A c_k együtthatók fenti megválasztása esetén a regularizált propagátor

$$\tilde{\Delta}(p) = \frac{A_0}{(p^2+m^2)\prod_{k=1}^{\ell}(p^2+M_k^2)} \tag{1.70}$$

alakot ölt. Ha az impulzust átskálázzuk, $p \to \lambda p$ és megvizsgáljuk a $\lambda \to \infty$ határesetben a propagátor aszimptotikus viselkedését, akkor azt tapasztaljuk, hogy $\tilde{\Delta}(\lambda p) \sim \lambda^{-2\ell-2}$, azaz hogy $\sigma_{reg} = 2\ell + 2$ és a regularizált skalártér kanonikus dimenziója így $[\phi_{reg}]_c = \frac{1}{2}(D - 2\ell - 2)$ lett.

Azt, hogy hány darab segédtérre van szükségünk egy renormálható elméletben ahhoz, hogy az elemi terek összes divergens valódi vertexfüggvényét regularizáljuk, a hatványkitevők leszámlálásának módszerével dönthetjük el. Vegyük pl. a λphi^4 elméletet $D = 4$ dimenzióban. A legerősebben szinguláris vertexfüggvény az $E = 2$ külső (amputált) lábbal rendelkező, $v_0 = 1$ darab vertexet tartalmazó sajátenergiás betétrész. A tér regularizálása után $[\phi_{reg}]_c = \frac{1}{2}(4-2\ell-2) = 1-\ell$, a vertex kanonikus dimenziója $\delta(V) = -4+4(1-\ell) = -4\ell$ és így a szóbanforgó 1PI diagram látszólagos divergenciafoka $\delta(\gamma) = 4 - 2(1-\ell) - 1 \cdot 4\ell = 2 - 2\ell$. Innen látjuk, hogy $\ell = 2$ darab segédtér bevezetésével elérhetjük, hogy még ez a (legerősebben divergens) diagram is konvergens legyen.

Mint fentebb már volt szó róla, a segédterek nem fizikai szabadsági fokok, hanem egyszerűen matematikai segédeszközök, amelyektől végül az $M_k^2 \to \infty$ határátmenettel megszabadulhatunk. Határesetben a regularizált propagátor átmegy az eredeti propagátorba. Ha valamennyi regulátor tömeget egyazon M regulátor-tömeg lineáris kifejezésének tekintjük, akkor az M regulátor-tömeg veszi át a regularizált elméletben a Λ impulzuslevágás szerepét. Mivel ilyenkor

$$A_0 = M^{2\ell}\Big(1 - \frac{m^2}{M^2}\Big), \tag{1.71}$$

és a propagátor

$$\tilde{\Delta}_{reg}(p) = \frac{M^{2\ell}(1 - \frac{m^2}{M^2})}{(p^2 + m^2)(p^2 + M^2)^\ell}, \tag{1.72}$$

azért a propagátor inverzét felírhatjuk

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{reg}(p) &= (p^2 + m^2)\Big(1 - \frac{m^2}{M^2}\Big)\Big(1 + \frac{p^2}{M^2}\Big)^\ell \\ &= p^2 + m^2 + a_1\frac{p^2}{M^2} + \ldots + a_{\ell+1}\Big(\frac{p^2}{M^2}\Big)^{\ell+1}\end{aligned} \tag{1.73}$$

alakban. A Pauli-Villars-regularizáció tehát azt jelenti, hogy a propagátor inverzéhez alkalmas együtthatókkal p^2/M^2 növekvő hatványait tartalmazó véges sok tagot adunk hozzá.

Vegyük pl. azt az esetet, amikor két segédtér bevezetése elegendő. Ekkor

$$\begin{aligned}\{\text{nevező}\} &= (-\partial^2 + M_1^2)(-\partial^2 + M_2^2) - c_1(-\partial^2 + m^2)(-\partial^2 + M_2^2) \\ &\quad -c_2(-\partial^2 + m^2)(-\partial^2 + M_1^2) \\ &= (-\partial^2)^2(1 - c_1 - c_2) + \\ &\quad (-\partial^2)(M_1^2 + M_2^2 - c_1(m^2 + M_2^2) - c_2(m^2 + M_1^2)) \\ &\quad +M_1^2M_2^2 - c_1m^2M_2^2 - c_2m^2M_1^2.\end{aligned} \tag{1.74}$$

Innen a c_k együtthatók meghatározására az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 &= 1, \\ c_1(m^2 + M_2^2) + c_2(m^2 + M_1^2) &= M_1^2 + M_2^2,\end{aligned} \tag{1.75}$$

amelynek a megoldása:

$$c_1 = \frac{-m^2 + M_2^2}{-M_1^2 + M_2^2}, \qquad c_2 = -\frac{-m^2 + M_1^2}{-M_1^2 + M_2^2}. \tag{1.76}$$

Ezt figyelembe véve a regularizált propagátor inverzének a nevezője szorzat alakú:

$$\{\text{nevező}\} \;=\; (-m^2 + M_1^2)(-m^2 + M_2^2). \tag{1.77}$$

A Pauli-Villars-regularizáció hiányossága, hogy a $Z[J]$ generáló funkcionálban a segédterek kiintegrálása után a perturbációszámítás során még ki kell integrálni a az igazi (a fizikai) kvantumtérre is, ami a regularizált propagátor determinánsának négyzetgyökét eredményezi. Ezt az eljárás nem teszi konvergenssé, ami abban az esetben nem baj, ha a determináns konstans és a korrelációs függvények számolásakor a normálási tényezővel kiesik. Ha a fizikai kvantumtér külső térhez csatolódik, akkor ez azonban nincsen így, és a Feynman-diagramok egy osztálya nem válik regulárissá. A nem ábeli mértékelméletekben is problematikus ez a fajta regularizálás. Ahhoz, hogy a regularizált propagátor mellett is megőrizzük az elmélet mértékszimmetriáját további, a korábbinál szingulárisabb kölcsönhatásokat kell bevezetni.

1.4.3. A rácsregularizáció

A rácsregularizáció az egyetlen olyan eljárás, amely nemcsak a perturbatációszámítás keretein belül alkalmazható (pl. a rácsregularizált pályaintegrál Monte-Carlo módszerrel is számolható). Természetes módon illeszkedik a pályaintegrál definíciójához, hiszen az eljárás lényege, hogy a téridőt diszkrét pontok halmazának képzeljük, amelyek pl. a oldalélű kockák csúcspontjai. A pályaintegrál definíciójához egy ugyanilyen felosztás szükséges. A rácsregularizációnak még egy további előnye, hogy megőrzi a legtöbb globális és lokális szimmetriát. Kivételt képez a D dimenziós téridő $O(D)$ forgatásaival szemben mutatott szimmetria, amelynek sérülése azonban nem jár különösebb következményekkel†. A módszer hátránya, hogy rendkívül nehézkessé teszi a perturbációs sorfejtésen alapuló számításokat.

Valós skalártér. Nézzük először a valós skalártér esetét, amely az

$$S[\phi] \;=\; \int d^D x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi)\right] \tag{1.78}$$

hatással jellemezhető klasszikusan. A rácsregularizált hatást úgy kapjuk, hogy a téridőre vett integrálokat a téridő diszkrét rácspontjaira történő összegzéssel helyettesítjük, valamint a parciális deriváltakat differenciahányadosokkal, azaz a

$$\partial_\mu \phi \to \nabla_\mu \phi \;=\; \frac{1}{a}\left[\phi(x + a n_\mu) - \phi(x)\right] \tag{1.79}$$

†A fermionok királis szimmetriája is megsérül rácsregularizáció esetén. A királis szimmetria rendkívül speciális esetével később külön foglalkozunk.

kifejezéssel. Itt n^μ a rácson a μ–tengely irányába mutató egységvektor. Ekkor a regularizált hatás

$$S_{reg}[\phi] = a^D \sum_x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{D-1} [\nabla_\mu \phi(x)]^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) + V(\phi(x)) \right\} \tag{1.80}$$

alakú.

Diszkrét téridő esetén a tér Fourier-transzformáltját a

$$\phi(x) = \int_B \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(p) e^{\mathrm{i}px}, \tag{1.81}$$

$$\tilde{\phi}(p) = a^D \sum_x \phi(x) e^{-\mathrm{i}px} \tag{1.82}$$

összefüggések határozzák meg. Itt az impulzusok szerinti integrálok a B Brillouin-zónára terjednek ki, amelyet az

$$-\frac{\pi}{a} \le p^\mu \le \frac{\pi}{a} \tag{1.83}$$

egyenlőtlenség definiál. Az azonosan 1 függvény speciális esetét véve, az alábbi hasznos összefüggéseket kapjuk:

$$\frac{a^D}{(2\pi)^D} \sum_x e^{\mathrm{i}px} = \delta(p), \tag{1.84}$$

$$\int_B d^D p e^{\mathrm{i}px} = \prod_{\mu=0}^{D} \left(\int_{-\pi/a}^{\pi/a} dp e^{\mathrm{i}px^\mu} \right) = \frac{(2\pi)^D}{a^D} \delta_{x0}. \tag{1.85}$$

Most meghatározzuk a rácsregularizált skalártér propagátorát fagráf-közelítésben. Ennek érdekében írjuk át a hatás kinetikus energia tagját impulzusreprezentációba. Használjuk fel, hogy

$$\begin{aligned}\phi(x + an^\mu) - \phi(x) &= \int_B \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(p) \left[e^{\mathrm{i}p(x+an^\mu)} - e^{\mathrm{i}px} \right] \\ &= \int_B \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(p) e^{\mathrm{i}px} \left[e^{\mathrm{i}pan^\mu} - 1 \right],\end{aligned} \tag{1.86}$$

ekkor

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} a^D \sum_{\mu=0}^{D-1} \sum_x \frac{[\phi(x+an^\mu) - \phi(x)]^2}{a^2} + \frac{1}{2} m^2 a^D \sum_x \phi^2(x) \\ &= a^D \frac{1}{2} \sum_x \int_B \frac{d^D p_1 d^D p_2}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) e^{\mathrm{i}(p_1+p_2)x} \sum_{\mu=0}^{D-1} \frac{1}{a^2} \left[e^{\mathrm{i}p_1 n^\mu a} - 1 \right] \left[e^{\mathrm{i}p_2 n^\mu a} - 1 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} m^2 a^D \sum_x \phi^2(x) \\ &= \int_B \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p) D^{-1}(p),\end{aligned} \tag{1.87}$$

ahol a regularizált propagátor inverze:

$$\begin{aligned} D^{-1}(p) &= \frac{1}{a^2}\sum_{\mu=0}^{D-1}\left|e^{\mathrm{i}p^\mu a}-1\right|^2+m^2=\frac{2}{a^2}\sum_{\mu=0}^{D-1}(1-\cos(ap^\mu))+m^2 \\ &= \frac{4}{a^2}\sum_{\mu=0}^{D-1}\sin^2\frac{ap^\mu}{2}+m^2. \end{aligned} \tag{1.88}$$

Kis rácsállandó esetén a propagátor inverze az alábbi alakot ölti:

$$D^{-1}(p) = \left(p^2-\frac{a^2}{12}\sum_{\mu=0}^{D-1}(p^\mu)^4+\mathcal{O}(a^4(p^\mu)^6)\right)+m^2, \qquad \text{ha} \qquad a\to 0. \tag{1.89}$$

Látjuk, hogy $\mathcal{O}(p^2)$ rendben visszakapjuk az eredeti propagátort.

Érdemes megvizsgálni az euklideszi propagátor pólusszerkezetét, emlékezve arra, hogy a kontinuumelméletben ezek $p^0=\pm i\sqrt{m^2+\sum_{j=1}^{D-1}(p^j)^2}$ helyeken vannak, ami $\vec{p}=0$ esetén $\pm im$-re redukálódik. Egyszerűbb, ha $p^0\to ip_M^0$ helyettesítéssel áttérünk Minkowski térre, és felhasználjuk a $\sin(iap^0/2)=i\mathrm{sh}(ap^0/2)$ azonosságot, ekkor a pólusok egyenlete:

$$\frac{2}{a}i\mathrm{sh}\frac{ap_M^0}{2} = \pm i\sqrt{\frac{4}{a^2}\sum_{j=1}^{D-1}\sin^2\frac{ap^j}{2}+m^2}. \tag{1.90}$$

Innen látszik, hogy (a periodikusság révén nem ekvivalens) pólusok pl. $D-1=3$ esetén a Brillouin-zóna $2^3=8$ sarkában vannak: $(p^1,p^2,p^3)=(0,0,0)$, $(\pi/a,0,0)$, $(0,\pi/a,0)$, $(0,0,\pi/a)$, $(\pi/a,\pi/a,0)$, $(\pi/a,0,\pi/a)$, $(0,\pi/a,\pi/a)$, $(\pi/a,\pi/a,\pi/a)$, s ezek $a\to 0$ esetben rendre $p^0\approx\pm m$, $\pm\sqrt{m^2+(4/a^2)}\approx\pm 2/a$, $\pm\sqrt{m^2+(8/a^2)}\approx 2\sqrt{2}/a$, $\pm\sqrt{m^2+(12/a^2)}\approx 2\sqrt{3}/a$ tömegű részecskéknek felelnek meg. Szerencsére azonban 15 ilyen pólus az $a\to 0$ határesetben végtelen nyugalmi tömegnek felel meg. A spektrum ezen ágai tehát a kontinuum limeszben nem játszanak szerepet.

Fermiontér ($s=1/2$) esete: A hatást az alábbi helyettesítéssel regularizáljuk:

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow \frac{1}{2a}\left[\psi(x+an^\mu)-\psi(x-an^\mu)\right] \tag{1.91}$$

(A kifejezésnek ezt az alakját az diktálja, hogy a hatástól elvárjuk, hogy a tértükrözéssel szemben invariáns legyen.) A hatás ekkor a következőképpen módosul:

$$\begin{aligned} S[\bar{\psi},\psi] &= -\int d^Dx\bar{\psi}(\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/_E-m)\psi \qquad \longrightarrow \\ S_{reg}[\bar{\psi},\psi] &= -a^D\sum_x\bar{\psi}(x)\left[\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}\gamma^0}{2a}(\psi(x+an^0)-\psi(x-an^0))\right. \end{aligned}$$

$$+\mathrm{i}\sum_{j=1}^{D-1}\frac{\gamma^j}{2a}(\psi(x+an^j)-\psi(x-an^j))\Bigg]$$
$$+a^D\sum_x m\bar{\psi}(x)\psi(x). \tag{1.92}$$

A független (Grassmann-értékű) térváltozók $\bar{\psi}$ és ψ Fourier-transzformáltjaira az alábbiak érvényesek:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \int_B \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} e^{\mathrm{i}px}\tilde{\psi}(p), &(1.93)\\
\bar{\psi}(x) &= \int_B \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} e^{\mathrm{i}px}\tilde{\bar{\psi}}(p), &(1.94)\\
\tilde{\psi}(p) &= a^D\sum_x \psi(x)e^{-\mathrm{i}px}, &(1.95)\\
\tilde{\bar{\psi}}(p) &= a^D\sum_x \bar{\psi}(x)e^{-\mathrm{i}px}. &(1.96)
\end{aligned}$$

Helyettesítsük be a

$$\begin{aligned}
\psi(x+an^\mu)-\psi(x-an^\mu) &= \int_B \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\left(e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}ap^\mu}-e^{\mathrm{i}px-\mathrm{i}ap^\mu}\right)\tilde{\psi}(p)\\
&= 2\mathrm{i}\int_B \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} e^{\mathrm{i}px}\sin(ap^\mu)\tilde{\psi}(p), \qquad (1.97)
\end{aligned}$$

különbséget a szabad fermiontér regularizált hatásának bilineáris kifejezésébe:

$$\begin{aligned}
&-a^D\sum_x\int_B \frac{d^Dp_1}{(2\pi)^D}e^{\mathrm{i}p_1x}\tilde{\bar{\psi}}(p_1)\frac{1}{2a}2\mathrm{i}\int_B\frac{d^Dp_2}{(2\pi)^D}e^{\mathrm{i}p_2x}\Bigg[-\gamma^0\sin(ap_2^0)\\
&\qquad\qquad +\mathrm{i}\sum_{j=1}^{3}\gamma^j\sin(ap^j)\Bigg]\tilde{\psi}(p_2)\\
&+ma^D\sum_x\int_B\frac{d^Dp_1}{(2\pi)^D}e^{\mathrm{i}p_1x}\int_B\frac{d^Dp_2}{(2\pi)^D}e^{\mathrm{i}p_2x}\tilde{\bar{\psi}}(p_1)\tilde{\psi}(p_2)\\
=&\int_B\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\tilde{\bar{\psi}}(-p)G^{-1}(p)\tilde{\psi}(p), \qquad (1.98)
\end{aligned}$$

ahol bevezettük a regularizált propagátor inverzét:

$$G^{-1}(p) = \frac{1}{a}\left[\mathrm{i}\gamma^0\sin(ap^0)+\sum_{j=1}^{D-1}\gamma^j\sin(ap^j)\right]-m. \tag{1.99}$$

Ekkor a szabad fermiontér regularizált propagátora az alábbi alakot ölti:

$$G(p) = \frac{\frac{1}{a}\left(\mathrm{i}\gamma^0\sin(ap^0)+\sum_{j=1}^{D-1}\gamma^j\sin(ap^j)\right)+m}{\frac{1}{a^2}\left(-\sin^2(ap^0)-\sum_{j=1}^{D-1}\sin^2(ap^j)\right)-m^2}. \tag{1.100}$$

A propagátor pólusait az alábbi egyenlet gyökei szolgáltatják:

$$\frac{1}{a^2}\left(\sin^2(ap^0)+\sum_{j=1}^{D-1}\sin^2(ap^j)\right)=-m^2. \tag{1.101}$$

Ez az egyenlet $a\to 0$ esetén

$$p^\mu p^\mu = -m^2 \qquad \text{ha} \qquad a\to 0 \tag{1.102}$$

alakot ölt.

A fenti propagátorral kapcsolatban azonban felmerül a részecskék megkétszereződésének problémája. A skalártér esetéhez képest van ugyanis egy nagyon lényeges különbség. A skalártér propagátorának nevezőjében a kontinuumelmélet $(p^\mu)^2$ kifejezése helyén $(4/a^2)\sin^2(ap^\mu/2)$ kifejezés szerepel, ami a Brillouin-zóna határain $4/a^2$ értéket vesz fel, a fermiontér esetén viszont $(p^\mu)^2$ kifejezése helyén $(1/a^2)\sin^2(ap^\mu)$ szerepel, ami a Brillouin-zóna határain eltűnik. Ha megint áttérünk Minkowski-térre a $p^0\to ip^0_M$ helyettesítéssel, akkor a pólusok egyenletére azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{a}i\mathrm{sh}(ap^0_M) \;=\; \pm i\sqrt{\frac{1}{a^2}\sum_{j=1}^{D-1}\sin^2(ap^j)+m^2}. \tag{1.103}$$

Most is azt látjuk, hogy pl. $D-1=3$ esetben a Brillouin-zóna $2^3=8$ (inekvivalens sarkában) vannak pólusok rendre a $(p^1,p^2,p^3)=(0,0,0)$, $(\pi/a,0,0)$, $(0,\pi/a,0)$, $(0,0,\pi/a)$, $(\pi/a,\pi/a,0)$, $(\pi/a,0,\pi/a)$, $(0,\pi/a,\pi/a)$, $(\pi/a,\pi/a,\pi/a)$ helyeken, amelyekhez az $a\to 0$ esetben $p^0_M=\pm m$ tartozik. Az egyetlen szabadsági fok ilymódon megnyolcszorozódott, és a nem kívánatos szabadsági fokok (pólusok) szintén m nyugalmi tömegű részecske és antirészecske gerjesztéseknek felelnek meg. Mindez annak az ,,apróságnak" köszönhető, hogy a szinusznégyzet argumentumában most nem $ap^\mu/2$, hanem ap^μ szerepel. A rácsregularizáció ebben a formájában tehát hamis részecske-antirészecske szabadsági fokokat ,,csempész be" az elméletbe. Szabad tér esetén az még nem lenne túl nagy baj, viszont kölcsönható elméletben ezen hamis szabadsági fokoknak megfelelő valós vagy virtuális párkeltési folyamatok lényegesen módosítanák az elmélet jóslatait a kontinuumelméletéhez képest.

A fermionspektrum ezen nem kívánatos elfajulásától megszabadulhatunk, ha alkalmasan választott kvadratikus tagokat adunk a hatáshoz (Wilson-féle fermionok):

$$\delta S[\bar\psi,\psi] \;=\; -\frac{M}{2}a^D\sum_x\sum_{\mu=0}^{D-1}\left[2\bar\psi(x)\psi(x)-\bar\psi(x+an^\mu)\psi(x)-\bar\psi(x)\psi(x+an^\mu)\right], \tag{1.104}$$

ahol M tömeg dimenziójú paraméter, megválasztásáról később döntünk. Írjuk át a regularizált hatás ezen járulékos tagját impulzusreprezentációba:

$$\delta S[\bar\psi,\psi] \;=\; -\frac{M}{2}a^D\sum_x\sum_{\mu=0}^{D-1}\int_B\frac{d^Dp_1}{(2\pi)^D}e^{\mathrm{i}p_1x}\tilde{\bar\psi}(p_1)\int_B\frac{d^Dp_2}{(2\pi)^D}e^{\mathrm{i}p_2x}\tilde\psi(p_2)\cdot$$

$$\cdot \left[2 - e^{\mathrm{i}ap_1 n^\mu} - e^{\mathrm{i}ap_2 n^\mu}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{M}{2}\sum_{\mu=0}^{D-1}\int_B \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\bar{\tilde{\psi}}(-p)\left(2 - e^{-\mathrm{i}p^\mu a} - e^{\mathrm{i}p^\mu a}\right)\tilde{\psi}(p) \\
&= -\int_B \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\bar{\tilde{\psi}}(-p) M \sum_{\mu=0}^{D-1}(1-\cos(p^\mu a))\,\tilde{\psi}(p) \\
&= -\int_B \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\bar{\tilde{\psi}}(-p) 2M \sum_{\mu=0}^{D-1}\sin^2\left(\frac{p^\mu a}{2}\right)\tilde{\psi}(p).
\end{aligned} \tag{1.105}$$

Innen leolvashatjuk, hogyan módosul a regularizált fermionpropagátor inverze:

$$G^{-1}(p) = \frac{1}{a}\left(\mathrm{i}\gamma^0\sin(ap^0) + \sum_{j=1}^{D-1}\gamma^j\sin(ap^j)\right) - m - M\sum_{\mu=0}^{D-1}(1-\cos(p^\mu a)). \tag{1.106}$$

A szabad fermiontér regularizált propagátora tehát:

$$G(p) = \frac{\frac{1}{a}\left(\mathrm{i}\gamma^0\sin(ap^0) + \sum_{j=1}^{D-1}\gamma^j\sin(ap^j)\right) + m + M\sum_{\mu=0}^{D-1}(1-\cos(ap^\mu))}{\frac{1}{a^2}\left(\sin^2(ap^0) + \sum_{j=1}^{D-1}\sin^2(ap^j)\right) - \left[m + M\sum_{\mu=0}^{D-1}(1-\cos(ap^\mu))\right]^2} \tag{1.107}$$

Látjuk a nevezőből, hogy az így bevezetett, ún. Wilson-fermionok impulzusfüggő dinamikai tömeggel rendelkeznek. Ha most megismételjük korábbi pólus-elemzésünket, akkor abban m szerepét a $m+M\sum_{\mu=0}^{D-1}(1-\cos(ap^\mu)$ kifejezés veszi át. Így azt fogjuk kapni, hogy a Brillouin-zóna centrumában, $p^j=0$, ha $j=1,2,\dots,D-1$ a pólusnak $p^0_M = \pm m$ felel meg, míg a másik 7 sarokban $p^0 = \pm(m+2M)$. Ezért, ha az $M=1/a$ választással élünk, akkor a fermionspektrum nem kívánatos ágai végtelen nagy nyugalmi tömegre tesznek szert az $a\to 0$ fizikai határesetben, s így a megfelelő gerjesztések nem propagálnak. Ezzel a trükkel megszabadultunk a nem kívánatos szabadsági fokoktól.

1.4.4. Regularizáció paraméteres előállítás esetén

A hurokintegrálok paraméteres előállítása esetén az UV divergencia az α-paraméterek szerinti integrálok $\alpha\to 0$ alsó határon mutatott divergens viselkedéseként jelentkezik. Ezért az α szerinti integrálokat regularizálhatjuk az integrandusnak $\alpha\approx 0$ közelében történő módosításával:

$$\int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(k^2-m_i^2\epsilon)} \longrightarrow \int_0^\infty d\alpha\rho_\Lambda(\alpha)e^{i\alpha(k^2-m_i^2\epsilon)}, \tag{1.108}$$

ahol $\rho_\Lambda(\alpha)$ és néhány alacsonyabb rendű deriváltja eltűnik az $\alpha=0$ helyen, továbbá $\rho_\Lambda(\alpha)$ olyan, hogy az UV levágás eltávolítása esetén, azaz a $\Lambda\to\infty$ határesetben

$\rho_\Lambda(\alpha) \to 1$ minden nem negatív α esetén. Az egyik lehetőség az éles levágás, azaz a $\rho_\Lambda(\alpha) = \Theta(\alpha - \Lambda^{-2})$ választás. Egy másik lehetőség a hatványfüggvényszerű elnyomás, amikor $\rho_\Lambda(\alpha) = \alpha^{\lambda(\Lambda)}$, ahol $\lambda(\Lambda) \to 1$, ha $\Lambda \to \infty$, s ekkor a regularizált propagátor $(k^2 - m^2 + i\epsilon)^{-\lambda}$.

1.4.5. A dimenzionális regularizáció

A dimenzionális regularizáció csak a perturbációszámításban használható eljárás, és az a lényege, hogy a Feynman-diagramokat analitikusan folytatjuk a fizikailag értelmes D pozitív egész dimenziókról a d komplex dimenziókra. Ekkor a valóságos elmélet divergenciái mint a komplex d síkon értelmezett függvények pólusai jelennek meg. Fontos ismérve ennek a regularizációs eljárásnak, hogy megőrzi a lokális mértékszimmetriát és egyaránt alkalmazható az ábeli és a nem ábeli mértékelméletekben is.

Az eljárás a komplex d-dimenziós integrál definícióján alapul, amelyben az alábbi tulajdonságokat követeljük meg:

$$\begin{aligned} \int d^d p F(p+q) &= \int d^d p F(p), \\ \int d^d p F(\lambda p) &= |\lambda|^{-d} \int d^d p F(p), \\ \int d^d p d^{d'} q f(p) g(q) &= \int d^d p f(p) \cdot \int d^{d'} q g(q). \end{aligned} \tag{1.109}$$

Ezek a tulajdonságok rendre kifejezik az integrál invarianciáját transzláció során, skálatulajdonságát dilatáció során, valamint azt, hogy a többszörös integrálok faktorizálódnak, ha az integrandus faktorizálódik. Ne felejtsük el, hogy a jelölés formális, nincsen ilyen dimenziójú tér és abban $d^d p$ (impulzus)térfogatelem.

Általánosan be lehet bizonyítani, hogy a Feynman-diagramokban szereplő integrálokat formálisan a fenti tulajdonságokkal definiált integrálokkal helyettesítve a d komplex dimenzió analitikus függvényeit kapjuk. Bármely $d = D$ pozitív egész dimenziónál az értelmezett integrál megegyezik a D-dimenziós impulzustéren értelmezett integrállal, a divergenciák pedig pólusokként jelennek meg.

A 4-dimenziós elméletek regularizálása pl. úgy történik, hogy $d = 4 - \epsilon$ dimenzióban számoljuk ki a Feynman-diagramokat, ahol $0 < \epsilon \ll 1$, majd a renormálási eljárás elvégzése után, vagyis a pólustagok eltávolítása után vesszük az $\epsilon \to 0$ határértéket.

Példa. *A ϕ^4 elmélet $D = 4$ dimenziós téridőben.* Tekintsük az elméletet $d = 4 - \epsilon$ dimenzióban. Ekkor

$$[\phi] = \frac{2-\epsilon}{2}, \tag{1.110}$$

és a $\lambda'\phi^4$ önkölcsönhatási tag vizsgálatából:

$$\begin{aligned}[\lambda' \int d^d x \phi^4] &= 0, \\ [\lambda'] &= -4[\phi] + d = \epsilon. \end{aligned} \tag{1.111}$$

A csatolási állandó tehát csak $D = 4$ dimenzióban dimenziótlan, egyébként

$$\lambda' = \lambda \mu^{\epsilon} \tag{1.112}$$

alakban írhatjuk, ahol μ tetszőleges tömeg dimenziójú paraméter és λ a dimenziótlan csatolási állandó.

Korábban már meghatároztuk az összes látszólagosan divergens Feynman-diagramot. Most sorra kiszámoljuk őket a dimenzionális regularizáció módszerével. A számolás során fel fogjuk használni a propagátorok szorzatait tartalmazó integrandusok átalakítására az alábbi Feynman-féle integrálelőállítást:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{n-1} \frac{1}{[a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n(1 - x_1 - \ldots x_{n-1})]^n}, \tag{1.113}$$

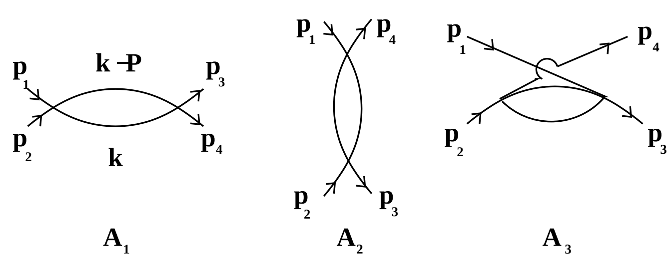
és az alábbi integrált:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + M^2 + 2kp)^A} = \frac{\Gamma\left(A - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(A)} \frac{1}{(M^2 - p^2)^{A - \frac{d}{2}}}. \tag{1.114}$$

Az érdeklődő olvasó további fontos összefüggéseket és azok bizonyítását is megtalálhatja a [4] tankönyvben.

Először határozzuk meg a divergens 1-hurok járulékokat.

- Az 1PI 4-pont vertexfüggvényhez 1-hurok rendben az alábbi diagramok adnak járulékot:



$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1!}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(k-P)^2 + m^2} (\lambda \mu^{\epsilon})^2 \\ &= -\frac{1}{2} (\lambda \mu^{\epsilon})^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left\{[(k-P)^2 + m^2]x + [k^2 + m^2](1-x)\right\}^2}. \end{aligned} \tag{1.115}$$

Vezessük be a $k' = k - Px$ új változót és az $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_4)^2$, $u = (p_1 - p_3)^2$ Mandelstam-változókat. Ekkor az integrandus nevezője

$$\left[k'^2 + m^2 + sx(1-x)\right] \tag{1.116}$$

alakra hozható és az impulzus szerinti integrálást elvégezve az alábbi kifejezést kapjuk:

$$A_1 = -\frac{\lambda^2}{2}\mu^{2\epsilon}\int_0^1 dx \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \frac{1}{\left[m^2 + sx(1-x)\right]^{\epsilon/2}}. \tag{1.117}$$

A következő lépés az, hogy a kapott kifejezésből explicit módon leválasztjuk a pólustagot. Ehhez a következő matematikai ismeretekre van szükségünk. A $\mathrm{Re}z > 0$ esetén

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \tag{1.118}$$

integrállal definiált gamma-függvénynek létezik az analitikus folytatása a $\mathrm{Re}z \leq 0$ félsíkra. Az analitikus folytatással definiált függvénynek azonban a $z = -n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ helyeken pólusai vannak. A pólusok közelében a $\Gamma(z)$ függvény

$$\begin{aligned}\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}&\left[\frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1)\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{\pi^2}{3} + \psi^2(n+1) - \psi'(n+1)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right]\end{aligned} \tag{1.119}$$

alakban állítható elő, ahol

$$\psi(s) = \frac{d}{ds}\ln\Gamma(s), \tag{1.120}$$

és

$$\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} - \gamma\ , \tag{1.121}$$

ahol γ az Euler-szám.

Írjuk ki az integrandust ϵ^0–rendű tagokkal bezárólag és végezzük el az x szerinti integrálást az

$$\int_0^1 dx \ln\left[1 + \frac{4}{a}x(1-x)\right] = -2 + \sqrt{1+a}\ln\frac{\sqrt{1+a}+1}{\sqrt{1+a}-1} \tag{1.122}$$

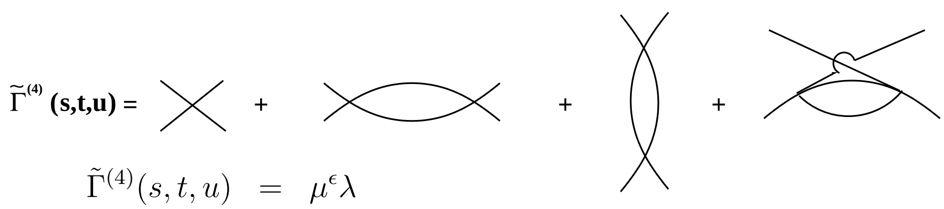
($a > 0$) összefüggés segítségével. Ekkor az alábbi eredményt kapjuk:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\mu^\epsilon \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\epsilon} + \psi(1) + \mathcal{O}(\epsilon)\right] e^{-\frac{\epsilon}{2}\ln\frac{m^2+sx(1-x)}{4\pi\mu^2}} \\
&= -\mu^\epsilon \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\epsilon} + \psi(1) + \mathcal{O}(\epsilon)\right] \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\ln\frac{m^2+sx(1-x)}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\
&= -\mu^\epsilon \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\epsilon} + \psi(1) - \ln\frac{m^2+sx(1-x)}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon)\right] \\
&= -\mu^\epsilon \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + \psi(1) + 2 + \ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2} - f(s) + \mathcal{O}(\epsilon)\right],
\end{aligned}
\tag{1.123}
$$

ahol

$$
f(s) = \sqrt{1+\frac{4m^2}{s}} \ln\frac{\sqrt{1+\frac{4m^2}{s}}+1}{\sqrt{1+\frac{4m^2}{s}}-1}. \tag{1.124}
$$

Ennek alapján 1–hurok renddel bezárólag az 1PI 4-pont vertexfüggvény:

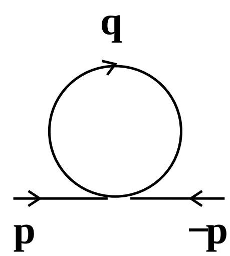


$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(4)}(s,t,u) &= \mu^\epsilon\lambda \\
&\quad -\mu^\epsilon\lambda\frac{3\lambda}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon} + \psi(1) + 2 - \ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{3}\left(f(s)+f(t)+f(u)\right)\right] + \mathcal{O}(\epsilon) \\
&= \mu^\epsilon\lambda\left\{1 - \frac{3\lambda}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon} + \psi(1) + 2\right.\right. \\
&\quad \left.\left. -\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2} - \frac{1}{3}\left(f(s)+f(t)+f(u)\right)\right] + \mathcal{O}(\epsilon)\right\}.
\end{aligned}
\tag{1.125}
$$

Látjuk, hogy a pólustagot sikerült szeparálnunk. Vegyük még észre, hogy a kifejezés véges része függ a tetszőlegesen választható μ paramétertől.

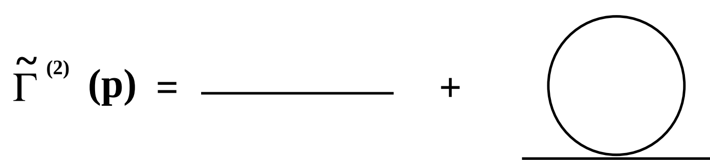
A szóbanforgó diagram a fagráfközelítésben számolt $\Gamma[\varphi]$ funkcionál kölcsönhatási tagját módosítja.

- A sajátenergia (az 1PI 2-pont vertexfüggvény) 1-hurok korrekciója:



$$
\begin{aligned}
\Sigma^{[1]} &= \frac{0!}{2}\lambda\mu^{\epsilon}\int\frac{d^{4-\epsilon}q}{(2\pi)^{4-\epsilon}}\frac{1}{q^2+m^2} \\
&= \frac{1}{2}\lambda\mu^{\epsilon}\frac{\Gamma\left(-1+\frac{\epsilon}{2}\right)}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}\Gamma(1)}\frac{1}{(m^2)^{-1+\frac{\epsilon}{2}}} \\
&= \frac{1}{2}\lambda\frac{m^2}{16\pi^2}\Gamma\left(-1+\frac{\epsilon}{2}\right)e^{\frac{\epsilon}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}} \\
&= -\frac{m^2}{2}\frac{\lambda}{16\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon}+\psi(2)+\mathcal{O}(\epsilon)\right]\left[1+\frac{\epsilon}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right] \\
&= -\frac{m^2}{2}\frac{\lambda}{16\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon}+\psi(2)+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\mathcal{O}(\epsilon)\right]. \qquad (1.126)
\end{aligned}
$$

Ez a diagram az 1PI propagátor inverzéhez ad járulékot, amely 1-hurok rendű tagokkal bezárólag:

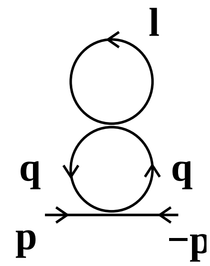


$$
\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = m^2+p^2-m^2\frac{\lambda}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon}+\psi(2)+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\mathcal{O}(\epsilon)\right]. \qquad (1.127)
$$

A szóbanforgó diagram a fagráfközelítésben számolt $\Gamma[\varphi]$ funkcionál ,,tömegtagját" módosítja.

Most tekintsük az 1PI vertexfüggvények látszólagosan divergens 2-hurok járulékait. Példaként a sajátenergia (azaz az 1PI inverz propagátor) divergens 2-hurok járulékait határozzuk meg.

- Impulzus-független járulékot kapunk az alábbi diagramtól:

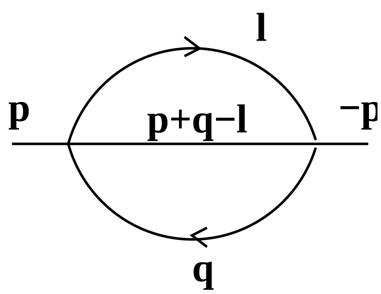


$$
\begin{aligned}
\Sigma_a^{[2]} &= \frac{1}{4}(\mu^\epsilon\lambda)^2 \int \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(q^2+m^2)^2}\int \frac{d^dl}{(2\pi)^d}\frac{1}{l^2+m^2} \\
&= \frac{1}{4}(\mu^\epsilon\lambda)^2 \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}}\frac{1}{(m^2)^{\frac{\epsilon}{2}}}\frac{\Gamma(-1+\epsilon/2)}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}}\frac{1}{(m^2)^{-1+\frac{\epsilon}{2}}} \\
&= \frac{1}{4}\frac{m^2\lambda^2}{(16\pi^2)^2}\left[\frac{2}{\epsilon}+\psi(1)+\frac{1}{4}\epsilon\left(\frac{\pi^2}{3}+\psi^2(1)-\psi'(1)\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right]\cdot \\
&\quad \cdot\left[\frac{2}{\epsilon}+\psi(2)+\frac{1}{4}\epsilon\left(\frac{\pi^2}{3}+\psi^2(2)-\psi'(2)\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right]\cdot \\
&\quad \cdot e^{\epsilon\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}} \\
&= -\frac{1}{4}\frac{m^2\lambda^2}{(16\pi^2)^2}\left[\frac{2}{\epsilon}+\psi(1)+\frac{1}{4}\epsilon\left(\frac{\pi^2}{3}+\psi^2(1)-\psi'(1)\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right]\cdot \\
&\quad \cdot\left[\frac{2}{\epsilon}+\psi(2)+\frac{1}{4}\epsilon\left(\frac{\pi^2}{3}+\psi^2(2)-\psi'(2)\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right]\cdot \\
&\quad \cdot\left(1+\epsilon\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\frac{1}{2}\epsilon^2\ln^2\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\dots\right) \\
&= -m^2\frac{\lambda^2}{4(16\pi^2)^2}\left[\frac{4}{\epsilon^2}+\frac{2}{\epsilon}\left(\psi(1)+\psi(2)+2\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\right. \\
&\quad +\psi(1)\psi(2)+\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}\left(\psi^2(1)+\psi^2(2)-\psi'(1)-\psi'(2)\right) \\
&\quad \left.+2\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\cdot(\psi(1)+\psi(2))+2\ln^2\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\mathcal{O}(\epsilon)\right].
\end{aligned}
\tag{1.128}
$$

Ez a diagram a sajátenergiához 2-hurok rendben ad impulzusfüggetlen járulékot.

- Az alábbi 2-hurok járulék pedig impulzusfüggő:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_b^{[2]}(p) &= \frac{1}{6}\mu^{2\epsilon}\lambda^2\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\int\frac{d^dl}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2+m^2}\frac{1}{l^2+m^2}\frac{1}{(p+q-l)^2+m^2} \\
&= -\frac{\lambda^2}{6(16\pi^2)^2}\left[\frac{6m^2}{\epsilon^2}+\frac{6m^2}{\epsilon}\left(\frac{3}{2}+\psi(1)+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\right.
\end{aligned}
$$



$$+\frac{1}{2\epsilon}p^2 + \text{véges rész}\Big]. \tag{1.129}$$

(A számolás részleteit ld. [3]–ban.) Ez a diagram is 2-hurok rendben ad járulékot, az impulzustól független része a φ^2 taghoz, a p^2-tel arányos része pedig a $(\partial\varphi)^2$ taghoz.

Ezzel meghatároztuk az összes látszólagosan divergens Feynman-diagram regularizált kifejezését.

1.5. Összefoglalás

Megmutattuk, hogy a formálisan értelmezett generáló funkcionálok, ill. a belőlük leszármaztatott Green-függvények és vertexfüggvények értelmetlenek, mert ultraibolya divergenciákat tartalmaznak. Láttuk, hogy különböző regularizációs eljárásokkal a fenti mennyiségek matematikailag értelmessé tehetők. Ennek egyik módja, hogy egy levágást vezetünk be az elméletbe (nagy impulzusoknál, ill. kis távolságoknál). Egy másik lehetőség a dimenzionális regularizáció, amikor a téridő dimenzióját képzeljük $(4-\epsilon)$-nak ($\epsilon > 0$ infinitezimális). Utóbbi esetben egy önkényes μ tömegskála is megjelenik az elméletben.

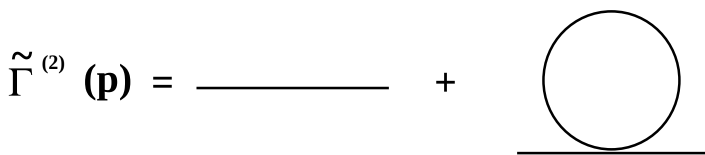
2. Renormálás

2.1. Ellentagok

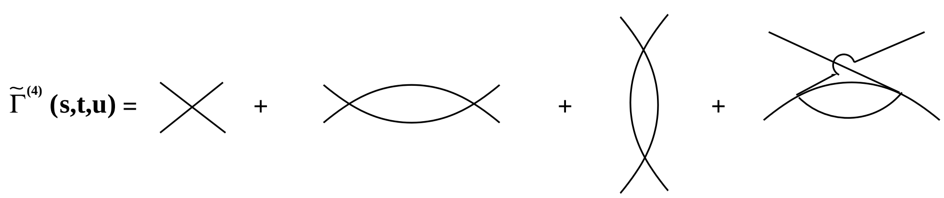
Ebben a fejezetben a ϕ^4 elmélet példáján bemutatjuk, hogyan lehet végrehajtani a „végtelenek” renormálásának programját ellentagok bevezetésével.

Az előző fejezetben dimenzionális regularizációval kiszámoltuk azokat a Feynman-diagramokat, amelyekre szükségünk van a renormálás végrehajtásához 1-hurok, ill. 2-hurok rendben.

1-hurok rendben az 1PI 2-pont és a 4-pont vertexfüggvények az alábbi alakot öltik:

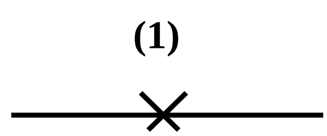


$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \quad = \quad p^2 + m^2 - m^2 \frac{\lambda}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon} + \psi(2) + \ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2} + \mathcal{O}(\epsilon)\right]; \qquad (2.1)$$



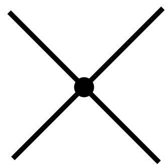
$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{(4)}(s,t,u) \quad = \quad & \lambda\mu^{\epsilon}\{1- \\ & -\frac{3\lambda}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon} + \psi(1) + 2 + \ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2} - \frac{1}{3}(f(s)+f(t)+f(u))\right]\Bigg\}.\end{aligned} \qquad (2.2)$$

A fenti kifejezésekben explicit módon leválasztottuk a pólustagokat. Ennek köszönhetően le tudjuk olvasni, hogy milyen ellentagokat kell a fagráf rendű hatáshoz hozzáadni ahhoz, hogy a szinguláris tagokat kompenzáljuk. Az új vertexek:



$$= \quad \lambda\frac{m^2}{32\pi^2}\frac{2}{\epsilon}, \qquad (2.3)$$

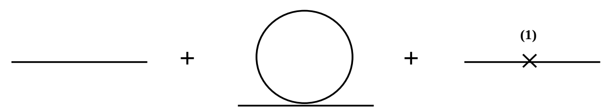
(1)



$$= \lambda^2\mu^{\epsilon}\frac{3}{32\pi^2}\frac{2}{\epsilon}. \tag{2.4}$$

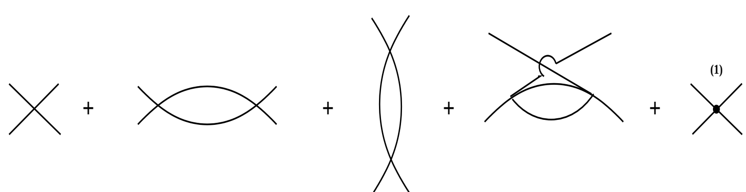
Ha hozzáadjuk ezeket az új diagramokat az 1PI vertexfüggvényekhez, akkor véges eredményt kapunk, az 1-hurok rendben renormált 1PI vertexfüggvényeket:

$\tilde{\Gamma}^{(2)}$ (p) =



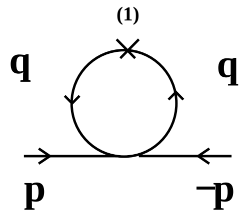
$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_R(p) = p^2+m^2-m^2\frac{\lambda}{32\pi^2}\left(\psi(2)+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right), \tag{2.5}$$

$\tilde{\Gamma}^{(4)}$ (s,t,u) =



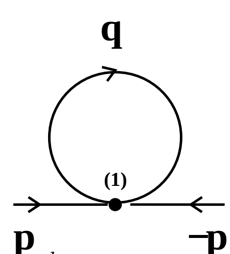
$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{(4)}_R(s,t,u) &= \lambda\mu^{\epsilon}\{1- -\frac{3\lambda}{32\pi^2}\left(\psi(1)+2+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right.\\ &\left.-\frac{1}{3}(f(s)+f(t)+f(u))\right]\Big\}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Tanulságos mégegy lépéssel továbbmenni és elvégezni a renormálást *2-hurok rendben.* Először is képeznünk kell az összes 1-hurok rendű Feynman-diagramot, használva az 1-hurok rendben talált ellentagoknak megfelelő vertexeket. Fordítsuk elsőnek figyelmünket az 1PI 2-pont vertexfüggvényekre, azaz a sajátenergia 2-hurok rendű ellentagjaira. Az új vertexeket is tartalmazó alábbi Feynman-diagramok adnak járulékot.



$$
\begin{aligned}
\Sigma^{[2]}_{CTa}(p) &= \frac{1}{2}\lambda\mu^{\epsilon}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2+m^2}\mu^{\epsilon}\lambda\frac{m^2}{32\pi^2}\frac{2}{\epsilon}\frac{1}{q^2+m^2}\\
&= \frac{1}{2}\frac{m^2}{32\pi^2}\lambda^2\mu^{2\epsilon}\frac{2}{\epsilon}\frac{\Gamma(\epsilon/2)}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}\Gamma(2)}\frac{1}{(m^2)^{\frac{\epsilon}{2}}}\\
&= \frac{m^2}{4}\frac{\lambda^2\mu^{\epsilon}}{(16\pi)^2}\frac{2}{\epsilon}\left[\frac{2}{\epsilon}+\psi(1)+\frac{\epsilon}{4}\left(\frac{\pi^2}{3}+\psi^2(1)-\psi'(1)\right)\right]\cdot\\
&\quad\cdot e^{\frac{\epsilon}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}}\\
&= \frac{m^2}{4}\frac{\lambda^2\mu^{\epsilon}}{(16\pi)^2}\frac{2}{\epsilon}\left[\frac{2}{\epsilon}+\psi(1)+\frac{\epsilon}{4}\left(\frac{\pi^2}{3}+\psi^2(1)-\psi'(1)\right)\right]\cdot\\
&\quad\cdot\left[1+\frac{\epsilon}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\frac{1}{2}\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right]\\
&= m^2\frac{1}{4}\frac{\lambda^2\mu^{\epsilon}}{(16\pi^2)^2}\left[\frac{4}{\epsilon^2}+\frac{2}{\epsilon}\left(\psi(1)+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}+\psi^2(1)-\psi'(1)\right)+\psi(1)\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\frac{1}{2}\ln^2\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\mathcal{O}(\epsilon)\right].
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

és

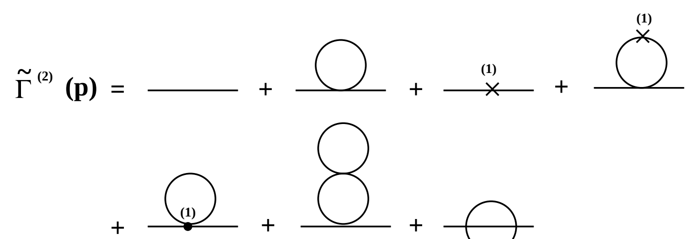


$$
\begin{aligned}
\Sigma^{[2]}_{CTb}(p) &= -\frac{1}{2}\lambda^2\mu^{\epsilon}\frac{3}{32\pi^2}\frac{2}{\epsilon}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2+m^2}\\
&= -\frac{1}{2}\lambda^2\mu^{\epsilon}\frac{3}{32\pi^2}\frac{2}{\epsilon}\frac{\Gamma(-1+\epsilon/2)}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}\Gamma(1)}\frac{1}{(m^2)^{-1+\frac{\epsilon}{2}}}\\
&= \frac{1}{2}\frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\frac{m^2}{16\pi^2}\frac{2}{\epsilon}\left[\frac{2}{\epsilon}+\psi(2)\frac{\epsilon}{4}\left(\frac{\pi^2}{3}+\psi^2(2)-\psi'(2)\right)\right]\cdot\\
&\quad\cdot e^{\frac{\epsilon}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}}\\
&= \frac{1}{2}\frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\frac{m^2}{16\pi^2}\frac{2}{\epsilon}\left[\frac{2}{\epsilon}+\psi(2)\frac{\epsilon}{4}\left(\frac{\pi^2}{3}+\psi^2(2)-\psi'(2)\right)\right]\cdot
\end{aligned}
$$

$$\cdot\left[1+\frac{\epsilon}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\frac{1}{2}\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right]$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \frac{3\lambda^2}{4(16\pi^2)^2}m^2\left[\frac{4}{\epsilon^2}+\frac{2}{\epsilon}\left(\psi(2)+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}+\psi^2(2)-\psi'(2)\right)+\psi(2)\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\frac{1}{2}\ln^2\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\mathcal{O}(\epsilon)\right].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Az 1-hurok rendben elvégzett renormálás során bevezetett új vertexeket is figyelembe véve, 2-hurok rendben tehát az 1PI 2-pont vertexfüggvényhez az alábbi Feynman-gráfok adnak járulékot:



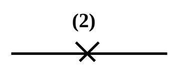
$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \quad = \quad & p^2+m^2-m^2\frac{\lambda}{32\pi^2}\left(\psi(2)+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\\
&+\frac{4}{\epsilon^2}\left[\frac{\lambda^2m^2}{4(16\pi^2)^2}+\frac{3\lambda^2m^2}{4(16\pi^2)^2}\right.\\
&\left.-\frac{\lambda^2m^2}{4(16\pi^2)^2}-\frac{\lambda^2m^2}{4(16\pi^2)^2}\right]\\
&+\frac{2}{\epsilon}\left[\frac{\lambda^2m^2}{4(16\pi^2)^2}\left(\psi(1)+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\right.\\
&+\frac{3\lambda^2m^2}{4(16\pi^2)^2}\left(\psi(2)+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\\
&-\frac{\lambda^2m^2}{4(16\pi^2)^2}\left(\psi(1)+\psi(2)+2\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\\
&-\frac{\lambda^2m^2}{2(16\pi^2)^2}\left(\frac{3}{2}+\psi(1)+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\\
&\left.-\frac{\lambda^2}{6(16\pi^2)^2}\frac{p^2}{4}\right]\\
&+\{\mathcal{O}(\lambda^2) \quad \text{véges} \quad \text{rész}\}\\
= \quad & p^2+m^2-m^2\frac{\lambda}{32\pi^2}\left(\psi(2)+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\\
&+\{\mathcal{O}(\lambda^2) \quad \text{véges} \quad \text{rész}\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{4}{\epsilon^2}\frac{m^2\lambda^2}{2(16\pi^2)^2}-\frac{2}{\epsilon}\frac{m^2\lambda^2}{4(16\pi^2)^2} \\
&-\frac{2}{\epsilon}\frac{p^2}{24}\frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2}.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

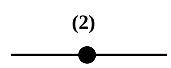
Itt felhasználtuk az összevonás során, hogy

$$
\psi(n+1)-\psi(n) \;=\; \frac{1}{n}, \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{2.10}
$$

Ahhoz, hogy az 1PI 2-pont vertexfüggvényben fellépő újabb divergenciákat kompenzálni tudjuk, a hatáshoz újabb, a csatolási állandóban másodfokú ellentagokat kell hozzáadnunk, azaz további, 2-hurok rendű vertexeket kell bevezetnünk:

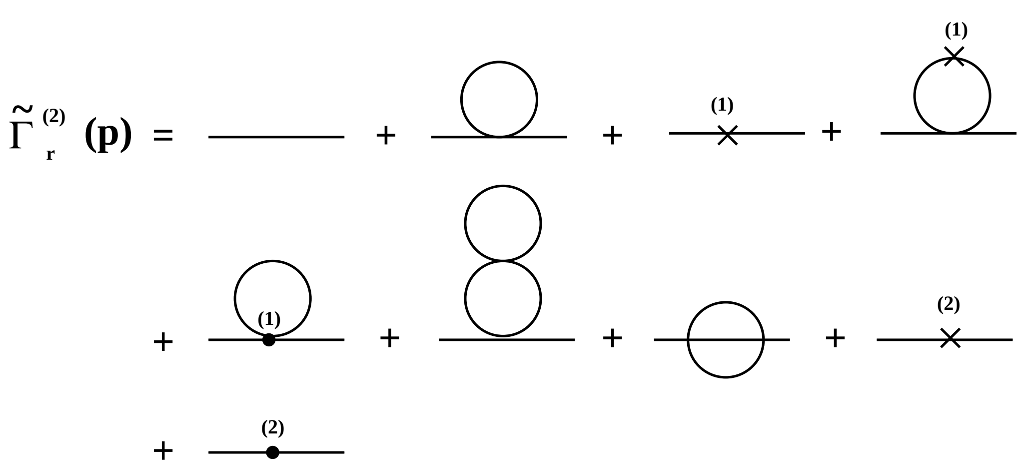


$$
= \; -\frac{1}{2}m^2\frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2}\frac{4}{\epsilon^2}+\frac{1}{4}m^2\frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2}\frac{2}{\epsilon}, \tag{2.11}
$$



$$
= \; p^2\frac{\lambda^2}{24(16\pi^2)^2}\frac{2}{\epsilon}. \tag{2.12}
$$

Az első ellentag a hatás tömegtagját módosítja $\mathcal{O}(\lambda^2)$ rendben, a második ellentag pedig a kinetikus energia tagot. Végül a 2-hurok rendben renormált 1PI 2-pont vertexfüggvény:



$$\tilde{\Gamma}_r^{(2)}(p) = p^2 + m^2 - m^2 \frac{\lambda}{32\pi^2}\left(\psi(2) + \ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)$$
$$+\{\mathcal{O}(\lambda^2) \quad \text{véges} \quad \text{rész}\}. \tag{2.13}$$

Vegyük észre, hogy a p^2–tel arányos ellentagnak a bevezetése az eredeti térmennyiség újra normálását (renormálását) jelenti,

$$\phi_r(x) = Z^{-1/2}\phi(x) \tag{2.14}$$

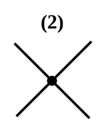
ahol az arányossági tényezőt úgy olvashatjuk le, hogy a renormált $\Gamma[\varphi]$ funkcionál kinetikus energia tagját

$$\int d^dx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2}\frac{1}{24}\frac{2}{\epsilon}\right)(\partial_\mu\varphi)^2 = \int d^dx \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_r)^2 \tag{2.15}$$

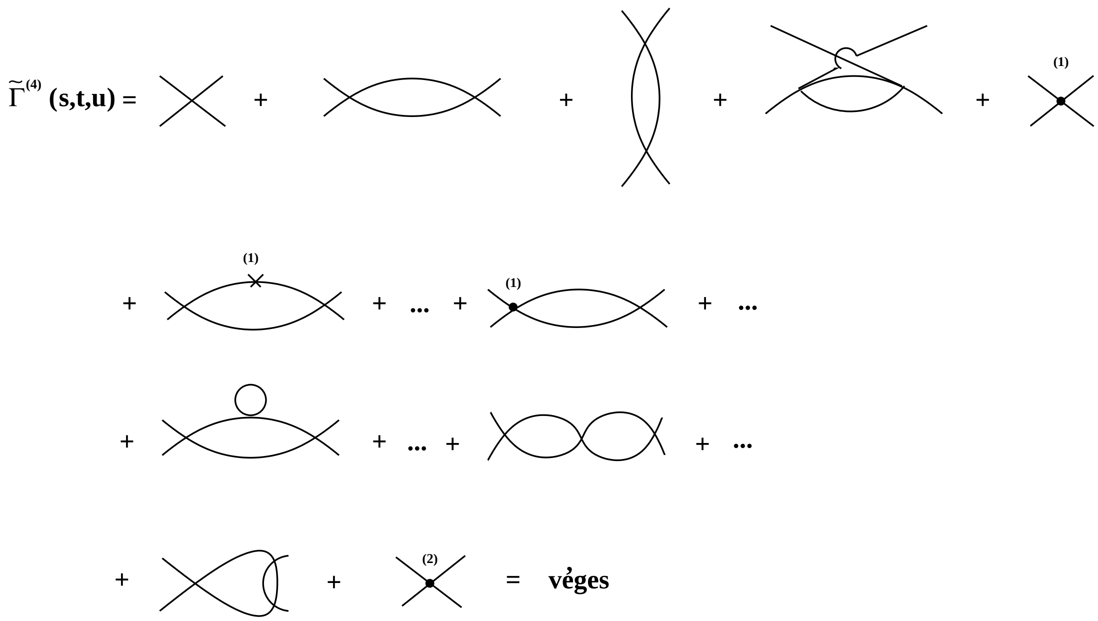
alakba írjuk. Innen:

$$Z = \left(1 - \frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2}\frac{1}{24}\frac{2}{\epsilon}\right). \tag{2.16}$$

Ha még bevezetünk egy az önkölcsönhatást $\mathcal{O}(\lambda^2)$ rendben módosító, alkalmasan választott vertexet, azaz ellentagot,



akkor megmutatható, hogy az 1PI 4-pont vertexfüggvény is véges:



Ezzel 2-hurok rendben végrehajtottuk a renormálást. Megjegyzem, hogy a 4-pont függvényben a második sorba írt első rendű ellentagok éppen kompenzálják a harmadik sorba írt diagramok divergens részdiagramjainak pólustagjait. Ugyanakkor a negyedik sor első tagja is tartalmaz divergens részdiagramot. Ennek kompenzációja nem triviális, mert az integrandus a két független hurokimpulzus szerint nem szeparálódik két tényező szorzatára. Ez az ún. átfedő divergenciák esete, amelyek kezelhetőségét egy elmélet renormálhatóságának bizonyításakor külön kell vizsgálni. A renormálás során az ellentagok járulékai módosítják az elmélet paramétereit, a tömegparamétert, a csatolási állandót és a térmennyiség normálási együtthatóját, az úgy nevezett hullámfüggvény renormálási együtthatót.

