MÉRTÉKELMÉLETEK ÉS ALAPVETŐ KÖLCSÖNHATÁSOK

Sailer Kornél

(Speciális előadások)

Kossuth Lajos Tudományegyetem
Debrecen
1996.

I. AZ ABELI MÉRTÉKELMÉLETEK

Ebben a részben először a zérustömegű, folytonos lokális $U(1)$ szimmetriával rendelkező vektortér, azaz az ábeli mértéktér esetét a tömeges vektortér $m \to 0$ határeseteként fogjuk tárgyalni. A tömegtag (a mértékrögz´ itő taggal együtt) explicit módon sérti a lokális folytonos szimmetriát. Most is. akárcsak globális folytonos szimmetria explicit sérülése esetén, a Ward-Takahashi-azonosságok őrzik az explicit módon sértett szimmetria emlékét. Ennek alapján megmutatjuk, hogy az ellentagoknak a hurkok száma szerinti egyes rendekben mértékinvariánsnak kell lenni, és hogy ezért úgy a tömegnélküli mint a tömeges elmélet renormálható. Külön foglalkozunk az ábeli Higgs-mechanizmussal. Ekkor az ábeli mértéktér egy olyan skalártérhez van csatolva minimális csatolással, amelynek a vákuuma spont'an sérti az $U(1)$ lokális szimmetriát. Megmutatjuk, hogy a zérustömegű Goldstone-bozonok most nem jelennek meg, hanem beépülnek a mértéktér longitudinális komponensébe. Ennek következtében a vektortér tömeges lesz.

1 Az $m = 0$ és $m \neq 0$ tömegű vektortér kapcsolata

A jelen fejezetben mutatunk egy eljárást arra, hogy hogyan kaphatjuk meg az $m = 0$ elmélet Green-függvényeit az $m \neq 0$ elmélet Green-függvényeiből határértékképzéssel.

Hasonlítsuk először össze az $m \neq 0$ és az $m = 0$ tömegű, Dirac-fermionokhoz minimálisan csatolt vektortér elméletét a renormálhatóság hatványkitevők leszámolásán alapuló kritériuma alapján.

Első észrevételünk az, hogy a Dirac-fermionokhoz csatolt tömeges vektortér csak $d \leq 2$ dimenzióban renormálható.

Tekintve, hogy a tömeges vektortér kanonikus dimenziója $[A]_c = d/2$, a fermiontéré pedig $[\psi]_c