2.2. A renormálás „filozófiája”

Tegyük fel, hogy az elmélet renormálható. Ekkor a perturbációszámítás valamennyi rendjében eltüntethetjük a divergenciákat alkalmas ellentagok bevezetésével. Ezek a $\Gamma[\varphi]$ funkcionálban mind olyan újabb tagok, amelyeknek a szerkezete megegyezik a klasszikus hatásban már eleve jelenlevő tagok szerkezetével. Hogyan lehet interpretálni a renormálási eljárást?

A renormálási eljárás „filozófiáját” kétféleképpen is megfogalmazhatjuk.

- Mondhatjuk azt, hogy eredetileg a klasszikus hatásból indulunk ki, amelyben valamilyen véges paraméterek szerepelnek, az ún. *renormált paraméterek*. A hatásnak, mint funkcionálnak azonban csak a szerkezetét sejtettük meg helyesen, de nem az összes tagjait. Ezért a renormált paramétereket tartalmazó eredeti hatáshoz további ellentagokat kell hozzáadnunk a perturbációszámítás minden rendjében, amelyek az egyes, már eredetileg szereplő tagok együtthatóit módosítják, mert a Lagrange-sűrűségben az elemi térmennyiségeknek (és deriváltjaiknak) már korábban is szereplő szerkezetű monomjait tartalmazzák. A korrekciós tagok csak regularizált esetben értelmesek, de ez nem baj. Sőt szükséges, hiszen így lehet elérni, hogy a kvantumfluktuációk miatt az effektív hatásban fellépő, ugyancsak levágásfüggő járulékok szingularitásai a perturbációszámítás során végül rendről rendre kiejtsék egymást. Természetesen az ellentagok az eredeti renormált paramétereknek és a regularizációs eljárás paraméterének (pl. Λ levágás, vagy az a rácsállandó, vagy az ϵ dimenzió és a μ paraméter) függvényei.

A renormálás algoritmusa ilyenkor a következőképpen működik: Indulunk az eredeti (intuitív úton, általában klasszikus fizikai analógia alapján megsejtett) S hatással, amely a hurokkifejtés legalacsonyabb rendjében ($\hbar^0$ rendben), azaz fa-szinten megegyezik a $\Gamma^{[0]} = S$ effektív hatással. Ezután az eredeti (renormált paramétereket) tartalmazó S hatás alapján meghatározzuk az effektív hatás $\Delta^{[1]}\Gamma$ egy-hurok korrekcióit, majd meghatározzuk a hatáshoz hozzáadandó azon $\hbar$-rendű $\Delta^{[1]}S$ ellentagokat, amelyek alkalmasak az egy-hurok korrekciók szingularitásainak kiejtésére az egy-hurok effektív hatásban, vagyis úgy, hogy $\Delta^{[1]}\Gamma + \Delta^{[1]}S$ véges legyen. Az elmélet renormálhatósága biztosítja, hogy a $\Delta^{[1]}\Gamma$-ban megjelenő divergens tagoknak az elemi térmennyiségek ugyanazon lokális, valós monomjai felelnek meg, mint amilyenek az S hatásban is szerepeltek. Ez azt vonja maga után, hogy az ellentagoknak is ilyen monomok felelnek meg. Végül az egy-hurok szinten renormált $\Gamma^{[1]} = S + \Delta^{[1]}\Gamma + \Delta^{[1]}S$ effektív hatás tehát végesnek adódik, és megőrzi az eredeti hatásnak, mint funkcionálnak a szerkezetét. Mivel $\Delta^{[1]}S$ véges részeit a $\Delta^{[1]}\Gamma + \Delta^{[1]}S =$véges feltétel még nem rögzíti, az eredeti, végesnek feltételezett csatolási állandók módosulhatnak, de továbbra is végesek maradnak. Ezután az $S + \Delta^{[1]}S$ hatásból kiindulva, az egy-hurok ellentagoknak megfelelő $\hbar$-rendű vertexeket is figyelembe véve meghatározzuk az effektív hatás két-hurok rendű $\Delta^{[2]}\Gamma$ járulékát. Ez megint divergensnek adódna, ha el akarnánk távolítani a regulátort (pl. a Λ UV levágást). Ezért a $\Delta^{[2]}\Gamma + \Delta^{[2]}S =$véges feltétellel meghatározzuk a hatás $\Delta^{[2]}S$ két-hurok ellentagjait, amelyek kiejtik az effektív hatás $\Delta^{[2]}\Gamma$ két-hurok korrekciójának UV divergens tagjait, úgyhogy végül a két-hurok szinten renormált $\Gamma^{[2]} = S + \Delta^{[1]}S + \Delta^{[2]}S + \Delta^{[1]}\Gamma + \Delta^{[2]}\Gamma$ effektív hatás végesnek és renormálható elmélet esetében az eredeti hatással azonos funkcionális szerkezetűnek adódik. Ezután az eljárást iteratív módon folytatjuk tovább, rendről rendre haladva. Ha $S^{[r]} = S + \sum_{i=1}^{r} \Delta^{[i]}S$ jelöli a $\mathcal{O}(\hbar^i)$ $(i = 1, \ldots, r)$ rendű ellentagokkal már kiegészített hatást és $\Gamma^{[r]} = S + \sum_{i=1}^{r}(\Delta^{[i]}\Gamma + \Delta^{[i]}S)$ a $\hbar^r$ rendben renormált effektív hatást, akkor a renormálás $(r + 1)$-edik lépésében az $S^{[r]}$ hatásból kiindulva, figyelembe véve annak összes ellentag-vertexét (s azok rendjét $\hbar$-ban) meghatározzuk az effektív hatás $\hbar^{r+1}$-rendű $\Delta\Gamma^{[r+1]}$ korrekcióját, ami általában divergensnek adódik, az $\hbar^{r+1}$ rendű divergens tagok kiejtése érdekében bevezetjük a hatás $\Delta^{[r+1]}S$ ellentagjait a $\Delta\Gamma^{[r+1]}+\Delta^{[r+1]}S$ =véges feltétellel és így megkapjuk a $\Gamma^{[r+1]}=\Gamma^{[r]}+\Delta\Gamma^{[r+1]}+\Delta^{[r+1]}S$ véges, $\mathcal{O}(\hbar^{r+1})$ rendben renormált effektív hatást.

A divergenciák kiejtése szempontjából nem fontos, de a csatolási állandók fizikai értékének rögzítése szempontjából lényeges, hogy az eljárás minden lépésében véges mértékben módosulhatnak az egyes vertexek csatolási állandói. A véges részek együtthatóinak rögzítésével majd külön foglalkozunk még alább.

- A fentieket egy másik szemlélet szerint is el lehet mondani. Induljunk mindjárt azzal a hatással, amelyet az előbbi eljárás végén kaptunk. Ez a regularizált klasszikus hatás olyan ún. *csupasz paraméterekkel*, amelyek a regularizáció megszüntetése esetén nem lennének végesek, hanem a regularizációs paraméter szerint szingularitásokat tartalmaznak. Mivel az előző eljárás során megőrződött a hatás funkcionális szerkezete az ellentagok rendről rendre történő hozzáadása után is, azért a renormált (eredeti) hatás és az eredményül kapott csupasz hatás azonos alakú funkcionálja a renormált elemi tereknek. Ezért úgy is felfoghatjuk a renormálást, hogy a renormált hatásból a csupasz hatást megkaphatjuk, ha a renormált ϕ_r elemi tereket és a renormált λ_r, m_r^2 csatolási állandókat (a tömeget is beleértve) alkalmas, levágástól függő, UV divergens tényezőkkel megszorozzuk. Az így kapott csupasz hatásban a csupasz ϕ térmennyiség és a csupasz λ, m^2 csatolási állandók szerepelnek. A csupasz térmennyiséget a csupasz hatás kinetikus tagjának szokásos együtthatója, a Lagrange-sűrűség megfelelő tagjának $\frac{1}{2}(\partial\phi)^2$ alakja „normálja". A csupasz $\phi(x)$ térmennyiség a renormált térmennyiséggel $\phi(x)=Z^{1/2}\phi_r(x)$ kapcsolatban van, ahol a Z úgy nevezett hullámfüggvény renormálási tényezőt úgy kell megválasztani, hogy a csupasz hatást azonosan átírhassuk a renormált hatássá, amely részben egy a csupasz hatással azonos alakú kifejezésből áll, amelyben a csupasz terek és csatolási állandók helyén a renormáltak szerepelnek, és ehhez adódnak hozzá az ellentagok, amelyek szerkezete szintén megegyezik a csupasz hatásban szereplő tagok szerkezetével, benne a renormált terek szerepelnek, és az együtthatói a levágással és a renormált csatolási állandókkal vannak kifejezve:

$$
\begin{aligned}
S_\Lambda[\phi] &= \int dx \left[\frac{1}{2}\phi(m^2-\partial^2)\phi+\frac{1}{4!}\lambda\phi^4\right] \\
&= \int dx \left[\frac{1}{2}\phi_r(m_r^2-\partial^2)\phi_r+\frac{1}{4!}\lambda_r\phi_r^4\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{2}(Z-1)(\partial_\mu\phi_r)(\partial_\mu\phi_r)+\frac{1}{2}\delta m^2\phi_r^2+\frac{1}{4!}\lambda_r(Z_\lambda-1)\phi_r^4\right] \\
&\equiv S[\phi_r]+\Delta S[\phi_r]\equiv S_r[\phi_r],
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

ahol $S[\phi_r]$ ugyanolyan alakú funkcionálja a ϕ_r renormált térmennyiségnek, mint $S_\Lambda[\phi]$ a csupasz ϕ térnek, csak amíg a csupasz $S_\Lambda[\phi]$ hatásban a csupasz λ, m^2 csatolási állandók szerepelnek, addig az $S[\phi_r]$ renormált hatásban a véges renormált λ_r, m_r^2 csatolási állandók állnak az előbbiek helyén. A $\Delta S[\phi_r]$ pedig a megfelelő ellentagokat jelöli. Végül a renormált hatás és az ellentagok összege $S_r[\phi_r]$ is ugyanolyan alakú funkcionálja a renormált tereknek, mint a csupasz hatás a csupasz tereknek. Formailag a fenti azonosság akkor és csak akkor teljesülhet, ha a csupasz és a renormált paraméterek között az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$\lambda = \lambda_r Z_\lambda Z^{-2}, \tag{2.18}$$

$$m^2 = Z^{-1}(m_r^2 + \delta m^2). \tag{2.19}$$

A csupasz paraméterek ekkor a véges renormált paraméterek és a regularizációs paraméter függvényei. A renormált hatás pedig a renormált térmennyiségnek ugyanolyan monomjait tartalmazó funkcionálja, mint amilyen monomok az eredeti hatásban fellépnek. Röviden azt szokás mondani, hogy a renormálható elmélet perturbatív renormálása *multiplikatív renormálás*. Érdemes hangsúlyozni, hogy ez annak a következménye, hogy az ellentagvertexek az elemi terek ugyanazon lokális valós monomjai maradnak, mint amelyek eredetileg is szerepelnek a klasszikus hatásban.

A korábbiakból világos, hogy a renormált hatásnak olyan ellentagokat kell tartalmaznia, amelyeknek együtthatói a $\hbar$ szerinti Taylor-sor tagjai. (Az általunk példaként választott önkölcsönható skalártér esetén ez egyúttal a renormált csatolási állandó szerinti Taylor-sort is jelent). A Taylor-sor együtthatói a regularizációs paraméter függvényei, a $\Lambda \to \infty$ határesetben divergensek:

$$\delta m^2 = a_1(\Lambda)\lambda_r + a_2(\Lambda)\lambda_r^2 + \dots, \tag{2.20}$$

$$Z = 1 + b_1(\Lambda)\lambda_r + b_2(\Lambda)\lambda_r^2 + \dots, \tag{2.21}$$

$$Z_\lambda = 1 + c_1(\Lambda)\lambda_r + c_2(\Lambda)\lambda_r^2 + \dots. \tag{2.22}$$

A renormálhatóság kérdése tehát arra redukálható, hogy meg lehet-e úgy választani az $a_i(\Lambda)$, $b_i(\Lambda)$ és $c_i(\Lambda)$ együtthatókat, hogy a renormált térre vonatkozó 1PI vertexfüggvények a perturbációszámítás tetszőleges rendjében végesnek adódjanak a regularizáció eltávolítása esetén. Ezen együtthatók megadása azt jelenti, hogy a kölcsönhatás növekvő rendjeiben meghatározzuk a megfelelő ellentagokat. Az erre vonatkozó algoritmus most úgy működik, hogy ha a perturbációszámítás adott r rendjében véges effektív hatást akarjuk megkapni, akkor a csupasz hatás ellentagjait r-ed rendben csonkított Taylor-sor alakjában, egyelőre meghatározatlan együtthatókkal vesszük fel. Az így felírt csupasz hatás alapján, annak összes ellentag vertexét és azok $\hbar$-ban mutatott rendjét figyelembe véve meghatározzuk az effektív hatás valamennyi r-edrendű korrekcióját. Az eredmény, azaz $\Gamma^{[r]}$ végességét megkövetelve, az eleddig meghatározatlan együtthatók végtelen részei rögzülnek. Az együtthatók véges részeinek meghatározására a végesség megkövetelése még önmagában nem elég.

A fentiek mellett végül létezik egy harmadik renormálási eljárás, amikor diagramról diagramra haladva vonunk le valamit a megfelelő Feynman-integrál integrandusából, hogy az adott diagramot végessé tegyük. Ez a levonási algoritmus megfogalmazható úgy, hogy a másik két algoritmussal egyenértékű legyen.

Végül tegyünk említést a nem renormálható elméletekről. Mint már említettük, ebben az esetben a hurokkifejtés magasabb rendjei felé haladva egyre újabb és újabb típusú UV divergens járulékok lépnek fel. Ez oda vezet, hogy az elemi tereknek (és deriváltjaiknak) újabb típusú monomjai jelennek meg az effektív hatás divergens hurokkorrekcióban, amelyek kiejtéséhez egyre újabb és újabb típusú monomokat tartalmazó ellentag-vertexek bevezetése szükséges. Elvben a renormálási algoritmus most is folytatható a végtelenségig. A nem-renormálhatóság ára azonban az, hogy végtelen sok típusú kölcsönhatási tag, s velük együtt végtelen sok csatolási állandó jelenik meg. Ezek kísérleti rögzítése elvben végtelen sok mérést igényelne, ami a nem renormálható elméleteknek fizikai modellként történő alkalmazhatóságát erősen megkérdőjelezi. Érdemes azért megjegyezni, hogy korlátozott érvényességű fizikai modellekként, úgy nevezett effektív elméletekként nem renormálható elméletek is használhatók. Ezek alkalmazhatóságát általában valamilyen energiaskálára kell korlátozni, ami azt jelenti, hogy a Λ ,,UV" levágás ilyenkor valódi fizikai érvényességi határt jelent, nem kell és nem is szabad vele a végtelenhez tartani, hanem empirikus úton kell rögzíteni az értékét. Így ebben az esetben nem jelenik meg az UV divergenciák kérdése. Az ilyen modellekben általában olyan kölcsönhatási vertexek szerepelnek, amelyek az adott modell érvényességét jelentő energiaintervallumban fontos szerepet játszó, releváns kölcsönhatásokat írnak le, s ilyenekből a tapasztalat szerint általában csak véges sok van adott energiatartományban.

2.3. A csupasz és a renormált vertexfüggvények

Ha egy elmélet renormálható, akkor csak véges sok különböző típusú ellentag lép fel a renormált hatásban. Ezért mindig megtehetjük, hogy már az eredeti, klasszikus hatásba beírjuk mind az ilyen típusú tagokat. Ez azzal az előnnyel jár, hogy az elmélet multiplikatív módon válik renormálhatóvá. A továbbiakban csak ilyen esetekkel fogunk foglalkozni. A multiplikatív renormálhatóság egyúttal azt is jelenti, hogy a Green-függvények definíciójában szereplő téroperátorokat alkalmas, levágásfüggő módon átskálázva (renormálva) a kapott, azaz renormált Green-függvény levágás-függetlenné válik.

Térjünk vissza a ϕ^4 elméletre és keressük meg a renormált

$$G_r^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \langle 0|T(\hat{\phi}_r(x_1)\cdots\hat{\phi}_r(x_n))|0\rangle \qquad (2.23)$$

és a csupasz

$$G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \langle 0|T(\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n))|0\rangle \qquad (2.24)$$

vertexfüggvények kapcsolatát. Megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned} G_r^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) &= Z^{-n/2}G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n), \\ G_{c\ r}^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) &= Z^{-n/2}G_c^{(n)}(x_1,\ldots,x_n), \\ \Gamma_r^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) &= Z^{n/2}\Gamma^{(n)}(x_1,\ldots,x_n). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Felhasználva, hogy

$$\int dxJ\phi = \int dxJZ^{1/2}\phi_r, \tag{2.26}$$

a csupasz Green-függvények generáló funkcionálját (a normálási együtthatót is beleértve) azonosan átírhatjuk a renormált Green-függvények generáló funkcionáljává:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_\Lambda[\phi]+\int dxJ\phi}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_\Lambda[\phi]}} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi_r e^{-S_r[\phi_r]+\int dxJZ^{1/2}\phi_r}}{\int \mathcal{D}\phi_r e^{-S_r[\phi_r]}} \\ &\equiv Z_r[JZ^{1/2}]. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Ebből következik, hogy:

$$Z_r[J] = Z[J/\sqrt{Z}], \tag{2.28}$$

$$W_r[J] = W[J/\sqrt{Z}]. \tag{2.29}$$

Legendre-transzformáció után kapjuk az 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljának alábbi tulajdonságát:

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi] &= -W[J] + \int dxJ\varphi \\ &= -W_r[J\sqrt{Z}] + \int dxJ\sqrt{Z}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{Z}} \\ &\equiv \Gamma_r\left[\frac{\varphi}{\sqrt{Z}}\right], \end{aligned} \tag{2.30}$$

azaz

$$\Gamma_r[\varphi] = \Gamma[Z^{1/2}\varphi]. \tag{2.31}$$

A renormált és csupasz Green-függvények kapcsolatát a megfelelő renormált és csupasz generátorfunkcionálok kapcsolatát kifejező azonosságok mindkét oldalának Taylor-sorfejtésével kapjuk meg.

A továbbiak céljából ugyancsak érdemes megvizsgálni az l darab ϕ^2 betétrésszel rendelkező 1PI csupasz és renormált vertexfüggvények kapcsolatát:

$$\Gamma_r^{(l,n)}(y_1,\ldots,y_l,x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{Z_2}{Z}\right)^l Z^{n/2}\Gamma^{(l,n)}(y_1,\ldots,y_l,x_1,\ldots,x_n), \tag{2.32}$$

ahol Z_2 a ϕ^2 betétrész renormálási együtthatója.

A bizonyításhoz a ϕ^2 betétrészhez csatolódó $K(x)$ forrás bevezetésével nyert hatást használjuk:

$$S[\phi, K] \quad = \quad S[\phi] + \frac{1}{2} \int dx K(x) \phi^2(x). \tag{2.33}$$

Képezzük belőle a

$$Z[J, K] \quad = \quad \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi,K] + \int dx J\phi}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}} \tag{2.34}$$

generáló funkcionált. A K szerinti funkcionálderiválás $-\frac{1}{2}\phi^2(x)$ betétrészeket generál. Azonos átalakítással:

$$\begin{aligned} S[\phi, K] &= S_r[\phi_r] + \frac{1}{2} Z \int dx K(x) \phi_r^2 \\ &= S_r[\phi_r] + \frac{1}{2} Z_2 \int dx \frac{KZ}{Z_2} \phi_r^2 \\ &\equiv S_r[\phi_r, KZ/Z_2\,], \end{aligned} \tag{2.35}$$

ahol a Z_2 renormálási állandót azért kellett bevezetni, mert általában az erősebben szinguláris, ϕ^2 betétrészeket tartalmazó Feynman-diagramok renormálásához további ellentagok bevezetése szükséges. Más alakban:

$$S[\phi, KZ_2/Z\,] \quad = \quad S_r[\phi_r, K]. \tag{2.36}$$

Ebből, az operátor-betétrészeket nem tartalmazó diagramok generáló funkcionáljaihoz hasonlóan, az következik, hogy

$$Z_r[J, K] \quad = \quad Z[J/\sqrt{Z}, KZ_2/Z\,], \tag{2.37}$$

$$W_r[J, K] \quad = \quad W[J/\sqrt{Z}, KZ_2/Z\,], \tag{2.38}$$

$$\Gamma_r[\varphi, K] \quad = \quad \Gamma[\sqrt{Z}\varphi, KZ_2/Z\,]. \tag{2.39}$$

Az utolsó egyenlet mindkét oldalán elvégezve a megfelelő számú K és φ szerinti funkcionálderiválást, megkapjuk a keresett összefüggést.

2.4. Renormálási sémák. Renormálási feltételek

Az ellentagok megválasztása nem egyértelmű. Miután a hurokkifejtés adott rendjével bezárólag meghatároztuk az effektív hatás hurokkorrekcióit, az adott rendben bevezetni szükséges divergens ellentagok meghatározása a véges részeiket tekintve nem egyértelmű. Például, amikor a dimenzionálisan regularizált skalártérelméletet renormáljuk, akkor az egyértelműen definiált divergens pólustagokhoz hozzáadhatjuk az ϵ paraméter tetszőleges polinomjait, amelyek az $\epsilon \to 0$ határesetben eltűnnek. E polinomok különböző megválasztása esetén a renormált 1PI vertexfüggvények különböző alakúaknak adódnak. Azt szokás mondani, hogy különböző renormálási sémákat használhatunk. Meg lehet azonban mutatni, hogy igen általános feltételek mellett a különböző renormálási sémák egyenértékűek.

A renormálási eljárás lényege abban áll, hogy a csupasz térre felírt, a csupasz paramétereket tartalmazó hatást azonosan átírtuk a renormált térre vonatkozó hatássá, amelyben renormált paraméterek szerepelnek. A fent említett szabadság az ellentagok véges részeinek megválasztásában azt jelenti, hogy a renormált paraméterek megválasztása sem egyértelmű.

A korábbi példánkban úgy jártunk el, hogy az ellentagok véges részeit zérusnak választottuk. Ez az ún. *minimális levonási séma* (minimal subtraction scheme), amelyet — egyszerűsége miatt — elterjedten alkalmaznak dimenzionálisan regularizált elméletekben. A renormált 1PI Feynman-diagramok ilyenkor is tartalmaznak még szabad paramétert, a dimenzionális regularizáció során bevezetett μ skálaparamétert.

A későbbiekben sokszor éppen azt szeretnénk majd vizsgálni, hogy a renormálási paraméterek megválasztásának szabadsága mennyiben érinti az elmélet fizikai tartalmát. Célszerű ezért a fenti szabadságot úgy megfogalmazni, hogy az explicit módon látsszon. Ez úgy lehetséges, hogy a renormált 1PI vertexfüggvényekre kirótt ún. *renormálási feltételekkel* egyértelműen definiáljuk a renormált paramétereket. Ezt úgy lehet tekinteni, mint a renormált paraméterek fizikai definícióját. A renormált 1PI vertexfüggvények ui. elég közvetlen kapcsolatban vannak konkrét fizikai folyamatok átmeneti amplitúdóival, ill. az elmélet egyrészecskés gerjesztéseinek a spektrumával.

Vegyük újra a ϕ^4 elmélet példáját. A hatást a renormálás révén

$$\begin{aligned} S([\phi], m, \lambda) &\equiv S_r([\phi_r], m_r, \lambda_r) \\ &= S([\phi_r], m_r, \lambda_r) + \Delta S([\phi_r], m_r, \lambda_r) \end{aligned} \tag{2.40}$$

alakba rendeztük át, ahol ΔS az ellentagokat tartalmazó rész. A $\Gamma_r[\varphi]$ funkcionál alakjából tudjuk, hogy az ellentagok véges részei p^2-ben elsőfokú polinom alakjában adnak járulékot az 1PI 2-pont vertexfüggvényhez és konstans alakjában az 1PI 4-pont vertexfüggvényhez. Ennek megfelelően a véges részek rögzítéséhez a 2-pont függvényre kirótt két feltételre (az elsőfokú polinom elsőfokú tagjának együtthatóját és a nulladfokú tagot kell rögzíteni) és a 4-pont függvényre kirótt egy feltételre van szükség. A renormált 1PI 2-pont vertexfüggvény 2-hurok rendben:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_r^{(2)}(p) &= p^2\left(1 - \frac{2}{\epsilon}\frac{1}{24}\frac{\lambda_r^2}{(16\pi^2)^2} + \mathcal{O}(\lambda_r^2) \quad \text{véges} \quad \text{rész} \quad \right) \\ &+ m_r^2\left[1 - \frac{\lambda_r}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(2) + \ln\frac{4\pi\mu^2}{m_r^2}\right)\right. \\ &\left. + \frac{\lambda_r^2}{4(16\pi^2)^2}\left(2\frac{4}{\epsilon^2} - \frac{2}{\epsilon}\right)\right] \\ &+ p^2(Z-1) + \delta m^2. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Itt az explicit módon kiírt tagok a (renormált tér és csatolások segítségével felírt) eredeti S hatás vertexeiből származó fa-, egyhurok- és kéthurok-szintű korrekciók. Az ellentagok járuléka ezekhez 2-hurok renddel bezárólag:

$$p^2(Z-1)+\delta m^2 \;=\; p^2(b_1\lambda_r+b_2\lambda_r^2)+a_1\lambda_r+a_2\lambda_r^2. \tag{2.42}$$

A renormálási állandók renormált csatolási állandó szerinti Taylor-sorának együtthatóit az alábbi, a renormált 1PI 2-pont vertexfüggvényre kirótt renormálási feltételekkel rögzítjük; ezek az euklideszi tartományban:

$$\tilde{\Gamma}_r^{(2)}(p=0) \;=\; m_r^2, \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\tilde{\Gamma}_r^{(2)}(p)_{p=0} \;=\; 1. \tag{2.44}$$

A renormálási feltételeket természetesen úgy kell választani, hogy fagráfközelítésben (amikor nem veszünk figyelembe ellentagokat) kielégüljenek. A renormálási feltételek egyszerre rögzítik az ellentagok pólustagjait és véges részeit. Pl. 2-hurok renddel bezárólag:

$$a_1 \;=\; m_r^2\frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon}+\psi(2)+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m_r^2}\right), \tag{2.45}$$

$$a_2 \;=\; m_r^2\frac{1}{4(16\pi^2)^2}\left(2\frac{4}{\epsilon^2}-\frac{2}{\epsilon}\right), \tag{2.46}$$

$$b_1 \;=\; 0, \tag{2.47}$$

$$b_2 \;=\; \frac{2}{\epsilon}\frac{1}{24}\frac{1}{(16\pi^2)^2}+\mathcal{O}(1). \tag{2.48}$$

A renormált tömeget a fenti renormálási feltételek úgy rögzítik, mint a renormált propagátor pólusát (Wick-forgatás után). Ez a tömeg szokásos kvantummechanikai definíciójának általánosítása a kvantumtérelméletre. Ugyanakkor olyan ,,átmeneti amplitudó” révén történik a tömeg rögzítése, ami nem fizikai, hiszen a bejövő lábakon $p^\mu=0$, azaz a bejövőlábak nem felelnek meg (Minkowski-térbe történő elfolytatás után sem) fizikai részecskék terjedésének. A másik renormálási feltétel a propagátor reziduumát 1-re normálja, hasonlóan a szabad tér propagátorának normálásához. Végül egy további renormálási feltétel szükséges a renormált csatolási állandó definiálásához:

$$\tilde{\Gamma}_r^{(4)}(s,t,u)_{p=0} \;=\; \lambda_r. \tag{2.49}$$

1-hurok renddel bezárólag:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_r^{(4)}(s=t=u=0) \;&=\; \lambda_r\Bigg\{1-\frac{3\lambda_r}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon}+\psi(1)+2+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m_r^2}\right) \\ &\quad +c_1\lambda_r\Bigg\} \\ &\equiv\; \lambda_r,\end{aligned} \tag{2.50}$$

ahonnan:

$$c_1 = \frac{3}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(1) + 2 + \ln\frac{4\pi\mu^2}{m_r^2}\right). \tag{2.51}$$

Amit csináltunk, az annak az algoritmusnak felel meg, hogy a csupasz hatásba beírtuk rögtön meghatározatlan együtthatókkal a hurokkifejtés adott rendjének megfelelő Taylor-sorokat a csatolási állandók és a hullámfüggvény renormálási együttható helyére, majd az így kapott összes vertexet és azok $\hbar$-ban mutatott rendjét figyelembe véve kiszámoltuk az effektív hatás hurokkorrekcióit az adott renddel bezárólag. Az így kapott renormált effektív hatásból származtatott valódi vertexfüggvényekre róttuk ki a renormálási feltételeket. Ezek aztán – a megfelelő rendű tagok összehasonlítása révén – meghatározták az eleddig meghatározatlan valamennyi együtthatót. Általában pontosan annyi renormálási feltételre van szükség, ahány csatolási állandó szerepel az elméletben (csatolási állandónak tekintve a tömeget és a deriváltas tagok együtthatóit).

A renormálási feltételeket példánkban, a tömeges $\lambda\phi^4$ elméletben a külső impulzusok $p_i = 0$ értékei mellett róttuk ki a valódi vertexfüggvényekre. A renormálási feltételeknek ezt a fajta előírását *közbenső renormálásnak* szokás nevezni. Ilyenkor a renormált tömeg rögzítése nem fizikai, azaz tömeghéjon levő részecskék közti átmeneti amplitudók révén történik. Fizikaibb a renormálási feltételeknek $p^2 = -m_r^2$,,levonási pontban" történő kirovása, mert ez annak felel meg, hogy a külső lábak tömeghéjon levő részecskék (Minkowski-térre történő áttérés után). (A tömegnégyzet előtti negatív előjel az euklideszi tartományban jelenik meg, Minkowski-térben $p^2 = m_r^2$ lenne a levonási pont.) Ilyenkor a 4-pont vertexfüggvényre vonatkozó renormálási feltételt a szimmetrikus S_m pontban szokásos kiróni, amelyet a $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = -m_r^2$ és $s = t = u = -4m_r^2/3$ feltételek határoznak meg (az euklideszi tartományban). (Az S_m szimmetrikus pontot Minkowski-térben a $p_i^2 = m_r^2$ $(i = 1, \ldots, 4)$, $s = t = u = 4m_r^2/3$ feltétellel határozzuk meg.) A fizikai renormálási feltételek egyrészt azt jelentik, hogy Minkowski-térben a propagátor pólusait $p^2 = m_r^2$ határozza meg és a külső lábak tömeghéjon vannak, a szimmetrikus pont pedig ugyancsak annak felel meg, hogy a 4-pont vertexfüggvény minden lába tömeghéjon van. A megfelelő renormálási feltételek (euklideszi elméletben) ekkor

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p^2 = -m_r^2) = 0, \quad \frac{d}{dp^2}\tilde{\Gamma}^{(2)}(p^2)\Big|_{p^2=-m_r^2} = 1,$$
$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_!, p_2, p_3, p_4)\Big|_{S_m} = \lambda_r. \tag{2.52}$$

A renormált tömeget tehát a valódi 2-pont vertexfüggvényre kirótt első renormálási feltétel úgy rögzíti, mint a renormált propagátor pólusát (Wick-forgatás után). Ez a fizikai tömeg szokásos kvantummechanikai definíciójának általánosítása a kvantumtérelméletre. A második renormálási feltétel a propagátor reziduumát 1-re normálja, hasonlóan a szabad tér propagátorának normálásához. a harmadik renormálási feltétel pedig a λ_r csatolási állandó értékét rögzíti.

Ha renormálni akarjuk a ϕ^4 elméletben a ϕ^2 betétrésszel rendelkező 1PI vertexfüggvényeket is, akkor a Z_2 renormálási állandót rögzítő további renormálási feltételre is szükség van. Ez — a fagráfközelítéssel összhangban — lehet:

$$\tilde{\Gamma}_r^{(1,2)}(0;0,0) \;=\; 1. \qquad (2.53)$$

Levágással regularizált elméletekben rendszerint a renormálási feltételeket használják a renormálási állandók meghatározására. Az ellentagok véges részeinek ilymódon való rögzítése azzal az előnnyel jár, hogy a renormálási állandókat eleve felvehetjük a csatolási állandó szerinti Taylor-sor alakjában. Ezután kiszámoljuk a csupasz 1PI vertexfüggvényeket valamilyen renddel bezárólag, és a renormálási feltételekből egyszerre leolvassuk a perturbációszámítás adott rendjében a renormálási állandók Taylor-soraiban fellépő valamennyi együttható alakját.

A renormálási feltételeket általánosan a külső impulzusok tetszőleges $p_i^2 = -\mu^2$ értéke mellett írhatjuk elő euklideszi elméletben (Minkowski-térben értelemszerűen $p_i^2 = \mu^2$). A $\mu^2 = 0$ választás a közbenső renormálás speciális esete, a $\mu = m_r$ választás pedig a fizikai renormálási feltételeknek felel meg, amikor a renormált tömegparaméter maga a fizikai tömeg. A közbenső renormálás általános esetében a renormált 1PI vertexfüggvények még egy μ (tömeg)skálaparamétert is tartalmazni fognak (akárcsak a dimenzionálisan regularizált elmélet renormálása esetén). Az így megfogalmazott közbenső renormálás használata esetén *rögzített impulzushoz kötött levonási sémáról* beszélünk. A $p_i = \mu\theta_i$ külső impulzusok összességét (θ_i egységvektorok) *levonási pontnak* nevezzük.

A renormálási sémák különbözhetnek aszerint, hogy minimális levonást, rögzített impulzushoz kötött levonást, stb. használunk, de aszerint is, hogy a μ paraméter értékét hogyan választjuk. A μ skálaparaméter önkényes megválasztásától a fizikai eredményeknek, mint pl. a szórási hatáskeresztmetszeteknek, nem szabad függeniük, ha felösszegezzük a hurokkifejtést. A csupasz elméletben nem szerepel a μ skálaparaméter, így az független a skálaparaméter értékének megválasztásától. A renormált elméletben ez a szimmetria úgy jelentkezik, hogy a renormált csatolási állandókat μ függvényében alkalmasan kell változtatni ahhoz, hogy a csupasz hatás azonos átírása a renormált mennyiségekkel fagráf- és ellentagok összegére változatlanul azonosság maradjon, ha változtatjuk μ-t. Másképpen úgy is fogalmazhatunk, hogy létezni kell olyan véges renormálási állandóknak, amelyek segítségével valamely rögzített μ_1 értékhez tartozó renormált hatás és egy másik tetszőleges μ_2 értékhez tartozó renormált hatás egymásba azonosan átírhatók. Meg lehet mutatni, hogy a szóbanforgó (μ megváltoztatásával kapcsolatos) ún. *véges renormálási transzformációk* félcsoportot alkotnak, ez a *renormálási csoport.*

Tegyük fel, hogy egy adott renormálási sémán belül különbözőnek választjuk a tömegskála

μ paraméterét. Ha μ_1 a skálaparaméter értéke, akkor a renormált és a csupasz mennyiségek kapcsolata:

$$\begin{aligned} \phi &= Z^{1/2}\phi_r, \\ m^2 &= m_r^2 + \delta m = Z_m Z^{-1} m_r^2, \\ \lambda &= Z_\lambda Z^{-2}\lambda_r, \\ (\phi^2) &= Z_2 Z^{-1}(\phi^2)_r. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Az analóg összefüggések a skálaparaméter μ_2 értéke esetén:

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{Z}^{1/2}\bar{\phi}_r, \\ m^2 &= \bar{m}_r^2 + \overline{\delta m} = \bar{Z}_m \bar{Z}^{-1} \bar{m}_r^2, \\ \lambda &= \bar{Z}_\lambda \bar{Z}^{-2}\bar{\lambda}_r, \\ (\phi^2) &= \bar{Z}_2 \bar{Z}^{-1}\overline{(\phi^2)}_r. \end{aligned} \tag{2.55}$$

A skálaparaméter különböző értékeihez tartozó renormált mennyiségeket összehasonlítva az alábbi kapcsolatot találjuk közöttük:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_r &= Z^{1/2}\bar{Z}^{-1/2}\phi_r \equiv z^{1/2}, \\ \bar{m}_r^2 &= (Z_m Z^{-1})(\bar{Z}\bar{Z}_m^{-1}) m_r^2 \equiv z_m z^{-1} m_r^2, \\ \bar{\lambda}_r &= Z_\lambda \bar{Z}_\lambda^{-1}\bar{Z}^2 Z^{-2}\lambda_r \equiv z_\lambda z^{-2}\lambda_r, \\ \overline{(\phi^2)}_r &= Z_2\bar{Z}_2^{-1}\bar{Z}Z^{-1} \equiv z_2 z^{-1}(\phi^2)_r. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Itt az egyenletek bal és jobb oldalán szereplő renormált mennyiségek egyaránt végesek, következésképpen a kisbetűkkel jelölt renormálási állandók is végesek. Értéküket a megfelelő ,,végtelen" renormálási állandók hányadosainak határértékeként kapjuk (pl. $\Lambda \to \infty$, $a \to 0$, vagy $\epsilon \to 0$). A véges renormálási állandók csak a skálaparaméter μ_1 és μ_2 értékeitől függnek: $z = z(\mu_1, \mu_2)$, stb.

Az eredeti csupasz elmélet nem függ μ értékétől. Ez a fizikai elmélet szimmetriája a μ paraméter változtatásával szemben. Ezt kihasználva fogalmazhatjuk meg az úgynevezett renormált renormálási csoport (RG=,,renormalization group") egyenletet, ami kifejezi, hogy a csupasz n-pont Green-függvények függetlenek a μ paraméter megválasztásától:

$$\mu\frac{d}{d\mu}G^{(n)}(p_1,\ldots,p_n) \equiv \mu\frac{d}{d\mu}\Big[Z^{-n/2}(g_r,\mu)G_r^{(n)}(p_1,\ldots,p_n,g_r,\mu)\Big] = 0, \tag{2.57}$$

ahol a csupasz g csatolási állandókat és a Λ UV levágást rögzített értéken tartjuk. A renormált RG egyenlet azt fejezi ki, hogy a renormált csatolási állandók értékének függenie kell attól, hogy milyen μ impulzusskálán róttuk ki a renormálási feltételeket, azaz $g_r = g_r(\mu)$ ahhoz, hogy a csupasz csatolások értéke rögzített lehessen. A véges renormálás következményeit parciális differenciálegyenlet alakjában fejezi ki az egyenlet.

Hasonlóan, megfogalmazhatjuk az úgy nevezett csupasz RG egyenletet. Most abból indulunk ki, hogy a renormált elmélet Green-függvényei nem függenek a Λ UV levágástól:

$$\Lambda\frac{d}{d\Lambda}G_r^{(n)}(p_1,\ldots,p_n,g_r,\mu) \equiv \Lambda\frac{d}{d\Lambda}\Big[Z^{n/2}(g,\Lambda)G^{(n)}(p_1,\ldots,p_n,g,\Lambda)\Big] = 0, \tag{2.58}$$

ahol a g_r renormált csatolási állandók és a μ levonási skála rögzített. Ehhez viszont a g csupasz csatolási állandóknak függenie kell a Λ UV levágástól, $g = g(\Lambda)$. Ezt fejezi ki a csupasz Green-függvények segítségével a csupasz RG egyenlet. Az egyenlet baloldalának eltűnése akkor értékelhető ki, ha a multiplikatív renormálást figyelembe véve a renormált Green-függvényeket kifejezzük a csupasz Green-függvényekkel, s ezt az utóbbi kifejezést tesszük zérussá. A csupasz csatolások levágással történő futtatásával akkor tudjuk csak rögzített értéken tartani a renormált csatolási állandókat, ha az elmélet renormálható (vagy szuperrenormálható) és valamennyi csatolási állandót alkalmasan levágás-függővé tesszük.

A RG-csoport egyenlet mindkét fenti megfogalmazásában ugyanazt az elméleti modellt vizsgáljuk. Ezekhez hasonló, de mégis némileg különböző egyenlet az úgy nevezett Callan-Symanzik-egyenlet. Ilyenkor az UV levágást, a levonási pont μ skáláját és a csupasz csatolási állandókat – a csupasz m tömeg kivételével – rögzítettnek tekintjük, és azt vizsgáljuk, hogy hogyan változnak a $g_r(m)$ renormált csatolási állandók a csupasz tömeg függvényében. A Callan-Symanzik-egyenletre később visszatérünk még. Most csak annyit bocsátunk előre, hogy annak alakja hasonlít a RG egyenletekhez, viszont a baloldalán az UV levágás, ill. a μ levonási skála szerinti derivált helyett az m csupasz tömeg szerinti derivált szerepel, és az egyenlet jobboldala nem zérus, ami azt fejezi ki, hogy az egyenlet olyan elméletek között teremt kapcsolatot, amelyekben más a tömegparaméter.

2.5. A Callan–Symanzik-egyenlet

Mint fentebb említettük, a Callan-Symanzik-egyenlet (CS-egyenlet) a Green-függvények csupasz tömeg szerinti deriváltjára vonatkozó összefüggéseket fogalmaz meg. A tömeg négyzete szerinti deriválás egyrészt a Feynman-diagramok képleteiben szereplő hurokintegrálok konvergenciáját javítja, hiszen a deriválás következtében, a

$$\frac{\partial}{\partial m^2}\frac{1}{p^2+m^2} = -\frac{1}{p^2+m^2}\frac{1}{p^2+m^2} \tag{2.59}$$

azonosságnak köszönhetően, a hurokintegrálok integrandusában egy propagátorral több tényező jelenik meg az eredetihez képest. Ennélfogva a CS-egyenlet alapján átfedő divergenciákat tartalmazó diagramokat konvergens diagramokkal lehet kapcsolatba hozni, és ezért a CS-egyenlet jó szolgálatot tesz az elméletek renormálhatóságának tisztázásában. A CS-egyenlet ugyanakkor kapcsolatot teremt a különböző tömegparaméterű hasonló elméletek között, ami – szélső esetben – azt is lehetővé teszi, hogy a megfelelő zérus és nem zérus tömegparaméterű elméletek között is kapcsolatot teremthessünk.

Másrészt az n-pont vertexfüggvényeknek a tömeg négyzete szerinti deriválása szoros kapcsolatban áll a ϕ^2 összetett operátort tartalmazó effektív hatásnak a ϕ^2 összetett operátorhoz lineárisan csatolt $K(x)$ külső forrás szerinti funkcionális deriválásával. A ϕ^2 összetett operátort tartalmazó effektív hatást az F. függelékben leírtak szerint úgy értelmezzük, hogy a klasszikus hatást kiegészítjük egy olyan taggal, amely a ϕ^2 összetett operátort lineárisan csatolja a $K(x)$ külső forráshoz. Ezután a ϕ^2 betétrészeket tartalmazó összefüggő Green-függvények általánosított $W[J,K] = \ln Z[J,K]$ generáló funkcionáljának az elemi térhez csatolódó külső forrás tekintetében képezett Legendre-transzformáltjaként kapjuk meg a ϕ^2 betétrészeket tartalmazó vertexfüggvények $\Gamma[\varphi, K]$ generáló funkcionálját. Ennek az effektív hatásnak φ szerinti n-szeri és a $K(x)$ külső forrás szerinti l-szeri funkcionálderiváltjai a $\Gamma^{(n+l)} = \langle 0|T(\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)\widehat{\phi}^2(y_1)\cdots\widehat{\phi}^2(y_l))|0\rangle_{1PI}$ n darab elemi térnek megfelelő külső-láb csatlakozást és l darab ϕ^2 betétrészt tartalmazó 1PI Green-függvények.

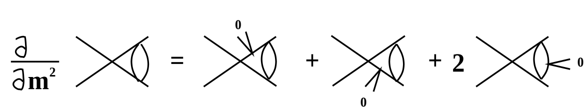
Ha $K(x)$ =const., azaz a külső forrás homogén, akkor a skalártér csupasz tömege eltolódik:

$$S[\phi, K] \;=\; \int dx \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 + \frac{1}{2}(m^2+K)\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right]. \tag{2.60}$$

Ekkor a K szerinti funkcionálderiválás egyenértékű a csupasz tömeg négyzete szerinti parciális deriválással. Az állandó külső forrás Fourier-spektruma csak a $p = 0$ impulzust tartalmazza, ezért az állandó külső forrás szerinti deriválás $p = 0$ impulzushoz tartozó ϕ^2 betétrészt generál. Írhatjuk tehát, hogy

$$\frac{\partial}{\partial m^2}\tilde{\Gamma}^{(l,n)}(q_1,\ldots,q_l,p_1,\ldots,p_n)_{\lambda,\Lambda,\mu} \;=\; \tilde{\Gamma}^{(l+1,n)}(0,q_1,\ldots,q_l,p_1,\ldots,p_n). \tag{2.61}$$

A deriválás során rögzítettnek tekintjük a csupasz csatolási állandókat, az UV levágást és a levonási skálát, így az egyenlet implicit módon azt fejezi ki, hogy a renormált csatolásoknak függeniük kell a csupasz tömegtől. Az (2.61) egyenlet azt mutatja, hogy az l darab ϕ^2 betétrészt tartalmazó 1PI csupasz vertexfüggvények a csupasz tömeg szerinti deriválás révén kapcsolatba hozhatók a $(l+1)$ darab ϕ^2 betétrészt tartalmazó 1PI csupasz vertexfüggvényekkel. Ezt a diagramok nyelvén az alábbi példával illusztráljuk:



$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{m}^2}\tilde{\Gamma}^{(0,4)}(\ldots) = \tilde{\Gamma}^{(1,4)}(0,\ldots)$$

Az egyenlet jobb oldalán az eredeti diagram valamelyik propagátorát a betétrész beírása révén megkettőztük.

Az (2.61) egyenlet a csupasz 1PI vertexfüggvényekre vonatkozik. A csupasz és a renormált vertexfüggvények kapcsolatát felhasználva azonban átírhatjuk az (2.61) egyenletet a renormált 1PI vertexfüggvényekre vonatkozó egyenletté. Képezzük ehhez a csupasz $\tilde{\Gamma}^{(ln)}$ vertexfüggvénynek a renormált tömeg szerinti parciális deriváltját:

$$\begin{aligned}\left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\right)_{\lambda,\Lambda,\mu}\tilde{\Gamma}^{(l,n)} &= \left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}m^2\right)_{\lambda,\Lambda,\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial m^2}\tilde{\Gamma}^{(l,n)}\\ &= \left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}m^2\right)_{\lambda,\Lambda,\mu}\cdot\tilde{\Gamma}^{(l+1,n)}(0,\ldots).\end{aligned}\tag{2.62}$$

Helyettesítsük be mindkét oldalon a megfelelő renormált 1PI vertexfüggvényeket:

$$\begin{aligned}&\left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\right)_{\lambda,\Lambda,\mu}\left[Z^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{Z_2}{Z}\right)^{-l}\tilde{\Gamma}_r^{(l,n)}\right]=\\ &= \left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}m^2\right)_{\lambda,\Lambda,\mu}\cdot Z^{-\frac{n}{2}+l+1}Z_2^{-l-1}\tilde{\Gamma}_r^{(l+1,n)}(0,\ldots).\end{aligned}\tag{2.63}$$

A bal oldalon tényezőnként deriválva:

$$\begin{aligned}&-\frac{n}{2}\left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\ln Z\right)_{\lambda,\Lambda,\mu}\tilde{\Gamma}_r^{(l,n)}-l\left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\ln\frac{Z_2}{Z}\right)_{\lambda,\Lambda,\mu}\tilde{\Gamma}_r^{(l,n)}\\ &+\left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\tilde{\Gamma}_r^{(l,n)}\right)_{\lambda,\Lambda,\mu}\\ &= ZZ_2^{-1}\left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}m^2\right)_{\lambda,\Lambda,\mu}\cdot\tilde{\Gamma}_r^{(l+1,n)}(0,\ldots).\end{aligned}\tag{2.64}$$

Vezessük be az alábbi együtthatófüggvényeket:

$$\left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\lambda_r\right)_{\lambda,\Lambda,\mu} \equiv \beta\left(\lambda_r,\frac{m_r}{\Lambda}\right),\tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}\left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\ln Z\left(\lambda_r,\frac{m_r}{\Lambda}\right)\right)_{\lambda,\Lambda,\mu} &= \left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda_r}\right)\ln Z\\ &\equiv \eta\left(\lambda_r,\frac{m_r}{\Lambda}\right),\end{aligned}\tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}\left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\ln\frac{Z_2}{Z}\right)_{\lambda,\Lambda,\mu} &= \left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda_r}\right)\ln\frac{Z_2}{Z}\\ &\equiv \eta_2\left(\lambda_r,\frac{m_r}{\Lambda}\right),\end{aligned}\tag{2.67}$$

$$ZZ_2^{-1}\left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r}m^2\right)_{\lambda,\Lambda,\mu} \equiv m_r^2\sigma\left(\lambda_r,\frac{m_r}{\Lambda}\right),\tag{2.68}$$

A bevezetett ún. renormálási függvények segítségével egyenletünk, a Callan–Symanzik-egyenlet

$$D_{CS}\tilde{\Gamma}_r^{(l,n)}(q_1,\ldots,q_l,p_1,\ldots,p_n) \;=\; m_r^2\sigma\tilde{\Gamma}_r^{(l+1,n)}(0,q_1,\ldots,q_l,p_1,\ldots,p_n) \tag{2.69}$$

alakba írható, ahol bevezettük a Callan–Symanzik-operátort:

$$D_{CS} \;=\; m_r\frac{\partial}{\partial m_r}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda_r}-\frac{n}{2}\eta-l\eta_2. \tag{2.70}$$

Ne felejtsük el, hogy a Callan-Symanzik-operátorral úgy kell hatni a renormált 1PI vertexfüggvényekre, hogy azoknak a paramétereit ki kell fejezni a renormált csatolásokkal és a levonási skála μ paraméterével. Az egyenlet implicit módon azt is kifejezi, hogy a renormált csatolási állandóknak változnia kell a renormált tömeg változtatása során, ha közben a csupasz csatolási állandókat, az UV levágást és a levonás skálaparaméterét rögzítettnek tekintjük, $\lambda_r=\lambda_r(m_r)$.

A renormálási feltételek kapcsolatot eredményeznek a Callan–Symanzik-egyenletben együtthatókként szereplő renormálási függvények között:

$$\sigma \;=\; 2-\eta. \tag{2.71}$$

Induljunk ki az $n=2$, $l=0$ esetre alkalmazott Callan–Symanzik-egyenletből, és vegyük azt eltűnő külső impulzusok esetén:

$$\begin{aligned}\left[m_r\frac{\partial}{\partial m_r}+\beta(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r}-\eta\right]\tilde{\Gamma}_r^{(0,2)}(p,-p)_{p=0} &= m_r^2\sigma\tilde{\Gamma}_r^{(1,2)}(0;p,-p)_{p=0}\\ &= 0.\end{aligned} \tag{2.72}$$

A jobb oldalon felhasználtuk a Z_2–t rögzítő renormálási feltételt. A bal oldalon a $\tilde{\Gamma}_r^{(0,2)}(0,0)=m_r^2$ renormálási feltételt használva fel, az alábbi egyenlet adódik:

$$\left[m_r\frac{\partial}{\partial m_r}-\eta\right]m_r^2 \;=\; m_r^2\sigma. \tag{2.73}$$

Innen leolvashatjuk a keresett összefüggést.

A ϕ^4 elméletben tehát a Callan–Symanzik-egyenlet, a renormálási feltételeket is figyelembe véve az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned}&\left[m_r\frac{\partial}{\partial m_r}+\beta(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r}-\frac{n}{2}\eta-l\eta_2\right]\tilde{\Gamma}_r^{(l,n)}(q_1,\ldots,q_l;p_1,\ldots,p_n)\\ &\quad= m_r^2(2-\eta)\tilde{\Gamma}_r^{(l+1,n)}(0;q_1,\ldots,q_l,p_1,\ldots,p_n).\end{aligned} \tag{2.74}$$

Ez az egyenlet $n=0$, $l\le 2$ kivételével minden esetben érvényes. Az $l=1,2$ buborékdiagramok,
renormálásáról külön kell gondoskodni (ld. [2]).

2.6. A renormálási csoport

Ahhoz, hogy kiaknázzuk a renormálási csoport transzformációival szembeni invarianciát, megvizsgáljuk az $m_r \neq 0$ úgy nevezett *tömeges elmélet* és az $m_r = 0$ úgy nevezett tömeg nélküli elmélet renormált 1PI vertexfüggvényeinek a kapcsolatát.

2.6.1. Az 1PI vertexfüggvények és a skálatranszformáció

Végezzük el az

$$m, \quad \Lambda, \quad x_i, \quad p_i \;\rightarrow\; \rho m, \quad \rho\Lambda, \quad x_i/\rho, \quad \rho p_i \tag{2.75}$$

skálatranszformációt, ahol ρ a skálaparaméter. Keressük a skálatranszformált és az eredeti 1PI vertexfüggvények kapcsolatát. Meg fogjuk mutatni, hogy a renormált és a csupasz 1PI vertexfüggvényekre egyaránt fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(\rho p_i; \rho m, \rho\Lambda) = \rho^{-(n-4)}\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; m, \Lambda), \tag{2.76}$$

$$\tilde{\Gamma}^{(l,n)}(\rho q_i, \rho p_i; \rho m, \rho\Lambda) = \rho^{-(n-4)-2l}\tilde{\Gamma}^{(l,n)}(q_i, p_i; m, \Lambda). \tag{2.77}$$

Az 1PI vertexfüggvények a ρ skálaparaméter homogén függvényei. A homogenitás rendje éppen megegyezik a látszólagos divergencia fokával.

Az átskálázott Green-függvények

$$G^{(n)}(x_1/\rho, \ldots, x_n/\rho; \rho m, \rho\Lambda) = \langle 0|T(\phi(x_1/\rho)\cdots\phi(x_n/\rho))|0\rangle_{\rho m, \rho\Lambda} \tag{2.78}$$

generáló funkcionálja:

$$Z([J], \rho) = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_{\rho\Lambda}([\phi(x)], \rho m) + \int dx J(x)\phi(x/\rho)}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_{\rho\Lambda}([\phi(x)], \rho m)}}. \tag{2.79}$$

Térjünk át a

$$\phi'(x) = \frac{1}{\rho}\phi\left(\frac{x}{\rho}\right) \tag{2.80}$$

integrálási változóra:

$$Z([J], \rho) = \frac{\int \mathcal{D}\phi' e^{-S_{\rho\Lambda}([\rho\phi'(\rho x)], \rho m) + \int dx J(x)\rho\phi'(x)}}{\int \mathcal{D}\phi' e^{-S_{\rho\Lambda}([\rho\phi'(\rho x)], \rho m)}}. \tag{2.81}$$

Vezessük be ezek után az $x' = x\rho$ integrálási változót:

$$\begin{aligned}
S_{\rho\Lambda}([\rho\phi'(\rho x)], \rho m) &= \int d^4x \left(\frac{1}{2}\rho^2\partial_\mu\phi'(\rho x)\partial_\mu\phi'(\rho x) + \frac{1}{2}\rho^2 m^2\rho^2[\phi'(\rho x)]^2\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4!}\lambda\rho^4[\phi'(\rho x)]^4\right) \\
&= \int d^4x' \left(\frac{1}{2}\partial'_\mu\phi'(x')\partial'_\mu\phi'(x') + \frac{1}{2}m^2[\phi'(x')]^2\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4!}\lambda[\phi'(x')]^4\right) \\
&= S_\Lambda([\phi'(x)], m).
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Ezt és a forrástag alakját is figyelembe véve, az összefüggő Green-függvények generáló funkcionáljára az alábbi transzformációs tulajdonságot kapjuk:

$$W[\rho, J] = W[\rho J]. \tag{2.83}$$

Mivel a bal oldalon álló funkcionál az átskálázott összefüggő Green-függvényeket generálja, írhatjuk (a deriválásokat csak ,,elnagyoltan" jelölve), hogy

$$\begin{aligned}
G_c^{(n)}(x_i/\rho; \rho m, \rho\Lambda) &= \frac{\delta^n W[\rho, J]}{\delta J^n} = \rho^n \frac{\delta^n W[\rho J]}{\delta(\rho J)^n} \\
&= \rho^n G_c^{(n)}(x_i; m, \Lambda).
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Végezzünk Legendre-transzformációt, hogy megkapjuk az átskálázott 1PI vertexfüggvények generáló funkcionálját:

$$\begin{aligned}
\Gamma[\rho, \varphi] &= -W[\rho, J] + \int d^4dxJ(x)\varphi(x) \\
&= -W[\rho, J] + \int d^4dx'J(x')\varphi(x') \\
&= -W[\rho J] + \int d^4x\rho J(x)\rho^3\varphi(x) \\
&= \Gamma[\rho^3\varphi].
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Innen deriválással kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(n)}(x_i/\rho; \rho m, \rho\Lambda) &= \frac{\delta}{\delta\varphi^n}\Gamma[\rho^3\varphi] = \rho^{3n}\frac{\delta^n}{\delta(\rho^3\varphi)^n}\Gamma[\rho^3\varphi] \\
&= \rho^{3n}\Gamma^{(n)}(x_i; m, \Lambda).
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Végezzük el a Fourier-transzformációt, miközben felhasználjuk, hogy

$$xp = \rho p \cdot \frac{x}{\rho}, \tag{2.87}$$

$$d^4x_i = \rho^4 d^4\frac{x_i}{\rho}, \tag{2.88}$$

ekkor a baloldal Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned}
&\rho^{4n}\int\prod\frac{d^4x_i}{\rho^4}e^{i\rho p\cdot x_i/\rho}\cdot\Gamma^{(n)}(x_i/\rho; \rho m, \rho\Lambda) \\
&= \rho^{4n}(2\pi)^4\delta(\sum_i \rho p_i)\tilde{\Gamma}^{(n)}(\rho p_i; \rho m, \rho\Lambda) \\
&= (2\pi)^4\rho^{4n-4}\delta(\sum_i p_i)\tilde{\Gamma}^{(n)}(\rho p_i; \rho m, \rho\Lambda),
\end{aligned} \tag{2.89}$$

a jobboldal Fourier-transzformáltja pedig:

$$\rho^{3n}(2\pi)^4\delta(\sum_i p_i)\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; m, \Lambda). \tag{2.90}$$

A két oldalt egyenlővé téve leolvashatjuk a kívánt skálatranszformációs tulajdonságot. Hasonlóan végezhetjük el a bizonyítást a ϕ^2 betétrészeket tartalmazó 1PI vertexfüggvényekre. A bizonyítások a renormált vertexfüggvényekre is hasonlóképpen történhetnek.

2.6.2. Az $m_r = 0$ elmélet mint a tömeges elmélet határesete

Az $m_r = 0$ elméletről megmutatjuk, hogy az a tömeges elmélet határesete, ha a

$$m_r \quad \to \quad \frac{m_r}{\rho} \qquad \rho \to \infty \tag{2.91}$$

határátmenetet képezzük.

Induljunk ki a tömeges elméletre vonatkozó Callan–Symanzik-egyenletből:

$$\begin{aligned} &\left[m_r\frac{\partial}{\partial m_r} + \beta(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial \lambda_r} - \frac{n}{2}\eta(\lambda_r)\right]\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i; \lambda_r, m_r) \\ &= \quad m_r^2(2-\eta(\lambda_r))\tilde{\Gamma}_r^{(1,n)}(0; p_i; \lambda_r, m_r). \end{aligned} \tag{2.92}$$

Nem teljesen triviális, hogy a renormált 1PI vertexfüggvényeknek létezik az $m_r \to 0$ határértéke, mert ebben az esetben további, infravörös (IR-) divergenciák felléptének veszélye jelentkezik a Feynman-diagramokban. (Durván szólva: a propagátorok nevezőiből eltűnik a tömeg, és az impulzusok szerinti integrálok a $p \to 0$ határon divergenssé válhatnak.) A Callan–Symanzik-egyenlet segítségével azt mutatjuk meg, hogy ez nem következik be. Tekintsük ehhez a Callan–Symanzik-egyenletet a $p_i \to \rho p_i$ ($\rho \to \infty$) aszimptotikus külső impulzusoknál.

Az 1PI vertexfüggvények aszimptotikus külső impulzusoknál mutatott viselkedését Weinberg tétele adja meg. Legyenek p_i *nem kivételes külső impulzusok*, vagyis olyanok, hogy bármely nem triviális részhalmazukban az impulzusok összege zérustól különböző. Ekkor az 1PI vertexfüggvényekre az alábbi becslések igazak $\rho \to \infty$ esetén:

$$\tilde{\Gamma}_r^{(l,n)}(\rho p_i) \quad \to \quad \rho^{4-n-2l}\cdot\{\ln\rho \quad \text{hatványa}\}, \tag{2.93}$$

$$\tilde{\Gamma}_r^{(l+1,n)}(\rho p_i) \quad \to \quad \rho^{4-n-2l}\frac{1}{\rho^2}\cdot\{\ln\rho \quad \text{hatványa}\}. \tag{2.94}$$

Felhasználva Weinberg tételét, az aszimptotikus külső impulzusok tartományában a Callan–Symanzik-egyenlet bal oldalán álló tagok a ρ hatványaiban vezető rendűek. Ezért a jobb oldalon álló, inhomogenitást okozó tagot elhagyhatjuk. Ekkor a tömeges elméletben, az aszimptotikus tartományban érvényes homogén Callan–Symanzik-egyenletet kapjuk az 1PI vertexfüggvényekre:

$$\left[m_r\frac{\partial}{\partial m_r}+\beta(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r}-\frac{n}{2}\eta(\lambda_r)\right]\tilde{\Gamma}^{(n)}_{r,as}(\rho p_i;\lambda_r,m_r) \quad = \quad 0. \tag{2.95}$$

Idézzük most fel, hogyan transzformálódnak az 1PI vertexfüggvények a $p_i \to \rho' p_i$, $m_r \to \rho' m_r$ skálatranszformáció során (ld. az előző fejezetet):

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}_{r}(\rho' p_i;\lambda_r,\rho' m_r) \quad = \quad \rho'^{4-n}\tilde{\Gamma}^{(n)}_{r}(p_i;\lambda_r,m_r). \tag{2.96}$$

Éljünk speciálisan a $\rho' = 1/m_r$ választással:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}_{r}(p_i/m_r;\lambda_r,1) \quad = \quad {m_r}^{-(4-n)}\tilde{\Gamma}^{(n)}_{r}(p_i;\lambda_r,m_r). \tag{2.97}$$

Ez természetesen az aszimptotikus tartományban is érvényes. Írhatjuk tehát, hogy az aszimptotikus 1PI vertexfüggvények a tömeges elméletben az alábbi egyenletet elégítik ki:

$$\left[m_r\frac{\partial}{\partial m_r}+\beta(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r}-\frac{n}{2}\eta(\lambda_r)\right] m_r^{4-n}\tilde{\Gamma}^{(n)}_{r,as}(\rho p_i/m_r;\lambda_r,1) \quad = \quad 0, \tag{2.98}$$

azaz

$$\left[m_r\frac{\partial}{\partial m_r}+\beta(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r}-\frac{n}{2}\eta(\lambda_r)\right] m_r^{4-n}\tilde{\Gamma}^{(n)}_{r,as}\left(\frac{p_i}{m_r/\rho};\lambda_r,1\right) \quad = \quad 0. \tag{2.99}$$

Az eredmény azt mutatja, hogy a tömeges elmélet aszimptotikus 1PI vertexfüggvényei egyúttal az $m_r/\rho \to 0$ tömeg nélküli elmélet vertexfüggvényei (véges normálási faktortól eltekintve). Ezekre a vertexfüggvényekre homogén Callan–Symanzik-egyenlet érvényes, amelynek megoldásáról pl. az $n = 2$ esetben meg lehet mutatni, hogy

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_{r,as}(p) \quad = \quad p^2\cdot P\left(\ln\frac{p}{m_r}\right), \tag{2.100}$$

ahol $P(z)$ polinom.

Nyilvánvaló, hogy a tömeg nélküli elmélet 1PI vertexfüggvényeiben a fenti módon megjelenő m_r tömegparaméter teljesen önkényes, amelytől nem függhetnek az elmélet fizikai állításai. Hogy ez valóban így van, az annak a következménye, hogy fennáll a homogén Callan–Symanzik-egyenlet. Az ilyen típusú egyenletek megoldását vizsgálva be lehet látni, hogy az aszimptotikus külső impulzusokra fennálló skálaszimmetriát az biztosítja, hogy a renormált λ_r csatolási állandó a renormált m_r tömeg alkalmas függvénye.

2.6.3. A renormálási csoport homogén egyenletei tömeg nélküli elméletben

Az előbbiekben láttuk, hogy a tömeg nélküli elmélet 1PI vertexfüggvényei a tömeges elmélet 1PI vertexfüggvényeinek aszimptotikus határeseteként kaphatók meg. Ezekre a homogén Callan–Symanzik-egyenlet érvényes. Ez az egyenlet kifejezi a fizikai elmélet invarianciáját a tömeg nélküli elméletben fellépő m_r skálaparaméter önkényes megválasztásával szemben. A Callan–Symanzik-egyenlet alapján bizonyítható, hogy a tömeges ϕ^4 elmélet perturbatív úton renormálható. Az tehát, hogy a tömeg nélküli elmélet felfogható, mint a tömeges elmélet aszimptotikus határesete, igazolja a tömeg nélküli ϕ^4 elmélet renormálhatóságát is.

Most megmutatjuk, hogy a tömeg nélküli elmélet 1PI vertexfüggvényeire közvetlenül is levezethető egy homogén egyenlet, amely kifejezi az elmélet invarianciáját a μ skálaparaméterrel szemben, amely lehet a dimenziós regularizáció skálaparamétere, vagy a rögzített impulzushoz kötött levonási sémában a levonási pontot megadó paraméter.

Megjegyezzük, hogy a tömeges elméletben az aszimptotikus tartományban az 1PI 2-pont vertexfüggvényekre kirótt renormálási feltételek közül

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_{r,as}(p^2=0) \quad = \quad 0 \tag{2.101}$$

kiróható az origóban, de

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\tilde{\Gamma}^{(2)}_{r,as}\bigg|_{p^2=0} \tag{2.102}$$

divergál. Ezért a második feltétel az aszimptotikus 1PI vertexfüggvényre csak valamilyen $p^2 = \mu^2$, $\mu \neq 0$ levágási pontban róható ki. A tömeg nélküli elméletben ezért a szokásos (ellentmondásmentes) renormálási feltételek:

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p^2=0) \quad = \quad 0, \tag{2.103}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\tilde{\Gamma}^{(2)}(p^2=\mu^2) \quad = \quad 1, \tag{2.104}$$

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}_r(p_i=\mu\theta_i) \quad = \quad \lambda_r, \tag{2.105}$$

ahol $\mu\theta_i$ nem kivételes külső impulzusok.

Az elméletet akkor nevezzük tömeg nélkülinek, ha a renormált tömeg zérus, $m_r = 0$. Ilyenkor a csupasz 1PI vertexfüggvények csak a λ csupasz csatolási állandótól és a Λ levágástól függenek, mert a csupasz tömeget az $m_r^2 = m^2 f(m/\Lambda, \lambda) \equiv 0$ feltétel rögzíti. A dimenzionális megfontolásokat is figyelembe véve:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}_r(p_i;\lambda_r,\mu) \quad = \quad Z^{n/2}\left(\frac{\Lambda}{\mu},\lambda_r\right)\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i;\lambda,\Lambda). \tag{2.106}$$

Tekintve, hogy a csupasz elmélet, amelyet a renormálás során azonosan írunk át, független a μ paramétertől, azért a renormált elméletnek is attól függetlennek kell lennie. Ez a renormálási csoport transzformációival szemben mutatott szimmetria a renormálási csoportnak a renormált 1PI vertexfüggvényekre vonatkozó egyenleteire vezet. A csupasz elméletben triviálisan:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i, \lambda, \Lambda) \bigg|_{\lambda,\Lambda} = 0. \tag{2.107}$$

Ezt felhasználva a renormált 1PI vertexfüggvényekre az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i, \lambda_r, \mu) \bigg|_{\lambda,\Lambda} \\ = & \frac{n}{2} Z^{\frac{n}{2}-1} \tilde{\Gamma}^{(n)} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z \left(\frac{\Lambda}{\mu}, \lambda_r \right) \bigg|_{\lambda,\Lambda} + Z^{\frac{n}{2}} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{\Gamma}^{(n)} \\ = & \frac{n}{2} Z^{\frac{n}{2}} \tilde{\Gamma}^{(n)} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z \left(\frac{\Lambda}{\mu}, \lambda_r \right) \bigg|_{\lambda,\Lambda}. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Innen az alábbi homogén parciális differenciálegyenletet kapjuk a renormálási csoport egyenleteként:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \tilde{\beta}(\lambda_r) \frac{\partial}{\partial \lambda_r} - \frac{n}{2} \tilde{\eta}(\lambda_r) \right) \tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i; \lambda_r, \mu) = 0, \tag{2.109}$$

ahol bevezettük a renormálási csoport függvényeit:

$$\tilde{\beta}(\lambda_r) = \mu \frac{\partial \lambda_r}{\partial \mu} \bigg|_{\lambda,\Lambda}, \tag{2.110}$$

$$\tilde{\eta}(\lambda_r) = \mu \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \bigg|_{\lambda,\Lambda}. \tag{2.111}$$

Utóbbiak elvben függenek a Λ/μ dimenziótlan változótól is, azonban amikor a $\Lambda \to \infty$ határértéket képezzük, akkor létezik a határértékük. (Ezt onnan tudjuk, hogy az elmélet renormálhatóságát az előző fejezetben, mint a renormálható tömeges elmélet határesetét, beláttuk.)

A bizonyítást mellőzve közöljük, hogy a ϕ^2 betétrészeket tartalmazó renormált 1PI vertexfüggvényekre hasonló homogén egyenlet érvényes ($n = 0, l \leq 2$ kivételével):

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \tilde{\beta}(\lambda_r) \frac{\partial}{\partial \lambda_r} - \frac{n}{2} \tilde{\eta}(\lambda_r) - l \tilde{\eta}_2(\lambda_r) \right) \tilde{\Gamma}_r^{(l,n)}(q_1, \ldots, q_l; p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{2.112}$$

ahol bevezettük a renormálási csoport egy további függvényét:

$$\tilde{\eta}_2(\lambda_r) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_2 \bigg|_{\lambda,\Lambda}. \tag{2.113}$$

E fejezet végén még azt szeretném kihangsúlyozni, hogy ha egyszer rögzítettük a renormálási sémát, akkor a renormálási csoport függvényei a perturbációszámítás tetszőleges rendjében számolhatók. Ismeretükben pedig a renormálási csoport egyenleteinek megoldása szolgáltatja a renormált 1PI vertexfüggvényeket.

2.6.4. A renormálási csoport homogén egyenletei tömeges elméletben

A korábbiakban azt láttuk, hogy a tömeg nélküli elmélet a tömeges elmélet aszimptotikus határesete. Most feltesszük azt a fordított kérdést, hogy a tömeg nélküli elmélet 1PI vertexfüggvényeiből le lehet-e származtatni a tömeges elmélet 1PI vertexfüggvényeit. Mivel az állandó külső forráshoz csatolt ϕ^2 betétrész a tömeg konstans eltolódását eredményezi, ezért az a gyanúnk, hogy a tömeg nélküli elmélet zérus impulzushoz tartozó ϕ^2 betétrészeket tartalmazó renormált 1PI vertexfüggvényeiből meg lehet konstruálni a tömeges elmélet renormált 1PI vertexfüggvényeit. A bonyodalmat, amiért nem triviális, hogy a sejtésünk igaz, az okozza, hogy a tömeg nélküli elméletben a zérus impulzushoz tartozó ϕ^2 betétrész IR-divergenssé teszi a Feynman-diagramokat.

Pl. egy propagátorra betéve egy ilyen betétrészt, az impulzusintegrál az alábbiak szerint módosul:

$$\int d^4 q q^{-2} \sim \int_0 dq\, q < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int d^4 q q^{-2} q^{-2} \sim \int_0 dq\, q^{-1}. \tag{2.114}$$

A helyzet valójában mégsem ilyen rossz, mert ha felösszegzünk az 1PI vertexfüggvényekben a ϕ^2 betétrészekre, akkor az egyes diagramok IR-divergens tagjai szerencsésen kompenzálják egymást. Ezért úgy járunk el, hogy először nem állandó $K(x)$ külső forrást tételezünk fel, amely a ϕ^2 betétrészhez csatolódik, utána elvégezzük a ϕ^2 betétrészek szerinti felösszegzést, és csak ezután tartunk a külső forrással egy m_r^2 állandóhoz (a ϕ^2 betétrészek impulzusaival zérushoz). Ez az eljárás véges 1PI vertexfüggvényeket szolgáltat, amelyek olyan elmélethez tartoznak, amelyben a renormált tömeg m_r.

Ezt a programot az alábbiak szerint kivitelezzük. Vezessük be a hatásba a ϕ^2 betétrészt külső $K(x)$ forráshoz csatoló tagot:

$$\begin{aligned} S[\phi, K] &= \int d^4 x \left[\frac{1}{2} Z (\partial_\mu \phi_r)^2 + \frac{1}{2} \Big(\delta m^2 + Z_2 K(x) \Big) (\phi^2)_r \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4!} \lambda_r Z_\lambda \phi_r^4 \right]. \end{aligned} \tag{2.115}$$

Ebből a hatásból kiindulva a szokásos eljárással képezhetjük az 1PI vertexfüggvények generáló funkcionálját külső forrás jelenlétében. Nyilvánvalóan a belőle leszármaztatott vertexfüggvény az alábbiak szerint fejezhető ki a külső forrás hiányában a tömeg nélküli elméletben érvényes, ϕ^2 betétrészeket tartalmazó renormált 1PI vertexfügg-vényekkel:

$$\begin{aligned}&\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_1,\ldots,p_n;[K];\lambda_r,\mu)\\ =&\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^l}\frac{1}{l!}\int dq_1\ldots dq_l\tilde{K}(q_1)\cdots\tilde{K}(q_l)\tilde{\Gamma}_r^{(l,n)}(q_1,\ldots,q_l;p_1,\ldots,p_n;\lambda_r,\mu).\end{aligned}\tag{2.116}$$

(A külső forrás szerinti deriválás $\frac{1}{2}\phi^2$ betétrészt generál, innen az $1/2^l$ faktor a jobb oldalon.) Hassunk ennek az egyenletnek mindkét oldalára a

$$D = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\tilde{\beta}(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r}\tag{2.117}$$

differenciáloperátorral. Az egyenlet jobb oldalán a sor összegzését és a differenciál-operátor alkalmazását felcserélve, felhasználhatjuk, hogy a tömeg nélküli elmélet renormálási csoportjának egyenletei értelmében

$$\begin{aligned}&D\tilde{\Gamma}_r^{(l,n)}(q_j;p_i;\lambda_r,\mu)\\ =&\left(\frac{n}{2}\tilde{\eta}(\lambda_r)+l\tilde{\eta}_2(\lambda_r)\right)\tilde{\Gamma}_r^{(l,n)}(q_j;p_i;\lambda_r,\mu).\end{aligned}\tag{2.118}$$

Ezek után felhasználjuk még, hogy

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^l}\frac{l}{l!}\int dq_1\ldots dq_l\tilde{K}(q_1)\cdots\tilde{K}(q_l)\tilde{\Gamma}_r^{(l,n)}(q_j;p_i;\lambda_r,\mu)\\ =&\int dq\tilde{K}(q)\frac{\delta}{\delta\tilde{K}(q)}\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i;[K];\lambda_r,\mu).\end{aligned}\tag{2.119}$$

Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\tilde{\beta}(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r}-\frac{n}{2}\tilde{\eta}(\lambda_r)\right.\\ \left.-\tilde{\eta}_2(\lambda_r)\int dq\tilde{K}(q)\frac{\delta}{\delta\tilde{K}(q)}\right]\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i;[K];\lambda_r,\mu)=0.\tag{2.120}$$

Eddig végrehajtottuk a külső forrás bevezetését és felösszegeztünk a ϕ^2 betétrészekre (l-re) miután felhasználtuk a tömeg nélküli elmélet renormálási csoportjának egyenleteit. Most válasszuk a külső forrást $K(x)=m_r^2$ állandónak. Ekkor az 1PI vertexfüggvény az állandó külső forrás jelenlétében a tömeges elmélet vertexfüggvénye, ami létezik, mert a tömeges elmélet renormálható. Másrészt az egyenletünk átírható az alábbi alakba:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\tilde{\beta}(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r}-\frac{n}{2}\tilde{\eta}(\lambda_r)\right.\\ \left.-\tilde{\eta}_2(\lambda_r)m_r^2\frac{\partial}{\partial m_r^2}\right]\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i;m_r,\lambda_r,\mu)=0.\tag{2.121}$$

Ez a tömeges elmélet renormálási csoportjának homogén egyenlete. Ez az egyenlet nem azonos a Callan–Symanzik-egyenlettel. Az előnye az, hogy homogén és így egyszerűbb megoldani. Egy másik érdekes körülmény, hogy eljárásunkkal a tömeges elmélet renormált 1PI vertexfüggvényeit olyan paraméteres alakban kaptuk meg, amely két tömegparamétert is tartalmaz, m_r–et és μ–t. (Ez megfelel annak, hogy pl. dimenzionális regularizáció esetén nem élünk a kézenfekvő $\mu = m_r$ választással.) Ennek a parametrizálásnak az a további előnye, hogy az $m_r = 0$ eset egyszerű helyettesítéssel nyerhető, azaz nem kell hozzá aszimptotikus viselkedést vizsgálni.

2.6.5. A renormálási csoport függvényei a ϕ^4 elméletben

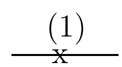
A hatás a csupasz és a renormált mennyiségek kifejezéseként a következő alakú:

$$\begin{aligned}
S[\phi] &= \int d^{4-\epsilon}x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right] \\
&\equiv S_r[\phi_r] \\
&= \int d^{4-\epsilon}x \left[\frac{1}{2}Z(\lambda_r,\epsilon,\mu)(\partial_\mu\phi_r)^2 + \frac{1}{2}m_r^2 Z_m(\lambda_r,\epsilon,\mu)\phi_r^2 \right.\\
&\quad \left. + \frac{\lambda_r\mu^\epsilon}{4!}Z_\lambda(\lambda_r,\epsilon,\mu)\phi_r^4\right]. \qquad (2.122)
\end{aligned}$$

A tömeges elméletben az általánosság csorbítása nélkül élhetünk a $\mu = m_r$ választással. Korábbi számolásaink alapján a renormálási állandók csatolási állandó szerinti kifejtése:

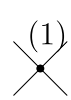
$$Z - 1 = \mathcal{O}(\lambda_r^2), \qquad (2.123)$$

$$Z_m - 1 = m_r^{-2}\Big(\quad \Big) + \mathcal{O}(\lambda_r^2)$$



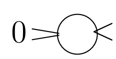
$$= \lambda_r \frac{1}{32\pi^2}\frac{2}{\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_r^2), \qquad (2.124)$$

$$Z_\lambda - 1 = \lambda_r^{-1}\mu^{-\epsilon}\Big(\quad \Big) + \mathcal{O}(\lambda_r^2)$$



$$= \lambda_r \frac{3}{32\pi^2}\frac{2}{\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_r^2), \qquad (2.125)$$

$$Z_2 - 1 = \Big(\quad \Big) + \mathcal{O}(\lambda_r^2)$$



$$= \lambda_r \frac{1}{32\pi^2}\frac{2}{\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_r^2). \qquad (2.126)$$

Ezek az összefüggések az

$$\begin{aligned}
m^2\phi^2 \equiv m^2 Z\phi_r^2 &= m_r^2\phi_r^2 + \delta m^2\phi_r^2, \\
\delta m^2 = Zm^2 - m_r^2 &\stackrel{!}{=} (Z_m - 1)m_r^2 = \tfrac{\lambda_r m_r^2}{16\pi^2\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_r^2),
\end{aligned} \tag{2.127}$$

$$\begin{aligned}
\lambda\phi^4 \equiv \lambda Z^2\phi_r^4 &= \lambda_r\mu^\epsilon\phi_r^4 + (Z_\lambda - 1)\lambda_r\mu^\epsilon\phi_r^4, \\
(Z_\lambda - 1) &= \lambda_r^{-1}\mu^{-\epsilon}\Big(\frac{3\lambda_r^2\mu^\epsilon}{16\pi^2\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_r^2),
\end{aligned} \tag{2.128}$$

$$\begin{aligned}
K\phi^2 \equiv Z_2 K Z\phi_r^2 &= K\phi_r^2 + (Z_2 - 1)K\phi_r^2, \\
Z_2 - 1 &= \frac{\lambda_r}{16\pi^2\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_r^2),
\end{aligned} \tag{2.129}$$

felbontásokból adódnak.

Ezeket felhasználva 1-hurok rendben:

$$\begin{aligned}
\lambda_r &= \frac{Z^2}{Z_\lambda}\lambda\mu^{-\epsilon} \\
&= \mu^{-\epsilon}\lambda Z_\lambda^{-1} + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= \mu^{-\epsilon}\lambda\frac{1}{1 + \lambda_r\frac{3}{16\pi^2\epsilon}} + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= \mu^{-\epsilon}\lambda\left(1 - \mu^{-\epsilon}\lambda\frac{3}{16\pi^2\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\lambda^3),
\end{aligned} \tag{2.130}$$

és

$$\lambda\mu^{-\epsilon} = \lambda_r\left(1 + \mu^{-\epsilon}\lambda_r\frac{3}{16\pi^2\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\lambda^3). \tag{2.131}$$

A renormálási csoport függvényei definíció szerint:

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}(\lambda_r, \epsilon) &= \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda_r(\lambda, \mu, \epsilon) \\
&= -\epsilon\mu^{-\epsilon}\lambda\left(1 - \mu^{-\epsilon}\lambda\frac{3}{16\pi^2\epsilon}\right) \\
&\quad -\lambda^2\frac{3}{16\pi^2\epsilon}(-\epsilon)\mu^{-2\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= -\epsilon\lambda\mu^{-\epsilon} + \frac{3}{8\pi^2}\lambda^2\mu^{-2\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= -\epsilon\lambda_r\left(1 + \lambda_r\frac{3}{16\pi^2\epsilon}\right) \\
&\quad +\frac{3}{8\pi^2}\lambda_r^2 + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= -\epsilon\lambda_r + \frac{3}{16\pi^2}\lambda_r^2 + \mathcal{O}(\lambda_r^3) \\
&\underset{\epsilon\to 0}{\Longrightarrow} \tilde{\beta}(\lambda_r) = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_r^2 + \mathcal{O}(\lambda_r^3);
\end{aligned} \tag{2.132}$$

$$\tilde{\eta}(\lambda_r) = \lim_{\epsilon\to 0}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z(\lambda,\mu,\epsilon) = \mathcal{O}(\lambda_r^2); \tag{2.133}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_2(\lambda_r,\epsilon) &= \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\frac{Z_2}{Z}\Big|_\lambda \\
&= \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_2(\lambda,\mu,\epsilon) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \mu Z^{-2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\lambda\mu^{-\epsilon}}{16\pi^2\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \mu\frac{1}{1+\lambda_r\frac{1}{16\pi^2\epsilon}}\left(-\epsilon\mu^{-\epsilon-1}\right)\frac{\lambda_r\mu^\epsilon}{16\pi^2\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
\underset{\epsilon\to 0}{\Longrightarrow}&\ \tilde{\eta}_2(\lambda_r) = -\frac{\lambda_r}{16\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^2);
\end{aligned} \tag{2.134}$$

$$\tilde{\sigma}(\lambda_r) = 2 - \tilde{\eta}(\lambda_r) = 2 + \mathcal{O}(\lambda_r^2). \tag{2.135}$$

2.6.6. A renormálási csoport homogén egyenleteinek megoldása

A renormálási csoport homogén egyenlete a $\lambda\phi^4$ elméletben az alábbi alakú:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \tilde{\beta}(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r} - \frac{n}{2}\tilde{\eta}(\lambda_r)\right.$$
$$\left. -\tilde{\eta}_2(\lambda_r)m_r^2\frac{\partial}{\partial m_r^2}\right]\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i;\mu,\lambda_r,m_r) = 0. \tag{2.136}$$

Megmutatjuk, hogy az egyenlet megoldása:

$$\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i;\mu,\lambda_r,m_r) = \tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i;\mu e^t,\bar{\lambda}(t,\lambda_r),\bar{m}(t,\lambda_r,m_r))\exp\left\{-\frac{n}{2}\int_0^t dt'\tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t',\lambda_r))\right\}, \tag{2.137}$$

ahol bevezettük az ún. *futó csatolási állandót* és a *futó tömeget* az alábbi egyenletekkel:

$$\int_{\lambda_r}^{\bar{\lambda}(t,\lambda_r)}\frac{d\xi}{\tilde{\beta}(\xi)} = t, \tag{2.138}$$

$$\begin{aligned}
\bar{m}(t,\lambda_r,m_r) &= m_r\exp\left\{-\int_{\lambda_r}^{\bar{\lambda}(t,\lambda_r)} d\xi\frac{\tilde{\eta}_2(\xi)}{2\tilde{\beta}(\xi)}\right\} \\
&= m_r\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t dt'\tilde{\eta}_2(\bar{\lambda}(t',\lambda_r))\right\}.
\end{aligned} \tag{2.139}$$

Keressük meg először a homogén egyenlet megoldását, azaz az $\tilde{\eta}(\lambda_r) = 0$ esetben a megoldást, majd ennek ismeretében fogjuk

meghatározni az eredeti, inhomogén egyenlet megoldását. Rátérve a homogén egyenlet megoldására, írjuk a μ skálaparamétert $\mu = \mu_0 e^{-t}$ alakba! Azt kell ekkor belátni először, hogy

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\beta}(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial \lambda_r} - \tilde{\eta}_2(\lambda_r)\frac{1}{2}m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\right]\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i;\mu_0,\bar{\lambda},\bar{m}_r) = 0. \tag{2.140}$$

Vezessük be a futó csatolási állandót és a futó tömeget a fent megadott definícióval! A definiáló egyenletek átfogalmazhatók peremértékfeladattá:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{\lambda}(t,\lambda_r)}{\partial t} &= \tilde{\beta}(\bar{\lambda}(t,\lambda_r)), && (2.141)\\
\bar{\lambda}(0,\lambda_r) &= \lambda_r; && (2.142)\\
\frac{\partial\bar{m}(t,\lambda_r,m_r)}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\bar{m}(t,\lambda_r,m_r)\tilde{\eta}_2(\bar{\lambda}(t,\lambda_r)), && (2.143)\\
\bar{m}(0,\lambda_r,m_r) &= m_r. && (2.144)
\end{aligned}$$

Deriváljuk a futó csatolási állandót definiáló egyenletet λ_r szerint:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde{\beta}(\bar{\lambda}(t,\lambda_r))}\frac{\partial\bar{\lambda}(t,\lambda_r)}{\partial\lambda_r} - \frac{1}{\tilde{\beta}(\lambda_r)} &= 0, && (2.145)\\
\tilde{\beta}(\lambda_r)\frac{\partial\bar{\lambda}(t,\lambda_r)}{\partial\lambda_r} - \tilde{\beta}(\bar{\lambda}(t,\lambda_r)) &= 0, && (2.146)\\
\tilde{\beta}(\lambda_r)\frac{\partial\bar{\lambda}(t,\lambda_r)}{\partial\lambda_r} - \frac{\partial\bar{\lambda}(t,\lambda_r)}{\partial t} &= 0, && (2.147)\\
\left[\tilde{\beta}(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r} - \frac{\partial}{\partial t}\right]\bar{\lambda}(t,\lambda_r) &= 0. && (2.148)
\end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy a futó csatolási állandó is eleget tesz egy homogén parciális differenciálegyenletnek.

Teljesen hasonlóan, ha a redukált tömeg definíció szerinti kifejezését deriváljuk λ_r szerint, akkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{m}}{\partial\lambda_r} &= \bar{m}\left[-\frac{\tilde{\eta}_2(\bar{\lambda})}{2\tilde{\beta}(\bar{\lambda})}\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\lambda_r} + \frac{\tilde{\eta}_2(\lambda_r)}{2\tilde{\beta}(\lambda_r)}\right], && (2.149)\\
\tilde{\beta}(\lambda_r)\frac{\partial\bar{m}}{\partial\lambda_r} &= \bar{m}\left[-\frac{\tilde{\eta}_2(\bar{\lambda})}{2\tilde{\beta}(\bar{\lambda})}\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial t} + \frac{\tilde{\eta}_2(\lambda_r)}{2}\right]. && (2.150)
\end{aligned}$$

Deriváljuk most az $\bar{m}$-t definiáló kifejezést t szerint,

$$-\frac{\partial\bar{m}}{\partial t} = \bar{m}\frac{\tilde{\eta}_2(\bar{\lambda})}{2\tilde{\beta}(\bar{\lambda})}\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial t}, \tag{2.151}$$

és helyettesítsük be ezt a (2.150) egyenletbe, valamint használjuk fel, hogy

$$m_r\frac{\partial\bar{m}}{\partial m_r} = \frac{\bar{m}}{m_r}m_r = \bar{m}. \tag{2.152}$$

Ekkor a futó tömegre az alábbi homogén egyenletet kapjuk:

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\beta}(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial \lambda_r} - \frac{\tilde{\eta}_2(\lambda_r)}{2} m_r \frac{\partial}{\partial m_r}\right] \bar{m} \quad = \quad 0. \tag{2.153}$$

A futó paraméterek fenti egyenleteit felhasználva behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a (2.137) függvények $\tilde{\eta}(\lambda_r) = 0$ esetén csakugyan megoldásai a renormálási csoport renormált 1PI vertexfüggvényekre vonatkozó homogén egyenleteinek:

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\beta}\frac{\partial}{\partial \lambda_r} - \eta_2 \frac{1}{2} m_r \frac{\partial}{\partial m_r}\right] \tilde{\Gamma}(p_i; \mu_0, \bar{\lambda}, \bar{m}) \\
&= \quad -\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{m}}\frac{\partial \bar{m}}{\partial t} + \tilde{\beta}\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda_r} \\
&\qquad + \tilde{\beta}\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{m}}\frac{\partial \bar{m}}{\partial \lambda_r} - \frac{\eta_2}{2} m_r \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{m}}\frac{\partial \bar{m}}{\partial m_r} \\
&= \quad \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{\lambda}}\left[-\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial t} + \tilde{\beta}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda_r}\right] \\
&\qquad + \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{m}}\left[-\frac{\partial \bar{m}}{\partial t} + \tilde{\beta}\frac{\partial \bar{m}}{\partial \lambda_r} - \frac{\eta_2}{2} m_r \frac{\partial \bar{m}}{\partial m_r}\right] \\
&\equiv \quad 0,
\end{aligned} \tag{2.154}$$

hiszen mindkét szögletes zárójel azonosan eltűnik a jobb oldalon.

Az általános $\tilde{\eta}(\lambda_r) \neq 0$ esetre vonatkozó megoldást most már behelyettesítéssel egyszerűen igazolhatjuk:

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\beta}\frac{\partial}{\partial \lambda_r} - \eta_2 \frac{1}{2} m_r \frac{\partial}{\partial m_r} - \frac{n}{2}\tilde{\eta}\right]\left(\tilde{\Gamma}_{hom} \exp\left\{-\frac{n}{2}\int_0^t dt' \tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t', \lambda_r))\right\}\right) \\
&= \quad -\frac{n}{2}\tilde{\eta}(\lambda_r)\tilde{\Gamma}_{hom} \exp\left\{-\frac{n}{2}\int_0^t dt' \tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t', \lambda_r))\right\} \\
&\qquad + \tilde{\Gamma}_{hom}\left[\frac{n}{2}\tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t, \lambda_r)) - \frac{n}{2}\tilde{\beta}(\lambda_r)\int_0^t dt' \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda_r}\right] \exp\left\{-\frac{n}{2}\int_0^t dt' \tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t', \lambda_r))\right\}.
\end{aligned} \tag{2.155}$$

A jobb oldalon a vertexfüggvény kiemelhető és együtthatója:

$$\begin{aligned}
&-\tilde{\eta}(\lambda_r) + \tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t, \lambda_r)) - \tilde{\beta}(\lambda_r)\int_0^t dt' \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda_r} \\
&= \quad -\tilde{\eta}(\lambda_r) + \tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t, \lambda_r)) - \int_0^t dt' \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial t'}\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \bar{\lambda}} \\
&= \quad -\tilde{\eta}(\lambda_r) + \tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t, \lambda_r)) - \left[-\tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t, 0)) + \tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t, \lambda_r))\right] \\
&\equiv \quad 0.
\end{aligned} \tag{2.156}$$

(Itt $\tilde{\Gamma}_{hom}$ jelöli a megfelelő homogén egyenlet megoldását $\tilde{\eta} = 0$ esetén.)

A *fizikai mennyiségek* természetesen ugyancsak kifejezhetők mint a μ skálaparaméter és a λ_r és m_r renormált csatolási állandó és tömeg $P_r(\mu, \lambda_r, m_r)$ függvényei. Ezek a csupasz λ, m csatolási állandótól és tömegtől és a Λ levágástól (vagy az ϵ

dimenziótól) függő megfelelő $P(\lambda, m, \Lambda)$ mennyiségek $\Lambda \to \infty$ ($\epsilon \to 0$) határértékei. Mivel azonban az utóbbiak nem függenek a μ skálaparamétertől, azért csak azok a $P_r(\mu, \lambda_r, m_r)$ függvények tekinthetők fizikai mennyiségeknek, amelyekre fennáll a

$$0 = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} P(\lambda, m, \Lambda) \;\; = \;\; \mu \frac{\partial}{\partial \mu} P_r(\mu, \lambda_r, m_r)\Big|_{\lambda} \tag{2.157}$$

egyenlőség, azaz:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \tilde{\beta}(\lambda_r) \frac{\partial}{\partial \lambda_r} - \frac{\tilde{\eta}_2(\lambda_r)}{2} m_r \frac{\partial}{\partial m_r}\right] P_r(\mu, \lambda_r, m_r) = 0. \tag{2.158}$$

Ez azt jelenti, hogy a fizikai mennyiségek invariánsak a renormálási csoport transzformációival szemben.

Pl. meg lehet mutatni, hogy a $\lambda\phi^4$ elméletben a propagátor pólusa és reziduuma, valamint az egzakt (a perturbációszámítás összes rendjére felösszegzett) S–mátrix elemei invariánsak a renormálási csoport transzformációival szemben, vagyis valóban fizikai mennyiségek.

2.6.7. A renormált 1PI vertexfüggvények impulzusfüggése

Az előző fejezetben a renormálási csoport homogén egyenleteinek megoldása azt mutatta, hogy a renormált 1PI vertexfüggvények csak a külső lábak száma által meghatározott triviális módon változtatják értéküket, ha a skálaparaméter értékét változtatva egyúttal a csatolási állandót és a tömeget is alkalmasan változtatjuk.

Most azt fogjuk megmutatni, hogy ha ismerjük rögzített skálaparaméter mellett a renormált 1PI vertexfüggvényeket valamilyen p_i referenciaimpulzusok esetén, akkor tetszőleges ρp_i esetén az értéküket meg tudjuk adni úgy, hogy a renormált csatolási állandót és tömeget a futó csatolási állandó és tömeg megfelelő, $t = \ln \rho$–nál vett értékével helyettesítjük. Egyenlőség alakjában:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(\rho p_i; \lambda_r, m_r, \mu) \;\; &= \;\; \rho^{(4-n)} e^{-\frac{n}{2}\int_0^{\ln \rho} dt' \tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t', \lambda_r))} \cdot \\ &\cdot \tilde{\Gamma}_r^{(n)}\left(p_i; \bar{\lambda}(\ln \rho, \lambda_r), \frac{1}{\rho}\bar{m}(\ln \rho, \lambda_r, m_r), \mu\right).\end{aligned} \tag{2.159}$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a külső impulzusok átskálázása esetén az 1PI vertexfüggvények a kanonikus dimenzió szerinti, triviálisnak nevezhető, skálázáson túl még további változást szenvednek, amely részben úgy vehető figyelembe,

- hogy a renormált csatolási állandót és tömeget a futó csatolási állandóra és tömegre (pontosabban $\rho^{-1}\bar{m}$–re) kell cserélni,

- és hogy a kanonikus dimenzióhoz hozzá kell adni az új és a régi impulzusok viszonyától függő *anomális dimenziót*,

$$D_{an} \;=\; -\frac{n}{2}\int_0^1 dt\tilde{\eta}\left(\bar{\lambda}(t\ln\rho,\lambda_r)\right). \tag{2.160}$$

Ha a futó csatolási állandó és tömeg állandó lenne, akkor a renormált 1PI vertexfüggvény a ρ paraméter $(4-n-D_{an})$–adrendű homogén függvénye lenne, más szóhasználattal skálázna. A skálázó vagyis a homogén függvénynek megfelelő viselkedéshez képesti eltérésről az ad számot, hogy a futó csatolási állandót és tömeget kell az egyenlőség jobb oldalán használni. Fontos, hogy erről a nemtriviális impulzusfüggésről a futó csatolási állandó és tömeg használata teljes mértékben számot tud adni. Azt jelenti ez durván szólva, hogy az átskálázott külső impulzusokhoz tartozó folyamatok vertexfüggvényei lényegében az eredeti impulzusokhoz tartozó vertexfüggvények megfelelően erősebb vagy gyengébb csatolási állandókkal. Ha ismerjük tehát a renormált 1PI vertexfüggvények függését a külső impulzusoktól olyan esetben, amikor azok valamilyen nagyságrendbe esnek, akkor a futó, azaz impulzusfüggő csatolási állandót és tömeget használva meg tudjuk mondani a vertexfüggvények impulzusfüggését a külső impulzusok más nagyságrendbe eső értékei esetén (nagyobb skálán) is.

(Még megjegyzem, hogy a homogén függvény fogalmát erősen általánosítva használtam, amikor az anomális dimenziót is figyelembe vettem, hiszen az maga is függ ρ–tól, és nem állandó.)

1. A bizonyításhoz vegyük a renormálási csoport homogén egyenletét:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\tilde{\beta}(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r}-\frac{\tilde{\eta}(\lambda)}{2}m_r\frac{\partial}{\partial m_r}-n\frac{\tilde{\eta}_2(\lambda_r)}{2}\right]\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i,\lambda_r,m_r,\mu)=0. \tag{2.161}$$

   Helyettesítsünk ide ρp_i–t p_i helyére.

2. Másrészt vegyük azt az egyenletet, ami kifejezi, hogy a renormált 1PI vertexfüggvények a tömegdimenziójú változóiknak homogén $(4-n)$–edrendű függvényei,

$$\alpha^{4-n}\tilde{\Gamma}^{(n)}(\rho p_i,\lambda_r,m_r,\mu) \;=\; \tilde{\Gamma}^{(n)}(\alpha\rho p_i,\lambda_r,\alpha m_r,\alpha\mu). \tag{2.162}$$

   Innen a homogén függvényekre vonatkozó Euler-féle összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned}&\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+m_r\frac{\partial}{\partial m_r}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right]\tilde{\Gamma}^{(n)}(\rho p_i,\lambda_r,m_r,\mu)\\ &= \;(4-n)\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(\rho p_i,\lambda_r,m_r,\mu).\end{aligned} \tag{2.163}$$

3. Vonjuk ki a 2. pontban kapott egyenletet az első pontban kapottból:

$$\begin{aligned}&\left[-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\tilde{\beta}(\lambda_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r}-\left(\frac{\tilde{\eta}(\lambda_r)}{2}+1\right)m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\right.\\ &\qquad\left.-n\frac{\tilde{\eta}_2(\lambda_r)}{2}+4-n\right]\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(\rho p_i;\lambda_r,m_r,\mu)=0.\end{aligned} \tag{2.164}$$

   Oldjuk meg ezt az egyenletet, hogy megkapjuk a kapcsolatot a renormált 1PI vertexfüggvények ρp_i és p_i külső impulzusoknál felvett értékei között.

4. A 3. pontban kapott egyenlet megoldása triviális, ha az elmélet tömeg nélküli, azaz $m_r = 0$ és kölcsönhatásmentes, azaz $\tilde{\beta} = \tilde{\eta}_2 \equiv 0$:

$$\left[-\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + 4 - n\right]\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(\rho p_i; \lambda_r, m_r, \mu) \;\; = \;\; 0, \tag{2.165}$$

ahonnan:

$$\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(\rho p_i; \lambda_r, m_r = 0, \mu) \;\; = \;\; \rho^{4-n}\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i; \lambda_r, \mu). \tag{2.166}$$

Tömeg nélküli, kölcsönhatásmentes elméletben a renormált 1PI vertexfüggvények a külső impulzusok homogén függvényei. A homogenitás rendje az 1PI vertexfüggvények kanonikus dimenziója. Más szóhasználattal azt mondjuk, hogy a vertexfüggvények a külső impulzusokban a kanonikus dimenzió szerint *skáláznak*. Ne felejtsük azonban el, hogy most nem skálatranszformációt végeztünk, mert μ változatlan az egyenlet mindkét oldalán!

5. A 3. pontban kapott egyenlet általános megoldása már egyáltalán nem triviális. Ha felhasználjuk az előző fejezetben a renormálási csoport homogén egyenletének általános megoldására kapott eredményt, amelyben a futó csatolási állandó és a futó tömeg szerepel, akkor a megoldás:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(e^t p_i; \lambda_r, m_r, \mu) \;\; &= \;\; \tilde{\Gamma}_r^{(n)}\left(e^t p_i; \bar{\lambda}(t, \lambda_r), \bar{m}(t, \lambda_r, m_r), \mu e^t\right) \cdot \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{n}{2}\int_0^t dt' \tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t', \lambda_r))\right\}.\end{aligned} \tag{2.167}$$

Itt a $\rho = e^t$ alakot használtuk. Írjuk be a futó tömeg mellé az $1 = e^t e^{-t}$ tényezőt, és használjuk ki, hogy a renormált 1PI vertexfüggvény a tömegdimenziójú változóinak homogén $(4-n)$–edrendű függvénye:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(e^t p_i; \lambda_r, m_r, \mu) \;\; &= \;\; e^{t(4-n)}\tilde{\Gamma}_r^{(n)}\left(p_i; \bar{\lambda}(t, \lambda_r), e^{-t}\bar{m}(t, \lambda_r, m_r), \mu\right) \cdot \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{n}{2}\int_0^t dt' \tilde{\eta}(\bar{\lambda}(t', \lambda_r))\right\}.\end{aligned} \tag{2.168}$$

Visszatérve a ρ változóra, kapjuk a keresett egyenlőséget.

2.7. A futó csatolási állandó. Dimenzionális transzmutáció

A futó csatolási állandót az alábbi integrálegyenlet definiálja:

$$\int_{\lambda_r}^{\bar{\lambda}(t,\lambda_r)} \frac{dx}{\beta(x)} \;\; = \;\; t. \tag{2.169}$$

Vezessük be a konvencionális

$$\alpha \;\; = \;\; \lambda_r, \qquad \frac{e_r^2}{4\pi}, \qquad \frac{g_r^2}{4\pi} \tag{2.170}$$

jelölést, ahol az egyenlőség jobb oldala rendre a $\lambda\phi^4$ elmélet, a kvantumelektrodinamika (QED) és a kvantumszíndinamika (QCD) esetének felel meg. Természetesen az integrálegyenlet bal oldalán is mindig a megfelelő elmélet β–függvénye szerepel:

$$\int_{\alpha_r}^{\bar{\alpha}(t,\alpha_r)} \frac{dx}{\beta(x)} \;\; = \;\; t. \tag{2.171}$$

A β–függvény perturbációs sora az említett elméletekben:

$$\beta(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\pi^n} x^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\pi^n} x^{n-1}, \tag{2.172}$$

ahol a b_n állandók értéke az egyes elméletekben különböző. Innen

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta(x)} &= \frac{1}{x^2}\left[\left(\frac{b_1}{\pi}\right)^{-1} + \frac{-b_2/\pi^2}{(b_1/\pi)^2}x + \ldots\right] \\ &= \frac{\pi}{b_1}\frac{1}{x^2} - \frac{b_2}{b_1^2}\frac{1}{x} + \ldots,\end{aligned} \tag{2.173}$$

amit behelyettesítünk az integrálegyenlet bal oldalába, majd elvégezzük az integrálást:

$$-\frac{\pi}{b_1}\left[\frac{1}{\bar{\alpha}(t,\alpha_r)} - \frac{1}{\alpha_r}\right] - \frac{b_2}{b_1^2}\ln\frac{\bar{\alpha}(t,\alpha_r)}{\alpha_r} + \ldots = t. \tag{2.174}$$

Ha a β–függvényt a legalacsonyabb rendben számoljuk, akkor az ún. *vezető logaritmikus közelítést („leading log approximation” (LLA))* kapjuk. Jelöljük ennek eredményét $\alpha_1(t)$–vel:

$$\frac{1}{\alpha_1(t)} - \frac{1}{\alpha_r} \;=\; -\frac{b_1}{\pi}t, \tag{2.175}$$

ahonnan

$$\alpha_1(t) \;=\; \frac{\alpha_r}{1 - \alpha_r \frac{b_1}{\pi} t}, \tag{2.176}$$

és $\alpha_1(0) = \alpha_r$.

Ha eggyel magasabb rendű közelítéssel élünk, akkor az integrálegyenlet megoldását kereshetjük

$$\bar{\alpha}(t,\alpha_r) \;=\; \alpha_1(t) f(t) \tag{2.177}$$

alakban. Ezt behelyettesítve az integrálegyenletbe és felhasználva az α_1–re vonatkozó egyenletet, az alábbi egyenletet kapjuk az $f(t)$ függvényre:

$$\frac{\pi}{b_1}\frac{1}{\alpha_1}\left(1 - \frac{1}{f}\right) \;=\; \frac{b_2}{b_1^2}\ln\frac{\alpha_1}{\alpha_r} + \mathcal{O}(\ln f), \tag{2.178}$$

ahonnan:

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{\frac{\pi}{b_1}\frac{1}{\alpha_1}}{\frac{\pi}{b_1}\frac{1}{\alpha_1} - \frac{b_2}{b_1^2}\ln\frac{\alpha_1}{\alpha_r}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1(t)}{\pi}\frac{b_2}{b_1}\ln\frac{\alpha_1(t)}{\alpha_r}}.\end{aligned} \tag{2.179}$$

Ennek felhasználásával a futó csatolási állandóra az alábbi eredményt kapjuk:

$$\bar{\alpha}(t,\alpha_r) \;=\; \frac{\alpha_1(t)}{1-\frac{\alpha_1(t)}{\pi}\frac{b_2}{b_1}\ln\frac{\alpha_1(t)}{\alpha_r}}. \tag{2.180}$$

Ez az ún. vezető logaritmikus közelítést követő közelítés („next to leading log approximation”).

Vizsgáljuk most vezető logaritmikus közelítésben a futó csatolási állandót a QED és a QCD esetén.

A QED-ben $b_1 = 2/3$ és így:

$$\alpha_1(t) \;=\; \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r\frac{2}{3\pi}t}. \tag{2.181}$$

Tegyük fel, hogy α_r a külső impulzusok p_0 referenciaértékéhez tartozik. Bevezetve a $\rho = e^t = p/p_0$ egyenlőséggel az átskálázott impulzus p nagyságát, írhatjuk, hogy

$$\alpha_1(p) \;=\; \frac{\alpha_1(p_0)}{1-\alpha_1(p_0)\frac{2}{3\pi}\ln\frac{p}{p_0}}, \tag{2.182}$$

$$\frac{\alpha_1(p)}{1+\alpha_1(p)\frac{2}{3\pi}\ln p} \;=\; \frac{\alpha_1(p_0)}{1+\alpha_1(p_0)\frac{2}{3\pi}\ln p_0}. \tag{2.183}$$

Ez azonban azt jelenti, hogy tetszőleges p impulzus esetén az egyenlet bal oldalán álló kifejezés állandó. Jelöljük ezt az állandót $(3\pi/\Lambda^2_{QED})$–vel, ekkor:

$$\alpha_1(p) \;=\; \frac{3\pi}{-\ln\frac{p^2}{\Lambda^2_{QED}}}. \tag{2.184}$$

Innen leolvashatjuk, hogy a futó csatolási állandó $p \to 0$ esetén eltűnik és $p/\Lambda_{QED} \to 1$ esetén végtelenhez tart. Az utóbbi miatt azonban nem kell a valóságos rendszerek esetén aggódnunk, mert Λ_{QED} (itt nem részletezett becslések alapján olyan nagy érték, hogy még azt megközelítő nagyságú impulzusok sem fordulnak elő semmilyen jelenleg ismert fizikai rendszerben. Ezért a kvantumelektrodinamikai számolásokban mindig sokkal kisebb a futó csatolási állandó értéke mint 1, és a perturbációszámítás jól alkalmazható. A futó csatolási állandó LLA becslése is csak kis impulzusok esetén érvényes, de – mégegyszer hangsúlyozom – a valóságos fizikai rendszerekben minden impulzus kicsi a Λ_{QED} skálán.

Teljesen hasonló elemzést lehet végezni a QCD-ben. A különbség az, hogy $b_1 = -\frac{9}{2} < 0$. (A számérték 3 kvarkíz (flavour) és 3 szín (colour) esetére vonatkozik.) Ekkor, az előbbi gondolatmenetet megismételve, bevezethetjük a Λ_{QCD} állandót, amelynek segítségével az LLA eredmény:

$$\alpha_1(p) \;=\; \frac{4\pi}{9\ln\frac{p^2}{\Lambda^2_{QCD}}}. \tag{2.185}$$

Ez a futó csatolási állandó nagy impulzusok esetén zérushoz tart, a perturbációszámítás is csak ilyen esetben alkalmazható. Ha az impulzus Λ_{QCD} nagyságrendjére csökken, akkor az LLA eredmény végtelenhez tart. Természetesen ilyen impulzusok esetén maga az LLA és a perturbációszámítás is felmondja a szolgálatot. Ezért tulajdonképpen nem is tudjuk, hogy pontosan hogyan viselkedik ebben a tartományban a futó csatolási állandó. Az olyan elméleteket, amelyekben a futó csatolási állandó nagy impulzusok esetén eltűnik, *aszimptotikusan szabad* elméleteknek nevezzük. A tapasztalattal való összevetés alapján $\Lambda_{QCD} \sim 100$ MeV nagyságrendű.

Mindkét megvizsgált elméletben az az érdekesség következik be, hogy bár a fotonok ill. a gluonok tömege zérus, mégis generálódik az elméletben egy tömegskála a renormálás során, vagyis a kvantumeffektusok eredményeként, amelyet Λ_{QED} ill. Λ_{QCD} jelent. Ezt a tényt *dimenzionális transzmutációnak* nevezik. A dolog azzal kapcsolatos, hogy az eredeti, tömeg nélküli klasszikus elmélet skálatranszformációkkal szemben invariáns. A kvantumfluktuációk következtében azonban ez a szimmetria a renormált kvantumtérelméletben elvész. Amikor egy szimmetria a kvantumeffektusok következtében menthetetlenül megsérül (azaz nem lehet úgy renormálni az elméletet, hogy a szimmetria megőrződjön a kvantumelméletben is), akkor azt mondjuk, hogy az adott szimmetria *anomálisan sérül.* A dimenzionális transzmutáció a skálatranszformációkkal szembeni szimmetria anomális sérülésének (anomáliájának) következménye. æ

2.8. Az UV- és IR-fixpontok

A renormálható elméleteket osztályozni lehet aszerint, hogy kis ill. nagy impulzusoknál ($t \to \pm\infty$) milyen viselkedést mutatnak. Ennek tanulmányozására a renormálási csoport egyenletei alkalmasak. Pontosabban, miután ismerjük az általános megoldás alakját, tudjuk, hogy a $t \to \pm\infty$ határesetekben mutatott viselkedést a futó csatolási állandó szabja meg. A futó csatolási állandót a β–függvény segítségével definiáltuk, ezért az döntő szerepet játszik a futó csatolási állandó és az elmélet kis és nagy impulzusoknál mutatott viselkedésében.

Az egyszerűség kedvéért most csak olyan elméletekről fogok beszélni, amelyben egy csatolási állandó van. Azonkívül feltesszük, hogy t a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban változhat. Ez a korábbiak értelmében azt jelenti, hogy a renormálás során bevezetett μ skálaparaméter értéke tetszőleges lehet, vagyis nincsen az elméletben természetes levágási paraméter. Az alapvető kölcsönhatások elméletei ilyenek. (Nemalapvető kölcsönhatások leírására szokás olyan elméleteket, ún. effektív elméleteket használni, amelyekben van természetes levágás.) Ha $t \to \pm\infty$, akkor ez a futó csatolási állandót definiáló integrálegyenlet alapján úgy lehetséges, hogy

1. vagy véges intervallumra integrálunk a bal oldalon, de ezen az intervallumon

$\beta(x)$–nek zérushelye van;

2. vagy a β–függvénynek nincsen az integrálási intervallumban zérushelye, de az intervallum végtelen, azaz $\bar{\lambda}(t,\lambda_r) \to \infty$, ha $t \to \infty$ vagy $t \to -\infty$.

A $\beta(x)$–függvény zérushelyeit a csatolási állandó függvényében fixpontoknak nevezzük. Az elnevezés onnan ered, hogy ezekben a pontokban

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \lambda_r(\lambda, \Lambda, \mu) \quad = \quad 0, \tag{2.186}$$

azaz a renormált csatolási állandót nem kell változtatni, ha a μ skálaparaméter értékét rögzített csupasz csatolási állandó és levágási paraméter mellett változtatjuk.

A fixpontokat aszerint osztályozzuk, hogy a futó csatolási állandó $t \to +\infty$ vagy $t \to -\infty$ esetén tart-e a fixponthoz. Az első esetben UV-fixpontról ($\mu \to \infty$), a második esetben IR-fixpontról beszélünk. Az, hogy a β–függvény zérushelye UV- vagy IR-fixpont, eldönthető a β–függvény ezen pontban vett első deriváltjának előjele alapján. Legyen $\tilde{\lambda}$ fixpont, akkor

- $\beta'|_{\tilde{\lambda}} > 0$ esetén $\tilde{\lambda}$ IR-fixpont;
- $\beta'|_{\tilde{\lambda}} < 0$ esetén $\tilde{\lambda}$ UV-fixpont.

A β-függvényt sorbafejthetjük a λ_r-hez legközelebb fekvő $\tilde{\lambda}$ fixpont körül:

$$\beta(x) \sim b_1(x - \tilde{\lambda}), \tag{2.187}$$

ahol

$$\beta'|_{\tilde{\lambda}} \quad = \quad b_1 \tag{2.188}$$

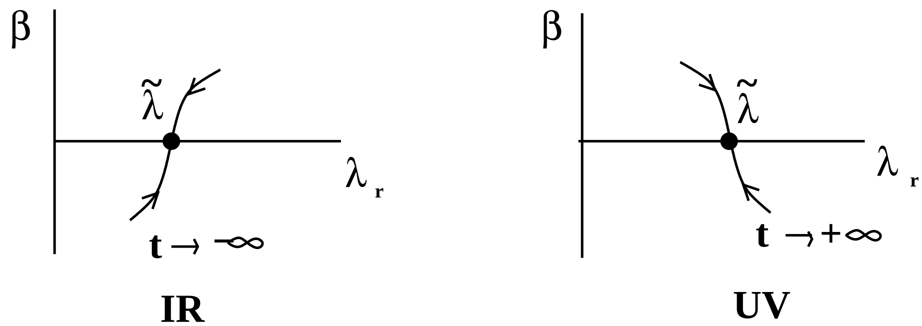
állandó, a β–függvény deriváltja a fixpontban. A futó csatolási állandót definiáló integrálegyenlet bal oldalán $t \to +\infty$ vagy $t \to -\infty$ esetén az integrált a pólus határozza meg. Az egyenlet aszimptotikus alakja:

$$\int_{\lambda_r}^{\bar{\lambda}(t,\lambda_r)} \frac{dx}{b_1(x-\tilde{\lambda})} \quad = \quad \frac{1}{b_1} \ln \frac{\bar{\lambda}(t,\lambda_r) - \tilde{\lambda}}{\lambda_r - \tilde{\lambda}} = t, \tag{2.189}$$

ahonnan:

$$\bar{\lambda}(t,\lambda_r) \quad = \quad e^{b_1 t}(\lambda_r - \tilde{\lambda}) + \tilde{\lambda} \tag{2.190}$$

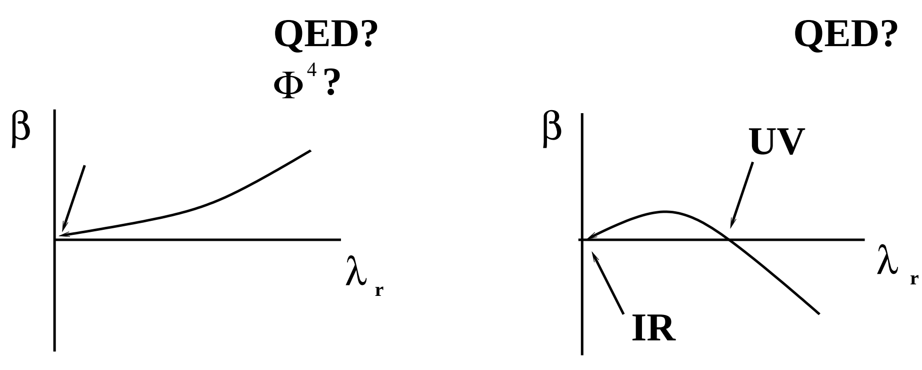
érvényes a fixpont közelében. Innen leolvashatjuk, hogy ha a β–függvény első deriváltja a fixpontban pozitív (negatív), azaz $b_1 > 0$ ($b_1 < 0$), akkor a futó csatolási állandó $t \to -\infty$ ($t \to +\infty$) esetén tart a fixponthoz, azaz a fixpont IR-fixpont (UV-fixpont). Az ábrák szemléltetik az IR- és UV-fixpontot.



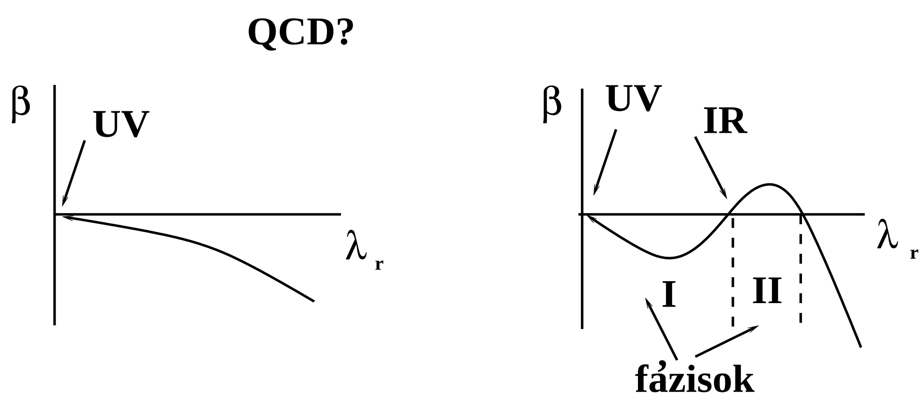
Ha csak egy csatolási állandó van az elméletben, akkor $\lambda_r = 0$ mindig fixpont, hiszen a perturbációszámításban $\beta(0) = 0$ adódik. Ha a $\tilde{\lambda} = 0$ fixpont UV-fixpont, akkor az elméletet aszimptotikusan szabadnak nevezzük. Ilyenkor $t \to \infty$ esetén a futó csatolási állandó zérussá válik. Ilyen elmélet a kvantumszíndinamika, az erős kölcsönhatás elmélete. Ha $\tilde{\lambda} = 0$ IR-fixpont, akkor az elméletet IR-stabil elméletnek nevezzük. Erre példa a kvantumelektrodinamika és a $\lambda\phi^4$ elmélet.

A perturbációszámítás csak a $\tilde{\lambda} = 0$ fixpont körüli viselkedést adja meg. Tulajdonképpen arról csak nemperturbációs módszerekkel lehet ismeretet szerezni, hogy az elméletek hogyan viselkednek a csatolási állandó más (véges) értékeinél. Ezek a módszerek azonban még mindig nem elég hatékonyak ahhoz, hogy pontos ismereteink legyenek.

Elképzelhető, hogy egy elmélet több fixponttal is rendelkezik. Például a kvantumelektrodinamika esetében vagy az a helyzet, hogy a β-függvény mindvégig pozitív és szigorúan monoton nő (baloldali ábra), mint ahogy azt az LLA eredmény szuggerálja, vagy pedig egy maximumon áthaladva ismét csökkenni kezd és véges argumentumnál eltűnik (jobboldali ábra).



Elképzelhető az is, hogy a csatolási állandó mindvégig negatív marad és szigorúan monoton csökken (baloldali ábra). Ekkor $t \to -\infty$ esetén a futó csatolási állandó végtelenné válik. Azt mondjuk, hogy ilyen elméletben IR rabszolgaság jelentkezik. Elképzelhető, hogy a kvantumszíndinamikában ez valósul meg és az infravörös rabszolgaság magyarázza a bezárást. Az is elképzelhető azonban, hogy a kvantumszíndinamikának van egy IR-fixpontja is és az felelős a bezárásért (jobboldali ábra).



Ha egy elméletnek legalább két fixpontja van, akkor azok a csatolási állandó teljes intervallumát tartományokra bontják. A tartományok két szomszédos fixpont, ill. a végtelenhez legközelebbi fixponttól a végtelenig nyúló intervallumok. Aszerint, hogy a renormált csatolási állandót melyik tartományból vesszük, fizikailag különböző elméleteket kapunk. Azt szoktuk ilyenkor mondani, hogy az adott klasszikus hatással definiált kvantumtérelméletnek különböző fázisai vannak. Különböző fázisok léte érdekes kérdéseket vet fel. Például ilyeneket, hogy a vákuum melyik fázisban van, lehetségesek-e átmenetek egyik fázisból a másikba, stb.

2.9. Összefoglalás

A regularizált elméletben osztályozhatjuk a fellépő ultraibolya (UV-) divergenciákat. Ha csak véges sok különböző típusú UV-divergencia lép fel, akkor az elmélet renormálható. A perturbatív módon történő renormálás lényege, hogy a hatáshoz a hurokkifejtés minden rendjében újabb és újabb ellentagokat adunk hozzá. Ezeket úgy választjuk meg, hogy a hurokkifejtés adott rendjében kiejtsék az UV-divergenciákat. Az így előállt renormált hatás alakja megegyezik az eredeti hatásával, a benne szereplő renormált paraméterek pedig az eredeti, ún. csupasz paraméterek és a regularizációs paraméter(ek) függvényei. Az ellentagok meghatározása a véges tagok tekintetében önkényes. Az egyértelműsítés megfelelő számú renormálási feltétel kirovásával tehető meg. Annyi renormálási feltételre van szükség, ahány látszólagosan divergens Feynman-diagram van az elméletben. A renormálási feltételek a megfelelő diagramok által leírt amplitúdók értékét rögzítik valamilyen külső impulzus(ok) esetén. Ezért az elméletben még a renormálási feltételek kirovása után is marad egy önkényes, a külső impulzusok tömegskáláját meghatározó μ paraméter. (Dimenzionális regularizáció esetén ez a csatolási állandó dimenziótlanításához szükséges μ paraméter.) A fizikai elmélet azonban nem függhet ettől a paramétertől, ez az elmélet szimmetriája a renormálási csoport transzformációival szemben, amelyek a paraméterek (csatolási állandók) változását adják meg a tömegskála (a μ paraméter) megváltoztatásakor.

Az elméletből kiolvasott valamely mennyiség fizikailag értelmes, ha a neki megfelelő csupasz mennyiség független a skálaparamétertől. Ezt a renormálási csoportnak az adott mennyiségre vonatkozó egyenlete fejezi ki matematikailag.

A renormálási csoport egyenleteit felírtuk az 1PI vertexfüggvényekre. Megmutattuk, hogy a tömeg nélküli elmélet renormált 1PI vertexfüggvényeire homogén egyenlet érvényes, s azok úgy viselkednek mint a megfelelő tömeges elmélet renormált 1PI vertexfüggvényei aszimptotikus külső impulzusoknál. Másrészt a tömeg nélküli elmélet renormálási csoportjának homogén egyenleteiből homogén egyenletek származtathatók le a tömeges elmélet renormált 1PI vertexfüggvényeire vonatkozóan.

A renormálási csoport renormált 1PI vertexfüggvényekre vonatkozó homogén egyenleteinek általános megoldása mutatja, hogy az önkényes μ skálaparaméter változtatását a csatolási állandó és a tömeg megfelelő változtatásával („futtatásával") kell kompenzálni, hogy biztosítsuk az elmélet fizikai tartalmának változatlanságát. A futó csatolási állandó és a futó tömeg ezért került bevezetésre.

Megmutattuk azt is, hogy az 1PI vertexfüggvények a külső impulzusok átskálázása esetén kanonikus dimenziójuknak megfelelően skáláznak tömeg nélküli, kölcsönhatásmentes elméletben. Ha van kölcsönhatás (és esetleg tömeg), akkor a skálázási dimenzió anomális és az eredeti skálának megfelelő csatolási állandót a futó csatolási állandó új skálának megfelelő értékével kell helyettesíteni.

Megismerkedtünk végül az elmélet UV- és IR-fixpontjainak fogalmával, valamint az aszimptotikus szabadság és az IR-rabszolgaság jelenségével.

II. FOLYTONOS GLOBÁLIS SZIMMETRIA

3. Lineárisan ábrázolt folytonos globális szimmetria

3.1. A Ward–Takahashi-azonosságok

A klasszikus térelméletben a folytonos globális szimmetriák megmaradó töltések létezését eredményezik. Noether tétele értelmében minden folytonos szimmetriához pontosan annyi megmaradó áram tartozik, ahány generátora van a szimmetriacsoportnak. Most azt fogjuk megmutatni, hogy folytonos globális szimmetria esetén az elmélet (összefüggő) Green-függvényei, ill. 1PI vertexfüggvényei között azonosságok állnak fenn. Ezek a Ward–Takahashi-azonosságok, amelyek a csupasz és a renormált elméletben egyaránt fennállnak. Ezek az azonosságok a szimmetriával rendelkező renormált kvantumtérelmélet alapvető fontosságú összefüggései. Fennállásuk biztosítja, hogy az elmélet a klasszikus szinten meglevő szimmetria megőrzésével renormálható.

Mielőtt a Ward–Takahashi-azonosságokra rátérnénk, vizsgáljuk meg általánosan azt az esetet, amikor a térmennyiségek egy folytonos szimmetriacsoport lineáris ábrázolása szerint transzformálódnak.

Legyenek ϕ_i a G folytonos csoport $D(G)$ lineáris ábrázolása szerint transzformálódó mennyiségek. Jelöljék a csoport generátorait ebben az ábrázolásban a t^a $N \times N$–es (valós ortogonális) mátrixok. Ezek eleget tesznek a Lie-csoportok szempontjából alapvető

$$[t^a, t^b] \;=\; f_{abc} t^c \tag{3.1}$$

relációknak, ahol f_{abc} a csoport szerkezeti állandói. Legyenek a generátorok az alábbiak szerint normálva:

$$\mathrm{Tr}(t^a t^b) \;=\; -N\delta^{ab}. \tag{3.2}$$

Az, hogy a ϕ_i mennyiségek a $D(G)$ lineáris ábrázolás szerint transzformálódnak, azt jelenti, hogy infinitezimális ω^a folytonos paraméterekkel jellemzett csoporttranszformációk esetén:

$$\phi'_i \;=\; \phi_i + t^a_{ij}\phi_j\omega_a \equiv \phi_i + \delta\phi_i. \tag{3.3}$$

Alább megmutatjuk, hogy a ϕ_i mennyiségek legalább kétszer folytonosan differenciálható $S(\phi_i)$ függvényei terében a csoport generátorait a

$$\Delta^a \;\equiv\; -t^a_{ij}\phi_j \frac{\partial}{\partial\phi_i} \tag{3.4}$$

differenciáloperátorok ábrázolják.

Képezzük az alábbi kommutátort:

$$\begin{aligned}
[\Delta^a, \Delta^b]S &= \left[t^a_{ij}\phi_j\frac{\partial}{\partial\phi_i}, t^b_{kl}\phi_l\frac{\partial}{\partial\phi_k}\right]S \\
&= t^a_{ij}t^b_{kl}\left[\phi_j\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\phi_l\frac{\partial S}{\partial\phi_k}\right) - \phi_l\frac{\partial}{\partial\phi_k}\left(\phi_j\frac{\partial S}{\partial\phi_i}\right)\right] \\
&= t^a_{ij}t^b_{kl}\phi_j\phi_l\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\phi_i\partial\phi_k} - \frac{\partial^2 S}{\partial\phi_k\partial\phi_i}\right) + t^a_{ij}t^b_{ki}\phi_j\frac{\partial S}{\partial\phi_k} - t^a_{ij}t^b_{jl}\phi_l\frac{\partial S}{\partial\phi_i} \\
&= \left(t^b_{ki}t^a_{ij} - t^a_{ki}t^b_{ij}\right)\phi_j\frac{\partial S}{\partial\phi_k} \\
&= -f_{abc}t^c_{kj}\phi_j\frac{\partial S}{\partial\phi_k} \\
&= f_{abc}\Delta^c S. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy a Δ_a operátorok pontosan azoknak a relációknak tesznek eleget mint a csoport generátorai.

Amennyiben a $\phi_i(x)$ mennyiségek a G csoport $D(G)$ lineáris ábrázolása szerint transzformálódó terek, akkor a csoport generátorait az $S[\phi]$ funkcionálok terén a

$$\Delta^a \equiv -\int dx t^a_{ij}\phi_j(x)\frac{\delta}{\delta\phi_i(x)} \qquad (3.6)$$

operátorok ábrázolják.

A fenti szimmetriát *globálisnak* nevezzük, mert a térmennyiségek a téridő minden pontjában azonos módon transzformálódnak, azaz a transzformáció ω^a paraméterei függetlenek a téridő koordinátáitól.

Azt a tényt, hogy az elmélet a klasszikus $S[\phi]$ hatás szintjén globális folytonos szimmetriával rendelkezik, a

$$\delta S = \omega^a\Delta^a S = 0 \qquad (3.7)$$

egyenlet fejezi ki.

Ha a $Z[J]$ generáló funkcionálban áttérünk olyan új ϕ' integrálási változóra, amely az eredeti ϕ változóból egy tetszőleges infinitezimális csoporttranszformációval áll elő, akkor természetesen a generáló funkcionál változatlan marad. Másrészt, figyelembe véve, hogy a klasszikus, fagráf szintű hatás invariáns a szimmetriatranszformációval szemben és hogy a $\mathcal{D}\phi_i$ euklideszi (sík) integrálási mérték is az, írhatjuk, hogy $Z[J]$ formális változása csak a forrástagtól származhatna:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta Z[J] \\
&= \int\mathcal{D}\phi_i(-\delta S + \delta\int dx J_i\phi_i)e^{-S+\int dx J_j\phi_j} \\
&= \int\mathcal{D}\phi_i\int dx J_i\omega^a t^a_{ij}\phi_j e^{-S[J]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega^a \int \mathcal{D}\phi_i \int dx t^a_{ij} \phi_j(x) J_i(x) e^{-S[J]} \\
&= \omega^a \int dx t^a_{ij} J_i(x) \frac{\delta Z[J]}{\delta J_j(x)}. \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Ennek az egyenletnek tetszőleges infinitezimális csoporttranszformáció esetén fenn kell állni, ha az elmélet a klasszikus szinten rendelkezik a G folytonos globális szimmetriával, ezért:

$$
\int dx t^a_{ij} J_i(x) \frac{\delta Z[J]}{\delta J_j(x)} = 0. \qquad (3.9)
$$

Ezeket az egyenlőségeket J szerint sorbafejtve kapjuk a Green-függvényekre vonatkozó Ward–Takahashi-azonosságokat. Az egyenlet mindkét oldalát $Z[J]$–vel osztva kapjuk meg az összefüggő Green-függvényekre vonatkozó Ward–Takahashi-azonosságokat:

$$
\int dx t^a_{ij} J_i(x) \frac{\delta W[J]}{\delta J_j(x)} = 0. \qquad (3.10)
$$

Legendre-transzformáció után innen az 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljára vonatkozó azonosságokhoz jutunk:

$$
\int dx t^a_{ij} \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i(x)} \varphi_j(x) = 0. \qquad (3.11)
$$

Ha a $\Gamma[\varphi]$ funkcionált a hurkok száma szerint kifejtjük, akkor a fenti azonosságoknak a hurkok tetszőleges számának megfelelő járulékra fenn kell állnia.

Az 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljára vonatkozó Ward–Takahashi-azonosságok alapján beláthatjuk, hogy a renormált elmélet megőrzi a globális folytonos szimmetriát. Csakugyan, a klasszikus hatás, $S[\phi]$ szimmetrikus, azaz $\Delta^a S = 0$. Ennek az a következménye, hogy a belőle számolt 1-hurok rendű $\Gamma_{1-hurok}[\varphi]$ járulék is az, vagyis eleget tesz a (3.11) azonosságnak. Sorbafejtve az azonosság bal oldalát Λ, vagy $1/\epsilon$ stb. szerint, az azonosság a Laurent-sor minden tagjára fennáll, s így az 1-hurok járulék divergens részére is teljesül. Ez azt jelenti, hogy a hatás 1-hurok rendű $\Delta_{1-hurok} S$ ellentagjai is rendelkeznek a klasszikus, fagráf szintű hatás szimmetriájával. Az 1-hurok rendű ellentagokkal kiegészített hatás tehát megőrizte az eredeti szimmetriát. Ebből számolva a 2-hurok rendű járulékot az 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljához, megismételhetjük az előbbi gondolatmenetet. Így lépésről lépésre beláthatjuk a hurkok száma szerint növekvő rendben haladva, hogy a renormált hatás és a renormált 1PI vertexfüggvények generáló funkcionálja is eleget tesznek a Ward–Takahashi-azonosságoknak.

Globális folytonos szimmetria lineáris ábrázolását megvalósító terek kvantumtérelmélete tehát a renormálás során megőrzi az eredeti szimmetriát.

Végezetül tanulságos megmutatni, hogy a kapott azonosságok azon kontinuitási egyenleteknek a kvantumtérelméleti megfelelői, amelyek a G szimmetriával Noether tétele értelmében kapcsolatos áramokra fennállnak a klasszikus térelméletben.

Emlékeztetőül idézzük fel Noether tételét. Legyen $S[\phi]$ a klasszikus hatás,

$$S[\phi] \;=\; \int dx\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi), \tag{3.12}$$

amely stacionárius az

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \;=\; 0 \tag{3.13}$$

Euler–Lagrange-egyenletnek elegettevő klasszikus $\phi(x)$ térkonfiguráció esetén. (A klasszikus elmélet a Minkowski-féle téridőben van megfogalmazva!) Hajtsuk végre a hatásban a $\Lambda^a(x)$ lokális paraméterekkel megadott $\phi \longrightarrow \phi_\Lambda$ transzformációt a klasszikus megoldásnak megfelelő (ilymódon rögzített) $\phi(x)$ térkonfiguráción. Tegyük fel, hogy a G csoport egységelemét a $\Lambda^a = 0$ paraméterekkel kapjuk. Mivel a ϕ konfiguráció úgy lett rögzítve, hogy a hatást stacionáriussá tegye, ezért az $S[\phi_\Lambda]$–t a $\Lambda(x)$,,terek" funkcionáljának tekintve, fennáll a

$$\left(\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Lambda^a} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Lambda^a}\right)_{\Lambda=0} \;=\; 0 \tag{3.14}$$

egyenlet. A klasszikus elméletben az áram definíciója:

$$J^{\mu a}(x) \;=\; \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Lambda^a(x)}\right|_{\Lambda=0}. \tag{3.15}$$

A globálisan szimmetrikus elméletben

$$\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Lambda^a}\right|_{\Lambda=0}\omega^a = 0 \tag{3.16}$$

tetszőleges infinitezimális ω^a =const. esetén, úgyhogy Az áramra az alábbi kontinuitási egyenlet adódik:

$$\partial_\mu J^{\mu a}(x) \;=\; \left.\frac{\partial\mathcal{L}(\phi_\Lambda, \partial_\mu\phi_\Lambda)}{\partial\Lambda^a(x)}\right|_{\Lambda=0}. \tag{3.17}$$

Amennyiben a G csoport globális folytonos szimmetria, akkor a jobboldal eltűnik, mert

$$\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Lambda^a}\right|_{\Lambda=0}\omega^a = 0 \tag{3.18}$$

tetszőleges infinitezimális ω^a =const. esetén, úgyhogy a Noether-áram megmaradását kapjuk:

$$\partial_\mu J^\mu(x) \;=\; 0. \tag{3.19}$$

A fentieket egy példával illusztráljuk. Tekintsük az

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i - V(\phi) \tag{3.20}$$

Lagrange-sűrűséggel definiált klasszikus térelméletet, ahol a $V(\phi)$ kölcsönhatás a

$$\delta\phi_i(x) \quad = \quad t^a_{ij}\phi_j(x)\omega^a \tag{3.21}$$

szimmetriával rendelkezik, s így a klasszikus hatás is. Írjunk ω^a helyére lokális $\Lambda^a(x)$ paramétereket és képezzük $\phi_{\Lambda i} = \phi_i + \delta\phi_i$ argumentummal a hatást. Ekkor definíció szerint:

$$J^{\mu a} \quad = \quad \left.\frac{\partial\mathcal{L}(\phi_\Lambda, \partial_\nu\phi_\Lambda)}{\partial\partial_\mu\Lambda^a(x)}\right|_{\Lambda=0} = t^a_{ij}\phi_j(x)\partial^\mu\phi_i. \tag{3.22}$$

A kontinuitási egyenlet jobb oldalán álló kifejezés:

$$-t^a_{ij}\phi_j(x)\frac{\partial}{\partial\phi_i(x)}V = \Delta^a V, \tag{3.23}$$

ami eltűnik, ha a végrehajtott transzformáció szimmetria, s így csakugyan megkapjuk a megmaradási tételt.

Térjünk most vissza a kvantumtérelmélet esetére. Hajtsunk végre a $Z[J]$ generáló funkcionálban $\phi_i(x) \to \phi_i(x) - t^a_{ij}\phi_j(x)\Lambda^a(x)$ változócserét, amellyel szemben a generáló funkcionál természetesen invariáns. Másrészről, ha ez a transzformáció $\Lambda^a(x)$=const. esetén szimmetriája a hatásnak, akkor:

$$\delta S[\phi] \quad = \quad \int dx \partial_\mu\Lambda^a(x)J^a_\mu(x) = -\int dx\Lambda^a(x)\partial_\mu J^a_\mu, \tag{3.24}$$

ahol bevezettük az euklideszi térben értelmezett áramot:

$$J^a_\mu(x) \quad = \quad \left.\frac{\delta S[\phi_\Lambda]}{\delta\partial_\mu\Lambda^a(x)}\right|_{\Lambda=0}. \tag{3.25}$$

Felhasználva, hogy a generáló funkcionál a változócserével szemben invariáns, az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\int\mathcal{D}\phi\left(-\delta S[\phi] + \int dx J_i\delta\phi_i\right)e^{-S[\phi]+\int dx J_i\phi_i} \quad = \quad 0, \tag{3.26}$$

$$\int\mathcal{D}\phi\int dx\left(\Lambda^a(x)\partial_\mu J^a_\mu - J_i t^a_{ij}\phi_j\Lambda^a(x)\right)e^{-S[\phi]+\int dx J_i\phi_i} \quad = \quad 0, \tag{3.27}$$

ahonnan:

$$\partial^x_\mu Z_{J^a_\mu(x)}[J] \quad = \quad J_i(x)t^a_{ij}\frac{\delta Z[J]}{\delta J_j(x)}. \tag{3.28}$$

Itt az egyenlet bal oldalán a $J^a_\mu(x)$ operátor-betétrészt tartalmazó Green-függvények generáló funkcionálja áll. Innen $Z[J]$–vel való osztás után analóg összefüggést kapunk a $W[J]$ generáló funkcionálra, amelyet Legendre-transzformálva megkapjuk a Noether-tétel kvantumtérelméleti megfelelőjét az 1PI vertexfüggvényekre vonatkozóan:

$$\partial^x_\mu\Gamma_{J^a_\mu(x)}[\varphi] \quad = \quad -\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_i(x)}t^a_{ij}\varphi_j(x). \tag{3.29}$$

Ezek a klasszikus elméletben érvényes kontinuitási egyenlet analogonjai a megfelelő kvantumtérelméletben. Ha ezeket az egyenleteket integráljuk a teljes térre, akkor megkapjuk a Ward–Takahashi-azonosságokat. Ebből látjuk tehát, hogy a globális folytonos szimmetriával rendelkező kvantumtérelméletben a Ward–Takahashi-azonosságok a klasszikus töltésmegmaradási tételek analogonjai.

A renormálás szempontjából a kapott összefüggés azt jelenti, hogy a $\partial_\mu J_\mu^a(x)$ operátor-betétrész beépítése a renormált 1PI vertexfüggvényekbe véges eredményt ad, vagyis a megmaradó áram divergenciája, mint operátor-betétrész, nem szorul külön renormálásra.

3.2. Lineárisan ábrázolt globális folytonos szimmetria explicit (lineáris) sérülése

Tegyük fel, hogy az elméletet definiáló klasszikus hatás a globális folytonos szimmetriával rendelkező $S_{szim}[\phi]$ tag és az ezen szimmetriát explicit módon sértő, a térmennyiségben lineáris tag összege:

$$S[\phi] \;=\; S_{szim}[\phi] - \int dx c_i \phi_i(x), \tag{3.30}$$

Most is feltesszük, hogy a $\phi_i(x)$ tér a folytonos szimmetriacsoport lineáris ábrázolása szerint transzformálódik. Általános érvényű megállapításainkat az

$$S[\phi] \;=\; \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda(\phi^2)^2 - c_i\phi_i\right] \tag{3.31}$$

elmélet példáján fogom szemléltetni, amelyben az $O(N)$ szimmetria sérül explicit módon.

Első lépésként keressük azt a konstans $\underline{v_0}$ klasszikus térkonfigurációt, amely a klasszikus hatást minimálissá teszi:

$$\left.\frac{\delta S_{szim}[\phi]}{\delta \phi_i(x)}\right|_{v_0} \;=\; c_i, \tag{3.32}$$

és

$$\left.\frac{\delta^2 S_{szim}}{\delta \phi_i \delta \phi_j}\right|_{v_0} \qquad \text{pozitiv} \quad \text{szemidefinit}. \tag{3.33}$$

Példánkban:

$$\left(m^2 + \frac{\lambda}{6}\underline{v_0}^2\right) v_{0i} \;=\; c_i. \tag{3.34}$$

Végezzük el az alábbi ,,eltolást":

$$\phi_i(x) \;=\; v_{0i} + \chi_i(x). \tag{3.35}$$

Az elmélet Green-függvényeinek, ill. összefüggő Green-függvényeinek generáló funkcionálja származtatható a szimmetrikus elmélet megfelelő generáló funkcionáljaiból:

$$Z[J] \;=\; Z_{szim}[J+c], \tag{3.36}$$
$$W[J] \;=\; W_{szim}[J+c]. \tag{3.37}$$

Tekintve, hogy a szimmetrikus elméletben az alábbi Ward–Takahashi-azonosságok érvényesek,

$$\int dx t^a_{ij} J_i(x) \frac{\delta W_{szim}[J]}{\delta J_j(x)} \;=\; 0, \tag{3.38}$$

a baloldal azonos átalakításával a következő, a sértett szimmetriájú elméletben érvényes azonosságokat kapjuk:

$$\int dx t^a_{ij} (J_i(x) + c_i) \frac{\delta W[J]}{\delta J_j(x)} \;=\; 0. \tag{3.39}$$

A baloldalt a $J_i(x)$ áram szerint Taylor-sorba fejtve az összefüggő Green-függvényekre a következő összefüggések adódnak (Fourier-transzformáció után):

$$c_i t^a_{ij} \tilde{G}^{(n+1)}_{jk_1\ldots k_n,c}(0,p_1,\ldots,p_n) + \sum_{r=1}^{n} t^a_{k_r j} \tilde{G}^{(n)}_{k_1\ldots k_{r-1} j k_{r+1}\ldots k_n}(p_1,\ldots,p_n) \;=\; 0. \tag{3.40}$$

Az 1PI vertexfüggvényekre vonatkozó Ward–Takahashi-azonosságokat Legendre-transzformáció révén kapjuk meg. A szimmetriasértő elmélet 1PI vertexfüggvényeinek generáló funkcionálja definíció szerint az alábbi összefüggéseknek tesz eleget:

$$\Gamma[\varphi] + W[J] \;=\; \int dx J_i \varphi_i, \tag{3.41}$$
$$\varphi_i(x) \;=\; \frac{\delta W[J]}{\delta J_i(x)} = \frac{\delta W_{szim}[J+c]}{\delta J_i(x)}. \tag{3.42}$$

Ugyanakkor a szimmetrikus elméletben:

$$\Gamma_{szim}[\chi] + W_{szim}[J] \;=\; \int dx J_i \chi_i, \tag{3.43}$$
$$\chi_i(x) \;=\; \frac{\delta W_{szim}[J]}{\delta J_i(x)}, \tag{3.44}$$

ahonnan $J_i \to J_i + c_i$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
\Gamma_{szim}[\varphi] + W_{szim}[J+c] &= \Gamma_{szim}[\varphi] + W[J] \\
&= \int dx (J_i + c_i)\varphi_i, && (3.45) \\
\varphi_i(x) &= \frac{\delta W_{szim}[J+c]}{\delta J_i(x)} && (3.46)
\end{aligned}$$

adódik. Hasonlítsuk össze ezeket az összefüggéseket a definícióból adódott (3.41) összefüggésekkel! Eredményül a sértett szimmetriájú és a szimmetrikus elmélet 1PI vertexfüggvényei generáló funkcionáljainak kapcsolatát kapjuk:

$$\Gamma[\varphi] - \Gamma_{szim}[\varphi] = -\int dx c_i \varphi_i(x). \tag{3.47}$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy a szimmetrikus és a sértett szimmetriájú elmélet 1PI vertexfüggvényei azonos divergenciákat tartalmaznak. Ezért az elmélet szimmetrikus részének renormálása egyúttal a sértett szimmetriájú elmélet renormálását is jelenti. A sértett szimmetriájú elméletet tehát úgy renormáljuk, hogy a regularizált szimmetrikus hatást helyettesítjük a megfelelő ellentagokat tartalmazó szimmetrikus renormált hatással, miközben a szimmetriát sértő lineáris tag változatlan marad, azaz nem renormálódik.

Mint azt a B. Függelékben látjuk, a ϕ_i térre vonatkozó 1PI vertexfüggvényeket úgy kapjuk, hogy a $\Gamma[\varphi]$ generáló funkcionált nem $\varphi(x)$ hanem

$$\chi_i(x) = \varphi_i(x) - v_i \tag{3.48}$$

szerint fejtjük sorba, ahol v_i a ϕ_i tér várható értéke vákuumállapotban:

$$v_i = \left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J_i(x)}\right|_{J=0}. \tag{3.49}$$

A v_i várható értéket az 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljából az

$$\left.\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i(x)}\right|_{\varphi_i = v_i} = 0, \tag{3.50}$$

egyenlet, azaz az

$$\left.\frac{\delta \Gamma_{szim}[\varphi]}{\delta \varphi_i(x)}\right|_{\varphi_i = v_i} = c_i \tag{3.51}$$

egyenlet alapján határozhatjuk meg.

A sértett szimmetriájú elmélet 1PI vertexfüggvényeire vonatkozó Ward–Takahashi-azonosságokat a szimmetrikus elméletre érvényes

$$\int dx t^a_{ij}\varphi_i(x)\frac{\delta\Gamma_{szim}[\varphi]}{\delta\varphi_j(x)} \;=\; 0 \tag{3.52}$$

azonosságokból származtatjuk felhasználva, hogy

$$\frac{\delta\Gamma_{szim}[\varphi]}{\delta\varphi_j(x)} \;=\; \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_j(x)}+c_j, \tag{3.53}$$

valamint eltolva a funkcionál változóját v_i–vel:

$$\int dx t^a_{ij}(\chi_i(x)+v_i)\left(\frac{\delta\Gamma(\chi+v)}{\delta\chi_j(x)}+c_j\right) \;=\; 0. \tag{3.54}$$

A sértett szimmetriájú elméletben érvényes Ward–Takahashi-azonosságoknak fontos következményei vannak:

1. Vegyük az azonosságokat a $\chi=0$ helyen, ekkor

   $$t^a_{ij}v_ic_j \;=\; 0 \tag{3.55}$$

   adódik, ami a ϕ_i tér vákuumállapotban felvett várható értékének és a szimmetriasértést megszabó c_i (N dimenziós térbeli) vektornak az egymáshoz viszonyított „helyzetét" rögzíti.

   Példánkban a szimmetria $O(N)$, a generátorok az N dimenziós tér két (páronként különböző) koordinátaindexével, $a=\{kl\}$, vannak megjelölve és mátrixelemeik:

   $$t^{(kl)}_{ij} \;=\; \delta^k_i\delta^l_j-\delta^l_i\delta^k_j. \tag{3.56}$$

   Ezt felhasználva a (3.55) egyenlet az

   $$v_kc_l-v_lc_k \;=\; 0 \tag{3.57}$$

   alakot ölti. Ez azt jelenti, hogy a vákuumállapotban a tér várható értéke a szimmetriasértés c_i vektorával párhuzamos.

2. További fontos következtetést vonhatunk le a $\tilde{\Gamma}^{(2)}_{jk}(p=0)$ tömegmátrixra vonatkozóan, ha a (3.54) azonosságok mindkét oldalát funkcionálderiváljuk $\chi_j(x)$ és $\chi_k(y)$ szerint:

   $$\int dx t^a_{ij}\left[\delta_{ik}\delta(x-y)\left(\frac{\delta\Gamma(\chi+v)}{\delta\chi_j(x)}+c_j\right)\right.$$
   $$\left.\left.+\;(\chi_i(x)+v_i)\,\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\chi_j(x)\delta\chi_k(y)}\right]\right|_{\chi=0}=0, \tag{3.58}$$

$$
\begin{aligned}
t^a_{kj}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi_j(y)}\bigg|_{\chi=0}+c_j\right)+\int dx t^a_{ij}v_i\,\frac{\delta^2\Gamma(\chi+v)}{\delta\chi_j(x)\delta\chi_k(y)}\bigg|_{\chi=0} &= 0,\\
t^a_{kj}c_j+\int dx t^a_{ij}v_i\Gamma^{(2)}_{jk}(x,y) &= 0,\\
t^a_{kj}c_j+t^a_{ij}v_i\tilde{\Gamma}^{(2)}_{jk}(0) &= 0, \qquad (3.59)
\end{aligned}
$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$
\Gamma^{(2)}_{jk}(x,y) = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}e^{-\mathrm{i}p(x-y)}\tilde{\Gamma}^{(2)}_{jk}(p). \qquad (3.60)
$$

Az (3.59) egyenlet a szimmetriasértés vektora és a tömegmátrix között ad meg egy kapcsolatot.

Tekintsük megint a lineárisan sértett ϕ^4 elmélet példáját. Ha behelyettesítjük az $a=(ln)$ választás mellett a generátorok mátrixábrázolásainak explicit kifejezését, akkor az

$$
c_n\delta_{lk}-c_l\delta_{kn}+v_l\tilde{\Gamma}^{(2)}_{nk}(0)-v_n\tilde{\Gamma}^{(2)}_{lk}(0) = 0 \qquad (3.61)
$$

egyenlőségre jutunk, ahonnan

$$
c_l\delta_{kn} = v_l\tilde{\Gamma}^{(2)}_{nk}(0). \qquad (3.62)
$$

Vegyük figyelembe, hogy a vákuumállapotban a tér várható értéke párhuzamos a szimmetriasértés c_i vektorával, azaz

$$
v_l = \frac{v}{c}c_l. \qquad (3.63)
$$

Másrészt az l és n indexek különbözőek, hiszen ezek együtt adják azt az a indexpárt, amely a generátorokat indexeli. A (3.62) egyenlet ekkor valójában csak a tömegmátrix azon elemeire ad megszorítást, amelyek a szimmetriasértés vektorára merőleges térkomponensek egyrészecskés gerjesztéseinek tömegével kapcsolatosak. A transzverzális módusok tömegmátrixa diagonális és ezen módusok tömegének négyzete:

$$
\tilde{\Gamma}^{(2)}_T(0) = \frac{c}{v}. \qquad (3.64)
$$

3.3. Globális folytonos szimmetria spontán sérülése

Ebben a fejezetben a szimmetria sérülésének egy más módjával foglalkozunk. Előljáróban el szeretném mondani, hogy a szimmetria sérülhet explicit módon, amikor a hatás egy szimmetrikus és egy a szimmetriát explicit módon sértő tagot tartalmaz. Ez a szimmetria sérülésének Wigner-féle módja. Tudjuk, hogy ez a rendszer elfajult energiaszintjeinek, a közelítő szimmetriához tartozó multipletteknek a felhasadására vezet. A szimmetria sérülésének másik módja az, hogy a hatás szimmetrikus, azonban a rendszer alapállapota olyan, hogy a szimmetriaműveletekkel szemben nem invariáns. Ilyenkor azt szoktuk mondani, hogy a szimmetriát az alapállapot spontán sérti. Ez a szimmetria sérülésének ún. Nambu–Goldstone-féle módja. Ilyen szimmetriasérüléssel találkozunk pl. a makroszkopikus ferromágneses közeg esetében. A közeg Hamilton-operátora a térbeli $O(3)$ forgatásokkal szemben invariáns. Ugyanakkor az anyag alapállapotban remanens mágnesezettséggel rendelkezik, amely a tér meghatározott irányába mutat. Ezt az állapotot egy forgatási művelet egy olyan másikba viszi át, amely az előzőtől különbözik, mert abban a mágnesezettség vektora más irányba mutat. Ezek a fizikailag inekvivalens alapállapotok azonban azonos energiájúak. A rendszer alapállapota tehát kontinuum számossággal elfajult. A szimmetriák sérülésének vannak még további esetei, mint az anomáliák és a dinamikai szimmetriasérülés, amelyekkel később fogunk foglalkozni.

Vegyük példának az $O(N)$ szimmetriát explicit módon sértő ϕ^4 elméletet. Vizsgáljuk a fagráf szintű hatást ϕ = const. térkonfiguráció esetén. Beosztva a téridőtartomány térfogatával:

$$V(\phi) \;=\; S/\text{négyes-térfogat} = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}(\phi^2)^2 - c_i\phi_i. \tag{3.65}$$

Tegyük most fel, hogy az m^2 csupasz tömeget folytonosan változtatjuk pozitív értékről negatív értékűre. Ne feledjük, az m^2 paraméternek akármilyen is lehet az előjele, mert az nem azonos az egyrészecskés gerjesztések fizikai tömegével. Fagráf-közelítésben a tér v_{0i} várható értéke vákuumállapotban az

$$m^2 v_{0i} + \frac{\lambda}{3!}v_0^2 v_{0i} - c_i \;=\; 0 \tag{3.66}$$

egyenlet gyöke. Ha az explicit szimmetriasértés mértékét megszabó c_i vektor nem zérus, akkor a várható érték m^2 analitikus függvénye, és semmi érdekes nem történik, ha m^2–et pozitív értékekről negatív értékekre folytatjuk. Ugyanakkor, ha $c_i = 0$, vagyis nincsen explicit szimmetriasértés, akkor a tér vákuumállapotbeli várható értékét fagráf-közelítésben meghatározó egyenlet a

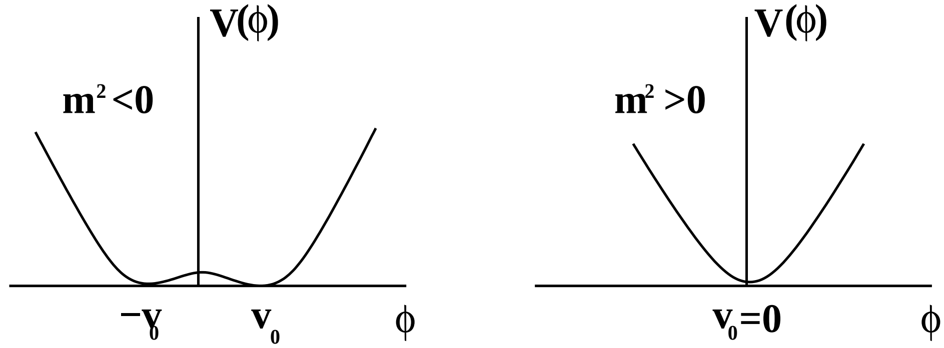
$$v_{0i}\left(m^2 + \frac{\lambda}{6}v_0^2\right) \;=\; 0 \tag{3.67}$$

alakot ölti. Ha most $m^2 > 0$, akkor az állandó térkonfigurációkon vett fagráf szintű hatásnak $v_0 = 0$ esetén van minimuma, vagyis akkor, ha a tér vákuumállapotbeli várható értéke eltűnik. Ilyenkor az alapállapot nyilván nem sérti az $O(N)$ szimmetriát. Ha azonban $m^2 < 0$, akkor az állandó térkonfigurációkon vett hatásnak a $v_0 = 0$ helyen maximuma van, és minimumai jelennek meg a

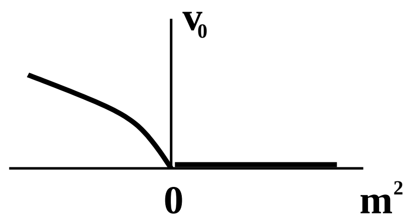
$$v_0 \;=\; \sqrt{\frac{-6m^2}{\lambda}} \tag{3.68}$$

értéknél. A v_{0i} vektor iránya tetszőleges lehet. Nyilvánvaló, hogy ekkor a tér alapállapoti várható értéke az N–dimenziós absztrakt (belső) tér meghatározott irányába mutat. A szimmetriaműveletek ezt a v_{0i} vektort forgatják a belső térben. A kontinuum sok csoportműveletnek megfelelően előálló kontinuum sok alapállapot mind különböző, azonban azonos energiához tartoznak. (Emlékezzünk, az euklideszi hatás a rendszer energiájával azonos.)

Az ábrák a fagráf színtű effektív potenciál menetét illusztrálják ϕ =const. térkonfigurációk függvényeként $m^2 < 0 (> 0)$ esetén:



Az ábra a tér vákuumállapotbeli várható értékét mutatja a tömegparaméter, m^2 függvényében:



A Ward–Takahashi-azonosságok segítségével meg tudjuk most is vizsgálni a tér egyrészecskés gerjesztéseinek tömegmátrixát. Ebből arra a következtetésre fogunk jutni, hogy spontán sérülő globális folytonos szimmetria esetén az elméletben pontosan annyi zérus tömegű bozon, ún. *Goldstone-bozon* van, ahány szimmetriasértő generátora van a csoportnak. Szimmetriasértő generátoron azokat a generátorokat értjük, amelyek nem hagyják invariánsan a tér v_i vákuumállapotbeli várható értékét. A spontán szimmetriasértést tehát a zérus vagy közel zérus tömegű részecskék megjelenése jelzi.

A szimmetriát spontán sértő elmélet Ward–Takahashi-azonosságait úgy kapjuk meg, hogy az $m^2 > 0$, $c_i \neq 0$ (kicsi) elmélet megfelelő azonosságaiból indulunk ki és azokat az m^2 paraméterben analitikusan folytatjuk. Be lehet bizonyítani, hogy ilyenkor nem lépnek fel szingularitások. Amikor eljutottunk az $m^2 < 0$ értékekhez, akkor c_i–vel zérushoz tartunk. Ez az eljárás a szimmetriát explicit módon sértő elmélet Ward–Takahashi-azonosságaiból formálisan az alábbi alakban nyerhető azonosságokra vezet:

$$\int dx t^a_{ij} \frac{\delta\Gamma(\chi+v)}{\delta\chi_i(x)}(\chi_j+v_j) \;=\; 0. \tag{3.69}$$

Ezt funkcionálderiválva $\chi_k(y)$ szerint, majd Fourier-transzformálva az eredményt, a következő egyenletet kapjuk a tömegmátrixra:

$$v_j t^a_{ji}\tilde{\Gamma}^{(2)}_{ik}(0) \;=\; 0. \tag{3.70}$$

Legyen általában a G a folytonos globális szimmetriaműveletek csoportja és legyen H az az alcsoport, amelynek generátorai invariánsan hagyják a v_i vákuumállapotban a tér várható értékét. (Ez alcsoport, mert a csoport egységeleme is ebben a halmazban van.) Jelöljük H generátorait t^a_{ij}–vel, ahol $a = 1, 2, \ldots, p$. A G csoport többi generátora is kifeszít egy lineáris teret, amely az $\mathcal{L}(G/H)$ Lie-algebrát alkotja. Ezek azonban nem definiálnak egy csoportot. (Hiányzik az egységelem.) Amíg a H generátorai eleget tesznek az

$$t^a_{ij}v_j \;=\; 0 \qquad\qquad (a = 1, \ldots, p) \tag{3.71}$$

összefüggéseknek, vagyis a belőlük alkotott csoportelemek invariánsan hagyják a v_i vákuumállapotbeli várható értéket, addig a többi, szimmetriasértő generátor a

$$\sum_{a>p} t^a_{ij}v_j\omega^a \;=\; 0 \tag{3.72}$$

egyenlőségeknek akkor és csak akkor tesz eleget, ha valamennyi ω^a $(a > p)$ paraméter zérus. A $v^a_i \equiv t^a_{ij}v_j$ $(a > p)$ vektorok tehát lineárisan függetlenek. Ha ez így van, akkor a tömegmátrixra vonatkozó Ward–Takahashi-azonosság,

$$v^a_j\tilde{\Gamma}^{(2)}_{jk}(0) \;=\; 0. \tag{3.73}$$

Ez azt jelenti, hogy a tömegmátrixnak pontosan annyi független, zérus sajátértékhez tartozó sajátvektora van, amennyi a szimmetriát spontán sértő generátorok száma. Az ezen sajátértékeknek megfelelő zérus nyugalmi tömegű részecskéket nevezzük Goldstone-bozonoknak.

3.4. Összefoglalás

Megmutattuk, hogy az elmélet globális folytonos szimmetriája ún. Ward–Takahashi-azonosságokat eredményez, amelyek a klasszikus Noether-áramok kontinuitási egyenleteinek kvantumtérelméleti megfelelői. Tárgyaltuk a globális folytonos szimmetria explicit és spontán sérülését. Ha az eredeti, szimmetriát nemsértő elmélet renormálható, akkor a szimmetriasértő elmélet is renormálható mindkét esetben. Ha a globális folytonos szimmetria explicit módon sérül, akkor a vákuumállapot elfajultsága megszűnik. A térmennyiség várható értéke vákuumállapotban olyan vektor a belső térben, amely beáll a szimmetriasértést meghatározó vektor irányába. Spontán szimmetriasértés esetén a kontinuum sok azonos energiájú, de fizikailag nem egyenértékű vákuumállapot létezik, amelyek egyikét valósitja meg a rendszer. Globális folytonos szimmetriát spontán sértő elméletben pontosan annyi darab zérus nyugalmi tömegű Goldstone-bozon jelenik meg, ahány darab lineárisan független szimmetriasértő generátor van.

4. Királis szimmetria

A hadronok között a pionok a legkisebb tömegűek, ($m_\pi \approx 0.13$ GeV). Ez a tömeg lényegesen kisebb mint a hadronspektrum növekvő tömeg szerint soron következő részecskéinek, az η– ($m_\eta \approx 0.55$ GeV), a ρ– ($m_\rho \approx 0.77$ GeV) és az ω–mezonoknak ($m_\omega \approx 0.78$ GeV) a tömege. A hadronspektrumban a szomszédos részecskék tömegkülönbsége egyre csökken növekvő energiával. Kézenfekvőnek látszik a π–mezonok kicsiny tömegét úgy magyarázni, hogy a pionok egy globális folytonos szimmetria spontán sérülése nyomán megjelenő Goldstone-bozonok. A nem egzaktul nulla nyugalmi tömeg a szimmetria kicsiny explicit sérülésének a következménye.

A jelenségnek az erőskölcsönhatás elmélete, a kvantumszíndinamika alapján az a magyarázata, hogy az u és d kvark tömege kicsi a hadronfizika 1 GeV nagyságrenddel jellemzett tömegskáláján. Kézenfekvőnek látszik ezért az a feltevés, hogy ezen kvarkok kicsiny tömege valamilyen folytonos szimmetria spontán sérülésének a következménye. A jelenségnek azonban a kvantumszíndinamika alapján történő magyarázata bonyolult és nem tisztázott. Ezért egyelőre megelégszünk az erőskölcsönhatás olyan effektív elméletével, amelyben a releváns szabadsági fokok maguk a hadronok (mezonok és barionok).

Az elképzelhető effektív elméletek közül a legegyszerűbb a σ–modell. Ebben a nukleonok izodublettet alkotnak és közöttük a kölcsönhatást mezonterek közvetítik. A mezonterek a nukleontérhez Yukawa-típusú kölcsönhatással csatolódnak, vagyis két sztatikus nukleon között a kölcsönhatás távolságfüggése $r^{-1}e^{-mr}$ alakú, ahol m a kölcsönhatást közvetítő mezontér tömege. Alább meg fogjuk mutatni, hogy a kétféle izospinkomponensű, eredetileg zérus nyugalmi tömegűnek feltételezett szabad nukleontér esetén a hatás invariáns az $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ királis transzformációkkal szemben, amelyek a nukleontér izospin komponenseit keverik össze. (Az indexek jelentését és a transzformációk alakját alább pontosan megadjuk.) A σ–modellben a pionok, mint a királis szimmetria spontán sérülése nyomán fellépő Goldstone-bozonok jelennek meg. Sőt, ez a modell arra is példa, hogy a spontán szimmetriasértés révén a királis modell eredetileg zérus tömegű nukleonjai is tömeget nyernek.

4.1. Királis transzformációk

Induljunk ki egy olyan elméletből, amelyben $i = 1, 2, \ldots, N$ különböző típusú (pl. nukleonok esetén izospinű; kvarkok esetén zamatú) szabad, zérus tömegű fermion van:

$$S[\psi, \bar{\psi}] = -\int d^4x \bar{\psi}_i(x) \partial\!\!\!/ \psi_i(x). \tag{4.1}$$

Ez a hatás invariáns az $U(N) \otimes U(N)$ királis transzformációkkal szemben, amelyeket az alábbi egyenletek definiálnak:

$$\psi'_{i\alpha}(x) = \left[\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \left(\frac{1+\epsilon\gamma_5}{2}\right)_{\alpha\beta}(U_{\epsilon\, ij} - \delta_{ij})\right]\psi_{j\beta}(x), \tag{4.2}$$

$$\bar{\psi}'_{i\alpha}(x) = \bar{\psi}_{j\beta}(x)\left[\delta_{\beta\alpha}\delta_{ji} + \left(\frac{1-\epsilon\gamma_5}{2}\right)_{\alpha\beta}\left(U^{\dagger}_{\epsilon\, ji} - \delta_{ji}\right)\right], \tag{4.3}$$

ahol $\epsilon = \pm 1$ megfelel a két $U(N)$ csoportnak, $U_\pm$ a megfelelő $U(N)$ csoportokból vett unitér transzformációk ($N \times N$–es unitér mátrixok). Természetesen, ha bevezetnénk egy tömegtagot is, akkor az explicit módon sértené a királis szimmetriát.

Tanulságos részletesen kiírni az infinitezimális királis $SU(2) \otimes SU(2)$ transzformációk alakját. Mindkét $SU(2)$ csoport generátorai ugyanazok a $\tau^a/2$ ($a = 1,2,3$) mátrixok (τ^a a Pauli-mátrixok). Jelölje az egyik $SU(2)$ csoport paramétereit α^a, a másikét β^a:

$$U_+ = e^{-\mathrm{i}\alpha^a \frac{\tau^a}{2}} \approx 1 - \mathrm{i}\alpha^a \frac{\tau^a}{2}, \tag{4.4}$$

$$U_- = e^{-\mathrm{i}\beta^a \frac{\tau^a}{2}} \approx 1 - \mathrm{i}\beta^a \frac{\tau^a}{2}. \tag{4.5}$$

Ennek megfelelően az egyik, ill. a másik $SU(2)$ transzformáció infinitezimális alakja rendre:

$$\psi'(x) = \left[1 - \mathrm{i}\frac{1+\gamma_5}{2}\alpha^a \frac{\tau^a}{2}\right]\psi(x), \tag{4.6}$$

$$\psi'(x) = \left[1 - \mathrm{i}\frac{1-\gamma_5}{2}\beta^a \frac{\tau^a}{2}\right]\psi(x). \tag{4.7}$$

Az U_+ transzformációk csak a ψ Dirac-spinor balkezes komponensét,

$$\psi_L(x) = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi(x), \tag{4.8}$$

transzformálják, míg az U_- transzformációk csak a jobbkezes komponenst,

$$\psi_R(x) = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x). \tag{4.9}$$

Ez általánosan igaz tetszőleges királis transzformáció esetén. Szokás ezért a királis transzformációk csoportját $U_L(N) \otimes U_R(N)$ módon jelölni, ahol az indexek arra utalnak, hogy az egyik csoport a Dirac-spinor balkezes, a másik a Dirac-spinor jobbkezes komponensét transzformálja:

$$\begin{aligned} U_+: \quad & \psi'_L = U_+\psi_L, \\ & \psi'_R = \psi_R; \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} U_-: \quad & \psi'_L = \psi_L, \\ & \psi'_R = U_-\psi_R. \end{aligned} \tag{4.11}$$

A zérus tömegű, $\frac{1}{2}$ spinű fermionokat tartalmazó elméletbe bevezethetünk zérus spinű bozonokat, megőrizve a királis szimmetriát. Legyen a mezontér az $N \times N$–es $M(x)$ komplex elemű mátrixszal ábrázolva. Ekkor az

$$S_{int}[\psi, \bar{\psi}, M] \quad = \quad -g \int d^4x \; \bar{\psi}_{i\alpha}(x) \left[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)_{\alpha\beta} M_{ij}(x) + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)_{\alpha\beta} M^{\dagger}_{ij}(x)\right] \psi_{j\beta}(x) \tag{4.12}$$

kölcsönhatási tag invariáns a királis transzformációkkal szemben, amennyiben a mezontér az alábbi szabály szerint transzformálódik:

$$M'(x) \quad = \quad U_- M(x) U_+^{\dagger}. \tag{4.13}$$

Ezt két lépésben látjuk be.

- Hajtsunk végre először egy U_+ transzformációt:

$$\begin{aligned} S''_{int} \quad &= \quad -g \int d^4x \bar{\psi} \left(1 + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)(U_+^{\dagger} - 1)\right) \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)M'' + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)M''^{\dagger}\right] \cdot \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(1+\gamma_5)(U_+ - 1)\right)\psi \\ &= \quad -g \int d^4x \bar{\psi} \left[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)M''U_+ + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)U_+^{\dagger}M''^{\dagger}\right]\psi. \end{aligned} \tag{4.14}$$

- Következő lépésként hajtsunk végre egy U_- transzformációt:

$$\begin{aligned} S'_{int} \quad &= \quad -g \int d^4x \; \bar{\psi} \left(1 + \frac{1}{2}(1+\gamma_5)(U_-^{\dagger} - 1)\right) \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)M'U_+ + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)U_+^{\dagger}M'^{\dagger}\right] \cdot \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)(U_- - 1)\right)\psi \\ &= \quad -g \int d^4x \bar{\psi} \left(U_-^{\dagger}M'U_+ + U_+^{\dagger}M'^{\dagger}U_-\right)\psi. \end{aligned} \tag{4.15}$$

  Nyilvánvaló, hogy a két transzformáció után kapott alak akkor és csak akkor egyezik meg az eredetivel, ha

$$M' \quad = \quad U_- M U_+^{\dagger}, \tag{4.16}$$

  amit bizonyítani akartunk.

A bevezetett kölcsönhatási tag tértükrözéssel szemben is invariáns, ha a mezonterek mátrixa a tér tetszőleges tengelyének tükrözése során az

$$M_P(x) \quad = \quad M^{\dagger}(\tilde{x}) \tag{4.17}$$

szabály szerint transzformálódik, ahol $\tilde{x}$ az x koordináta-négyesvektorból a tükrözött tengely irányába eső komponens előjelének megváltoztatásával adódik.

Pl. ha az i–tengelyre tükrözünk, akkor

$$\tilde{x}_i = -x_i, \qquad \tilde{x}_\mu = x_\mu, \quad \text{ha} \quad \mu \neq i \tag{4.18}$$

továbbá a Dirac-egyenlet tulajdonságaiból tudjuk, hogy a Dirac-spinorok transzformációs szabálya:

$$\psi_{P_i}(x) = \gamma_5\gamma_i\psi(\tilde{x}), \tag{4.19}$$
$$\bar{\psi}_{P_i}(x) = \bar{\psi}(\tilde{x})\gamma_i\gamma_5. \tag{4.20}$$

Ez többek között azt is jelenti, hogy a balkezes és jobbkezes spinorok ilyen P_i tükrözések során kölcsönösen egymásba transzformálódnak, mert

$$\gamma_i\gamma_5\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma_5\gamma_i = \frac{1}{2}(1-\gamma_5). \tag{4.21}$$

Ezeket felhasználva a kölcsönhatási tag P_i tükrözés után:

$$\begin{aligned} S_{int\ P} &= -g\int d^4\tilde{x}\ \bar{\psi}(\tilde{x})\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_5)M_P(x)\right.\\ &\left.\quad + \frac{1}{2}(1+\gamma_5)M_P^\dagger(x)\right]\psi(\tilde{x}). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Ez azonos az eredeti kölcsönhatási taggal, ha $M_P(x) = M^\dagger(\tilde{x})$, amit bizonyítani akartunk.

A bozonterek tértükrözésekkel szembeni viselkedéséből következik, hogy bevezethetjük a Lorentz-skalár

$$\Sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(M(x) + M^\dagger(x)) \tag{4.23}$$

teret, $\Sigma_P(x) = \Sigma(\tilde{x})$, valamint a pszeudoskalár

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(M(x) - M^\dagger(x)) \tag{4.24}$$

teret, $\Pi_P(x) = -\Pi(\tilde{x})$.

Meg lehet azt is mutatni, hogy a bevezetett kölcsönhatási tag töltéstükrözéssel szemben is invariáns, ha az $M(x)$ mezontér töltéstükrözés során az

$$M_C(x) = M^T(x) \tag{4.25}$$

szabály szerint transzformálódik.

Ehhez azt kell felhasználni, hogy a szabad Dirac-egyenlet akkor és csak akkor invariáns a töltéstükrözéssel szemben, ha a Dirac-spinorok transzformációs törvénye:

$$\overline{\psi_C}(x) = \psi^T(x)\gamma_0\gamma_2, \qquad \psi_C(x) = \gamma_2\gamma_0\left(\bar{\psi}\right)^T(x). \tag{4.26}$$

Ekkor:

$$\begin{aligned}
S_{int,C} &= -g\int d^4x\ (\psi)^T\gamma_0\gamma_2\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_5)M_C\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}(1+\gamma_5)M_C^\dagger\right]\gamma_2\gamma_0\left(\bar{\psi}\right)^T\\
&= -g\int d^4x\psi_{i\alpha}\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_5^T)_{\alpha\beta}(M_C)_{ij}\right.\\
&\quad\left.\frac{1}{2}(1+\gamma_5^T)_{\alpha\beta}(M_C^\dagger)_{ij}\right]\left(\bar{\psi}\right)_{j\beta}. \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Mivel a páratlan indexű Dirac-mátrixok szimmetrikusak, a páros indexűek pedig antiszimmetrikusak, a fenti kifejezés a hatás kölcsönhatási tagjának töltéstükrözés előtti alakjával azonos, ha $M_C = M^T$. Ezt akartuk bizonyítani.

Egészítsük ki továbbá a hatást a szabad, önkölcsönható bozonok hatáskifejezésével, amit szintén királisan szimmetrikus alakban veszünk fel, pl. az alábbiak szerint:

$$S_B[M] = \int d^4x\ \left[\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\partial_\mu M\cdot\partial_\mu M^\dagger\right)+V\left(\mathrm{tr}(MM^\dagger)\right)\right], \qquad (4.28)$$

ahol $V(\varphi)$ az önkölcsönhatást adja meg.

Bevezethetünk a későbbiek érdekében egy a királis szimmetriát explicit módon sértő tagot is:

$$S_C[M] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int d^4x\ \mathrm{tr}\left(C(M+M^\dagger)\right), \qquad (4.29)$$

ahol C állandó hermitikus mátrix, $C = C^\dagger$.

Végül az α^a és β^a infinitezimális paraméterekkel jellemzett $SU_L(2)\otimes SU_R(2)$ királis transzformáció általános alakja:

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= \left(1-\mathrm{i}\frac{\alpha^a+\beta^a}{2}\frac{\tau^a}{2}-\mathrm{i}\frac{\alpha^a-\beta^a}{2}\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\right)\psi(x), &(4.30)\\
\bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x)\left(1+\mathrm{i}\frac{\alpha^a+\beta^a}{2}\frac{\tau^a}{2}-\mathrm{i}\frac{\alpha^a-\beta^a}{2}\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\right), &(4.31)\\
M'(x) &= M(x)-\mathrm{i}\beta^a\frac{\tau^a}{2}M(x)+M(x)\mathrm{i}\alpha^a\frac{\tau^a}{2}. &(4.32)
\end{aligned}$$

Az $SU_L(N)\otimes SU_R(N)$ csoport diagonális alcsoportját, $SU_V(N)$–et az $\alpha^a = \beta^a$ királis transzformációk képezik. Az infinitezimális $SU_V(2)$ transzformációk:

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= \left(1-\mathrm{i}\alpha^a\frac{\tau^a}{2}\right)\psi(x), &(4.33)\\
\bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x)\left(1+\mathrm{i}\alpha^a\frac{\tau^a}{2}\right), &(4.34)\\
M'(x) &= M(x)+\mathrm{i}\alpha^a\left[M,\frac{\tau^a}{2}\right]. &(4.35)
\end{aligned}$$

Ezeket a transzformációkat nukleontér esetén az izospintranszformációkkal azonosíthatjuk. A $\beta^a = -\alpha^a$ transzformációk egészítik ki a diagonális csoportot királis csoporttá. Ezek a valódi királis transzformációk és infinitezimális alakjuk:

$$\psi'(x) = \left(1 - \mathrm{i}\alpha^a \gamma_5 \frac{\tau^a}{2}\right)\psi(x), \tag{4.36}$$

$$\bar\psi'(x) = \bar\psi(x)\left(1 - \mathrm{i}\alpha^a \gamma_5 \frac{\tau^a}{2}\right), \tag{4.37}$$

$$M'(x) = M(x) + \mathrm{i}\alpha^a \left\{\frac{\tau^a}{2}, M\right\}. \tag{4.38}$$

Itt most látjuk, hogy az $m_0\bar\psi\psi$ tömegtag a diagonális alcsoport (az izospin) transzformációival szemben invariáns, de explicit módon sértené a valódi királis transzformációkkal szembeni szimmetriát.

A királisan szimmetrikus elméletben, melyet az

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \, \Big[& \bar\psi \, \partial\!\!\!/ \psi - g\bar\psi\left(\frac{1+\gamma_5}{2}M + \frac{1-\gamma_5}{2}M^\dagger\right)\psi \\ & + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\partial_\mu M \cdot \partial_\mu M^\dagger\right) + V\left(\mathrm{Tr}\left(MM^\dagger\right)\right) \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}\left(C(M+M^\dagger)\right)\Big]. \end{aligned} \tag{4.39}$$

klasszikus hatás definiál, Noether tételének segítségével megkaphatjuk a diagonális alcsoporthoz tartozó $V_{\mu a}(x)$ ún. vektoráramot és az $\mathcal{L}(SU(N)\otimes SU(N)/SU_V(N))$ Lie-algebra generátoraihoz tartozó $A_{\mu a}(x)$ ún. axiálvektoráramot. Ezek rendre:

$$\begin{aligned} V_{\mu a}(x) = & -\mathrm{i}\bar\psi(x)\gamma_\mu \frac{\tau^a}{2}\psi(x) \\ & + \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\tau^a}{2}\left([\partial_\mu M^\dagger(x), M(x)] - [M^\dagger(x), \partial_\mu M(x)]\right)\right), \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} A_{\mu a}(x) = & -\mathrm{i}\bar\psi(x)\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\tau^a}{2}\psi(x) \\ & + \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\tau^a}{2}\left(\{M(x), \partial_\mu M^\dagger(x)\} - \{\partial_\mu M(x), M^\dagger(x)\}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.41}$$

Hajtsunk végre formálisan $\alpha^a(x)$ infinitezimális paraméterekkel megadott lokális, a diagonális alcsoportból vett transzformációt a hatáson:

$$\begin{aligned} S[\alpha^a] = \int d^4x \, \Big[& \bar\psi\left(1 + \mathrm{i}\alpha^a \frac{\tau^a}{2}\right)\left(\partial\!\!\!/ - \mathrm{i}\, \partial\!\!\!/ \alpha^a \frac{\tau^a}{2} - \mathrm{i}\alpha^a \frac{\tau^a}{2}\, \partial\!\!\!/\right)\psi \\ & - g\bar\psi\left(1 + \mathrm{i}\alpha^a \frac{\tau^a}{2}\right)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}M + \frac{1+\gamma_5}{2}[M,\tau^a]\frac{\mathrm{i}\alpha^a}{2}\right. \\ & \left. + \frac{1-\gamma_5}{2}M^\dagger - \frac{1-\gamma_5}{2}[\tau^a, M^\dagger]\frac{\mathrm{i}\alpha^a}{2}\right)\left(1 - \mathrm{i}\alpha^a \frac{\tau^a}{2}\right)\psi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\left(\partial_\mu M+[\partial_\mu M,\tau^a]\frac{\mathrm{i}\alpha^a}{2}+[M,\tau^a]\frac{\mathrm{i}\partial_\mu\alpha^a}{2}\right)\cdot\right.\\
&\left.\cdot\left(\partial_\mu M^\dagger-[\tau^a,\partial_\mu M^\dagger]\frac{\mathrm{i}\alpha^a}{2}-[\tau^a,M^\dagger]\frac{\mathrm{i}\partial_\mu\alpha^a}{2}\right)\right\}\\
&+V\left(\mathrm{tr}\left(MM^\dagger+[M,\tau^a]\frac{\mathrm{i}\alpha^a}{2}M^\dagger-M[\tau^a,M^\dagger]\frac{\mathrm{i}\partial_\mu\alpha^a}{2}\right)\right)\\
&\left.-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}\left\{C\left(M+M^\dagger+\frac{\mathrm{i}\alpha^a}{2}([M,\tau^a]-[\tau^a,M^\dagger])\right)\right\}\right]. \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

Felhasználva a vektoráram definícióját,

$$
V_{\mu a}(x) = \left.\frac{\delta S[\alpha^a]}{\delta\partial_\mu\alpha^a(x)}\right|_{\alpha=0}, \qquad (4.43)
$$

kapjuk:

$$
\begin{aligned}
V_{\mu a}(x) &= -\bar\psi\mathrm{i}\gamma_\mu\frac{\tau^a}{2}\psi\\
&+\frac{\mathrm{i}}{4}\mathrm{tr}\left([M,\tau^a]\partial_\mu M^\dagger-\partial_\mu M\cdot[\tau^a,M^\dagger]\right), \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

ahonnan rendezés után adódik a keresett kifejezés.

A vektoráram eleget tesz az alábbi kontinuitási egyenletnek:

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu V_{\mu a} &= \left.\frac{\delta S[\alpha^a]}{\delta\alpha^a(x)}\right|_{\alpha=0}\\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}\mathrm{tr}C([M,\tau^a]-[\tau^a,M^\dagger])\\
&= -\mathrm{itr}\left(\left[\frac{\tau^a}{2},C\right]\Sigma\right). \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

Hasonlóképpen kapjuk meg az axiálvektoráramot, ha egy infinitezimális $\alpha^a(x)$ paraméterekkel jellemzett, lokális valódi királis transzformációt hajtunk végre:

$$
\begin{aligned}
S[\alpha^a] = &\int d^4x\left[\bar\psi\left(1-\mathrm{i}\alpha^a\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\right)\left(\partial\!\!\!/-\mathrm{i}\ \partial\!\!\!/\alpha^a\gamma_5\frac{\tau^a}{2}-\mathrm{i}\alpha^a\frac{\tau^a}{2}\ \partial\!\!\!/\gamma_5\right)\psi\right.\\
&-g\bar\psi\left(1-\mathrm{i}\alpha^a\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\right)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}M+\frac{1+\gamma_5}{2}\mathrm{i}\alpha^a\left\{\frac{\tau^a}{2},M\right\}\right.\\
&\left.+\frac{1-\gamma_5}{2}M^\dagger-\frac{1-\gamma_5}{2}\mathrm{i}\alpha^a\left\{\frac{\tau^a}{2},M^\dagger\right\}\right)\left(1-\mathrm{i}\alpha^a\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\right)\psi\\
&+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\left(\partial_\mu M+\mathrm{i}\partial_\mu\alpha^a\left\{\frac{\tau^a}{2},M\right\}+\mathrm{i}\alpha^a\left\{\frac{\tau^a}{2},\partial_\mu M\right\}\right)\cdot\right.\\
&\left.\cdot\left(\partial_\mu M^\dagger-\mathrm{i}\partial_\mu\alpha^a\left\{\frac{\tau^a}{2},M^\dagger\right\}-\mathrm{i}\alpha^a\left\{\frac{\tau^a}{2},\partial_\mu M^\dagger\right\}\right)\right\}\\
&+V\left(\mathrm{tr}\left(MM^\dagger+\mathrm{i}\alpha^a\left\{\frac{\tau^a}{2},M\right\}M^\dagger-\mathrm{i}M\alpha^a\left\{\frac{\tau^a}{2},M^\dagger\right\}\right)\right)\\
&\left.-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}C\left(M+\mathrm{i}\alpha^a\left\{\frac{\tau^a}{2},M\right\}+M^\dagger-\mathrm{i}\alpha^a\left\{\frac{\tau^a}{2},M^\dagger\right\}\right)\right]. \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

Az axiálvektoráram definíció szerint:

$$
\begin{aligned}
A_{\mu a}(x) &= \left.\frac{\delta S[\alpha]}{\delta \partial_\mu \alpha^a(x)}\right|_{\alpha=0} \\
&= -\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\psi \\
&\quad +\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathrm{i}\left\{\frac{\tau^a}{2}, M\right\}\partial_\mu M^\dagger - \mathrm{i}\partial_\mu M\cdot\left\{\frac{\tau^a}{2}, M^\dagger\right\}\right) \\
&= -\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\psi \\
&\quad +\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\tau^a}{2}\left(\{M,\partial_\mu M^\dagger\} - \{\partial_\mu M, M^\dagger\}\right)\right).
\end{aligned} \tag{4.47}
$$

Az axiálvektoráram az alábbi kontinuitási egyenletnek tesz eleget:

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu A_{\mu a} &= \left.\frac{\delta S[\alpha]}{\delta \alpha^a(x)}\right|_{\alpha=0} \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}\left(C\left(\left\{\frac{\tau^a}{2}, M\right\} - \mathrm{i}\left\{\frac{\tau^a}{2}, M^\dagger\right\}\right)\right) \\
&= -\mathrm{i}\mathrm{tr}\left(\left\{C, \frac{\tau^a}{2}\right\}\Pi\right).
\end{aligned} \tag{4.48}
$$

A vektoráram ill. az axiálvektoráram kontinuitási egyenlete tehát:

$$
\partial_\mu V_{\mu a} = -\mathrm{i}\mathrm{tr}\left(\left[\frac{\tau^a}{2}, C\right]\Sigma\right); \tag{4.49}
$$

$$
\partial_\mu A_{\mu a} = -\mathrm{i}\mathrm{tr}\left(\left\{C, \frac{\tau^a}{2}\right\}\Pi\right). \tag{4.50}
$$

Ha speciálisan $C = c\mathbf{1}$, ahol c valós szám, akkor rögtön leolvasható, hogy a vektoráram megmarad:

$$
\partial_\mu V_{\mu a} = 0, \tag{4.51}
$$

míg az axiálvektoráram nem marad meg:

$$
\partial_\mu A_{\mu a} = -\mathrm{i}c\mathrm{tr}(\tau^a\Pi) \neq 0. \tag{4.52}
$$

Ha $|c| \ll 1$, akkor azt szokás mondani, hogy az axiálvektoráram részlegesen megmarad. (Az angol terminológia: *PCAC – partial conservation of the axialvector current* .) Jegyezzük még meg, hogy a hadronfizikai kísérletek eredményeiből arra lehetett következtetni, hogy a vektoráram (pontosabban az izospin) a nukleáris kölcsönhatásban jó közelítéssel megmarad. Ezért a modellalkotás során tudatosan választjuk az explicit módon szimmetriasértő tag C mátrixát úgy, hogy éppen a vektoráram legyen megmaradó, és ne az axiálvektoráram.

4.2. A lineáris σ–modell

Az előző fejezetben tárgyalt modell $SU(2)\otimes SU(2)$ speciális esetét lineáris σ–modellnek nevezzük. Ezt a modellt eredetileg a nukleonok és a pionok alacsonyenergiás fizikájának leírására találták ki. Benne a nukleonok a klasszikus hatásban zérus tömegűek. A kölcsönhatás a nukleonok között skalár– és pszeudoskalár–mezonok cseréje révén valósul meg és Yukawa típusú. A vákuum a skalármezontér nem zérus várható értékével jellemezhető, ami a királis szimmetriát spontán sérti, egészen pontosan a valódi királis transzformációkkal szembeni szimmetriát. Ugyanakkor az $SU_V(2)$ szimmetria, a modell izospin-szimmetriája nem sérül spontán módon sem. A pszeudoskalár-mezonok a Goldstone-bozonok, amelyek a valódi királis szimmetria spontán sérülése miatt jelennek meg, mint zérus tömegű bozonok. Ezeket úgy sikerül a tapasztalat szerint nem zérus (de a hadronok 1 GeV tömegskáláján kicsiny) tömegű pionokkal azonosítani, hogy feltételezzük a királis szimmetria megfelelő mértékű explicit sérülését is. A spontán szimmetriasértés következtében a modell kezdetben nulla tömegű királis fermionjai, a nukleonok is nyugalmi tömeget nyernek, amely arányos a skalármezon tér vákuumbeli várható értékével. A lineáris σ–modell az erős kölcsönhatás egyik effektív elméletének, a kvantumhadrodinamikának az alapjául szolgál. Ebben a skalármezon tér részecskéit a nukleonok közötti közepes hatótávolságú σ-rezonanciákkal lehet kapcsolatba hozni.

Miután elmondtuk a modell filozófiáját, lássuk a modell részleteit. A mezontereket

$$\begin{aligned}
M(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma(x)+\mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi}(x)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma+\mathrm{i}\pi_0 & \pi_2+\mathrm{i}\pi_1=\mathrm{i}\pi_- \\ -\pi_2+\mathrm{i}\pi_1=\mathrm{i}\pi_+ & \sigma-\mathrm{i}\pi_0 \end{pmatrix}; \\
M^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma(x)-\mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi}(x)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma-\mathrm{i}\pi_0 & -\pi_2-\mathrm{i}\pi_1=-\mathrm{i}\pi_- \\ \pi_2-\mathrm{i}\pi_1=-\mathrm{i}\pi_+ & \sigma+\mathrm{i}\pi_0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

alakban vesszük fel. Itt $\sigma(x)$ skalártér és $\vec{\pi}(x)$ pszeudoskalártér, mert

$$\Sigma = \frac{1}{2}(2\sigma\cdot\mathbf{1}) = \sigma\cdot\mathbf{1}, \tag{4.54}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(2\mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi}\right). \tag{4.55}$$

Felhasználva a mezonterek $M(x)$ mátrixának és töltéskonjugáltjának a kapcsolatát,

$$M_C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma_C+\mathrm{i}(\pi_0)_C & \mathrm{i}(\pi_-)_C \\ \mathrm{i}(\pi_+)_C & \sigma_C-\mathrm{i}(\pi_0)_C \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma+\mathrm{i}\pi_0 & \mathrm{i}\pi_+ \\ \mathrm{i}\pi_- & \sigma-\mathrm{i}\pi_0 \end{pmatrix} = M^T, \tag{4.56}$$

leolvashatjuk, hogy

$$\sigma_C = \sigma, \qquad (\pi_0)_C = \pi_0, \tag{4.57}$$

vagyis a σ és π_0 terek zérus elektromos töltésűek, míg

$$(\pi_-)_C = \pi_+, \qquad (\pi_+)_C = \pi_-, \tag{4.58}$$

vagyis π_+ és π_- egymásnak töltéskonjugált párjai. Így π_0–t a semleges, $\pi_\pm$–t a töltött pionokkal lehet majd azonosítani.

A hatás az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \Big[\bar\psi\, \partial\!\!\!/ \psi - g\bar\psi\,(\sigma + \gamma_5 \mathrm{i}\vec\tau\vec\pi)\,\psi \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\sigma\cdot\partial_\mu\sigma + \partial_\mu\vec\pi\cdot\partial_\mu\vec\pi\right) + V\left(\sigma^2+\vec\pi^{\,2}\right) - c\sigma\Big], \end{aligned} \tag{4.59}$$

ahol a mezonterek önkölcsönhatását

$$V(\rho) = \frac{1}{2}m^2\rho + \frac{1}{4!}\lambda\rho^2 \tag{4.60}$$

alakban vesszük fel. Feltesszük, hogy $m^2 < 0$, ami biztosítja, hogy a $c = 0$ esetben királisan szimmetrikus hatás spontán szimmetriasértő vákuumállapotra vezet, legalábbis a fagráf-közelítésben, amikor az effektív potenciál megegyezik a V potenciállal. A $c \neq 0$ esetben a királis szimmetria explicit módon is sérül.

Az $M(x)$ tér transzformációs törvényéből megkapjuk a $\sigma(x)$ és a $\vec\pi(x)$ terek transzformációit. Az infinitezimális, α^a és β^a paraméterekkel jellemzett $SU(2)\otimes SU(2)$ transzformációk az alábbi alakúak:

$$\begin{aligned} \sigma' + \mathrm{i}\vec\tau\vec\pi' &= \sigma + \mathrm{i}\vec\tau\vec\pi - \mathrm{i}\beta^a\frac{\tau^a}{2}(\sigma + \mathrm{i}\tau^b\pi^b) \\ &\quad + (\sigma + \mathrm{i}\tau^b\pi^b)\mathrm{i}\alpha^a\frac{\tau^a}{2} \\ &= \sigma + \mathrm{i}\vec\tau\vec\pi + \frac{\tau^a}{2}(-\mathrm{i}\beta^a\sigma + \mathrm{i}\alpha^a\sigma) \\ &\quad + \beta^a\frac{1}{2}(\delta^{ab} + \mathrm{i}\epsilon^{abc}\tau^c)\pi^b - \alpha^a\frac{1}{2}(\delta^{ab} + \mathrm{i}\epsilon^{bac}\tau^c)\pi^b, \end{aligned} \tag{4.61}$$

ahonnan:

$$\sigma' = \sigma + \frac{\beta^a - \alpha^a}{2}\pi^a, \tag{4.62}$$

$$\pi'^a = \pi^a - \frac{1}{2}(\beta^a - \alpha^a)\sigma + \epsilon^{acb}\frac{1}{2}(\beta^c + \alpha^c)\pi^b. \tag{4.63}$$

Ezek a képletek világosan mutatják, hogy a σ-tér izoskalár, a $\vec\pi$ tér pedig izovektor, mert az infinitezimális $\beta^a = \alpha^a$ paraméterű $SU_V(2)$ izospin-transzformációk során

σ invariáns marad, $\vec{\pi}$ pedig 3-dimenziós izovektorként elfordul: $\vec{\pi}' - \vec{\pi} = -\vec{\alpha} \times \vec{\pi}$. Ugyanakkor sem a σ, sem a $\vec{\pi}$ terek nem királis sajátállapotú részecskék terei, mert az infinitezimális $\beta^a = -\alpha^a$ paraméterű királis transzformációk keverik a komponenseiket: $\sigma' - \sigma = \vec{\beta} \cdot \vec{\pi}$, $\vec{\pi}' - \vec{\pi} = \vec{\beta}\sigma$.

A lineáris σ–modellben a diagonális $SU_V(2)$ izospinszimmetriához tartozó vektoráram:

$$
\begin{aligned}
V_{\mu a} &= -\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\tau^a}{2}\psi + \frac{\mathrm{i}}{4}\mathrm{tr}\left([\sigma + \mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi}, \tau^a]\, \partial_\mu(\sigma - \mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi}) \right. \\
&\quad \left. - \partial_\mu(\sigma + \mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi}) \cdot [\tau^a, \sigma - \mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi}]\right) \\
&= -\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\tau^a}{2}\psi + \epsilon^{abc}\pi^b\partial_\mu\pi^c, \qquad (4.64)
\end{aligned}
$$

avagy vektorjelölést használva:

$$
\vec{V}_\mu = -\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\vec{\tau}}{2}\psi + \vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi}. \qquad (4.65)
$$

Az elméletben a vektoráram megmarad, mert a szimmetriát explicit módon sértő tagban a C mátrixot az egységmátrix állandószorosának választottuk,

$$
\partial_\mu V_{\mu a} = 0. \qquad (4.66)
$$

Az axiálvektoráram:

$$
\begin{aligned}
A_{\mu a} &= -\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\tau^a}{2}\psi \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\tau^a}{2}\left(\{\sigma + \mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi}, \partial_\mu(\sigma - \mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi})\} - \{\partial_\mu(\sigma + \mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi}), \sigma - \mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi}\}\right)\right) \\
&= -\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\tau^a}{2}\psi + (\sigma\partial_\mu\pi_a - \pi_a\partial_\mu\sigma), \qquad (4.67)
\end{aligned}
$$

avagy vektorjelöléssel

$$
\vec{A}_\mu = -\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2}\psi + \sigma\partial_\mu\vec{\pi} - \vec{\pi}\partial_\mu\sigma. \qquad (4.68)
$$

Az axiálvektoráram nem marad meg, hanem részlegesen sérül:

$$
\partial_\mu A_{\mu a} = -\mathrm{i}c\mathrm{tr}\,(\tau^a\Pi) = c\pi^a. \qquad (4.69)
$$

Így megvalósul a klasszikus modell szintjén, azaz fagrát-közelítésben az empírikusan igazolt PCAC feltétel.

A fenti állítások természetesen mind a klasszikus modellre vonatkoznak. A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy mi a helyzet a kvantumtérelméletben.

4.3. A lineáris σ-modell fagráf-közelítésben

Korlátozzuk vizsgálatainkat először a bozonszektorra, vagyis hagyjuk el a fermionteret. Ekkor lényegében a ϕ^4 elméletet kapjuk $O(4)$ globális szimmetriával, ahol ϕ most nem egykomponensű, hanem 4-komponensű $\phi = (\sigma, \vec{\pi})$ $O(4)$-vektor. Ezért $\phi^2 = \phi \cdot \phi = \sigma^2 + \vec{\pi}^2$, ill. $\phi^4 = (\phi^2)^2 = (\phi \cdot \phi)^2 = (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2$ és a bozonszektor járuléka a hatáshoz

$$
\begin{aligned}
S_{b.sz.} \;=\; & \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\sigma \cdot \partial_\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\pi} \cdot \partial_\mu\vec{\pi} + \frac{1}{2}m^2\left(\sigma^2 + \vec{\pi}^{\,2}\right)\right. \\
& \left. + \frac{\lambda}{4!}\left(\sigma^2 + \vec{\pi}^{\,2}\right)^2 - c\sigma\right]. \qquad (4.70)
\end{aligned}
$$

Mivel $m^2 < 0$, tudjuk a korábbiak alapján, hogy a klasszikus modell spontán szimmetriasértő $|0\rangle$ vákuummal rendelkezik. Mivel az izospinszimmetria sértetlen marad a tapasztalat szerint, ezért csak akkor kapunk a fenomenológiával összeegyeztethető elméletet, ha

$$
\langle 0|\sigma(x)|0\rangle \;=\; v_0 \neq 0. \qquad (4.71)
$$

Ha nem lenne az az empírikus megszorítás, hogy az izospinszimemtriát a vákuumállapot sem sérti, akkor az $O(4)$-vektor eredetileg teljesen egyenértékű komponenseinek bármelyikéről feltehetnénk, hogy nem zérus várható értékű.

Tudjuk, hogy a vákuumbeli v_0 várható értéket az alábbi egyenlet megoldása szolgáltatja fagráf-közelítésben:

$$
v_0\left(m^2 + \frac{\lambda}{6}v_0^2\right) \;=\; c. \qquad (4.72)
$$

Vezessük be az eltolt $s(x)$ teret a

$$
\sigma(x) \;=\; v_0 + s(x) \qquad (4.73)
$$

definícióval. Ekkor a Lagrange-sűrűségnek a skalárterekben kvadratikus része rendezés után diagonális marad és az alábbi alakot ölti:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{\lambda}{2}v_0^2\right)s^2 + \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{\lambda}{6}v_0^2\right)\vec{\pi}^{\,2} \\
\equiv \; & \frac{1}{2}m_\sigma^2 s^2 + \frac{1}{2}m_\pi^2\vec{\pi}^{\,2}. \qquad (4.74)
\end{aligned}
$$

A kvadratikus tagok együtthatóit mint a σ és a π mezonok tömegét lehet azonosítani, mint a fagŕaf közelítésben az összefüggő (szabad) propagátorok pólusait. A σ tér vákuumbeli várható értékét meghatározó egyenletből látjuk, hogy ha nincsen explicit szimmetriasértés, azaz $0 = c = v_0 m_\pi^2$, akkor a szimmetria spontán sérülése esetén ($v_0 \neq 0$) a piontömeg zérusnak adódik. Ilymódon a pionokat csakugyan a Goldstone-bozonokkal azonosítottuk. A modell paraméterei az alábbi módon fejezhetők ki a bevezetett tömegekkel:

$$\frac{\lambda v_0^2}{3} = m_\sigma^2 - m_\pi^2, \qquad m^2 = \frac{3}{2} m_\pi^2 - \frac{1}{2} m_\sigma^2. \tag{4.75}$$

Vegyük most figyelembe a fermionszektort is. Az eredetileg zérus tömegű nukleonok tere Yukawa-típusú csatolással csatolódik a mezonterekhez. A hatás megfelelő tagjai:

$$\begin{aligned} &\int d^4x \left[\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/ \psi - g\bar{\psi}\left(\sigma + \mathrm{i}\gamma_5 \vec{\tau}\vec{\pi}\right)\psi\right] \\ &= \int d^4x \left[\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/ \psi - g\bar{\psi}\left(v_0 + s + \mathrm{i}\gamma_5 \vec{\tau}\vec{\pi}\right)\psi\right]. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Innen leolvashatjuk, hogy a királis szimmetria spontán sérülése miatt a nukleonok

$$m_N = g v_0 \tag{4.77}$$

nyugalmi tömeget nyernek (fagráf-közelítésben).

A σ-modell az alábbi paramétereket tartalmazza: m, λ, v_0, g. Ebből az első hármat a bozonszektorban kell meghatározni. Ha ezek rögzítettek, akkor a g csatolási állandót úgy választjuk, hogy a nukleon tömegét reprodukáljuk. Mondhatnánk azt, hogy a bozonszektor paramétereit az m_σ, m_π tömegek alapján rögzítjük. Ez egyrészt kevés megszorító feltétel, másrészt a σ–mezont nem észleljük stabil kötött állapotú részecskeként, mint a pionokat. A kiutat az jelenti, hogy meghatározhatjuk (fagráf-közelítésben) az alacsonyenergiás pion-pion szórás hatáskeresztmetszetét. Az amputált összefüggő $\pi\pi\pi\pi$ 4-pont Green-függvényre fagráf-közelítésben az alábbi kifejezést kapjuk[†]:

$$\left(\tilde{G}^{(4)}_{amp}\right)_{ijkl}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{v_0^2}\left(\frac{s - m_\pi^2}{m_\sigma^2 - s} + \frac{t - m_\pi^2}{m_\sigma^2 - t} + \frac{u - m_\pi^2}{m_\sigma^2 - u}\right). \tag{4.78}$$

A szórási hossz révén (a megfelelő 1PI vertexfüggvény $p_i^2 = -m_\pi^2$ értékével) rögzíthetjük a σ–tér vákuumbeli várható értékét, v_0–t. A hatáskeresztmetszet az s pion-pion tömegközépponti energia függvényében az $s = m_\sigma^2$ helyen rezonanciaszerkezetet mutat. A rezonancia helyével rögzíthetjük m_σ^2–et.

[†]Csak mellékesen jegyzem itt meg, hogy a σ-modellben kapott $\pi\pi$ szórási amplitúdó az s–, a t– és az u–csatorna járulékának szimmetrikus kifejezése. Ez a pontrészecske térelméletek jellegzetes tulajdonsága, amikor a közbenső állapotban csak véges sok rezonancia lehetséges. Ma már tudjuk, hogy a nagyenergiás hadronfizikában növekvő tömegközépponti energiával egyre több és több hadronrezonancia jelenhet meg, mint közbenső állapot. Ez végül oda vezet, hogy az s–csatornás amplitúdó már önmagában a teljes és nem szabad hozzáadni a t– vagy az u–csatornás amplitúdót. Ez a felismerés Veneziano nevéhez fűződik és a *dualitási feltevés* néven ismeretes.

Az alábbiakban vázolom, hogy milyen lépések révén kaphatjuk meg a fenti összefüggő 4-pont Green-függvényt.

- Elegendő csak a bozonszektorra szorítkoznunk. Tudjuk, hogy fagráf szinten a mezonterek 1PI vertexfüggvényeinek generáló funkcionálja az eredeti, klasszikus hatás. Ezért fagráf szinten az összefüggő Green-függvények generáló funkcionálja az alábbi egyenlettel adható meg:

$$
\begin{aligned}
W[J_\sigma, \vec{J}_\pi] &= -S[\varphi_\sigma, \vec{\varphi}_\pi] + \int d^4x \left(J_\sigma \varphi_\sigma + \vec{J}_\pi \vec{\varphi}_\pi \right) \\
&= -\int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\varphi}_\pi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \left(\varphi_\sigma^2 + \vec{\varphi}_\pi^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4!} \lambda \left(\varphi_\sigma^2 + \vec{\varphi}_\pi^2 \right)^2 - c\varphi_\sigma \right] \\
&\quad + \int d^4x \left(J_\sigma \varphi_\sigma + \vec{J}_\pi \vec{\varphi}_\pi \right). \qquad (4.79)
\end{aligned}
$$

A jobboldali kifejezés akkor tekinthető a W generáló funkcionál explicit alakjának, ha benne a φ_σ, $\vec{\varphi}_\pi$ klasszikus térváltozókat kifejezzük mint a J_σ, $\vec{J}_\pi$ külső források funkcionáljait. Ez az alábbi, Legendre-transzformációból adódó összefüggések invertálásával lehetséges:

$$
\begin{aligned}
J_\sigma(x) &= \frac{\delta S}{\delta \varphi_\sigma(x)} \\
&= (-\partial_x^2 + m^2)\varphi_\sigma(x) + \mathcal{V}' 2\varphi_\sigma(x) - c, \qquad (4.80) \\
J_{\pi\ i}(x) &= \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\pi\ i}(x)} \\
&= (-\partial_x^2 + m^2)\varphi_{\pi\ i}(x) + \mathcal{V}' 2\varphi_{\pi\ i}(x), \qquad (4.81)
\end{aligned}
$$

ahol $\mathcal{V}(\rho) = \lambda\rho^2/4!$, $\rho = \varphi_\sigma^2 + \vec{\varphi}_\pi^2$.

- A mezonterek vákuumállapoti várható értékét a

$$
\left. \frac{\delta S}{\delta \varphi_\sigma(x)} \right|_{\varphi_\sigma = v_0, \varphi_{\pi\ i} = v_i} = 0, \qquad (4.82)
$$

$$
\left. \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\pi\ i}(x)} \right|_{\varphi_\sigma = v_0, \varphi_{\pi\ i} = v_i} = 0 \qquad (4.83)
$$

egyenletek megoldása adja. Ez a már ismert v_0–t és $v_i = 0$–t eredményezi.

- A klasszikus tereket mint a külső források funkcionálját számoljuk ki λ^2 rendű tagokkal bezárólag. Célszerű a külső forrástól való függést a λ^0 rendű

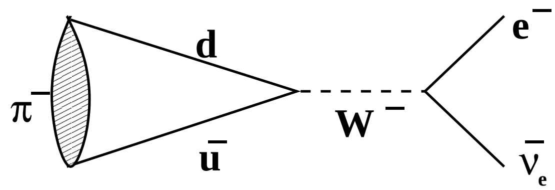
$$
\begin{aligned}
\varphi_\sigma^{(0)}(x) &= \Delta_x \left(J_\sigma(x) + c \right), \qquad (4.84) \\
\varphi_{\pi\ i}^{(0)}(x) &= \Delta_x \left(J_{\pi\ i}(x) \right) \qquad (4.85)
\end{aligned}
$$

funkcionálokkal kifejezni, ahol $\Delta_x = (-\partial_x^2 + m^2)^{-1}$.

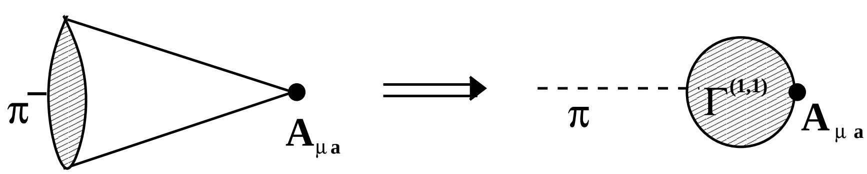
- Az összefüggő $\pi\pi\pi\pi$ 4-pont Green-függvényt négyszeri, $J_{\pi\ i}(x_1)$, $J_{\pi\ j}(x_2)$, $J_{\pi\ k}(x_3)$ és $J_{\pi\ l}(x_4)$ szerinti funkcionálderiválással kapjuk a W generáló funkcionálból végül zérussá téve a külső forrásokat. Ezeket a deriválásokat most közvetett deriválásokként végezhetjük el, W–t a nulladrendű klasszikus terek szerint deriválva majd azokat a külső források szerint.

- Végül Fourier-transzformációt hajtunk végre és amputálunk, vagyis elhagyjuk a külső lábaknak megfelelő szabad pionpropagátorokat.
- A kapott eredményben kifejezzük a paramétereket m_σ^2 és m_π^2 segítségével és felhasználjuk, hogy $m_\sigma^2 \ll m_\pi^2$.

A modell paramétereinek a rögzítésénél inkább egy másik utat szoktak járni, mint amit fentebb leírtunk. Ennek a lényege, hogy az axiálvektoráramot azonosítják a gyengekölcsönhatás axiálvektoráramával. Ha ezt tesszük, akkor az $A_{\mu a}(x)$ operátor-betétrésszel rendelkező, pionokra vonatkozó 1-pont függvény a pion gyengebomlásának átmeneti amplitúdóját adja meg. Pl. a $\pi^- \to e^-\bar\nu_e$ bomlást, amelyet a kvarkok nyelvén a Standard Modellben az alábbi Feynman-gráf ír le:



A lineáris σ-modellben ezt az alábbi Feynman-gráffal helyettesíthetjük, kihasználva, hogy a pion az elektron-antineutrinó axiálvektoráramával hat tulajdonképpen kölcsön, amikor σ-modellben a nagy tömegű ($\sim$ 70 GeV) W^- vektorbozon által közvetített nagyon rövidtávú kölcsönhatást lokális kölcsönhatásként kezeljük:



Itt felhasználtuk, hogy a W^- vektorbozon Utóbbi a pion tekintetében 1PI, axiálvektoráram betétrésszel rendelkező 1-pont vertexfüggvény: $\tilde\Gamma^{(1,1)}_{A_{\mu a}\; i}(0;p)$, ahol p_μ a pion négyesimpulzusa, a betétrész négyesimpulzusa pedig zérus. Ez a pion gyengebomlásának f_π (= 93 MeV) bomlási állandójával közvetlen kapcsolatban áll. A következő fejezetben általánosan megmutatjuk a Noether-tétel kvantumtérelméleti általánosítása alapján, hogy

$$v \;=\; f_\pi. \tag{4.86}$$

4.4. Ward–Takahashi-azonosságok a lineáris σ–modellben

Kezdjük azzal a megállapítással, hogy az $SU(2)\otimes SU(2)$ algebra izomorf az $O(4)$ algebrával. Ez azt jelenti, hogy a lineáris σ-modellhez tartozó hatás szimmetrikus része $O(4)$ szimmetriával rendelkezik, ha a mezontereket $\phi_{\bar i} = (\sigma, \vec\pi)$ ($\bar i = 0,1,2,3$) 4-elemű oszlopvektorba rendezzük. Ebben az ábrázolásban az $O(4)$ csoport generátorai a $T^{\bar{k}\bar{l}}$ ($\bar{k}\bar{l} = 01, 02, 03, 12, 13, 23$) mátrixok:

$$\left(T^{\bar{k}\bar{l}}\right)_{\bar{i}\bar{j}} \;=\; \delta^{\bar{k}}_{\bar{i}}\delta^{\bar{l}}_{\bar{j}} - \delta^{\bar{l}}_{\bar{i}}\delta^{\bar{k}}_{\bar{j}}. \tag{4.87}$$

Ezek közül T^{12}, T^{13} és T^{23} az izospinforgatások, amelyek az $SU_V(2)$ diagonális alcsoport generátorai, és a T^{01}, T^{02} és T^{03} generátorok a valódi királis transzformációk generátorai. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a vektoráram és az axiálvektoráram kifejezéseiben a korábbi τ^a generátorok helyett a $T^{\bar{k}\bar{l}}$ generátorok szerepelnek, azaz ebben az ábrázolásban ezek az áramok is $O(4)$ mátrixok.

A Ward–Takahashi-azonosságok alapján beláthatunk néhány olyan összefüggést a lineáris σ-modellben, amelyek a perturbációszámítás tetszőleges rendjében érvényesek.

1. Általánosan bizonyítjuk, hogy a σ tér vákuumállapoti v várható értéke azonos a pion f_π gyengebomlási állandójával,

$$v \;=\; f_\pi, \tag{4.88}$$

ha a modellbeli axiálvektoráramot a gyengekölcsönhatás axiálvektoráramával azonosítjuk, ahogy erről szó volt az előző fejezetben.

- Először megmutatjuk az explicit szimmetriasértés mértéke és a pion gyengebomlásának bomlásállandója közötti kapcsolatot:

$$m_\pi^2 f_\pi \;=\; c. \tag{4.89}$$

Induljunk ki a Noether-tétel kvantumelméleti általánosítását jelentő alábbi összefüggésből, amely az axiálvektoráram-betétréssel rendelkező 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljára, ill. annak divergenciájára vonatkozik:

$$\partial^x_\mu \Gamma_{A^{0k}_\mu(x)}[\varphi_{\bar{i}}] \;=\; c\varphi_k(x) - \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_{\bar{i}}} T^{0k}_{\bar{i}\bar{j}}\varphi_{\bar{j}}. \tag{4.90}$$

(A felülvonás nélküli latin indexek a három izospin komponenst jelentik.) Az egyenlet jobb oldalán álló első tag eltérést jelent a korábban a szimmetrikus elméletben megállapított összefüggéshez képest. Ez a tag a korábbi levezetés lépései során onnan adódik, hogy most $\delta S \neq 0$, mint a szimmetrikus elméletben volt, hanem:

$$\delta S \;=\; -c\delta\sigma = -c\beta^k\pi^k. \tag{4.91}$$

Deriváljuk a (4.90) egyenletnek mindkét oldalát $\varphi_i(y)$ (a piontér valamelyik komponense) szerint, majd vegyük az eredményt a $\varphi_{\bar{i}} = (v, \vec{0})$ helyen:

$$\begin{aligned}
\partial^x_\mu \left(\Gamma^{(1;1)}_{A^{0k}_\mu(x)}(y)\right)_i &= c\delta_{ik}\delta(x-y) - \Gamma^{(2)}_{i\bar{i}}(x,y)T^{0k}_{\bar{i}\bar{j}}\varphi_{\bar{j}} \\
&= c\delta_{ik}\delta(x-y) - \Gamma^{(2)}_{i0}(x,y)\delta^k_0 v + \Gamma^{(2)}_{ik}(x,y)v \\
&= c\delta_{ik}\delta(x-y) + \Gamma^{(2)}_{ik}(x,y)v.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Képezzük az egyenlőség mindkét oldalának a Fourier-transzformáltját:

$$\mathrm{i}q_\mu\left(\tilde{\Gamma}_A^{(1;1)}(q;-q)\right)^k_{\mu i} \quad = \quad c\delta_{ik}+\tilde{\Gamma}^{(2)}_{ik}(q)v. \tag{4.93}$$

Tekintve, hogy a jobb oldalon a 4-dimenziós euklideszi koordinátatér forgatásaival szemben skalárként viselkedő mennyiség áll, a bal oldalnak is ilyennek kell lenni. Ehhez az axiálvektoráram-betétrésszel rendelkező pion 1–pont függvénynek négyesvektornak kell lenni. Ezért arányosnak kell lennie az impulzusfüggést jelentő egyetlen, q_μ négyesimpulzussal:

$$\left(\tilde{\Gamma}_A^{(1;1)}(q;-q)\right)^k_{\mu i} \quad = \quad q_\mu G_{ik}. \tag{4.94}$$

Vegyük most az egész egyenletet a tömeghéjon: $q_\mu q_\mu=-m_\pi^2$. Ekkor a jobb oldalon a piontér propagátorának inverze áll, ami a tömeghéjon eltűnik. Ugyanakkor a jobboldal első tagja az izospinindexek tekintetében diagonális. Ezért a baloldal is köteles ezen indexek tekintetében diagonális lenni, $G_{ik}=G\delta_{ik}$. A jobboldal valós, ezért a bal oldalon álló átmeneti amplitúdó valós része zérus kell legyen. A mi számunkra a képzetes rész az érdekes. A bomlást leíró átmeneti amplitúdó képzetes része ugyanis éppen a bomlásállandó, $\mathrm{Im}G=-f_\pi$. Mindezeket összefoglalva kapjuk, hogy

$$-\mathrm{i}m_\pi^2\mathrm{i}f_\pi\delta_{ik} \quad = \quad c\delta_{ik}, \tag{4.95}$$

ahonnan megkapjuk a keresett összefüggést.

- A következő lépésben megmutatjuk, hogy

$$c \quad = \quad m_\pi^2 v. \tag{4.96}$$

Végezzünk ω^k paraméterekkel jellemzett infinitezimális valódi királis transzformációt:

$$\delta\sigma=\vec{\omega}\vec{\pi}, \qquad \delta\vec{\pi}=-\vec{\omega}\sigma \tag{4.97}$$

A generáló funkcionál a külső forrásokhoz csatoló tagok és a szimmetriasértő tag miatt formálisan megváltozik:

$$\delta Z \quad = \quad \int\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\vec{\pi}\int d^4x(c\delta\sigma+J_0\delta\sigma+J_i\delta\pi_i)e^{-S+\int dx(J_0\sigma+\vec{J}\vec{\pi})}=0, \tag{4.98}$$

Innen az alábbi Ward–Takahashi-azonosságot kapjuk:

$$0 \quad = \quad \int d^4x\left[(c+J_0)\frac{\delta}{\delta\vec{J}}-\vec{J}\frac{\delta}{\delta J_0}\right]Z. \tag{4.99}$$

Az azonosság ugyanebben az alakban érvényes, ha a Z–t W–re cseréljük. Deriváljuk az utóbbi azonosság mindkét oldalát $J_j(y)$ szerint:

$$0 \quad = \quad \int d^4x\left[(c+J_0(x))\frac{\delta^2}{\delta J_i(x)J_j(y)}-\delta_{ij}\delta(x-y)\frac{\delta}{\delta J_0(x)}-J_i(x)\frac{\delta^2}{\delta J_0(x)\delta J_j(y)}\right]W. \tag{4.100}$$

Vegyük ezt az egyenlőséget eltűnő külső források esetén, majd Fourier-transzformáljuk:

$$c\tilde{G}_c^{\pi\pi}(0)\delta_{ij} \quad = \quad v\delta_{ij}, \tag{4.101}$$

ahol a bal oldalon a pionpropagátor áll eltűnő impulzusnál. Innen

$$cm_\pi^{-2} \quad = \quad v, \tag{4.102}$$

ami éppen a keresett egyenlőség.

2. Egészítsük most ki a modellt a fermionszektorral. Ekkor megkapjuk a nukleon tömegének és a modell paramétereinek a kapcsolatát. Ez az alábbi:

$$m_N \quad = \quad v g_{\pi NN}, \tag{4.103}$$

ahol $g_{\pi NN}$ a pion-nukleon szórás csatolási állandója. Figyelembe véve, hogy a σ tér vákuumállapoti várható értéke a pion gyengebomlási állandójával azonos, ez egy kísérletileg ellenőrizhető összefüggés, $m_N = f_\pi g_{\pi NN}$, az ún. Goldberger–Treiman-reláció. A tapasztalat szerint ez kb. 70 százalékos pontossággal teljesül. Fagráf-közelítésben $g_{\pi NN} = g$.

Valódi infinitezimális királis transzformáció során a nukleontér megváltozása:

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5 \vec{\tau}\vec{\omega}\psi, & (4.104)\\ \delta\bar{\psi} &= \bar{\psi}\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5\vec{\tau}\vec{\omega}. & (4.105)\end{aligned}$$

Ennek alapján az összefüggő Green-függvények generáló funkcionáljára felírhatjuk az alábbi Ward–Takahashi-azonosságot:

$$\begin{aligned}\int d^4x \Big\{ \frac{\mathrm{i}}{2}\Big[\bar{\eta}_{\alpha i}(\gamma_5)_{\alpha\beta}\vec{\tau}_{ij}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_{\beta j}} - \eta_{\alpha i}(\gamma_5)_{\alpha\beta}\vec{\tau}_{ij}\frac{\delta}{\delta\eta_{\beta j}}\Big] - \\ - \vec{J}\frac{\delta}{\delta J_0} + (J_0 + c)\frac{\delta}{\delta\vec{J}}\Big\} W = 0. \end{aligned} \tag{4.106}$$

Végezzük el ezen a $\delta/\delta\eta_{\gamma l}(y)$ deriválást, majd a $\delta/\delta\bar{\eta}_{\delta n}(z)$ deriválást, és vegyük az eredményt eltűnő külső források esetén:

$$\begin{aligned}&\int dx \Big\{ -\frac{\mathrm{i}}{2}\Big[(\gamma_5)_{\delta\beta}\tau^k_{nj}\delta(x-z)G^{(NN)}_{c\ \gamma l,\beta j}(z-y) + (\gamma_5)^{\gamma\beta}\tau^k_{lj}G^{(NN)}_{c\ \beta j,\delta n}(y-z)\Big] + \\ &+c\int dx G^{(\pi NN)}_{c\ k,\gamma l,\delta n}(x;y,z)\Big\} = 0. \end{aligned} \tag{4.107}$$

Hajtsunk végre Fourier-transzformációt:

$$-\frac{\mathrm{i}}{2}\Big[(\gamma_5)_{\delta\beta}\tau^k_{nj}\tilde{G}^{(NN)}_{c\ \gamma l,\beta j}(p) + (\gamma_5)_{\gamma\beta}\tau^k_{lj}\tilde{G}^{(NN)}_{c\ \beta j,\delta n}(-p)\Big] + c\tilde{G}^{(\pi NN)}_{c\ k,\gamma l,\delta n}(0;p,-p) = 0. \tag{4.108}$$

Felhasználva az összefüggő Green-függvények, az amputált Green-függvények és az 1PI vertex függvények közötti kapcsolatokat, írhatjuk:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{i}}{2}\Big[(\gamma_5)_{\delta\beta}\tau^k_{nj}\tilde{G}^{(NN)-1}_{c\ \gamma l,\beta j}(p) + (\gamma_5)_{\gamma\beta}\tau^k_{lj}\tilde{G}^{(NN)-1}_{c\ \beta j,\delta n}(-p)\Big] = \\ &= \quad c\tilde{\Gamma}^{(\pi NN)}_{c\ k,\gamma l,\delta n}(0;p,-p)m_\pi^{-2}(p^2+m_N^2)^{-1}.\end{aligned} \tag{4.109}$$

Vegyük az egyenletet $p_\mu = 0$ mellett:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{i}}{2}\left[(\gamma_5)_{\delta\beta}\tau^k_{nj}\delta_{\gamma\beta}\delta_{lj} + (\gamma_5)_{\gamma\beta}\tau^k_{lj}\delta_{\beta\delta}\delta_{jn}\right]m_N^{-1} = \\ &= \quad c\tilde{\Gamma}^{(\pi NN)}_{c\ k,\gamma l,\delta n}(0;0,0)m_\pi^{-2}m_N^{-2}.\end{aligned} \tag{4.110}$$

Ez a Goldberger–Treiman-reláció általános alakja. Tekintve, hogy az egyenlet két oldalának a bispinorindexekben és a királis indexekben ugyanúgy kell transzformálódnia, a bal oldalon álló 1PI πNN vertex indexszerkezete meghatározódik. A benne szereplő konstans tényező, $\mathrm{i}g_{\pi NN}$ a pion–nukleon kölcsönhatás csatolási állandója, és az alábbi relációt elégíti ki:

$$m_N \;=\; cg_{\pi NN}m_\pi^{-2} = g_{\pi NN}v = g_{\pi NN}f_\pi. \tag{4.111}$$

Ezt akartuk bizonyítani.

A lineáris σ–modell – mint láttuk – szép példája annak is, hogy milyen prediktív erejük van a Ward–Takahashi-azonosságoknak.

4.5. Összefoglalás

Globális folytonos szimmetria spontán sérülésének fontos példáját képezik az erős-kölcsönhatás olyan effektív elméletei, amelyek globális királis szimmetriát tételeznek fel. A vákuumállapotban ez a szimmetria spontán sérül és csak a diagonális alcsoportja, az izospin szimmetria marad sértetlen. A valódi királis szimmetra spontán sérülése következtében megjelenő Goldstone-bozonokat az $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ modellben a pionokkal azonosíthatjuk. A pion kísérletileg megfigyelt kicsiny nyugalmi tömegét azzal magyarázzuk, hogy a királis szimmetria explicit módon is sérül. Az explicit szimmetriasértés mértéke megválasztható úgy, hogy az effektív elméletből kiadódjon az axiálvektoráram megfigyelt részleges megmaradása.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönetemet fejezem ki Badankó Péternek, Cseh Józsefnek, Iványi Bélának, Iványi Tibornak, Kun Ferencnek, Szabó Zsoltnak, ifj. Szőr Zoltánnak és Zákány Loránd Andrásnak a kézirat gondos áttanulmányozásáért és kritikai észrevételeikért, valamint Kertészné Molnár Zsuzsának körültekintő szövegszerkesztői munkájáért.

IRODALOM

1. Trócsányi Zoltán, Kvantumtérelmélet (KLTE, Debrecen, 1991).
2. Jean Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena (Clarendon Press, Oxford, 1990).
3. Stefan Pokorski, Gauge Field Theories (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
4. Pierre Ramond, Field Theory. A Modern Primer (The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., London, 1981).
5. Claude Itzykson, Jean-Bernard Zuber, Quantum Field Theory (McGraw-Hill Inc., New York, 1980).

FÜGGELÉK

A. Az összefüggő Green-függvények

A Green-függvények $Z[J]$ generáló funkcionálja mellett bevezetjük az ún. összefüggő Green-függvények $W[J]$ generáló funkcionálját. Megmutatjuk, hogy a $W[J]$ generáló funkcionál a rendszer térfogatával arányos a termodinamikai extenzív mennyiségekhez hasonlóan, ha a térelmélet lokális (és konstans külső forrást tételezünk fel).

Emlékeztetőül idézzük fel, hogy az n-pont Green-függvények generáló funkcionálja:

$$Z[J] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]+\int d^DxJ\phi}, \tag{A.1}$$

ahol $S[\phi]$ a hatásfunkcionál, $\phi(x)$ a vizsgált tér és $J(x)$ a hozzá csatolt külső forrás. Az $\mathcal{N}$ normálási tényezőt a

$$Z[0] = 1 \tag{A.2}$$

normálási feltételből szokás meghatározni. Az n-pont Green-függvény definíció szerint:

$$G^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \langle 0|T(\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n))|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi\phi(x_1)\dots\phi(x_n)e^{-S[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}}, \tag{A.3}$$

ahol $|0\rangle$ jelöli a vákuumállapotot. Az n-pont Green-függvény a generáló funkcionálból funkcionálderiválással nyerhető:

$$G^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)}\right|_{J=0}. \tag{A.4}$$

Mint azt az [1] jegyzetből megtanulhattuk, a fizikai folyamatok szórási amplitúdói kifejezhetők a Green-függvények segítségével. A 2-pont Green-függvény pólusa definiálja impulzusreprezentációban a megfelelő kvantumtér egyrészecskés gerjesztéseinek nyugalmi tömegét. Mindez mutatja, hogy a Green-függvények kulcsfontosságúak a kvantumtérelméletben.

Azt is láttuk [1], hogy a pályaintegrálos kvantálásnak nagy előnye, hogy a perturbációszámítás során könnyen megállapíthatjuk azokat a szabályokat, amelyek segítségével Feynman-diagramokat feleltethetünk meg a Green-függvények különböző rendű járulékait jelentő képleteknek. A jelen jegyzetben ezért mindig úgy veszem, hogy a Feynman-szabályok megállapításán túl vagyunk, azaz tudjuk, hogyan kell matematikai képleteknek diagramokat megfeleltetni, és viszont.

Vizsgáljuk most meg közelebbről az n-pont Green-függvényhez járulékot adó Feynman-diagramokat:

$$G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum \Big(\text{az összes, } n \text{ külső lábbal rendelkező Feynman-diagram} \Big). \tag{A.5}$$

Ezek a diagramok részben összefüggők, részben szétesők. Összefüggőnek nevezünk minden olyan Feynman-diagramot, amelyben bármely külső lábról elindulva folytonos vonal mentén juthatunk el bármely másik külső lábra. A nem összefüggő diagramokat széteső diagramoknak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a széteső diagramok összefüggő diagramok együttesei, képletük pedig az egyes összefüggő részek képleteinek szorzata. Vezessük ezért be az összefüggő n-pont diagramok összegére a $W^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ jelölést:

$$W^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum \Big(\text{az összes, } n \text{ külső lábbal rendelkező összefüggő diagram} \Big). \tag{A.6}$$

Mint említettük fentebb, minden széteső diagram összefüggő diagramok szorzata: általában σ_1 darab összefüggő 1-pont diagram ($W^{(1)}$), σ_2 darab összefüggő 2-pont diagram ($W^{(2)}$), stb., és σ_n darab összefüggő n-pont diagram ($W^{(n)}$) szorzata. Ezért az n-pont Green-függvény az alábbi összeg alakjában írható fel az összefüggő $W^{(n)}$ Green-függvények segítségével:

$$G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\{\sigma_k\}} \sum_P P[\underbrace{W^{(1)}(\star) \cdots W^{(1)}(\star)}_{\sigma_1}][\underbrace{W^{(2)}(\star) \cdots W^{(2)}(\star)}_{\sigma_2}] \cdots \tag{A.7}$$

ahol az első összeg az n egész szám minden olyan partíciójára történik, amelyre

$$n = \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n. \tag{A.8}$$

Az összefüggő Green-függvények argumentumában a $\star$ jel a külső lábaknak megfelelő koordináták valamilyen rögzített sorrendjét jelenti, P pedig ezeknek a koordinátáknak a megkülönböztethető permutációit. Utóbbiak száma

$$\frac{n!}{(\sigma_1! \cdots \sigma_n!)(1!)^{\sigma_1}(2!)^{\sigma_2} \cdots (n!)^{\sigma_n}}, \tag{A.9}$$

ahol a nevezőben a $\sigma_k!$ tényezők azt veszik figyelembe, hogy nem kapunk más n-pont függvényt, ha az összefüggő k-pont függvények sorrendjét permutáljuk, a nevező $(k!)^{\sigma_k}$ tényezői pedig azt veszik figyelembe, hogy egy-egy összefüggő k-pont függvény argumentumában a koordináták permutálása szintén nem eredményez más diagramot. Amikor a $Z[J]$ generáló funkcionál Taylor-kifejtésében elvégezzük az $x_1,\ldots,x_n$ koordináták szerinti integrálokat, akkor minden ilyem permutáció azonos eredményt ad. Ezért a Green-függvények generáló funkcionálja az alábbi alakba is átírható:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_n \frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)J(x_1)\cdots J(x_n) \\ &= \sum_n \sum_{\{\sigma_k\}} \frac{(\int dx W^{(1)}(x)J(x))^{\sigma_1}}{\sigma_1!(1!)^{\sigma_1}} \frac{(\int dxdy W^{(2)}(x,y)J(x)J(y))^{\sigma_2}}{\sigma_2!(2!)^{\sigma_2}}\cdots \end{aligned} \tag{A.10}$$

Az kettős összegzés minden n-re és minden, az adott n-hez tartozó $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=\{\sigma_k\}$ partícióra egyenértékű a σ_k-k minden nem negatív egészre történő összegzésével. Ezt figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Z[J] &= \left[\sum_{\sigma_1}\frac{1}{\sigma_1!}\Big(\frac{1}{1!}\int dx W^{(1)}(x)J(x)\Big)^{\sigma_1}\right]\left[\sum_{\sigma_1}\frac{1}{\sigma_2!}\Big(\frac{1}{2!}\int dxdy W^{(2)}(x,y)J(x)J(y)\Big)^{\sigma_2}\right]\cdots \\ &= \exp\Big(\frac{1}{1!}\int dx W^{(1)}(x)J(x)\Big)\exp\Big(\frac{1}{2!}\int dxdy W^{(2)}(x,y)J(x)J(y)\Big)\cdots \\ &= \exp\Big(\sum_n \frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n W^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)J(x_1)\cdots J(x_n)\Big) \\ &= e^{W[J]}. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Innen tehát azt olvashatjuk ki, hogy az összefüggő n-pont Green-függvények generáló funkcionálja a

$$W[J] = \ln Z[J] \tag{A.12}$$

funkcionál.

Hasonlóan a termodinamikai szabadenergiához, térben és időben állandó külső forrás esetén a $W[J]$ generáló funkcionál extenzív.

Tegyük fel, hogy a külső forrás $J(x)=J_1(x)+J_2(x)$ alakú, ahol $J_1(x)$ és $J_2(x)$ diszjunkt tartójú források, azaz $J_1(x)=0$, ha $x\notin\Omega_1$ és $J_2(x)=0$, ha $x\notin\Omega_2$, ahol $\Omega_1\cap\Omega_2=0$, továbbá mind az Ω_1, mind az Ω_2 tartomány térfogata makroszkopikus, azaz minden határon túl nő. Mivel a hatás lokális, ezért a $Z[J]$ funkcionál integrandusában a kitevőt az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} S[\phi]-\int d^DxJ\phi &= \int_{x\in\Omega_1} d^Dx\,[\mathcal{L}(\phi)-J_1\phi] \\ &+\int_{x\in\Omega_2} d^Dx\,[\mathcal{L}(\phi)-J_2\phi] \\ &+\int_{x\notin\Omega_1\cup\Omega_2} d^Dx\mathcal{L}(\phi) \\ &+ \quad \text{felületi} \quad \text{tagok.} \end{aligned} \tag{A.13}$$

Vegyük észre, hogy a $Z[J]$ funkcionál faktorizálódik,

$$\begin{aligned} Z[J] &= \frac{\prod_x \int d\phi(x) e^{-S+\int dx J\phi}}{\prod_x \int d\phi(x) e^{-S}} \\ &= \frac{\prod_{x\in\Omega_1} \int d\phi(x) e^{-S+\int dx J_1\phi}}{\prod_{x\in\Omega_1} \int d\phi(x) e^{-S}} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\prod_{x\in\Omega_2} \int d\phi(x) e^{-S+\int dx J_2\phi}}{\prod_{x\in\Omega_2} \int d\phi(x) e^{-S}} \cdot \\ &\quad \cdot Z_{12}[J_1, J_2] \\ &= Z_1[J_1] Z_2[J_2] Z_{12}[J_1, J_2], \end{aligned} \tag{A.14}$$

ahol $Z_{12}[J_1, J_2]$ teljesen a felületi tagoktól származik. Ha azonban az Ω_1 és az Ω_2 tartományok térfogatával végtelenhez tartunk, akkor a felületi tagok csak a felülettel arányosan nőnek, míg a Z_1–et és Z_2–t meghatározó tagok a térfogattal arányosan. Ezért a felületi tagok és Z_{12} elhanyagolhatóak. Ebből következik, hogy:

$$W[J_1 + J_2] = W_1[J_1] + W_2[J_2]. \tag{A.15}$$

Ha most $J_1|_{\Omega_1} = J_2|_{\Omega_2} = j$ állandó és $\Omega_1 \cup \Omega_2$ a teljes téridő, akkor

$$W[j] = W_1[j] + W_2[j]. \tag{A.16}$$

Innen látjuk, hogy $W[j]$ konstans külső forrás esetén extenzív mennyiség.

Ha nem akarunk arra utalni, hogy az összefüggő n-pont Green-függvények a $W[J]$ generáló funkcionálból funkcionál-deriválással származtathatók, akkor $G_c^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = W^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ módon fogjuk jelölni őket, ahol a c alsó index az angol ,,connected" (összefüggő) szócskára utal.

B. Valódi vertexek

Ebben a fejezetben az ún. valódi vertexek generáló funkcionálját definiáljuk, és megmutatjuk, hogy az összefüggő Green-függvények valódi vertexfüggvényekből és a teljes propagátorból (azaz az összefüggő 2-pont Green-függvényből konstruálhatók meg. A valódi vertexfüggvények perturbatív járulékai pedig egy-részecske irreducibilis (1PI) diagramoknak felelnek meg. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a kvantumtérelméletben megjelenő ultraibolya divergenciák az 1PI diagramokban szereplő hurokintegráloktól származnak. Ezért a valósi vertexfüggvények központi szerepet játszanak a kvantumtérelméletben megjelenő divergenciák eredetének megértése és azok eltávolításának módja szempontjából.

A valódi vertexek generáló funkcionálját az

$$\Gamma[\varphi] + W[J] - \int dx J\varphi \;\; = \;\; 0 \tag{B.1}$$

összefüggéssel a $W[J]$ funkcionál Legendre-transzformáltjaként definiáljuk, ahol

$$\varphi(x) \;\; = \;\; \frac{\delta W}{\delta J(x)}. \tag{B.2}$$

Megjegyzem, hogy az így bevezetett $\varphi(x)$ a $J(x)$ külső forrás funkcionálja, és nem azonos a $\phi(x)$ térváltozóval. Jelentését tekintve nem más, mint a ϕ térváltozó alapállapoti várható értéke J külső forrás jelenlétében:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi\ \phi(x) e^{-S[\phi]+\int dx J(x)\phi(x)}}{\int \mathcal{D} e^{-S[\phi]+\int dx J(x)\phi(x)}} \\ &= {}_J\langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle_J, \end{aligned} \tag{B.3}$$

ahol $|0\rangle_J$ jelöli a $J(x)$ külső forrás jelenlétében kialakuló alapállapotot. Ha $J=0$, akkor $\varphi(x) = \langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle \equiv G_c^{(1)}(x)$ a téroperátor vákuumállapoti várható értéke. Ha a vákuumállapotban nem sérül a téridőbeli eltolási szimmetria, akkor $\langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle$=áll. Ha semmilyen más szimmetriát sem sért az alapállapot, akkor ennek az állandónak zérus az értéke, $G_c^{(1)}(x) = 0$.

A $\Gamma[\varphi]$ funkcionál funkcionálderiváltjaként megkapjuk a külső forrást:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x)} \;\; = \;\; J(x). \tag{B.4}$$

Képezzük a $\Gamma[\varphi]$ funkcionált definiáló egyenlet mindkét oldalának első funkcionálderiváltját:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x)} - J(x) + \int dy \frac{\delta J(y)}{\delta \varphi(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} \left[W[J] - \int dx J\varphi \right] \;\; = \;\; 0. \tag{B.5}$$

Itt a bal oldalon az utolsó tagban az integrandus φ definíciója következtében zérus, s így a bizonyítani kívánt összefüggést kapjuk.

Egy további fontos tulajdonság, hogy amennyiben az összefüggő Green-függvények generáló funkcionálja valamilyen α paramétertől is függ (α térváltozó is lehet), akkor $\Gamma[\varphi]$ is függ ettől a paramétertől és érvényes a

$$\left.\frac{\partial\Gamma}{\partial\alpha}\right|_{\varphi} + \left.\frac{\partial W}{\partial\alpha}\right|_{J} \;=\; 0 \tag{B.6}$$

összefüggés.

Deriváljuk a $\Gamma[\varphi]$ funkcionált definiáló egyenlet mindkét oldalát α szerint:

$$\left.\frac{\partial\Gamma}{\partial\alpha}\right|_{\varphi} + \left.\frac{\partial W}{\partial\alpha}\right|_{J} + \int dy \left.\frac{\partial J(y)}{\partial\alpha}\right|_{\varphi} \frac{\delta}{\delta J(y)}\left[W - \int dx J\varphi\right] = 0. \tag{B.7}$$

Az utolsó tag integrandusa φ definíciója következtében zérus, s így a bizonyítani kívánt összefüggést kapjuk.

Vezessük be a

$$\chi(x) \;=\; \varphi(x) - G_c^{(1)}(x) = \varphi(x) - \left.\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\right|_{J=0} \tag{B.8}$$

változót. A $\Gamma[\varphi]$ Taylor-sorában,

$$\Gamma[\varphi] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\Gamma^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)\chi(x_1)\cdots\chi(x_n) \tag{B.9}$$

szereplő $\Gamma^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)$ függvényeket valódi n-pont vertexeknek nevezzük. Megmutatjuk, hogy a valódi vertexek kifejezhetők az összefüggő 2-pont Green-függvény

$$S(x,y) \;=\; \left[G_c^{(2)}\right]^{-1}(x,y) \tag{B.10}$$

inverzével és az ún. amputált Green-függvényekkel:

$$G_{amp}^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) \;=\; \int\left[\prod_{i=1}^{n} dy_i S(x_i,y_i)\right] G_c^{(n)}(y_1,\ldots,y_n). \tag{B.11}$$

Az első néhány valódi vertex:

$$\Gamma^{(1)}(x) \;=\; 0, \tag{B.12}$$
$$\Gamma^{(2)}(x_1,x_2) \;=\; S(x_1,x_2), \tag{B.13}$$
$$\Gamma^{(3)}(x_1,x_2,x_3) \;=\; -G_{amp}^{(3)}(x_1,x_2,x_3). \tag{B.14}$$

Megjegyezzük, hogy az amputált Green-függvények Feynman-diagramjai a Green-függvényekétől abban különböznek, hogy utóbbiakról le kell vágni (amputálni kell) a külső vonalakat. Ez nyilvánvaló, hiszen az összefüggő 2-pont Green-függvénynek éppen ilyen vonalak felelnek meg. Az inverzeikkel való szorzás egyenértékű a megfelelő külső vonalak levágásával.

Az összefüggő n-pont Green-függvények és a valódi vertexfüggvények kapcsolatát a

$$\int dz \Gamma^{(2)}(x,z) W^{(2)}(z,y) \;=\; \delta(x-y) \tag{B.15}$$

relációból és az annak ismételt deriválásával kapott egyenlőségekből tudjuk talán a legkönnyebben kiolvasni.

Magát az (B.15) azonosságot könnyen beláthatjuk, ha felhasználjuk $\varphi(x)$ és $J(x)$ Legendre-transzformmáció által létesített kapcsolatát:

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &= \frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} = \frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\frac{\delta W}{\delta J(x)} \\ &= \int dz \frac{\delta J(z)}{\delta\varphi(y)} W^{(2)}(z,x) = \Gamma^{(2)}(y,z) W^{(2)}(z,x).\end{aligned} \tag{B.16}$$

A (B.15) azonosságból először is látjuk, hogy a valódi 2-pont vertexfüggvény az összefüggő 2-pont Green-függvénynek, a propagátornak az inverze:

$$\Gamma^{(2)}(x_1,x_2) \;=\; S(x_1,x_2). \tag{B.17}$$

A további azonosságok kiolvasásához vegyük észre, hogy a (B.15) egyenlőség mindkét oldalának a külső forrás szerinti deriválása a

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta J(u)} &= \int dv \frac{\delta\varphi(v)}{\delta J(u)}\frac{\delta}{\delta\varphi(v)} \\ &= \int dv W^{(2)}(u,v)\frac{\delta}{\delta\varphi(v)} = \int dv G_c^{(2)}(u,v)\frac{\delta}{\delta\varphi(v)}\end{aligned} \tag{B.18}$$

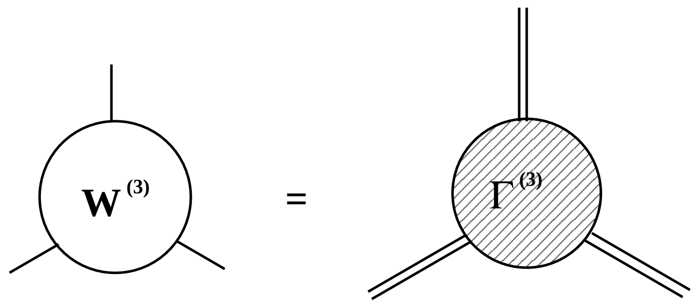
szabály szerint történhet. Deriváljuk az (B.15) azonosság mindkét oldalát pl. $J(u)$ szerint funkcionálisan, akkor

$$0 \;=\; \int dz G_c^{(2)-1}(x,z) W^{(3)}(z,y,u) + \int dv G_c^{(2)}(u,v)\Gamma^{(3)}(v,x,z) G_c^{(2)}(z,y) \tag{B.19}$$

adódik. Erre balról $G_c^{(2)}(w,x)$ mátrixszal rászorozva és a változókat átjelölve, az alábbi azonosságot kapjuk:

$$W^{(3)}(x_1,x_2,x_3) \;=\; -\int dy_1 dy_2 dy_3 G_c^{(2)}(x_1,y_1) G_c^{(2)}(x_2,y_2) G_c^{(2)}(x_3,y_3)\Gamma^{(3)}(y_1,y_2,y_3). \tag{B.20}$$

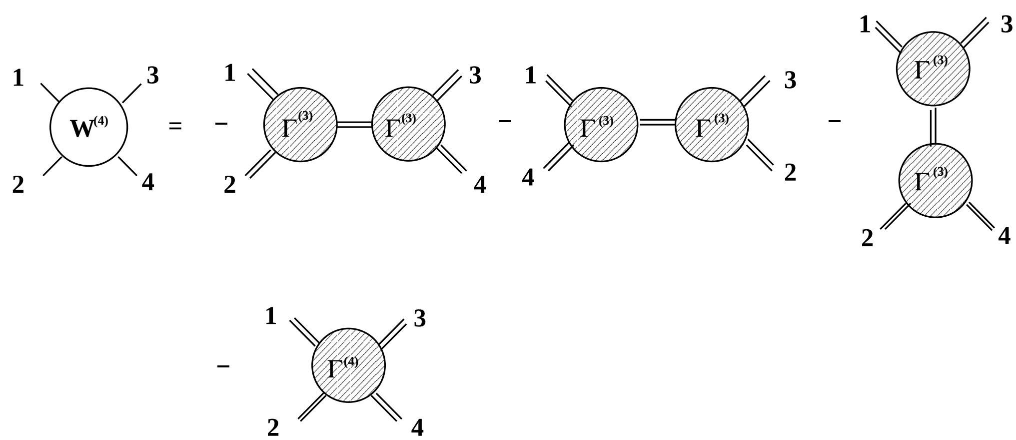
Ez mutatja, hogy az összefüggő $n=3$-pont diagramok a valódi 3-pont vertexfüggvényekből 3 darab külső láb, azaz (teljes) propagátor csatlakoztatásával kaphatók meg, ahol a csatlakozási pont koordinátáira integrálni kell. Ez természetesen azt jelenti, hogy $\Gamma^{(3)}$-at $W^{(3)}$-ból a külső lábak amputálásával kaphatjuk meg:



A kapott azonosság mindkét oldalát ezután újra funkcionál-deriváljuk a külső forrás szerint. A baloldalon megkapjuk $W^{(4)}$-et, a jobboldalon pedig amikor valamelyik $G_c^{(2)}$ tényezőt deriváljuk, akkor egy további propagátor és $\Gamma^{(3)}$ jelenik meg, amikor pedig $\Gamma^{(3)}$-at deriváljuk, akkor szintén egy további propagátor és $\Gamma^{(4)}$ jelenik meg. Így szerkezetét tekintve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} W^{(4)} &= -(G_c^{(2)}G_c^{(2)} : \Gamma^{(3)} \cdot G_c^{(2)} \cdot \Gamma^{(3)} : G_c^{(2)}G_c^{(2)} + \text{ permutációk }) \\ & \quad -G_c^{(2)}G_c^{(2)} : \Gamma^{(4)} : G_c^{(2)}G_c^{(2)}, \end{aligned} \tag{B.21}$$

ahol $\cdot$ és $:$ a megfelelő 1, ill. 2 téridő-koordináta szerinti integrálást jelöli a mátrixszorzás szabályának megfelelően. Diagram-nyelven:



Végül még elmondom a valódi vertexek ill. generáló funkcionáljuk néhány lényeges tulajdonságát.

- A valódi 2-pont vertexből, mivel az az összefüggő 2-pont Green-függvény inverze, le szokás választani a szabad tér $\Delta(x, y)$ propagátorának inverzét:

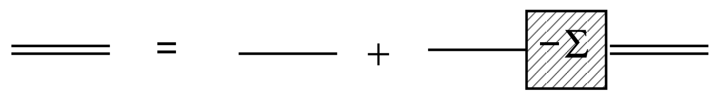
$$\Gamma^{(2)}(x, y) = \Delta^{(-1)}(x, y) + \Sigma(x, y), \tag{B.22}$$

ahol tehát

$$\Delta^{(-1)}(x, y) = (-\partial_\mu^x \partial_\mu^x + m^2)\delta(x - y) \tag{B.23}$$

és $\Sigma(x,y)$ az ún. sajátenergia. Szorozzuk a sajátenergiát definiáló egyenletet balról Δ-val, jobbról $G_c^{(2)}$-vel. Rendezés után a Dyson-egyenletet kapjuk:

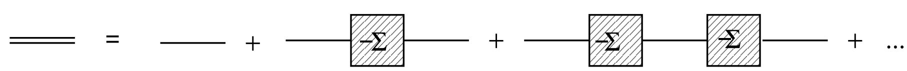
$$G_c^{(2)}(x,y) \;=\; \Delta(x,y) - \int dx_1 dx_2 \Delta(x,x_1)\Sigma(x_1,x_2) G_c^{(2)}(x_2,y), \quad \text{(B.24)}$$



amelynek iterációval adódó megoldása:

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(x,y) \;&=\; \Delta(x,y) - \int dx_1 dx_2 \Delta(x,x_1)\Sigma(x_1,x_2)\Delta(x_2,y) \\ &+\; \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \Delta(x,x_1)\Sigma(x_1,x_2)\Delta(x_2,x_3)\Sigma(x_3,x_4)\Delta(x_4,y) - \ldots \end{aligned} \quad \text{(B.25)}$$

Ugyanez diagramokkal ábrázolva:



- A valódi vertexekhez csak egyrészecske-irreducibilis (1PI) Feynman-diagramok adnak járulékot a perturbációszámításban. 1PI diagramnak azokat a diagramokat nevezzük, amelyek nem esnek szét két független diagramra egyetlen részecskevonal elvágása esetén. A valódi vertexeket szokás 1PI vertexeknek is nevezni és $\Gamma[\varphi]$–t az 1PI vertexek generáló funkcionáljának.

- A továbbiak szempontjából fontos bevezetni a hurok fogalmát. Ha egy összefüggő diagramban egy darab részecskevonalat átvágva a diagram még összefüggő marad, akkor azt mondjuk, hogy a hurkok száma 1-gyel csökkent. Ha az összefüggő diagram egyetlen részecskevonal elvágásával szétesővé válik, akkor azt mondjuk, hogy a diagramban nulla a hurkok száma. A fenti előírás definiálja az összefüggő diagramokban a hurkok L számát. Ha a Feynman-diagramoknak megfelelő képleteket az n-pont függvények Fourier-transzformáltjainak segítségével írjuk fel, akkor a hurkok száma éppen a belső vonalakhoz tartozó független impulzusok száma, amelyekre integrálni kell. (Az impulzus-reprezentációval a D. függelékben foglalkozunk kicsit részletesebben.)

  A hurkok száma kifejezhető a diagramban található belső vonalak I számával és a vertexek V számával:

  $$L \;=\; I - V + 1. \quad \text{(B.26)}$$

  Ez az összefüggés azért áll fenn, mert minden belső vonalhoz tartozik egy impulzus, ez az I darab impulzus azonban nem mind független, mert minden vertexben fennáll a csatlakozó vonalak impulzusaira vonatkozó megmaradási törvény, azaz V darab összefüggés. Utóbbiak rendszere egyenértékű a külsőlábak impulzusaira vonatkozó megmaradási törvénnyel és további $V-1$ darab, belső impulzusokat is tartalmazó összefüggéssel. A független belső impulzusok száma így $I-(V-1)$.

- Az 1PI vertexekhez járulékot adó diagramok $\hbar^L$ rendűek, azaz a bennük levő hurkok száma határozza meg, hogy $\hbar$-ban hanyadrendűek.

Ezt a következőképpen láthatjuk be. Ha explicit módon kiírjuk $\hbar$-t, akkor

$$Z[J] \quad = \quad \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar}S[\phi]+\int dx J(x)\phi(x)} = e^{\frac{1}{\hbar}W[J]}. \tag{B.27}$$

Ezért minden kölcsönhatási vertex képletében megjelenik az S hatás megfelelő kölcsönhatási tagját szorzó $1/\hbar$ tényező az 1PI diagramok képletében. Fennáll továbbá a $\Gamma[\varphi] = -W[J] + \int dx J\varphi = -\hbar \ln Z[J] + \int dx J\varphi$ összefüggés. Ezért minden valódi vertexfüggvény képlete nyer 1 $\hbar$ szorzót az $\ln Z$-t szorzó $\hbar$ tényező miatt. A vertexeket összekötő belső vonalaknak a képletben propagátorok (összefüggő 2-pont függvények) felelnek meg, a propagátorok

$$G_c^{(2)}(1,2) \quad = \quad \left.\frac{\delta^2(\hbar \ln Z)}{\delta J(1)\delta J(2)}\right|_{J=0,c} = \hbar\frac{1}{Z[0]}\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta J(1)\delta J(2)}\right|_{J=0} = \hbar\frac{\int \mathcal{D}\phi\ \phi(1)\phi(2)e^{-\frac{1}{\hbar}S}}{\int \mathcal{D}e^{-\frac{1}{\hbar}S}} \tag{B.28}$$

szintén hordoznak egy $\hbar$ tényezőt, és belőlük a belső vonalak I számával megegyező számú szerepel az 1PI diagramok képleteiben. Így végül az 1PI diagram rendje $\hbar^{-V}\hbar\hbar^I = \hbar^{I-V+1} = \hbar^L$. Ezt akartuk belátni.

C. A hurkok száma szerinti kifejtés

A Green-függvények generáló funkcionálját kifejtjük $\hbar$ hatványai szerint. Ezt a következőképpen tesszük: nyeregponti módszerrel integrálunk, majd a kapott eredményhez korrekciókat számolunk $\hbar$ rendben.

A Green-függvények generáló funkcionálja:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar}S[J]+\int dxJ\phi}. \tag{C.1}$$

Végezzük el az integrálást nyeregponti módszerrel. Az integrandus stacionárius pontját a

$$\frac{1}{\hbar}\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}[\phi_c(x,J)] = J(x) \tag{C.2}$$

egyenlet alapján meghatározott $\phi_c(x,J)$ funkcionál adja meg. A $\hbar$ szerinti ún. kváziklasszikus kifejtés lényegében azon alapul, hogy a pályaintegrál integrandusában, az exponenciális függvény kitevőjét $\phi(x) - \phi_c(x,J)$ hatványai szerint kifejtjük. Látni fogjuk, hogy így a W generáló funkcionálnak, ill. a Γ effektív hatásnak $\hbar$ hatványai szerinti kifejtését kapjuk. Ami természetesen a valódi vertexfüggvények $\hbar$ szerinti, azaz hurok-kifejtését eredményezi. A hurok-kifejtés („loop expansion") legalacsonyabb rendjét, amelyben a hurkok száma zérus ($\hbar^0$ rendű tagok), fa(gráf)-szintű közelítésnek („tree approximation") nevezik, ez egyúttal az effektív hatás kváziklasszikus közelítése is.

A fagráf-szintű közelítésben:

$$Z[J] \approx Z^{[0]}[J] \sim \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\left(S[\phi_c] - \int dx\hbar J\phi_c\right) + \mathcal{O}(1)\right\}. \tag{C.3}$$

Innen az összefüggő Green-függvények generáló funkcionálja nulladik közelítésben:

$$W^{[0]}[J] = \hbar \ln Z^{[0]}[J] = -S[\phi_c] + \int dx\hbar J\phi_c. \tag{C.4}$$

Be lehet látni, hogy ez a közelítés csak az ún. összefüggő fagráfok járulékait veszi figyelembe (ld. alább). Ebben a közelítésben az ún. klasszikus tér:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{\delta W^{[0]}}{\hbar\delta J(x)} \\
&= \phi_c(x,J) + \int dy \frac{\delta\phi_c(y,J)}{\delta\hbar J(x)}\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\left[\int dx\hbar J\phi - S\right]\Big|_{\phi=\phi_c} \\
&= \phi_c(x,J).
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Ezt felhasználva

$$W^{[0]}[J] + S[\varphi] - \int dx\hbar J\varphi = 0 \tag{C.6}$$

írható, amit ha összevetünk az 1PI vertexek generáló funkcionáljának a definíciójával, akkor leolvashatjuk, hogy:

$$\Gamma^{[0]}[\varphi] \;=\; -W^{[0]}[J] + \int dx\hbar J\varphi = S[\varphi]. \tag{C.7}$$

Kváziklasszikus közelítésben az 1PI vertexek generáló funkcionálja éppen a klasszikus hatás.

Következő lépésként határozzuk meg az effektív hatást egy-hurok közelítésben. Ehhez a $Z[J]$ generáló funkcionált definiáló pályaintegrál integrandusában az exponenciális függvény argumentumában meg kell őrizzük a Taylor-kifejtés tagjait a másodrendű tagokkal bezárólag. Mivel a kitevő első funkcionálderiváltja eltűnik a ϕ_c helyen, ezért a másodrendű tag a legalacsonyabb rendű korrekció a kváziklasszikus közelítéshez képest:

$$\begin{aligned} S[\phi] - \int dx\hbar J\phi \;&=\; S[\phi_c] - \int dx\hbar J\phi_c \\ &\quad + \frac{1}{2}\int dx_1 dx_2 \left.\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)}\right|_{\phi=\phi_c} \chi(x_1)\chi(x_2) + \mathcal{O}(\hbar^{3/2}), \end{aligned} \tag{C.8}$$

ahol $\chi(x) = \phi(x) - \phi_c(x;J)$. A pályaintegrál Gauss-integrál alakját ölti, amelyet el tudunk végezni:

$$\begin{aligned} Z[J] \;&\sim\; Z^{[0]}[J]\int \mathcal{D}\chi \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int dx_1 dx_2 \left.\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)}\right|_{\phi=\phi_c} \chi(x_1)\chi(x_2)\right\} \\ &\sim\; \mathcal{N} Z^{[0]}[J]\left[\mathrm{Det}\frac{\delta^2 S}{\delta\phi_c(x_1)\delta\phi_c(x_2)}\right]^{-1/2}, \end{aligned} \tag{C.9}$$

ahol a normálási tényezőt a $Z[J=0]=1$ feltételből kell meghatározni. Az összefüggő Green-függvények generáló funkcionálja ebben a közelítésben:

$$\begin{aligned} W[J] \;&=\; \hbar\ln Z^{[0]}[J] - \frac{1}{2}\hbar\ln\mathrm{Det}\left.\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)}\right|_{\phi=\phi_c} + \mathcal{O}(\hbar^2). \\ &=\; W^{[0]}[J] + \hbar W^{[1]}[J] + \mathcal{O}(\hbar^2), \end{aligned} \tag{C.10}$$

ha elhanyagoljuk a normálásból származó, külső forrástól független additív állandót. Innen az összefüggő Green-függvények generáló funkcionáljának egy-hurok korrekciója:

$$W^{[1]}[J] \;=\; -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left.\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)}\right|_{\phi=\phi_c}. \tag{C.11}$$

Definíció szerint a klasszikus térváltozó, azaz a valódi vertexfüggvények generáló funkcionáljának változója:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \;&=\; \frac{\delta W^{[0]}}{\delta\hbar J(x)} + \hbar\frac{\delta W^{[1]}}{\delta\hbar J(x)} \\ &=\; \phi_c(x,J) + \mathcal{O}(\hbar). \end{aligned} \tag{C.12}$$

Itt azonban nem szükséges meghatároznunk a $\hbar$-rendű korrekciót. Valóban, az effektív hatás az 1-hurok korrekcióval bezárólag:

$$\begin{aligned}
\Gamma[\varphi] &= \Gamma^{[0]}[\varphi+\mathcal{O}(\hbar)]+\hbar\Gamma^{[1]}[\varphi+\mathcal{O}(\hbar)]+\dots \\
&= S[\varphi+\mathcal{O}(\hbar)]-\int dxJ(\varphi+\mathcal{O}(\hbar))+\hbar\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)}\Big|_{\phi=\varphi+\mathcal{O}(\hbar)}+\int dxJ\varphi \\
&= S[\varphi]+\hbar\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)}\Big|_{\phi=\varphi}+\mathcal{O}(\hbar^2). \qquad \text{(C.13)}
\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy $S-\int dxJ\phi$ első deriváltja a $\phi=\phi_c$ helyen eltűnik, ezért ϕ_c-nek φ-vel történő helyettesítése ebben a kifejezésben ugyanúgy csak $\mathcal{O}(\hbar^2)$ nagysárendű változást okoz, mint a $\hbar$-sal szorzott $\mathrm{Tr}\ln$ kifejezésben. Az effektív hatás egy-hurok korrekciója teht́

$$\Gamma^{[1]}[\varphi] = \hbar\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)}\Big|_{\phi=\varphi} \qquad \text{(C.14)}$$

alakban írható fel, ami nem más, mint a klasszikus hatás második funkcionál-derivált mátrixának $\mathrm{Tr}\ln$-ja szorozva $\frac{\hbar}{2}$-vel.

Példaként tanulságos végigkövetni a fentieket az önkölcsönható ϕ skalártér esetén. Ekkor (operátorjelölésben, $\hbar=1$ választással élve):

$$S[\phi] = \int dx\frac{1}{2}\phi K\phi+\int dxV(\phi(x)), \qquad \text{(C.15)}$$

ahol

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4!}\int dx\phi^4, \qquad \text{(C.16)}$$

és K a tér ,,kinetikus energiájának" operátora. A stacionárius pontot a

$$K\phi_c+\frac{d}{d\phi_c}V(\phi_c) = J \qquad \text{(C.17)}$$

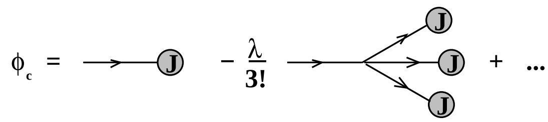
egyenlet határozza meg. Bevezetve a propagátort a szokásos

$$K\Delta = 1 \qquad \text{(C.18)}$$

definícióval, az egyenletet meg tudjuk ϕ_c-re oldani iterációval:

$$\begin{aligned}
\phi_c &= \Delta J-\Delta V'(\phi_c) \\
&= \Delta J-\Delta V'(\Delta J)+\dots \\
&= \Delta J-\Delta\frac{\lambda}{3!}(\Delta J)^3+\dots \qquad \text{(C.19)}
\end{aligned}$$

avagy a diagramok nyelvén:



A klasszikus hatás második deriváltja:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)} \quad \leftrightarrow \quad K + V''. \tag{C.20}$$

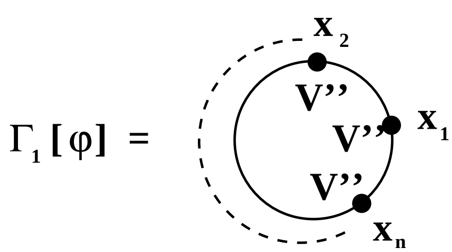
Innen azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \ln \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)} \quad &\leftrightarrow \quad \ln(1 + V''\Delta) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (V''\Delta)^n. \end{aligned} \tag{C.21}$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \Gamma_1[\varphi] &= \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \ln(1 + V''\Delta) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int dx_1 \dots dx_n V''(\varphi(x_1))\Delta(x_1, x_2) \cdot \\ &\quad \cdot V''(\varphi(x_2))\Delta(x_2, x_3) \cdots V''(\varphi(x_n))\Delta(x_n, x_1). \end{aligned} \tag{C.22}$$

A diagramok nyelvén ezt a következőképpen ábrázolhatjuk:



A fenti példán láttuk, hogy a kváziklasszikus közelítés a fagráfokat veszi figyelembe, míg a $\hbar$ rendű korrekció az egy-hurok diagramokat. Már megmutattuk, hogy az 1PI vertexek generáló funkcionáljához $\hbar^L$ rendben pontosan az L darab hurkot tartalmazó diagramok adnak járulékot.

D. Impulzusreprezentáció

A tényleges számolások elvégzése és a kvantumtérelmélet divergenciáinak a vizsgálata általában kényelmesebben kivitelezhető impulzusreprezentációban. A továbbiakban fel fogjuk mindig tételezni, hogy az elmélet, amelyet vizsgálunk, a téridőbeli eltolásokkal szemben invariáns. Ez azt jelenti, hogy az összes Green-függvény Fourier-transzformáltjáról le tudunk választani egy az impulzusmegmaradást kifejező Dirac-deltát.

Az összefüggő Green-függvény Fourier-transzformáltját az alábbi egyenlettel definiáljuk:

$$\int d^D x_1 \dots d^D x_n G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) e^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^n x_j p_j} = (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_{i=1}^n p_i\right) \tilde{G}_c^{(n)}(p_1, \dots, p_n). \tag{D.1}$$

Az 1PI vertexek Fourier-transzformáltjának definíciója:

$$\int d^D x_1 \dots d^D x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) e^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^n x_j p_j} = (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_{i=1}^n p_i\right) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n). \tag{D.2}$$

Amennyiben a klasszikus $\varphi(x)$ tér Fourier-transzformáltját,

$$\varphi(x) = \int d^D p \tilde{\varphi}(p) e^{\mathrm{i}px} \tag{D.3}$$

definícióval bevezetjük, akkor az 1PI vertexek generáló funkcionálja a következőképpen fejezhető ki:

$$\begin{aligned}\Gamma[\varphi] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^D x_1 \dots d^D x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^D p_1 \dots d^D p_n \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_{j=1}^n p_j\right) \tilde{\varphi}(p_1) \cdots \tilde{\varphi}(p_n).\end{aligned} \tag{D.4}$$

Végezetül az amputált Green-függvények definíciójából következik, hogy Fourier-transzformáltjuk:

$$\tilde{G}_{amp}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \tilde{G}_c^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \prod_{i=1}^n \left[\tilde{G}_c^{(2)}(p_i)\right]^{-1}, \tag{D.5}$$

ahol az összefüggő 2-pont Green-függvény, $G_c^{(2)}(x_1, x_2) \equiv G_c^{(2)}(x)$ $(x = x_2 - x_1)$ Fourier-transzformáltja:

$$\tilde{G}_c^{(2)}(p) = \int dx G_c^{(2)}(x) e^{\mathrm{i}px}. \tag{D.6}$$

A jelölések egyszerűsítése érdekében általában el fogjuk hagyni a D dimenzió jelölését az integrálási mértékekben, ill. a Dirac-delta mellett.

E. Operátor-betétrészek

Többször szükségünk van olyan Green-függvények használatára, amelyek definíciójában az egyszerű téroperátorok mellett ún. összetett operátorok is szerepelnek. (Itt kis magyarázat szükséges. A szóhasználat az elmélet kanonikus kvantálással történő tárgyalására utal. Ekkor operátorok időrendezett szorzatának várható értéke a Green-függvény. A pályaintegrálos kvantálás esetén a Green-függvényeket definiáló pályaintegrálokban természetesen nem operátorok, hanem térváltozók szorzata áll.) Összetett operátoroknak a téroperátoroknak és deriváltjaiknak lokális monomjait nevezzük, mint pl.

$$\mathcal{O}(\phi(x)) \;=\; \phi^2(x), \quad \phi^4(x), \quad [\partial_\mu \phi(x)]^2, \quad \text{stb.} \tag{E.1}$$

A megfelelő Green-függvények definíció szerint:

$$\langle T\left(\mathcal{O}_1(\phi(y_1))\mathcal{O}_2(\phi(y_2))\cdots\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\right)\rangle\,. \tag{E.2}$$

A megfelelő 1PI vertexfüggvények ugyancsak tartalmazzák az $\mathcal{O}(\phi(y))$ operátor-betétrészt.

Most megkeressük az operátor-betétrészt tartalmazó Green-függvények generáló funkcionálját. A példánk egyetlen operátor-betétrészt tartalmazó Green-függvényekre fog vonatkozik, de az általánosítás könnyen megtehető tetszőleges számú betétrész esetére. Vezessük be a $g(x)$ külső forrást, amely az $\mathcal{O}((\phi(x))$ operátor-betétrészhez csatolódik:

$$S_g[\phi] \;=\; S[\phi] - \int dx g(x)\mathcal{O}(\phi(x)). \tag{E.3}$$

Az ezen külső forrást is tartalmazó $S_g[\phi]$ hatás segítségével definiáljuk az $\mathcal{O}(\phi(x))$ operátor-betétrész(eke)t tartalmazó Green-függvények generáló funkcionálját:

$$Z[J,g] \;=\; \int \mathcal{D}\phi e^{-S_g[\phi]+\int dx J\phi}. \tag{E.4}$$

Ekkor pl.

$$\langle T\left(\mathcal{O}(\phi(y))\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\right)\rangle \;=\; \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\frac{\delta}{\delta g(y)}Z[J,g]\bigg|_{J=g=0}. \tag{E.5}$$

A szokásos módon képezzük a

$$W[J,g] \;=\; \ln Z[J,g], \tag{E.6}$$

és a

$$\Gamma[\varphi,g] \;=\; -W[J,g] + \int dx J\varphi \tag{E.7}$$

funkcionálokat. Vegyük észre, hogy csak az elemi térmennyiséghez csatolt forrás tekintetében végeztünk Legendre-transzfomációt, amikor a $g(x)$ külső forráshoz is csatolt rendszer 1PI vertexfüggvényeinek generáló funkcionálját definiáltuk. Az egyetlen $\mathcal{O}(\phi)$ operátor-betétrésszel rendelkező 1PI vertexfüggvények generáló funkcionálja:

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\varphi,g]}{\delta g(y)}\right|_{g=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\Gamma_{\mathcal{O}}^{(n)}(y;x_1,\ldots,x_n). \quad \text{(E.8)}$$

A tetszőleges számú operátor betétrészt tartalmazó vertexfüggvényeket generáló effektív hatás pedig

$$\begin{aligned}\Gamma[\varphi,g] &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\int dy_1\cdots dy_l g(y_1)\cdots g(y_n)\\ &\quad\times\Gamma_{\mathcal{O}}^{(l,n)}(y_1,\ldots,y_l;x_1,\ldots,x_n). \qquad \text{(E.9)}\end{aligned}$$

A $\Gamma[\varphi,g]$ funkcionál φ szerinti funkcionális deriváltjai az elemi tereknek olyan 1PI n-pont függvényei, amelyek a $g(y)$ külső tereknek funkcionáljai:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta^n\Gamma[\varphi,g]}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)}\right|_{\varphi=0} &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int dy_1\cdots dy_l g(y_1)\cdots g(y_n)\Gamma_{\mathcal{O}}^{(l,n)}(y_1,\ldots,y_l;x_1,\ldots,x_n)\\ &= \Gamma^{(n)}(x_1,\ldots,x_n;[g]). \qquad \text{(E.10)}\end{aligned}$$

Az operátor-betétrész(eke)t tartalmazó 1PI vertexfüggvények Fourier-transzformáltjainak szokásos 1PI Feynman-diagramok felelnek meg azzal a különbséggel, hogy a betétrészeknél egy járulékos külső impulzus kerül átadásra. Ezért ezekre a diagramokra nem teljesül az impulzusmegmaradás. Ennek dacára a megfelelő diagramok látszólagos divergenciafokát ugyanúgy állapíthatjuk meg, mint az impulzusmegmaradásnak elegettevő, operátor-betétrésszel nem rendelkező diagramok esetében. Ha ui. a belső impulzusokat, amelyekre integrálni kell $\lambda\to\infty$ tényezővel szorozzuk, akkor a külső impulzusok mind elhanyagolhatóvá válnak. Mivel az operátor-betétrész lényegében egy vertex a megfelelő koordináta szerinti integrálás nélkül, az $\mathcal{O}_i(\phi)$ operátor-betétrész kanonikus dimenziója:

$$[\mathcal{O}_i(\phi)]_c = \delta_i + n[\phi]_c, \qquad \text{(E.11)}$$

ahol δ a deriválások száma $\mathcal{O}_i(\phi)$–ben, n pedig a ϕ terek száma. ($\delta[V]$–vel összehasonlítva, hiányzik a $-D$ tag, mert $\mathcal{O}(\phi(y))$–ban nincsen integrálás y-ra.) Az S_g hatásban a $g_i(x)$ külső forráshoz lineárisan csatolt $\mathcal{O}_i$ összetett operátornak egy újabb $V_{\mathcal{O}_i}$ vertex felel meg, amelynek a dimenziója $\delta(V_{\mathcal{O}_i}) = \delta_i + n[\phi]_c - D$.

Az r darab $\mathcal{O}_1$, …, $\mathcal{O}_r$ operátor-betétrészt tartalmazó 1PI vertexfüggvény Fourier-transzformáltja:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}_{\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_r}(q_1,\ldots,q_r,p_1,\ldots,p_n)$$

$$= \int dy_1 \ldots dy_r \int dx_1 \ldots dx_n e^{-\mathrm{i}(q_1 y_1 + \ldots + q_r y_r + p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)} \cdot$$
$$\cdot \Gamma^{(n)}_{\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_r}(y_1,\ldots,y_r,x_1,\ldots,x_n). \tag{E.12}$$

Jelölje $\delta(\gamma)$ annak az 1PI n-pont vertexfüggvénynek a látszólagos divergenciafokát, amelyet az r darab operátor-betétrész elhagyásával kapunk. Ekkor az r darab operátor-betétrészt is tartalmazó 1PI n-pont vertexfüggvény látszólagos dimenziója:

$$\begin{aligned} \delta_\gamma[\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_r] &= \delta(\gamma) - rD + [\mathcal{O}_1]_c + \ldots + [\mathcal{O}_r]_c \\ &= \delta(\gamma) + \sum_i \delta(V_{\mathcal{O}_i}). \end{aligned} \tag{E.13}$$

Ez azt mutatja, hogy az elemi terek 1PI vertexfüggvényeit negatív, zérus, ill. pozitív dimenziójú összetett operátor vertexekkel kiegészítve rendre csökken, nem változik, ill. nő a vertexfüggvény látszólagos divergenciafoka. Másképpen ez azt is jelenti, hogy a negatív vagy zérus dimenziójú összetett operátor vertexek beépítése megőrzi, ill. javítja a diagram konvergenciáját.

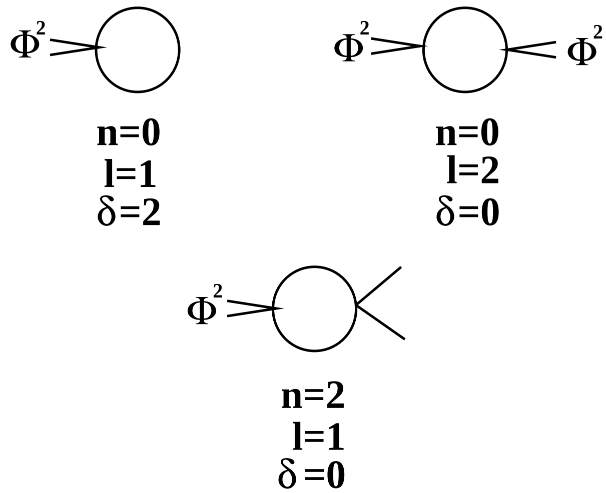
Példaként nézzük a ϕ^4 elméletben $D = 4$ dimenzióban az l darab ϕ^2 betétrésszel rendelkező

$$\Gamma^{(n,l)}(y_1,\ldots,y_l,x_1,\ldots,x_n) = \left\langle T\left(\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi^2(y_1)\cdots\phi^2(y_l)\right)\right\rangle_{1PI} \tag{E.14}$$

1PI vertexfüggvényt. Mivel $[\phi]_c = 1$ és az elemi vertex $\delta(V_0) = 0$ dimenziójú, valamint $[\phi^2]_c = 2$,

$$\begin{aligned} \delta^{(n,l)}_\gamma &= \delta(\gamma) - l \cdot 4 + 2 \cdot l \\ &= 4 - n \cdot 1 - 2l = 4 - n - 2l \end{aligned} \tag{E.15}$$

a megfelelő 1PI vertexfüggvény látszólagos divergenciafoka. Csak azok a ϕ^2 betétrészt tartalmazó 1PI vertexfüggvények mutatnak látszólagos divergenciát, amelyekre $4 - n - 2l \geq 0$. Ezek az alábbi diagramok:



F. Összetett operátorok renormálása

Általában az 1PI n-pont vertexfüggvények renormálási programjának elvégzése még nem jelenti, hogy az operátorbetétrészekkel rendelkező 1PI vertexfüggvények is végesek. Azok renormálásáról külön kell gondoskodni. Mivel az eljárás nem teljesen magától értetődő, ezért külön foglalkozunk az összetett operátorok renormálásának kérdésével.

A renormálás szokásos programja során láttuk, hogy az $(L-1)$–hurok rendben renormált hatásból L–hurok rendben számolt $\Gamma[\varphi]$ generáló funkcionálhoz járuló divergens tagok olyan lokális funkcionált alkotnak, amely általában a φ–ből képezett összes, nempozitív kanonikus dimenziójú vertexet tartalmazza. A renormált hatás tehát a térmennyiség olyan lokális funkcionálja, amely az összes nempozitív kanonikus dimenziójú vertexet tartalmazza. Teljesen hasonló a helyzet, ha az $S[\phi, g]$ hatást renormáljuk. Külső forrás jelenlétében a renormált hatás a ϕ térmennyiség és a g külső forrás olyan lokális funkcionálja, amely a ϕ–ből és g–ből képezhető összes nempozitív kanonikus dimenziójú tagot tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy renormálás során bármely vertex keveredik az összes vele azonos és a nála alacsonyabb kanonikus dimenziójú vertexszel. Másképpen szólva valamely operátorbetétrész renormáltjához az összes vele azonos és nála alacsonyabb kanonikus dimenziójú csupasz vertex járulékot ad. Az operátor-betétrészek renormálásával érdemes ezért növekvő kanonikus dimenzió szerint haladva foglalkozni.

Mielőtt az általános eljárást megfogalmaznánk, nézzük a ϕ^4 elmélet példáján rendre a ϕ^2, a ϕ^3 és a ϕ^4 operátor-betétrészek renormálását $d = 4$ dimenzióban.

- A $\phi^2(x)$ betétrész renormálása. Jelöljük $t(x)$–vel a $\phi^2(x)$ betétrész külső forrását. Ekkor

$$\left[\phi^2\right]_c = 2, \qquad [t]_c = 4 - 2 = 2; \tag{F.1}$$

és az alábbi nempozitív kanonikus dimenziójú tagok jöhetnek szóba a renormált hatásban:

$$\left[\int d^4xt\phi^2\right]_c = -4+2+2=0, \tag{F.2}$$

$$\left[\int d^4xt\phi\right]_c = -4+2+1=-1, \tag{F.3}$$

$$\left[\int d^4xt^2\right]_c = -4+4=0, \tag{F.4}$$

$$\left[\int d^4xt\right]_c = -4+2=-2, \tag{F.5}$$

$$\left[\int d^4x\partial_\mu\partial_\mu t\right]_c = -4+2+2=0. \tag{F.6}$$

Közülük a második sérti a $\phi \to -\phi$ szimmetriát és ezért nem megengedett, az utolsó pedig átírható felületi integrállá és ezért nem jön szóba. A renormálás elvégzése (azaz a csupasz hatásban a renormált és ellentag részek szétválasztása után) a hatás legáltalánosabb alakja tehát:

$$S_r[\phi_r,t] = S[\phi_r,t]+\frac{1}{2}(Z_2-1)\int d^4xt\phi_r^2+\int d^4x\left[\frac{1}{2}at^2+bt\right], \tag{F.7}$$

ahol

$$S[\phi_r,t] = \int d^4x\bigg(\frac{1}{2}\phi_r(-\partial^2+m_r^2)\phi_r+\frac{\lambda_r}{4!}\phi_r^4+\frac{1}{2}t(x)\phi_r^2\bigg). \tag{F.8}$$

Ebből kiindulva a külső J forrást is tartalmazó elmélet generáló funkcionáljai:

$$Z_r[J,t] = Z[J/\sqrt{Z},tZ_2/Z]e^{-\int dx(\frac{1}{2}at^2+bt)}, \tag{F.9}$$

$$W_r[J,t] = W[J/\sqrt{Z},tZ_2/Z]-\int d^4x\left(\frac{1}{2}at^2+bt\right), \tag{F.10}$$

$$\Gamma_r[\varphi,t] = \Gamma[\varphi\sqrt{Z},tZ_2/Z]+\int d^4x\left(\frac{1}{2}at^2+bt\right). \tag{F.11}$$

Az utóbbi generáló funkcionálból $t(x)$ és $\varphi(x)$ szerinti funkcionálderiválásokkal kapjuk a ϕ^2 betétrészeket tartalmazó renormált 1PI vertexfüggvényeket. A generáló funkcionál φ–től független tagja csak a $\Gamma^{(l,0)}$ vertexfüggvényekhez ad járulékot.

A renormált és a csupasz generáló funkcionálok közti kapcsolat alapján adódik funkcionálderiválással, hogy pl.

$$\tilde\Gamma_r^{(1,n)}(q;p_1,\dots,p_n;\lambda_r,m_r) = Z_2Z^{n/2}\tilde\Gamma^{(1,n)}(q;p_1,\dots,p_n;\lambda,m)+b\delta_{n,0} \tag{F.12}$$

és

$$\tilde\Gamma_r^{(2,n)}(q_1,q_2;p_1,\dots,p_n;\lambda_r,m_r) = Z_2^2Z^{n/2}\tilde\Gamma^{(2,n)}(q_1,q_2;p_1,\dots,p_n;\lambda,m)+a\delta_{n,0} \tag{F.13}$$

adódik a renormált és a csupasz 1 es 2 darab φ^2 betétrészt tartalmazó 1PI n-pont vertexfüggvények között.

Fa-szinten $Z_2 = 1$ és $a = b = 0$, amely értékekhez képesti eltérés a hurokkorrekcióknak köszönhető. Ezért a renormálási feltételek, amelyekkel a hurokkifejtés adott rendjével bezárólag rögzíthetjük az ellentagokat (divergens és véges részeikkel egyetemben)

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{(1,2)}(q=0;p=0) &= 1,\\ \tilde{\Gamma}^{(l,0)}(q=0) &= 0, \quad \text{ha} \quad l=1,2.\end{aligned} \tag{F.14}$$

Mégegy fontos észrevétel, hogy a phi^2 betétrész Z_2 renormálási együtthatója nem független a tömegrenormálástól. Ez azért van így, mert az $-\frac{1}{2}t(x)\phi^2(x)$ tag hozzáadása a hatáshoz a tömegnek x-függő $m^2 \to m^2 - t(x)$ módosítását jelenti. A konstans (homogén) t külső tér szerinti derivált ezért a tömegnégyzet szerinti deriválással egyenértékű. Homogén külső térnek Fourier-transzformáció után $q = 0$ impulzusbevitellel járó ϕ^2 betétrész felel meg. Ezért írhatjuk, hogy

$$\Gamma_r^{(1,2)}(0;p;\lambda_r,m_r) \;=\; -Z_2\frac{\partial}{\partial m^2}\Gamma_r^{(2)}(p;\lambda_r,m_r)\Big|_\lambda, \tag{F.15}$$

ahol a jobboldalon a deriválást a csupasz tömeg szerint a csupasz csatolási állandó rögzített értéke mellett végezzük. A kijelölt deriválásnak úgy van értelme, hogy a renormált csatolási állandókat a csupasz csatolások és a Λ levágás függvényeiként kezeljük. Ha a renormálási feltételeket zérus külső impulzusok meleltt rójuk ki, akkor nem jelenik meg egy további μ energiaskála, amelyet a levonási pont skálája határoz meg, s ekkor

$$Z_2 \;=\; \frac{\partial m^2}{\partial m_r^2}\Big|_\lambda \tag{F.16}$$

kell legyen.

- A ϕ^3 betétrész renormálása. A betétrész és a hozzácsatolt forrás kanonikus dimenziója: $[\phi^3]_c = 3$ és $[t(x)]_c = 4-3 = 1$. Most a renormált hatásban a következő tagok lépnek fel:

$$\begin{aligned}
\left[\int d^4xt\phi^3\right]_c &= -4+4=0, && \text{(F.17)}\\
\left[\int d^4xt\Delta\phi\right]_c &= -4+1+2+1=0, && \text{(F.18)}\\
\left[\int d^4xt\phi\right]_c &= -4+1+1=-2, && \text{(F.19)}\\
\left[\int d^4x(\partial_\mu t)^2\right]_c &= -4+2+2=0, && \text{(F.20)}\\
\left[\int d^4xt^2\phi^2\right]_c &= -4+2+2=0, && \text{(F.21)}\\
\left[\int d^4xt^2\right]_c &= -4+2=-2, && \text{(F.22)}\\
\left[\int d^4xt^3\phi\right]_c &= -4+3+1=0, && \text{(F.23)}\\
\left[\int d^4xt^4\right]_c &= -4+4=0. && \text{(F.24)}
\end{aligned}$$

Például a generáló funkcionál $t(x)$ szerinti egyszeri funkcionálderiválása generálja a ϕ^3 betétrészt, de ez ugyanakkor $\Delta\phi$ és ϕ betétrészeket is generál. Ezért renormáláskor ezek a betétrészek lineárisan kombinálódnak valamilyen renormálási állandókkal mint együtthatókkal. Hasonlóan, kétszeri deriválás a külső forrás szerint két ϕ^3 betétrészt generál, de egyúttal egy ϕ^2 betétrészt is. Ezek tehát szintén keverednek renormáláskor.

Az előbbi példák az alábbi általános szabályt tükrözik: Ha az $\mathcal{O}(\phi(x))$ lokális operátor kanonikus dimenziója $D_{\mathcal{O}}$, akkor az $\mathcal{O}$ betétrészt tartalmazó renormált 1PI n-pont vertexfüggvényeket a következőképpen kapjuk meg. Vesszük a $D_{\mathcal{O}}$–nál nem nagyobb kanonikus dimenziójú lokális operátorok $\mathcal{O}_\alpha$ teljes rendszerét. Az $\mathcal{O}$ betétrészt tartalmazó renormált 1PI n-pont vertexfüggvények az $\mathcal{O}_\alpha$ betétrészt tartalmazó csupasz n–pont vertexfüggvényeknek a lineáris kombinációi:

$$\Gamma^{(1,n)}_{\mathcal{O},r}(x, y_1, \ldots, y_n) \;=\; \sum_{[\mathcal{O}_\alpha]_c \leq D_{\mathcal{O}}} Z_\alpha \Gamma^{(1,n)}_{\mathcal{O}_\alpha}(x, y_1, \ldots, y_n). \tag{F.25}$$

Ezt az 1PI vertexfüggvények betétrészeire érvényes összefüggés alakjában is szokás írni:

$$\mathcal{O}(\phi(x))_r \;=\; \sum_{[\mathcal{O}_\alpha]_c \leq D_{\mathcal{O}}} Z_\alpha \mathcal{O}_\alpha(\phi(x)). \tag{F.26}$$

G. A hurokintegrálok szerkezete, tulajdonságai

G.1. A hurokintegrálok paraméteres alakja

A hurokintegrálok azonosan átírhatók paraméteres alakba, miközben az impulzusintegrálokat elvégezzük. A paraméteres alak egyúttal azt is jelenti, hogy sikerül a hurokintegrálokat kifejezni a külső impulzusok invariáns skalárszorzatai segítségével. A paraméteres alak néha a tényleges kiszámolást is megkönnyítheti, valamint segítségül szolgál a hurokintegrálok analitikus tulajdonságainak felderítésében és a renormálás programjának végrehajtásában.

Legyen γ egy valódi vertexfüggvényhez járulékot adó 1PI diagram, és $I(\gamma)$ a neki megfelelő matematikai képlet. Vezessük be a γ diagram topológiáját jellemző $V \times I$ dimenziós ϵ_{vl} beesési mátrixot, amelynek értéke $+1$ (-1), ha az l-edik belső vonal a v-edik vertexből indul ki (vertexbe fut be) és 0, ha a v-edik vertex nem kezdő- és végpontja az l-edik belső vonalnak.

Szükségünk lesz néhány további fogalomra. A γ' a γ részdiagramjának nevezzük, ha γ' minden vertexe és vonala γ-hoz is hozzátartozik. Nem szükséges viszont, hogy a részdiagram valamely 2 vertexét γ-ban összekötő vonalak is hozzátartozzanak a részdiagramhoz. A γ-n értelmezett fa olyan részdiagram, amely tartalmazza γ összes vertexét, de egyetlen hurkot sem tartalmaz. A γ rekonstruálható bármely rajta értelmezett fából vonalak hozzávételével. Mivel $L = I - (V - 1)$, azért a γ-n értelmezett bármely fa $V - 1$ darab belső vonalat tartalmaz. Ezért bármely fa beesési mátrixa $V \times (V - 1)$ dimenziós és így a rangja kisebb vagy egyenlő mint $V - 1$. Meg lehet mutatni, hogy a fa beesési mátrixának rangja pontosan $V - 1$. Másrészt minden olyan diagramnak, amelyben $L > 0$, azaz amelyre igaz, hogy $I > V - 1$, a $V \times I$ beesési mátrixának ρ rangja kisebb vagy egyenlő, mint V. Ugyanakkor bármelyik belső vonalon 2 vertex van, az egyik a kezdetén, a másik a végén, úgyhogy $\sum_v \epsilon_{vl} = 0$ bármely $l = 1, 2, \ldots, I$ esetén, ami azt jelenti, hogy $\rho = V - 1$.

Legyen a továbbiakban γ egy 1PI diagram, amely járulékot ad valamely $\Gamma^{(n)}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ valódi vertexfüggvényhez, ahol p_i a külső impulzusok és $\sum_{i=1}^n p_i = 0$, úgyhogy $\Gamma^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_i) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \ldots, p_n)$. (Itt egyszerűség kedvéért $d = 4$ esetét nézzük.) Vezessük be a v-edik vertexbe befutó külső impulzusok összegét, $P_v = \sum p_{k_v}$, s akkor nyilván $\sum_{v=1}^V P_v = 0$. A Feynman-szabályok alapján γ járuléka $i\Gamma^{(n)}(p_1, \ldots, p_n)$-hez

$$\begin{aligned} I_\gamma(P) &= \frac{C(\gamma)}{S(\gamma)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\textstyle\sum P) \tilde{I}_\gamma(P) \\ &= \frac{C(\gamma)}{S(\gamma)} \int \prod_{l=1}^{I} \left(\frac{d^4 k_l}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_l^2 - m_l^2 + i\epsilon} \right) \prod_{v=1}^{V} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_v - \sum_{l=1}^{I} \epsilon_{vl} k_l). \qquad \text{(G.1)} \end{aligned}$$

Feltettük, hogy nincsenek deriváltas csatolások az elméletben. Itt $S(\gamma)$ a diagram szimmetriafaktora, $C(\gamma)$ tartalmazza a vertexben szereplő összes állandó szorzatát (pl. $\lambda\phi^4/4!$ elméletben $C(\gamma) = (-i\lambda)^V$). A k_l impulzust ugyanúgy irányítottuk, ahogyan az l-edik vonalat. Az elmélet tartalmazhat különböző skalártereket, ezért a tömegparaméter indexe. (Skalárterek deriváltas csatolása és nem zérus spinű terek jelenléte esetén az integrandus számlálójábana k impulzusok polinomja jelenik meg.) Az integrálok UV konvergenciáját a Feynman-féle $m^2 \to m^2 - i\epsilon$ helyettesítés biztosítja, aminek explicit jelölését alább elhagyjuk képleteink egyszerűsítése érdekében.

A további átalakításokhoz fel fogjuk használni a skalár propagátorés a Dirac-delta alábbi integrálelőállításait:

$$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\epsilon)},$$

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_v-\sum_{l=1}^{I}\epsilon_{vl}k_l) = \int d^4y_v e^{-iy_v\cdot(P_v-\sum_{l=1}^{I}\epsilon_{vl}k_l)}. \tag{G.2}$$

Használjuk fel ezeket az integrálelőállításokat $I_\gamma(P)$ kifejezésébe, majd cseréljük fel az α-paraméterek és az impulzusok szerinti integrálokat. Ennek jogosságát utóbb kell igazolni a regularizáció és a renormálás elvégzáse után, nevezetesen azt, hogy az integrálok abszolút konvergensek és ezért felcserélhetők. Ezek után az impulzus-integrálok elvégezhetők,

$$\begin{aligned}
&\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp\Big\{i\alpha_l k_l^2+i\sum_v y_v\cdot\epsilon_{vl}k_l\Big\}\\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp\Big\{i\alpha_l\Big(k_l^2+\frac{1}{\alpha_l}\sum_v y_v\epsilon_{vl}k_l\Big\}\\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp\Big\{i\alpha_l\Big(k_l+\frac{1}{2\alpha_l}\sum_v y_v\epsilon_{vl}\Big)^2-i\frac{1}{4\alpha_l}(\sum_v y_v\epsilon_{vl})^2\Big\}\\
&= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{4\pi\alpha_l}}\Big(\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{4\pi\alpha_l}}\Big)^3\exp\Big\{-i\frac{1}{4\alpha_l}(\sum_v y_v\epsilon_{vl})^2\Big\}\\
&= \frac{-i}{(4\pi\alpha_l)^2}\exp\Big\{-i\frac{1}{4\alpha_l}(\sum_v y_v\epsilon_{vl})^2\Big\}.
\end{aligned} \tag{G.3}$$

Ezek ismeretében azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum P)\tilde{I}_\gamma(P)\\
&= \Big(\prod_{v=1}^{V}\int d^4y_v\Big)\Big[\prod_{l=1}^{I}\int_0^\infty d\alpha_l\frac{-i}{(4\pi\alpha_l)^2}\exp\Big\{-i\Big(\alpha_l m_l^2+\frac{1}{4\alpha_l}(\sum_v y_v\epsilon_{vl})^2\Big)\Big\}\Big]e^{-i\sum_{v=1}^{V}y_v\cdot P_v}
\end{aligned} \tag{G.4}$$

Hajtsuk végre az $y_v\to z_v$ változó-transzformációt, ahol $z_V=y_V$ és $z_v=y_v-z_V$, ha $v=1,2,\dots,V-1$. Ennek Jacobi-determinánsa 1. Mivel $\sum_{v=1}^{V}\epsilon_{vl}=0$, azért

$$\sum_v y_v\epsilon_{vl} = z_V\sum_{v=1}^{V}\epsilon_{vl}+\sum_{v=1}^{V-1}z_v\epsilon_{vl}=\sum_{v=1}^{V-1}z_v\epsilon_{vl}, \tag{G.5}$$

ami azt jelenti, hogy z_V csak a utolsó jobboldali tényezőben fordul elő, a z_V szerinti integrál elvégezhető és a teljes implus megmaradását kifejező Dirac-deltát eredményezi. Azt kapjuk tehát, hogy

$$\begin{aligned}
&\tilde{I}_\gamma(P)\\
&= \Big(\prod_{v=1}^{V-1}\int dz_v\Big)\Big[\prod_{l=1}^{I}\int_0^\infty d\alpha_l\frac{-i}{(4\pi\alpha_l)^2}\exp\Big\{-i\Big(\alpha_l m_l^2+\frac{1}{4\alpha_l}(\sum_{v=1}^{V-1}z_v\epsilon_{vl})^2\Big)\Big\}\Big]e^{-i\sum_{v=1}^{V-1}z_v\cdot P_v}
\end{aligned} \tag{G.6}$$

A z_v-k szerinti integrálok Gauss-integrálok, ismét elvégezhetők. Az integrandusban az exponenciális függvény kitervőjében szereplő kvadratikus forma $(V-1)\times(V-1)$-es mátrixa

$$[d_\gamma(\alpha)]_{v_1v_2} = \sum_{l=1}^{I}\epsilon_{v_1l}\frac{1}{\alpha_l}\epsilon_{v_2l}. \tag{G.7}$$

Meg lehet mutatni, hogy ez a mátrix nem szinguláris és a determinánsa

$$\Delta_\gamma(\alpha) \quad = \quad \det\, d_\gamma(\alpha) = \sum_{\mathcal{T}} \prod_{l\in\mathcal{T}} \frac{1}{\alpha_l}, \tag{G.8}$$

ahol az összegzés a γ diagramon értelmezett összes $\mathcal{T}$ fára, a szorzat pedig az egyes fák összes vonalára terjed ki. Mivel minden fának $V-1$ vonala van, a $\Delta_\gamma(\alpha)$ determináns az $1/\alpha_l$-k homogén polinomja. Mivel α_l-ek pozitívak, azért a determináns is pozitív. A z_v-k szerinti integrálok tehát:

$$\begin{aligned}
& \frac{(-i)^I}{\prod_{l=1}^I (4\pi\alpha_l)^2} \left(\prod_{v=1}^{V-1} \int dz_v\right) \exp\left\{-i\frac{1}{4} z_{v_1}\cdot d_\gamma(\alpha)]_{v_1 v_2} z_{v_2} - i\sum_{v=1}^{V-1} z_v \cdot P_v\right\} \\
= \; & \frac{[\left(\frac{4\pi}{i}\right)^{1/2}\left(\frac{4\pi}{-i}\right)^{3/2}]^{V-1}}{[\Delta_\gamma(\alpha)]^{4\cdot\frac{1}{2}} i^I \prod_{l=1}^I (4\pi\alpha_l)^2} \exp\left\{iP_{v_1}\cdot [d_\gamma(\alpha)]^{-1}_{v_1 v_2} P_{v_2}\right\} \\
= \; & \frac{(4\pi)^{2(V-1)}}{i^I(-i)^{V-1}(4\pi)^{2I}[\Delta_\gamma(\alpha)]^2 \prod_{l=1}^I \alpha_l^2} \exp\left\{iP_{v_1}\cdot [d_\gamma(\alpha)]^{-1}_{v_1 v_2} P_{v_2}\right\} \\
= \; & \frac{\exp\{iP_{v_1}\cdot [d_\gamma(\alpha)]^{-1}_{v_1 v_2} P_{v_2}\}}{[i(4\pi)^2]^L [\Delta_\gamma(\alpha)\prod_{l=1}^I \alpha_l]^2}.
\end{aligned} \tag{G.9}$$

A z_v integrálok elvégzése után már csak az α_l paraméterek szerinti integrálok maradtak vissza:

$$\tilde{I}_\gamma(P) \quad = \quad \left(\prod_{l=1}^I \int_0^\infty d\alpha_l e^{-im_l^2\alpha_l}\right) \frac{\exp\{iP_{v_1}\cdot [d_\gamma(\alpha)]^{-1}_{v_1 v_2} P_{v_2}\}}{[i(4\pi)^2]^L [\Delta_\gamma(\alpha)\prod_{l=1}^I \alpha_l]^2}. \tag{G.10}$$

Ez a képlet arra szolgál, hogy $\tilde{I}_\gamma(P)$-t a vertexekbe befutó külső impulzusok invariáns skalárszorzatai segítségével ki tudjuk fejezni. Az α_l-eknek az exponenciális függvény kitevőjében és a nevezőben szereplő függvénye független a vertexek V számától. A nevező átírható a determináns explicit alakjának felhasználásával

$$\mathcal{P}_\gamma(\alpha) \quad \equiv \quad \Delta_\gamma(\alpha)\prod_{l=1}^I \alpha_l = \sum_{\mathcal{T}} \prod_{l\notin\mathcal{T}} \alpha_l \tag{G.11}$$

alakba, ami az α_l-eknek egy L-edrendű homogén polinomja, s mint ilyen, nyilván független V-től. A kitevőben szereplő kvadratikus alak,

$$\mathcal{Q}_\gamma(\alpha) \quad \equiv \quad \sum_{v_1,v_2=1}^{V-1} P_{v_1}\cdot [d_\gamma(\alpha)]^{-1}_{v_1 v_2} P_{v_2}, \tag{G.12}$$

azonosan átírható az összes olyan C „vágásra” történő összegzésre, amikor $L+1$ vonal átvágásával a γ diagramot két és pontosan két összefüggő $\gamma_1(C)$ és $\gamma_2(C)$ részre bontjuk. Ilyen C vágást úgy kaphatunk meg egy $\mathcal{T}$ fából, hogy a fa vonalainak átvgása után még egy további $(L+1)$-edik vonalat is átvágunk. Be lehet látni, hogy

$$\mathcal{Q}_\gamma(P,\alpha) \quad = \quad \frac{1}{\mathcal{P}_\gamma(\alpha)} \sum_C s_C \prod_{l\in C} \alpha_l, \tag{G.13}$$

ahol s_C a $\gamma_1(C)$ vagy a $\gamma_2(C)$ diagramba belépő eredő külső impulzus négyzete,

$$s_C \quad = \quad \left(\sum_{v\in\gamma_1(C)} P_v\right)^2 = \left(\sum_{v\in\gamma_2(C)} P_v\right)^2. \tag{G.14}$$

Ezért $\mathcal{Q}_\gamma(P,\alpha)$ egy $L+1$-edrendű és egy L-edrendű homogén polinom hányadosa. Végül tehát a γ-diagram járulékát

$$\tilde{I}_\gamma(P) = \left(\prod_{l=1}^{I}\int_0^\infty d\alpha_l e^{-i\alpha_l m_l^2}\right)\frac{e^{i\mathcal{Q}_\gamma(P,\alpha)}}{[i(4\pi)^2]^L[\mathcal{P}_\gamma(\alpha)]^2}. \tag{G.15}$$

A további átalakításhoz felhasználjuk a $\mathcal{P}_\gamma(\alpha)$ és a $\mathcal{Q}_\gamma(P,\alpha)$ polinomok homogenitását:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\gamma(\lambda\alpha) &= \lambda^L\mathcal{P}_\gamma(\alpha),\\ \mathcal{Q}_\gamma(P,\lambda\alpha) &= \lambda\mathcal{Q}_\gamma(P,\alpha).\end{aligned} \tag{G.16}$$

Írjuk be $\tilde{I}_\gamma(P)$ kifejezésébe az

$$1 = \int_0^\infty d\lambda\delta(\lambda-\sum_{l=1}^{I}\alpha_l) \tag{G.17}$$

alakban az 1 tényezőt, majd hajtsuk végre az $\alpha_l\to\lambda\alpha_l$ transzformációt:

$$\begin{aligned}&\tilde{I}_\gamma(P)\\ &= \frac{1}{[i(4\pi)^2]^L}\left(\prod_{l=1}^{I}\int_0^1 d\alpha_l\right)\frac{\delta(1-\sum_{l=1}^I\alpha_l)}{[\mathcal{P}_\gamma(\alpha)]^2}\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda}\lambda^{I-2L}\exp\Big\{i\lambda[\mathcal{Q}_\gamma(P,\alpha)-m_l^2\alpha_l]\Big\}.\end{aligned} \tag{G.18}$$

Az α_l-integrálok felső határait a Dirac-deltának köszönhetően végtelen helyett 1-re lehet változtatni. A λ-integrál a felső határon konvergens az m_l^2 tömegek $-i\epsilon$ imagimárius részeinek köszönhetően. Az alsó határon a konvergenciát a $\lambda^{I-2L}=\lambda^{I-2I+2(V-1)}=\lambda^{-I+2V-2}$ tényező határozza meg. Ha az $2V-I-2$ kitevő nagyobb vagy egyenlő 1, azaz $2V-I-2>0$ akkor az integrál az alsó határon is konvergens. Hasznákjuk fel a $\Gamma(z)$ függvény

$$\Gamma(z) = k^z\int_0^\infty dt\ t^{z-1}e^{-kt}, \quad \mathrm{Re}z>0.\ \ \mathrm{Re}k>0 \tag{G.19}$$

integrálelőállítását, ahol esetünkben most $z=2V-I-2>0$ és $k=-i[\mathcal{Q}_\gamma(P,\alpha)-\sum_{l=1}^I m_l^2\alpha_l]$, ahol $\mathrm{Re}k=(-i)(-)(-i\epsilon)=\epsilon>0$. Ezért a következő kifejezést kapjuk:

$$\tilde{I}_\gamma(P) = \frac{i^{3(V-1)-2I}}{(4\pi)^{2L}}\Gamma(2V-I-2)\left(\prod_{l=1}^{I}\int_0^1 d\alpha_l\right)\frac{\delta(1-\sum_{l=1}^I\alpha_l)}{[\mathcal{P}_\gamma(\alpha)]^2[\mathcal{Q}_\gamma(P,\alpha)-\sum_{l=1}^I m_l^2\alpha_l]^{2V-I-2}}. \tag{G.20}$$

A kifejezés (energia-)dimenziója $[\tilde{I}_\gamma(P)]=-2(2V-I-2)=2I-4V+4<0$ a konvergencia-feltétel értelmében. Ha ez a dimenzió nem negatív, akkor a λ-integrál divergens a $\lambda\sim 0$ alsó határon, ami a paraméteres előállítás nyelvén a hurokintegrálok UV divergenciájának kifejeződése. Ez a kapcsolat az $\tilde{I}_\gamma(P)$ hurokintegrálok dimenziója és konvergenciája között az, ami alapján lehetővé válik, hogy a hurokintegrálok konvergenciáját a hatványkitevők leszámlálásának módszerével vizsgáljuk.

G.2. Euklideszi tartomány

A nem fizikai, euklideszi tartományban a vertexfüggvények viselkedését azért érdemes tanulmányozni, mert így lehet megérteni, hogy mikor működik a Wick-forgatás, ami kapcsolatot teremt az elmélet

Minkowski-térben (valós időben) történő megfogalmazása és euklideszi térben (képzetes időben) történő megfogalmazása között.

A fizikai tartományban a $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)$ valódi vertexfüggvények $n-1$ darab független impulzusváltozója mind idő-, ill. fényszerű vektor. A valódi vertexfüggvények azonban analitikusan folytathatók a külső impulzusokban a nem fizikai tartományba. Euklideszi tartományon olyan impulzusokat értünk, amelyek tetszőleges $\sum_{i=1}^{n} u_i p_i$ lineáris kombinációja tér- vagy fényszerű vektor, azaz az euklideszi tartomány az impulzustér olyan tartománya, amelyen a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i p_i\right)^2 \le 0 \tag{G.21}$$

feltétel tetszőleges valós u_i együtthatókkal teljesül. A paraméteres előállítás kapcsán megtanultuk, hogy $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)$ tekinthető a $p_i \cdot p_j$ $i,j=1,2,\ldots,n-1$ invariáns skalárszorzatok függvényének. Ha figyelembe vesszük, hogy a 4-dimenziós térben az $n-1$ darab vektor közül legfeljebb 4 lineárisan független, akkor a skalárszorzatok alkotta sokaság dimenziójáról a következőket mondhatjuk. Ha nincsenek az impulzusok semmilyen feltétellel megszorítva, akkor a sokaság dimenziója $4n-10$, ha $n \ge 4$ és 3, ill. 1, ha $n=3$, ill. 2. (Legyenek p_1, p_2, p_3 és p_4 a lineárisan függetlenek, ha $n \ge 4$, s akkor 4 darab p_i^2 $(i=1,\ldots,4)$ és a $p_i \cdot p_j$ $(i \neq j)$szorzatok közül az $n-2$ darab $p_1 \cdot p_j$ $(j=2,\ldots,n-1)$, az $n-3$ darab $p_2 \cdot p_j$ $(j=3,\ldots,n-1)$, az $n-4$ darab $p_3 \cdot p_j$ $(j=4,\ldots,n-1)$ és az $n-5$ darab $p_4 \cdot p_j$ $(j=5,\ldots,n-1)$ „feszítik ki" a sokasǵot; $4+(n-2)+(n-3)+(n-4)+(n-5)=4n-10$. Ha $n=3$, akkor p_1^2, p_2^2, $p_1 \cdot p_2$ 3-dimenziós sokaságot jelentenek, ha $n=2$, akkor p_1^2 feszíti ki az 1-dimenziós sokaságot.) Meg lehet mutatni, hogy az eiklideszi tartományra történő korlátozás után az invariánsok sokaságának dimenziója $n \le 4$ esetén ugyannyi marad, és $n \ge 5$ esetén pedig kisebb lesz.

Az euklideszi tartományban minden p_i ortogonális egy időszerű n vektorra (hiszen mindig választhatjuk az egyenlőtlenségben a valós együtthatókat úgy, hogy csak egyetlen egy legyen nullától különböző). Lorentz-transzformációval mindig elérhetjük, hogy ez a vektor $n=(1,0,0,0)$ legyen, s ekkor $p_i^0 = 0$ minden $i=1,2,\ldots,n$ esetén. Így az euklideszi tartomány minden (Minkowski-térbeli) p_i vektorához hozzárendelhetük a 4-dimenziós eiklideszi térben egy $\hat{p}_i$ vektort, nevezetesen legyen $\hat{p}_i^0 = p_i^0$ és $\vec{\hat{p}}_i = \vec{p}_i$ $(i=1,\ldots,n)$, ahol a jobboldalak abban a vonatkoztatśi rendszerben értendők, amelyben $n=(1,0,0,0)$. Ekkor

$$\hat{p}_i \cdot \hat{p}_j \;=\; \sum_{\mu=0}^{3} \hat{p}_i^\mu \hat{p}_j^\mu = -p_i \cdot p_j \tag{G.22}$$

érvényes. Tekintsük ezután a $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)$ valódi vertexfüggvényhez járulékot adó bármely γ diagramot, ill. annak a képletét paraméteres előállításban. Ez ki van fejezve az egyes vertexekbe befutó P_v impulzusok skalárszorzataival. Ez, mint láttuk, úgy történik, hogy γ minden C vágásához hozzárendeltük az s_C mennyiséget és az összes lehetséges vágás segíts'egével értelmeztük a $\mathcal{Q}_\gamma(P,\alpha)$ homogén polinomot. Most az euklideszi tartományban az alábbi definíciókkal élhetünk:

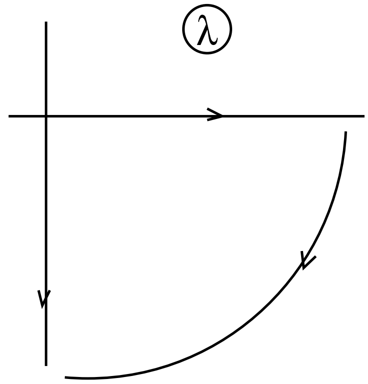
$$\begin{aligned}
\hat{s}_C &= \left(\sum_{v\in\gamma_1(C)} \hat{P}_v\right)^2 = -\left(\sum_{v\in\gamma_1(C)} P_v\right)^2 = -s_C, \\
\mathcal{Q}_\gamma(\hat{P},\alpha) &= \frac{1}{\mathcal{P}_\gamma(\alpha)} \sum_C \hat{s}_C \prod_{l\in C} \alpha_l = -\mathcal{Q}_\gamma(P,\alpha).
\end{aligned} \tag{G.23}$$

Ezeket felhasználva, a γ diagram (G.18) járulékát

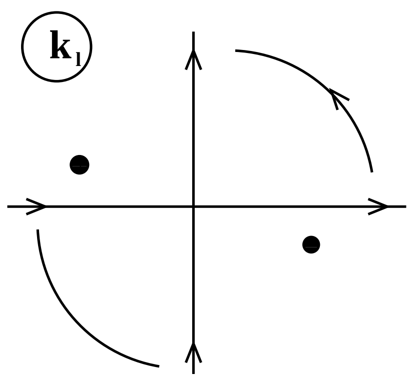
$\tilde{I}_\gamma(P)$

$$= \frac{1}{[i(4\pi)^2]^L}\left(\prod_{l=1}^{I}\int_0^1 d\alpha_l\right)\frac{\delta(1-\sum_{l=1}^{I}\alpha_l)}{[\mathcal{P}_\gamma(\alpha)]^2}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\lambda^{I-2L}\exp\Big\{-i\lambda[\mathcal{Q}_\gamma(\hat{P},\alpha)+m_l^2\alpha_l]\Big\}. \tag{G.24}$$

alakba írhatjuk át, ha a külső impulzusok az euklideszi tartományban vannak. Az integrandus exponense valós részének pozitivitása, és a $-\lambda\epsilon$ infinitezimális képzetes része megengedi, hogy az integrálás ú tját a komplex λ síkon $-\pi/2$-vel, azaz az óramutató járásával egyező irányban elforgassuk. Lényeges, hogy ennek az elforgatásnak feltétele, hogy minden $m_l^2 \geq 0$ legyen, és hogy minden



m_l^2-et a Feynman-féle $-i\epsilon$ imaginárius résszel kiegészítsünk. Ha valamelyik tömegre $m_l^2 < 0$, akkor ez a Wick-forgatás nem megengedett. A λ síkon végzett $-\pi/2$ elforgatás egyenértékű a Minkowski-térben felírt paraméteres alakban (ld. az (G.15) egyenletet) az összes α_l paraméter szerinti integrálás útjának ugyancsak $-\pi/2$ szögű elforgatásával. Az (G.15) képletet összevetve az eredeti (G.1) képlettel kiderül, hogy az α_l-k síkján végrehajtott fenti elforgatások egyenértékűek a k_l komplex síkján végrehajtott $+\pi/2$ szögű, azaz az óramutató járásával ellentétes irányú elforgatásokkal. Mivel a propagátorok pólusai $k^0 = \pm\sqrt{(\vec{k}_l+\sum\vec{p})^2+m_l^2-i\epsilon}$ helyeken vannak, a



Wick-forgatás során nem ,,söprünk át" póluson. A Wick-forgatás után az euklideszi tartományban tehát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\tilde{I}_\gamma(P) &= (-i)^{V-1}\hat{I}_\gamma(\hat{P})\\ &= (-i)^{V-1}\left(\prod_{l=1}^{I}\int_0^\infty d\alpha_l\right)\frac{\exp\Big\{-[\mathcal{Q}_\gamma(\hat{P},\alpha)+\alpha_l m_l^2]\Big\}}{(4\pi)^{2L}[\mathcal{P}_\gamma(\alpha)]^2}.\end{aligned} \tag{G.25}$$

Végül a $C(\gamma)/S(\gamma)$ hányadossal való szorzás után a γ diagram járulékát

$$\frac{C(\gamma)}{S(\gamma)}\tilde{I}_\gamma(P) \quad = \quad i\frac{\hat{C}(\gamma)}{S(\gamma)}\hat{I}_\gamma(\hat{P}), \tag{G.26}$$

ha $C(\gamma)$-ból a $C(\gamma) = i^V\hat{C}(\gamma)$ definícióval leválasztjuk az $\exp[i\int d^4\mathcal{L}_{int}]$ tényező sorának V-ed rendű tagjából származó i^V tényezőt.

A fentieket felhasználhatjuk arra, hogy perturbációszámítás keretei között lássuk a kapcsolatot a Minkowski-térben és az euklideszi térben megfogalmazott elmélet között. Minkowski-térben a generáló funkcionálok kapcsolata:

$$\begin{gathered} Z[j] = e^{W[j]}, \qquad i\Gamma[\varphi] = W[j] - i\int d^4z j\varphi, \\ \varphi(x) = \frac{\delta W[j]}{i\delta j(x)}, \quad j(x) = -\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}. \end{gathered} \tag{G.27}$$

A valódi vertexfüggvény, $i\tilde{\Gamma}^{(n)}$, mint $i\Gamma[\varphi]$ funkcionális Taylor-sorának együtthatója van éttelmezve. Ezért az

$$\tilde{\Gamma}^{(n)} \quad = \quad \hat{\Gamma}^{(n)} = \sum_\gamma \frac{\hat{C}(\gamma)}{S(\gamma)}\hat{I}_\gamma(\hat{P}) \tag{G.28}$$

azonosítás lehetséges az euklideszi tartományban, ahol összegzéd történik mindazon diagramokra, amelyek az adott vertexfüggvényhez a perturbációszámítás adott rendjével bezárólag járulékot adnak. Ha most az előző alfejezet gondolatsorát visszafelé elismételjük, akkor nem nehéz belátni, hogy

$$\begin{aligned} &(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum\hat{p})\frac{\hat{C}(\gamma)}{S(\gamma)}\hat{I}_\gamma(\hat{P}) \\ = \quad & \frac{\hat{C}(\gamma)}{S(\gamma)}\left(\int\frac{d^4\hat{k}_l}{(2\pi)^4}\frac{1}{\hat{k}_l^2+m_l^2}\right)\prod_v(2\pi)^4\delta^{(4)}(\hat{P}_v - \sum_l \epsilon_{vl}k_l) \end{aligned} \tag{G.29}$$

alakú az euklideszi tartományban az egyes diagramok járuléka. Ez a képlet egyúttakl az jelenti, hogy az euklideszi elméletben a diagramok járulékai az alábbi Feynman-szabályok alapján számolhatók: a propagátor $(\hat{k}_l^2+m_l^2)^{-1}$ ($i(k_l^2-m_l^2+i\epsilon)^{-1}$ helyett) és a vertex $-\lambda$ (a $(-i\lambda)$ helyett).

H. Skálatranszformáció, dilatációs áram

Tekintsük a téridő-koordináták

$$x^\mu \quad \to \quad x'^\mu = e^{-\epsilon} x^\mu, \tag{H.1}$$

($\epsilon \in (-\infty, \infty)$) valós paraméter) skálatranszformációját, amit a térmennyiségek olyan $\phi(x) \to \phi'(x') = e^{\epsilon d_\phi}\phi(x)$, azaz

$$\phi(x) \quad \to \quad \phi'(x) = e^{\epsilon d_\phi}\phi(e^\epsilon x) \tag{H.2}$$

átskálázásával kísérünk, amelyben a térmennyiség d_ϕ skáladimenzióját úgy választjuk meg, hogy a tömeg nélküli szabad fizikai mező hatásfunkcionálja skálainvariáns legyen: $\int d^d x' \mathcal{L}_0' \stackrel{!}{=} \int d^d x \mathcal{L}_0$, azaz $e^{-\epsilon d}\mathcal{L}_0'(x') = \mathcal{L}_0$. Innen skalártér esetén:

$$(\partial_\mu \phi)^2 \quad = \quad e^{-\epsilon d}(\partial_\mu' \phi'(x'))^2. \tag{H.3}$$

A térmennyiség transzformációs képlete alapján

$$\phi'(x') \quad = \quad e^{\epsilon d_\phi}\phi(x) \tag{H.4}$$

ahonnan

$$\partial_\mu' \phi'(x') \quad = \quad e^{\epsilon d_\phi + \epsilon}\partial_\mu \phi(x) \tag{H.5}$$

adódik, amit behelyettesítve a szabad, tömeg nélküli elmélet hatásfunkcionáljának skálinvarianciáját kifejező egyenletbe az alábbi eredményt kapjuk:

$$(\partial_\mu \phi)^2 \quad = \quad e^{-\epsilon d + 2\epsilon d_\phi + 2\epsilon}(\partial_\mu \phi(x))^2 \tag{H.6}$$

ahonnan

$$0 \quad = \quad -\epsilon d + 2\epsilon d_\phi + 2\epsilon, \tag{H.7}$$

azaz

$$d_\phi \quad = \quad \frac{d-2}{2}. \tag{H.8}$$

A skalártér skáladimenziója tehát megegyezik a kanonikus dimenziójával. Hasonló eredményre jutunk, ha a szabad, tömeg nélküli vektortér esetét vizsgáljuk, $d_A = \frac{d-2}{2}$. (Mindkét esetben a propagátor $p^{-\sigma}$ szerint skálázik nagy belső impulzusok esetén, ahol $\sigma = 2$.

Feles spinű, szabad, tömeg nélküli fermiontér esetén a Lagrange-sűrűségnek a hatás skálinvarianciáját biztosító transzformációja:

$$\bar\psi(x)\ \partial\!\!\!/ \psi(x) \quad = \quad e^{-\epsilon d_\psi}\bar\psi'(x')\ \partial\!\!\!/' \psi'(x'). \tag{H.9}$$

A térmennyiség transzformációs képlete alapján

$$\psi'(x') \quad = \quad e^{\epsilon d_\psi}\psi(x), \tag{H.10}$$

ahonnan

$$\partial\!\!\!/' \psi'(x') \quad = \quad e^{\epsilon d_\psi + \epsilon}\ \partial\!\!\!/ \psi(x), \tag{H.11}$$

úgyhogy

$$\bar{\psi}(x)\ \partial\!\!\!/\psi(x) \quad = \quad e^{-\epsilon d_\psi + 2\epsilon d_\psi + \epsilon}\bar{\psi}(x)\ \partial\!\!\!/\psi(x), \tag{H.12}$$

azaz

$$d_\psi \quad = \quad \frac{d-1}{2}, \tag{H.13}$$

azaz a feles spinű fermiontér skáladimenziója szintén megegyezik a kanonikus dimenziójával.

A továbbiakban megállapodunk, hogy a kölcsönható terek esetén is a terek skáladimenzióját úgy értelmezzük, hogy a csupasz terek skáladimenziója egyezzen meg a megfelelő tömeg nélküli szabad tér skáladimenziójával.

A fenti skálatranszformáció folytonos globális szimmetria. A különböző paraméterű skálatranszformációk az egymás utáni végrehajtásra nézve csoportot alkotnak. A skálainvariancia az elmélet invarianciája ezen csoport transzformációival szemben. Írjuk az infinitezimális skálatranszformációt

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu - \epsilon x^\mu = x^\mu + X^\mu \delta\omega, \\ \Delta\phi &= \phi'(x') - \phi(x) = \epsilon d_\phi \phi(x) = Y\delta\omega \end{aligned} \tag{H.14}$$

alakba, ahonnan a $\delta\omega = \epsilon$ infinitezimális paraméterű transzformácót az $X^\mu = -x^\mu$, $Y = d_\phi\phi(x)$,,mátrixok” adják meg. Ekkor a Noether-tételből következik, hogy a klasszikus elmélet ezen szimmetriához tartozó Noether-árama, az úgy nevezett dilatációs áram

$$\begin{aligned} D^\mu(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}Y - \Theta^{k.\ \mu}_{\nu} X^\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}d_\phi\phi(x) + \Theta^{k.\ \mu}_{\nu} x^\nu \\ &= \pi^\mu(x) d_\phi \phi(x) + \Theta^{k.\ \mu}_{\nu} x^\nu \\ &= \pi^\mu(x)(d_\phi + x^\nu\partial_\nu)\phi(x) - x^\mu\mathcal{L} \end{aligned} \tag{H.15}$$

ahol

$$\pi^\mu(x) \quad = \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \tag{H.16}$$

a $\phi(x)$ térmennyiséghez kanonikusan konjugált impulzus és

$$\Theta^{k.\ \mu}_{\nu}(x) \quad = \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\partial_\nu\phi(x) - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}(x) \tag{H.17}$$

pedig a kanonikus energia-impulzus tenzor. A dilatációs áramot mindig bevezethetjük, akkor is, ha a skálaszimmetria sérül. Amennyiben a skálaszimmetria sértetlen, azaz az elmélet skálainvariáns, akkor $\partial_\mu D^\mu = 0$ és a $D(x_0) = \int d^{d-1}x D^0(x)$ a megmaradó töltés.

Ha az elmélet skálainvariáns, akkor a Lagrange-sűrűségnek d skáladimenziójú skalárként kell transzformálódnia, azaz infinitezimális transzformáció esetén

$$\delta\mathcal{L}(x) \quad = \quad \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = \epsilon(d + x^\nu\partial_\nu)\mathcal{L}(x) = \epsilon\partial_\mu(x^\mu\mathcal{L}(x)). \tag{H.18}$$

Ez a helyzet, ha a Lagrange-sűrűség nem tartalmaz dimenziós csatolási állandót. Amennyiben ilyenek is vannak az elméletben, akkor a dilatációs áram divergenciáját a Lagrange-sűrűség ezen tagjai határozzák meg, s az nem lesz többé zérus. Nézzük a tömeges $g\phi^4$ elmélet esetét példaként,

$$\mathcal{L}(x) \quad = \quad \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4. \tag{H.19}$$

Infinitezimális skálatranszformáció során a Lagrange-sűrűség szimmetrikus része úgy változik, hogy a hatás invariáns maradjon. A Lagrange-sűrűség explicit módon szimmetria sértő része, $\mathcal{L}_{e.sz.s.}(\phi(x))$ pedig $\mathcal{L}'_{e.sz.s.}(\phi'(x'))$-re változik. Infinitezimális skálatranszformáció esetén tehát:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{e.sz.s.} &= e^{-\epsilon d}\mathcal{L}_{e.sz.s.}(\phi'(x')) - \mathcal{L}_{e.sz.s.}(\phi(x)) \\
&= -\epsilon d\mathcal{L}_{e.sz.s.}(\phi'(x')) + \mathcal{L}_{e.sz.s.}(\phi'(x')) - \mathcal{L}_{e.sz.s.}(\phi(x)) \\
&= -\epsilon d\mathcal{L}_{e.sz.s.}(\phi(x)) + 2\epsilon d_\phi \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) + 4\epsilon d_\phi \frac{g}{4!}\phi^4(x) \\
&= \epsilon\left(+(d-4)\frac{g}{4!}\phi^4 - m^2\phi^2\right).
\end{aligned} \tag{H.20}$$

Itt kihasználtuk, hogy amennyiben dimenzionális csatolási állandók szerepelnek az elméletben, azaz g ($[g] = -2(d-2) + d = 4 - d \neq 0$) és a tömeg m^2 ($[m^2] = -(d-2) + d = 2$), akkor a Lagrange-sűrűség szimmetriasértő részéhez a megfelelő tagok adnak járulékot, $\mathcal{L}_{e.sz.s.} = \frac{g}{4!}\phi^4 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$, akkor a hatás megváltozása

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta S_{e.sz.s.} \\
&= -\epsilon\int d^dx\left((4-d)\frac{g}{4!}\phi^4 + m^2\phi^2\right).
\end{aligned} \tag{H.21}$$

Ha $d = 4$ dimenzióban vizsgáljuk az euklideszi ϕ^4 elméletet, akkor viszont a g csatolási állandó dimenziótlan, és ekkor az egyetlen tag a Lagrange-sűrűségben, ami explicit módon sérti a skálainvarianciát, az a tömegtag: $\mathcal{L}_{e.sz.s.} = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, ekkor a hatás megváltozása:

$$\delta S = -\epsilon\int d^dx m^2\phi^2. \tag{H.22}$$

I. Sértett skálaszimmetriához tartozó Ward-azonosság

I.1. A Ward-azonosság a csupasz elméletben

I.1.1. Az összefüggő Green-függvények generáló funkcionáljára vonatkozó alak

Vizsgáljuk $d = 4$ dimenzióban a skalártér $g\phi^4$ elméletét euklideszi térben. A csupasz elméletben az elemi terek összefüggő Green-függvényeinek $W[J]$ generáló funkcionálját az

$$e^{W[J,j]} = \mathcal{N}^{-1}\int\mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]+J\cdot\phi}, \quad \mathcal{N} = \int\mathcal{D}\phi e^{-S_{j=0}[\phi]} \tag{I.1}$$

pályaintegrállal definiáljuk. Írjuk itt a csupasz hatást a skálainvariáns

$$S_s = \int d^4x\mathcal{L}_s(x) = \int d^4x\left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{g}{4!}\phi^4\right) \tag{I.2}$$

tag és a skálaszimmetriát explicit módon sértő tömegtag,

$$S_m = \int d^4x \mathcal{L}_m(x) = \int d^4x \frac{1}{2}(m^2 - j(x))\phi^2 \tag{I.3}$$

összegeként. Bevezettük a $\phi^2(x)$ összetett operátor lineáris csatolását a $j(x)$ külső forráshoz, így a generáló funkcionálok az elemi tér olyan Green-függvényeit, ill. vertexfüggvényeit generálják, amelyek $\frac{1}{2}\phi^2$ betétrészeket tartalmaznak. Az előző fejezetben tárgyalt $x \to x' = e^{-\epsilon}x$, $\phi'(x) = e^{\epsilon}\phi(e^{\epsilon}x)$ skálatranszformáció a térmennyiség szempontjából tekinthető a pályaintegrálban egyszerű változótranszformációnak, aminek következtében az eredeti elmélet és a skálatranszformált elmélet összefüggő Green-függvényeinek generáló funkcionálja meg kell, hogy egyezzen, $e^{W'[J]} = e^{W[J]}$. Infinitezimális skálatranszformáció esetén

$$\begin{aligned} \delta S_s &= \delta \int d^4x \mathcal{L}_s(x) = \epsilon \int d^4x \partial_\mu (x^\mu \mathcal{L}_s(x)) = 0, \\ \delta S_m &= \delta \int d^4x \mathcal{L}_m(x) = -\epsilon \int d^4x (m^2 - j(x))\phi^2(x). \end{aligned} \tag{I.4}$$

A forrástag ugyancsak sérti a skálaszimmetriát:

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x J(x)\phi(x) &= \int d^4x J(x)\phi'(x) - \int d^4x J(x)\phi(x) \\ &= \int d^4x J(x)\Big(e^{\epsilon}\phi(e^{\epsilon}x) - \phi(x)\Big) \\ &= \epsilon \int d^4x J(x)(1 + x^\nu \partial_\nu)\phi(x). \end{aligned} \tag{I.5}$$

A generáló funkcionál definícióját írjuk $e^W = \mathcal{R}/\mathcal{N}$ alakba. A fentiek alapján a számlálóban a pályaintegrál megváltozása:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{R} &= \delta \int \mathcal{D}\phi e^{-S+J\cdot\phi} \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S_s - S_m - \delta S_m + J\cdot\phi + \delta(J\cdot\phi)} - \int \mathcal{D}\phi e^{-S_s - S_m + J\cdot\phi} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \Big(-\delta S_m + \delta(J\cdot\phi)\Big) e^{-S_s - S_m + J\cdot\phi} \\ &= \epsilon \int d^4x \int \mathcal{D}\phi \Big((m^2 - j(x))\phi^2(x) + J(x)(1 + x^\nu\partial_\nu)\phi(x)\Big) e^{-S_s - S_m + J\cdot\phi} \\ &= \epsilon \int d^4x \Bigg[(m^2 - j(x))\Big(\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)^2 + J(x)(1 + x^\nu\partial_\nu)\frac{\delta}{\delta J(x)}\Bigg] \int \mathcal{D}\phi e^{-S+J\cdot\phi}, \end{aligned} \tag{I.6}$$

ill. egy másik alakban

$$\delta\mathcal{R} = \epsilon \int d^4x \Bigg[(m^2 - j(x))2\frac{\delta}{\delta j(x)} + J(x)(1 + x^\nu\partial_\nu)\frac{\delta}{\delta J(x)}\Bigg] \int \mathcal{D}\phi e^{-S+J\cdot\phi}. \tag{I.7}$$

A nevező megváltozása,

$$\delta\mathcal{N} = \epsilon \int d^4x \Bigg[m^2\Big(\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)^2\Bigg] \int \mathcal{D}\phi e^{-S+J\cdot\phi}\Big|_{J=j=0}. \tag{I.8}$$

Másrészt

$$\delta e^{W[J,j]} \quad = \quad \frac{\delta\mathcal{R}}{\mathcal{N}} - \frac{\mathcal{R}\delta\mathcal{N}}{(\mathcal{N})^2} = \frac{\delta\mathcal{R}}{\mathcal{N}} - e^W \frac{\delta\mathcal{N}}{\mathcal{N}}. \tag{I.9}$$

Mivel a pályaintegrál változótranszformációjáról van szó, ez a megváltozás zérus, azaz

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta\mathcal{R}}{\mathcal{N}} - e^W \frac{\delta\mathcal{N}}{\mathcal{N}} \\ &= \epsilon \int d^4x \left[(m^2 - j(x)) \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^2 + J(x)(1 + x^\nu \partial_\nu) \frac{\delta}{\delta J(x)} \right] e^{W[J,j]} \\ &\quad - e^{W[J,j]} \epsilon \left\{ \left[\int d^4x m^2 \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^2 \right] e^{W[J,j]} \right\}_{J=j=0}, \end{aligned} \tag{I.10}$$

ill. egy másik alakban

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon \int d^4x \left[2(m^2 - j(x)) \frac{\delta}{\delta j(x)} + J(x)(1 + x^\nu \partial_\nu) \frac{\delta}{\delta J(x)} \right] e^{W[J,j]} \\ &\quad - e^{W[J,j]} \epsilon \left\{ \left[\int d^4x 2m^2 \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] e^{W[J,j]} \right\}_{J=j=0}. \end{aligned} \tag{I.11}$$

Mivel ennek tetszőleges infinitezimális ϵ esetén fenn kell állnia, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \left[(m^2 - j(x)) \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^2 + J(x)(1 + x^\nu \partial_\nu) \frac{\delta}{\delta J(x)} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \left[\int d^4x m^2 \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^2 \right] e^{W[J,j]} \right\}_{J=j=0} \right] e^{W[J,j]}, \end{aligned} \tag{I.12}$$

ill. másik alakban:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \left[(m^2 - j(x)) 2 \frac{\delta}{\delta j(x)} + J(x)(1 + x^\nu \partial_\nu) \frac{\delta}{\delta J(x)} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \left[\int d^4x m^2 2 \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] e^{W[J,j]} \right\}_{J=j=0} \right] e^{W[J,j]}, \end{aligned} \tag{I.13}$$

A továbbiakban felhasználhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^2 e^W &= \left[\frac{\delta^2 W}{\delta J(x) \delta J(x)} + \left(\frac{\delta W}{\delta J(x)} \right)^2 \right] e^W, \\ \frac{\delta e^W}{\delta J(x)} &= \frac{\delta W}{\delta J(x)} e^W, \\ \frac{\delta e^W}{\delta j(x)} &= \frac{\delta W}{\delta j(x)} e^W \end{aligned} \tag{I.14}$$

aminek a segítségével az azonosság alábbi alakjait kapjuk, ha (I.12)-ben a $j = 0$ helyettesítéssel élünk,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int d^4x \Bigg[m^2 \left[\frac{\delta^2 W}{\delta J(x)\delta J(x)} + \left(\frac{\delta W}{\delta J(x)} \right)^2 \right] + J(x)(1 + x^\nu \partial_\nu) \frac{\delta W}{\delta J(x)} \\
&\quad - \left\{ m^2 \int d^4x \left[\frac{\delta^2 W}{\delta J(x)\delta J(x)} + \left(\frac{\delta W}{\delta J(x)} \right)^2 \right]_{J=0} \right\} \Bigg], \qquad \text{(I.15)}
\end{aligned}
$$

ill. (I.13) alapján,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int d^4x \Bigg[(m^2 - j(x)) 2 \frac{\delta W}{\delta j(x)} + J(x)(1 + x^\nu \partial_\nu) \frac{\delta W}{\delta J(x)} \\
&\quad - \left\{ \left[\int d^4x m^2 2 \frac{\delta W}{\delta j(x)} \right] \right\}_{J=j=0} \Bigg]. \qquad \text{(I.16)}
\end{aligned}
$$

Ez a sérülő skálainvarianciára vonatkozó Ward-azonosság különböző alakokban, amelyet (I.15)-ban az elemi tér összefüggő Green-függvényeinek $W[J, j = 0] = W[J]$ generáló funkcionáljára, (I.16)-ban pedig a ϕ^2 betétrészeket tartalmazó összefüggő Green-függvények $W[J, j]$ generáló funkcionáljára írtunk fel.

I.1.2. Az effektív hatásra vonatkozó alak

A $J(x)$ külső forrás tekintetében végzett Legendre-transzformációval az azonosság mindkét alakját átírhatjuk a $\Gamma[\varphi, j]$, ill. $\Gamma[\varphi] = \Gamma[\varphi, j = 0]$ effektív hatásra, azaz az elemi tér 1PI Green-függvényeinek generáló funkcionáljára vonatkozó azonosság alakjába. Utóbbihoz fel kell használjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta W[J,j]}{\delta J(x)} &= \varphi(x), \\
\frac{\delta \Gamma[\varphi, j]}{\delta \varphi(x)} &= J(x), \\
\int d^4z W^{(2)}_{x,z}[J,j] \Gamma^{(2)}_{z,y}[\varphi, j] &= \delta(x - y). \qquad \text{(I.17)}
\end{aligned}
$$

A Legendre-transzformáció szempontjából a $j(x)$ forrás, mint a W és a Γ funkcionálok paramétere jelenik meg, úgyhogy $\delta W/\delta j(y) = -\delta\Gamma/\delta j(y)$. A Ward-azonosság (I.15) alakját átírhatjuk az alábbi alakba:

$$
0 = \int d^4x \left[\frac{\partial \Gamma[\varphi]}{\partial \varphi(x)} (1 + x^\nu \partial_\nu) \varphi(x) + m^2 \left(\varphi^2 + \Gamma^{(2)-1}_{x,x}[\varphi] - \Gamma^{(2)-1}_{x,x}[0] \right) \right]. \qquad \text{(I.18)}
$$

Ezzel megkaptuk a skálaszimmetria sérülését kifejező Ward-azonosságnak az effektív hatásra vonatkozó alakját. Itt $\Gamma^{(2)-1}_{x,y}[\varphi]$ az önkölcsönható skalártér (összefüggő) inverz propagátora φ klasszikus tér (ill. a neki megfelelő $J(x)$ külső forrás) jelenlétében. Rendezzük ezt át az

$$
\int d^4x \frac{\partial \Gamma[\varphi]}{\partial \varphi(x)} (1 + x^\nu \partial_\nu) \varphi(x) = - \int d^4x m^2 \left(\varphi^2 + \Gamma^{(2)-1}_{x,x}[\varphi] - \Gamma^{(2)-1}_{x,x}[0] \right) \qquad \text{(I.19)}
$$

alakba. Mivel $m^2=0$ esetén a ϕ^4 elmélet $d=4$ dimenzióban skálainvariáns, azért a fenti azonosság baloldala sértetlen skálaszimmetria esetén zérus lenne. Az, hogy az azonosság jobboldalán $m^2\neq 0$ esetén az m^2-tel arányos zérustól különböző kifejezés áll, mutatja, hogy a tömeg el nem tűnő értéke sérti a skálaszimmetriát.

Az (I.16) alakban felírt azonosságot transzformálva át a $\Gamma[\varphi,j]$ effektív hatásra vonatkozó azonossággá, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}0 &= \int d^4x\left[-(m^2-j(x))2\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta j(x)}+\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta\varphi(x)}(1+x^\nu\partial_\nu)\varphi(x)\right]\\&\quad+\left[\int d^4x m^2 2\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta j(x)}\right]_{\varphi=j=0},\end{aligned}\tag{I.20}$$

$$\int d^4x\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta\varphi(x)}(1+x^\nu\partial_\nu)\varphi(x) = \int d^4x\left[(m^2-j(x))2\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta j(x)}-m^2 2\left[\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta j(x)}\right]_{\varphi=j=0}\right].\tag{I.21}$$

I.1.3. Az 1PI vertexfüggvényekre vonatkozó összefüggések

Ebből az alakból j szerinti l-szeres és φ szerinti n-szeres funkcionálderiválás után, majd $j=\varphi=0$ heleyen véve az eredményt a sérülő skálaszimmetria következményeként az 1PI vertexfüggvények és a φ^2 betétrészeket tartalmazó 1PI vertexfüggvények közötti kapcsolatokat kapunk a Ward-azonosságból. Megfelelő számú funkcionálderiválás kijelölése után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\frac{\delta^{l+n}}{\delta j(y_1)\cdots\delta j(y_l)\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)}\int d^4x\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta\varphi(x)}(1+x^\nu\partial_\nu)\varphi(x)\Bigg|_{j=\varphi=0}\\&=\frac{\delta^{l+n}}{\delta j(y_1)\cdots\delta j(y_l)\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)}\int d^4x(m^2-j(x))2\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta j(x)}\Bigg|_{j=\varphi=0},\end{aligned}\tag{I.22}$$

ahonnan a deriválások elvégzése után az alábbi adódik:

$$\begin{aligned}&\frac{\delta^{n}}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)}\int d^4x[(1+x^\nu\partial^x_\nu)\varphi(x)]\frac{\delta^l}{\delta j(y_1)\cdots\delta j(y_l)}\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta\varphi(x)}\Bigg|_{j=\varphi=0}\\&=\frac{\delta^{l}}{\delta j(y_1)\cdots\delta j(y_l)}\int d^4x(m^2-j(x))2\frac{\delta^n}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)}\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta j(x)}\Bigg|_{j=\varphi=0},\end{aligned}\tag{I.23}$$

ill.

$$\begin{aligned}&\int d^4x\sum_{j=1}^n[(1+x^\nu\partial^x_\nu)\delta(x-x_j)]\Gamma^{(l,n)}(y_1,\ldots,y_l;x_1,\ldots,x_{j-1},x,x_{j+1},\ldots,x_n)\\&=2m^2\int d^4x\Gamma^{(l+1,n)}(x,y_1,\ldots,y_l;x_1,\ldots,x_n)\\&\quad-2\int d^4x\sum_{i=1}^l\delta(x-y_i)\Gamma^{(l,n)}(y_1,\ldots,y_{i-1},x,y_{i+1},\ldots,y_l,x_1,\ldots,x_n),\end{aligned}\tag{I.24}$$

ahonnan a Dirac-deltákat felhasználva x szerinti integrálás után a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned}
&n\Gamma^{(l,n)}(y_1,\ldots,y_l;x_1,\ldots,x_n)-\sum_{j=1}^{n}\partial_\nu^j[x_j^\nu\Gamma^{(l,n)}(y_1,\ldots,y_l;x_1,\ldots,x_n)]\\
&= 2m^2\int d^4x\Gamma^{(l+1,n)}(x,y_1,\ldots,y_l;x_1,\ldots,x_n)-2l\Gamma^{(l,n)}(y_1,\ldots,y_l;x_1,\ldots,x_n),
\end{aligned}\tag{I.25}$$

azaz

$$\begin{aligned}
&(n-4+2l-\sum_{j=1}^{n}x_j^\nu\partial_\nu^j)\Gamma^{(l,n)}(y_1,\ldots,y_l;x_1,\ldots,x_n)\\
&= 2m^2\int d^4x\Gamma^{(l+1,n)}(x,y_1,\ldots,y_l;x_1,\ldots,x_n).
\end{aligned}\tag{I.26}$$

I.1.4. Kapcsolat a ϕ^2-, azaz tömegbetétrészt tartalmazó 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljával

Érdemes még kicsit elidőzni a csupasz elmélet skálaszimmetriára vonatkozó Ward-azonosságának (I.19), ill. (I.21) alakjainál. Vezessük be a

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\varphi^2}[\varphi] &= -\frac{1}{2}\int d^4x m^2\left(\varphi^2+\Gamma^{(2)-1}_{x,x}[\varphi]-\Gamma^{(2)-1}_{x,x}[0]\right)\\
&= \frac{1}{2}\int d^4x\left[(m^2-j(x))2\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta j(x)}-m^2 2\left[\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta j(x)}\right]_{\varphi=j=0}\right]_{j=0}\\
&= m^2\int d^4x\left[\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta j(x)}-\left[\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta j(x)}\right]_{\varphi=0}\right]_{j=0}.
\end{aligned}\tag{I.27}$$

funkcionált. Ezt tekinthetjük úgy, mint az 1 darab $\frac{1}{2}m^2\varphi^2$ operátor-betétrésszel rendelkező 1PI diagramok generáló funkcionálját. Segítségével a csupasz elméletben a skálaszimmetriával kapcsolatos Ward-azonosság

$$\int d^4x\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}(1+x^\nu\partial_\nu)\varphi(x) = 2\Gamma_{\varphi^2}[\varphi]\tag{I.28}$$

alakot ölt.

Azt is vegyük észre, hogy a csupasz elméletben $\Gamma[\varphi,j]$ j szerinti funkcionálderiváltja a $j=0$ helyen megegyezik a csupasz tömeg szerinti parciális deriváltjával $j=0$-nál. Ez annak a következménye, hogy j és m^2 a pályaintegrál alakjában felírt csupasz e^W-ben paraméterek, amelyek szerinti deriválás $j=0$ esetén ugyanazt az $\frac{1}{2}m^2\phi^2$ szorzót eredményezi a pályaintegrál integrandusában:

$$m^2\frac{\delta\Gamma[\varphi,j]}{\delta j(x)}\bigg|_{j=0} = -m^2\partial_{m^2}\Gamma[\varphi,j=0]\bigg|_{g,\Lambda=const.}\tag{I.29}$$

Ez azonban akkor azt is jelenti, hogy

$$\Gamma_{\varphi^2}([\varphi],m,g) = -\frac{1}{2}m\partial_m\Gamma([\varphi],m,g)\bigg|_{g,\Lambda=const.}.\tag{I.30}$$

A csupasz elmélet vertexfüggvényeinek generáló funkcionálja tehát eleget tesz a

$$\int d^4x \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}(1+x^\nu\partial_\nu)\varphi(x) \quad = \quad -m\partial_m\Gamma([\varphi],m,g)\Big|_{g,\Lambda=const.} \tag{I.31}$$

azonosságnak.

I.2. A renormálás okozta skála-anomália

I.2.1. A Callan-Symanzik-egyenlet

Eddig a sérülő skálaszimmetria következményeként a csupasz elméletben fennálló Ward-azonosság különböző alakjait határoztuk meg. Amikor még véges Λ levágás mellett végrehajtjuk a renormálás programját, és a renormált effektív hatásban megjelennek az ellentag-vertexeknek megfelelő járulékok is, akkor a skálaszimmetriára vonatkozó Ward-azonosság módosul. A renormált és a csupasz vertexfüggvények generáló funkcionáljai közti kapcsolat,

$$\Gamma_r([\varphi],m_r,g_r) \quad = \quad \Gamma([Z^{1/2}\varphi],m,g), \tag{I.32}$$

ahol feltüntettük a renormált és a csupasz csatolástól, tömegtől való függéseket is. A jobboldalon a hullámfüggvény renormálás és a csupasz csatolási állandó, ill. tömeg a Λ levágásnak és a renormált paramétereknek a függvénye, ezeknek a kifejezéseknek a $\Lambda\to\infty$ határértéke végtelen. Dimenzionális okoknál fogva a $d=4$ dimenzióban a Z, g és m^2/m_r^2 csupasz mennyiségek csak a Λ^2/m_r^2 hányadostól függhetnek.

A renormálás következtében megváltoznak a vertexfüggvények skálatulajdonságai, vagyis nem létezik olyan renormálási eljárás, amelynek során változatlanul maradnának a vertexfüggvények skálatulajdonságai. Ezt szokás a skálaszimmetriával kapcsolatos anomáliának nevezni. Ha az m csupasz tömeget változtatjuk, miközben rögzített értéken tartjuk a csupasz g csatolási állandót és a Λ levágást, akkor az m_r renormált tömegnek és a g_r renormált csatolási állandónak úgy kell változnia, hogy fennálljon a

$$0 \quad = \quad dg = \frac{\partial g}{\partial m_r}dm_r + \frac{\partial g}{\partial g_r}dg_r \tag{I.33}$$

összefüggés a renormált tömeg és csatolási állandó dm_r és dg_r megváltozása között. Ennek alapján a következőket írhatjuk:

$$-2\frac{dm}{m}\Gamma_{\varphi^2}([\varphi],m,g) \quad = \quad d\Gamma([\varphi],m,g)\Big|_{g,\Lambda=const.}. \tag{I.34}$$

Ha most a baloldalon $Z^{1/2}\varphi$-re cseréljük a változót, akkor a jobboldalon is áttérhetünk erre a változóra, de akkor le kell vonjuk a Z megváltozásából adódó tagot:

$$-2\frac{dm}{m}\Gamma_{\varphi^2}([Z^{1/2}\varphi],m,g) \quad = \quad \left[d\Gamma([Z^{1/2}\varphi],m,g) - \frac{1}{2}d(\ln Z)\int d^4x\varphi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\Gamma([Z^{1/2}\varphi],m,g)\right]_{g,\Lambda=const.} \tag{I.35}$$

A jobboldalt viszont kifejezhetjük a renormált vertexfüggvények generáló funkcionájával:

$$-2\frac{dm}{m}\Gamma_{\varphi^2}([Z^{1/2}\varphi],m,g) \quad = \quad \left[d\Gamma_r([\varphi],m_r,g_r) - \frac{1}{2}d(\ln Z)\int d^4x\varphi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\Gamma_r([\varphi],m_r,g_r)\right]_{g,\Lambda=const.} \tag{I.36}$$

úgyhogy a

$$-2\frac{dm}{m}\Gamma_{\varphi^2}([Z^{1/2}\varphi],m,g) \;=\; \left[dm_r\frac{\partial}{\partial m_r}+dg_r\frac{\partial}{\partial g_r}-\frac{1}{2}d(\ln Z)\int d^4x\varphi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\right]\Gamma_r([\varphi],m_r,g_r)\Big|_{g,\Lambda=const.} \tag{I.37}$$

összefüggést kapjuk.

Ha most hasonlóan, mint a csupasz effektív hatás esetében, elvégezzük a renormált $\Gamma_r([\varphi],m_r,g_r)$ funkcionálon a dimenzióanalízisnek megfelelő levezetést, akkor a (I.31) összefüggéssel analóg módon azt kapjuk, hogy

$$\int d^4x\frac{\delta\Gamma_r([\varphi],m_r,g_r)}{\delta\varphi(x)}(1+x^\nu\partial_\nu)\varphi(x) \;=\; -m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\Gamma_r([\varphi],m_r,g_r). \tag{I.38}$$

Helyettesítsük ezt be az (I.37) egyenlőség jobboldalába, miután mindkét oldalt szoroztuk formálisan m_r/dm_r-rel:

$$\begin{aligned}&\left[\int d^4x\left[-\left(1+x^\nu\partial^x_\nu+\frac{m_r}{2}\frac{\partial\ln Z(\Lambda/m_r,g)}{\partial m_r}\right)\varphi(x)\right]\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}+m_r\frac{\partial g_r(\Lambda/m_r,g)}{\partial m_r}\frac{\partial}{\partial g_r}\right]\Gamma_r([\varphi],m_r,g_r)\\ &=\; -2\frac{m_r}{m}\frac{\partial m(\Lambda/m_r,g_r)}{\partial m_r}\Gamma_{\varphi^2}([Z^{1/2}\varphi],m,g).\end{aligned} \tag{I.39}$$

Itt a baloldalon a parciális deriváltak g és Λ/m_r rögzített értéke mellett történnek, a jobboldalon viszont a csupasz m tömeget kell a renormált tömeg és csatolási állandó függvényének tekinteni a $\partial m/\partial m_r$ deriválás során. Előlegezzük meg, hogy a baloldalon álló együtthatóknak létezik véges $\Lambda\to\infty$ határértéke, ha g_r és m_r rögzítve van. Ekkor dimenzionális okoknál fogva a dimenziótlan együttható-függvények csak az ugyancsak dimenziótlan g_r-től függhetnek. Vezessük be ezért a következő függvényeket:

$$\begin{aligned}\beta(g_r) &= \lim_{\Lambda\to\infty} m_r\frac{\partial g_r(\Lambda/m_r,g)}{\partial m_r}\Big|_{g=const.} = -\lim_{\Lambda\to\infty}\Lambda\frac{\partial g_r(\Lambda/m_r,g)}{\partial\Lambda}\Big|_{g=const.},\\ \gamma(g_r) &= \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{m_r}{2}\frac{\partial\ln Z(\Lambda/m_r,g)}{\partial m_r}\Big|_{g=const.} = -\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{\Lambda}{2}\frac{\partial\ln Z(\Lambda/m_r,g)}{\partial\Lambda}\Big|_{g=const.}.\end{aligned} \tag{I.40}$$

A határérték azt jelenti, hogy ha perturbációszámítással határozzuk meg ezeket az együttható-függvényeket, akkor minden olyan tagot elhagyhatunk, amely a $\Lambda\to\infty$ határesetben zérushoz tart.

Foglalkozzunk a továbbiakban a jobboldallal. A ϕ^2 összetett operátor betétrészt tartalmazó 1PI vertexfüggvényekről az öszetett operátorok renormálását tárgyalva megállapítottuk, hogy multiplikatív módon renormálódnak, a φ^2 betétrészhez lineárisan csatoló forrás szerinti első funkcionális derivált Z_2-vel szorzódik (ha nincsenek külső lábak, azaz $n=0$), így

$$Z_2\Gamma_{\varphi^2}([Z^{1/2}\varphi],m,g) \;=\; \Gamma_{\varphi^2\ r}([\varphi],m_r,g_r), \tag{I.41}$$

ahol a jobboldalon az 1 darab ϕ^2 betétrsszel rendelkező renormált 1PI vertexfüggvények generáló funkcionálja szerepel, ami véges. Az (I.39) egyenlet jobboldalát is ki tudjuk így fejezni renormált funkcionállal. Vezessük be ehhez a további $\delta(g_r)$ együttható-függvényt az

$$1+\delta(g_r) \;=\; \lim_{\Lambda\to\infty}Z_2^{-1}\frac{m_r}{m}\frac{\partial m(\Lambda/m_r,g_r)}{\partial m_r} \tag{I.42}$$

definícióval. A bevezetett együttható-függvények segítségével az (I.39) egyenlet az alábbi alakba írható át a $\Lambda \to \infty$ határesetben:

$$\beta(g_r)\frac{\partial}{\partial g_r}\Gamma_r([\varphi], m_r, g_r) - \int d^4x \left[\left(1 + x^\nu \partial_\nu^x + \gamma(g_r)\right)\varphi(x)\right] \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\Gamma_r([\varphi], m_r, g_r)$$
$$= \quad -2[1+\delta(\gamma)]\Gamma_{\varphi^2\ r}([\varphi], m_r, g_r). \tag{I.43}$$

(Megjegyezzük, hogy az Itzykson-Zuber féle konvencióban az effektív hatás a miáltalunk értelmezett $\Gamma[\varphi]$ mínusz egyszerese, a mi $\Gamma_{\varphi^2}[\varphi]$ funkcionálunk viszont megegyezik az Itzykson-Zuber-féle $\Gamma_\Delta[\varphi]$ fumkcionállal.) A (I.43) egyenletet nevezzük a renormált elméletre vonatkozó Callan-Symanzik-egyenletnek.

Hasonlítsuk össze a (I.43) Callan-Symanzik-egyenletet a csupasz elméletre vonatkozó Ward-azonossággal. Az eltérést, amit a renormálás okoz, a $\beta(g_r)$, $\gamma(g_r)$ és $\delta(g_r)$ együttható-függvények megjelenése írja le. Ezekről be lehet látni, hogy ultraibolya-végesek. Ezek az együttható-függvények a skálatörvényeknek a renormálás, azaz az ellentagok miatti módosulását írják le a Ward-azonosságok megváltozása révén. Ez is egyfajta anomália. A képletből felismerjük, hogy a térmennyiség skáladimenziója által meghatározott $(d_\phi + x\cdot\partial_x)\varphi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}$ kifejezésben $d_\phi + \gamma(g_r)$ jelenik meg, vagyis a renormálás miatt a renormált csatolási állandó értékétől függő módon megváltozik a térmennyiség skáladimenziója. Ezért $\gamma(g_r)$-et a térmennyiség anomális dimenziójának nevezzük. A $\beta(g_r)$ beta-függvény annak a következményét őrzi, hogy a renormált és a csupasz csatolási állandó közti kapcsolatban jelen van a dimenziós Λ UV levágás, ill. hogy infinitezimális skálatranszformáció során a csatolási állandónak is infinitezimálisan meg kell változnia. A $\delta(g_r)$ együttható-függvényt pedig utólag bele lehet olvasztani a ϕ^2 betétrész véges renormálásába.

I.2.2. Az n-pont vertexfüggvényekre vonatkozó Callan-Symanzik-egyenletek és az együttható-függvények végessége

Most már csak az maradt hátra, hogy belássuk az együttható-függvények végességét, amit eddig megelőlegeztünk, ugyanis az együtható-függvények definíciójakor feltettük, hogy ezek $\Lambda \to \infty$ esetén létező véges határértékek. Ennek a belátásához deriváljuk funkcionálisan n-szer φ szerint a Callan-Symanzik-egyenlet mindkét oldalát:

$$\beta(g_r)\frac{\partial}{\partial g_r}\Gamma_r^{(n)}(x_1,\dots,x_n; m_r, g_r) - \int d^4x \left[\left(1 + x^\nu \partial_\nu^x + \gamma(g_r)\right)\varphi(x)\right]\Gamma_r^{(n+1)}(x, x_1,\dots,x_n; m_r, g_r)$$
$$- \int d^4x \left[\left(1 + x^\nu \partial_\nu^x + \gamma(g_r)\right)\sum_{j=1}^n \delta(x-x_j)\right]\Gamma_r^{(n)}(x_1,\dots,x_{j-1}, x, x_{j+1},\dots,x_n; m_r, g_r)$$
$$= \quad -2[1+\delta(\gamma)]\Gamma^{(n)}_{\varphi^2\ r}(x_1,\dots,x_n; m_r, g_r), \tag{I.44}$$

ahonnan $\varphi = 0$ helyettesítés után

$$\beta(g_r)\frac{\partial}{\partial g_r}\Gamma_r^{(n)}(x_1,\dots,x_n; m_r, g_r) - n[1+\gamma(g_r)]\Gamma_r^{(n)}(x_1,\dots,x_n; m_r, g_r)$$
$$+ \sum_{j=1}^n \partial_\nu^j\left(x_j^\nu \Gamma_r^{(n)}(x_1,\dots,x_n; m_r, g_r)\right)$$
$$= \quad -2[1+\delta(\gamma)]\Gamma^{(n)}_{\varphi^2\ r}(x_1,\dots,x_n; m_r, g_r), \tag{I.45}$$

azaz

$$\beta(g_r)\frac{\partial}{\partial g_r}\Gamma_r^{(n)}(x_1,\dots,x_n; m_r, g_r) - n[1+\gamma(g_r)]\Gamma_r^{(n)}(x_1,\dots,x_n; m_r, g_r)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(4+x_j^{\nu}\partial_{\nu}^{j})\Gamma_r^{(n)}(x_1,\ldots,x_n;m_r,g_r)$$
$$= \quad -2[1+\delta(\gamma)]\Gamma_{\varphi^2\ r}^{(n)}(x_1,\ldots,x_n;m_r,g_r), \tag{I.46}$$

adódik. Vezessük be a vertexfüggvények Fourier-transzformáltjait,

$$\Gamma_r^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)=\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}e^{-ip_j\cdot x_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_{j=1}^{n}p_j)\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p),$$
$$\Gamma_{\varphi^2\ r}^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)=\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}e^{-ip_j\cdot x_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_{j=1}^{n}p_j)\tilde{\Gamma}_{\varphi^2\ r}^{(n)}(p), \tag{I.47}$$

ahol elhagytuk annak a jelölését, hogy a renormált vertexfüggvények a renormált tömegtől és csatolási állandótól függnek, ill. a Fourier-transzformáltak külső impulzusoktól való függését csak szimbólikusan jelöltük. A továbbiakban fel kell még használjuk, hogy

$$x_j\cdot\partial^j e^{-ip_j\cdot x_j} \quad = \quad i(-ip_j)\cdot\frac{\partial}{\partial p_j}e^{-ip_j\cdot x_j}=p_j\cdot\frac{\partial}{\partial p_j}e^{-ip_j\cdot x_j}, \tag{I.48}$$

$$\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}e^{-ip_j\cdot x_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_{j=1}^{n}p_j)f(p)$$
$$= \quad \left(\prod_{j=1}^{n-1}\int\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}\right)e^{-i\sum_{j=1}^{n-1}p_j\cdot(x_j-x_n)}f(p)\big|_{p_n=-\sum_{j=1}^{n-1}p_j} \tag{I.49}$$

és

$$\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot\partial^j\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}e^{-ip_j\cdot x_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_{j=1}^{n}p_j)\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p)$$
$$= \quad \left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_{j=1}^{n}p_j)\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p)\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot\partial^j e^{-i\sum_{j=1}^{n-1}p_j\cdot(x_j-x_n)}$$
$$= \quad \left(\prod_{j=1}^{n-1}\int\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}\right)\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p)\left[\sum_{j=1}^{n-1}(x_j-x_n)\cdot\partial^j+x_n\cdot\sum_{j=1}^{n}\partial^j\right]e^{-i\sum_{j=1}^{n-1}p_j\cdot(x_j-x_n)}$$
$$= \quad -\left(\prod_{j=1}^{n-1}\int\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}\right)\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p)\left[\sum_{j=1}^{n-1}p_j\cdot\frac{\partial}{\partial p_j}+x_n\cdot\left(\sum_{j=1}^{n-1}p_j-\sum_{j=1}^{n-1}p_j\right)\right]e^{-i\sum_{j=1}^{n-1}p_j\cdot(x_j-x_n)}$$
$$= \quad \left(\prod_{j=1}^{n-1}\int\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}\right)e^{-i\sum_{j=1}^{n-1}p_j\cdot(x_j-x_n)}\sum_{j=1}^{n-1}p_j\cdot\frac{\partial}{\partial p_j}\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p). \tag{I.50}$$

Mindezeket figyelembe véve a Callan-Symanzik-egyenlet a renormált vertexfüggvények Fourier-transzformáltjaira az alábbi egyenleteket adja:

$$\beta(g_r)\frac{\partial}{\partial g_r}\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p)+\Big(4-n[1+\gamma(g_r)]\Big)\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p)-\sum_{j=1}^{n-1}p_j\cdot\frac{\partial}{\partial p_j}\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p) \quad = \quad -2[1+\delta(g_r)]\tilde{\Gamma}_{\varphi^2\ r}^{(n)}(p). \tag{I.51}$$

Mielőtt rátérnénk az együttható-függvények végességének belátására, hasonlítsuk össze a most kapott, renormált vertexfüggvényekre vonatkozó (I.51) egyenletet a csupasz vertexfüggvényekre vonatkozó (I.26) egyenlet $l = 0$ esetével, amely Fourier-transzformáció után az

$$\left(4 - n - \sum_{j=1}^{n-1} p_j \cdot \frac{\partial}{\partial p_j}\right)\tilde{\Gamma}^{(n)}(p) \quad = \quad -2\tilde{\Gamma}^{(n)}_{\varphi^2}(p) \tag{I.52}$$

alakot ölti. Természetesen az összehasonlítás a vertexfüggvények esetében is mutatja, hogy a bevezetett együttható-függvények révén van figyelembe véve a renormálás miatti anomális skálázás.

Térjünk most rá az Callan-Symanzik-féle együttható-függvények végességének belátására. Induljunk ki abból, hogy a (I.51) egyenletben szereplő vertexfüggvényeket a korábban már ismertetett módon a

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}^{(2)}_r(p^2 = 0) = m_r^2, \qquad \frac{\partial}{\partial p^2}\tilde{\Gamma}^{(2)}_r(p^2)\bigg|_{p^2=0} = 1, \\
&\tilde{\Gamma}^{(4)}_r(s,t,u)\bigg|_{p=0} = g_r, \\
&\tilde{\Gamma}^{(2)}_{\varphi^2\ r}(p = 0) = -\tilde{\Gamma}^{l=1,n=2}_r m_r^2 = -m_r^2
\end{aligned} \tag{I.53}$$

renormálási feltételekkel renormáltuk, s ekkor a „kölcsönhatással felöltözködött” inverz propagátor

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_r(p^2) \quad = \quad p^2 + m_r^2 \tag{I.54}$$

alakú. Tekintsük most a (I.51) egyenletet az $n = 2$ speciális esetben. Mivel

$$p \cdot \frac{\partial}{\partial p}(p^2 + m_r^2) \quad = \quad 2p^2, \tag{I.55}$$

a renormálási feltételeket figyelembe véve azt kapjuk kicsiny $p^2 \to 0$ külső impulzus esetén, hogy

$$-2p^2 + [4 - 2 - 2\gamma(g_r)](p^2 + m_r^2) \quad = \quad 2[1 + \delta(g_r)]\left(m_r^2 - \frac{\partial\Gamma^{(2)}_{\varphi^2\ r}(p^2)}{\partial p^2}\bigg|_{p=0} p^2\right). \tag{I.56}$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\gamma(g_r) &= [1 + \delta(g_r)]\frac{\partial\Gamma^{(2)}_{\varphi^2\ r}(p^2)}{\partial p^2}\bigg|_{p=0}, \\
\gamma(g_r) &= -\delta(g_r).
\end{aligned} \tag{I.57}$$

Ezek az egyenletek viszont azt jelentik, hogy mindkét bennük szereplő együttható-függvény véges. Ha ezek végesek, akkor a (I.51) egyenletben szereplő $\beta(g_r)$ együttható-függvénynek is végesnek kell lennie.

I.2.3. A Callan-Symanzik-egyenletnek a tömeg futásával kapcsolatos skálázást leíró alakja

Végül mutassuk meg, hogy ugyanazt az egyenletet kaptuk, mint amit a 2.5. fejezetben vezettünk le. Pontosabban, ha kicsit más alakban írjuk fel az (I.51) egyenletet, akkor meg tudjuk mutatni, hogy az éppen a (2.69) egyenlet $l = 0$ esete. A Callan-Symanzik-egyenlet (I.51) alakja tulajdonképpen a skálaszimmetria renormálás miatti anomális sérülését kifejező Ward-azonosság. A (2.69) alakban a Callan-Symanzik-egyenlet azt fejezi ki, hogy ha fut az m_r renormált tömeg, miközben a csupasz m tömeg és g csatolási állandó valamint a Λ levágás rögzítve van, akkor a g_r renormált csatolási állandónak változnia kell a renormált tömeg függvényeként, $g_r = g_r(m_r)$. A csatolási állandó ezen „futásának" hogyanját fejezi ki a (2.69) alak. A Callan-Symanzik-egyenlet (2.69) alakjának fő előnye, hogy kapcsolatot teremt az azonos csupasz elmélethez tartozó különböző renormált tömegű renormált elméletek között. Ezáltal felkínálja a lehetőséget, hogy kapcsolatot találjunk a tömeges és a zérus tömegű, úgynevezett „tömeg nélküli" elmélet között.

Ha felhasználjuk a (I.38) egyenletet, akkor levezetésünkből látszik, hogy az (I.43) egyenlet a

$$\beta(g_r)\frac{\partial}{\partial g_r}\Gamma_r[\varphi] + m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\Gamma_r[\varphi] - \int d^4x\gamma(g_r)\varphi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\Gamma_r[\varphi] \quad = \quad -2[1+\delta(g_r)]\Gamma_{\varphi^2\ r}[\varphi], \tag{I.58}$$

alakot ölti. Ezt funkcionálisan deriváljuk n-szer φ szerint, majd a $\varphi = 0$ helyen vesszük. Az eredményül kapott egyenlet mindkét oldalát Fourier-transzformálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\beta(g_r)\frac{\partial}{\partial g_r}\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_1,\ldots,p_n) + m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)) - n\gamma(g_r)\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)\\
&= \quad -2[1+\delta(g_r)]\tilde{\Gamma}^{(n)}_{\varphi^2\ r}(p_1,\ldots,p_n)\\
&= \quad 2m_r^2\tilde{\Gamma}_r^{(1,n)}(0;p_1,\ldots,p_n).
\end{aligned} \tag{I.59}$$

A 2.5. fejezetben használt együttható-függvényeket a mostani levezetésünkben használtakkal

$$\gamma(g_r) = \frac{1}{2}\eta(g_r), \qquad 2[1+\delta(g_r)] = \sigma(g_r) \tag{I.60}$$

kapcsolatba hozzuk, akkor a (I.59) egyenlet tényleg megegyezik a (2.69) egyenlet $l = 0$ esetével. A $\delta(g_r) = -\gamma(g_r)$ reláció pedig a 2.5. fejezetben talált $\sigma = 2 - \eta$ relációra vezet.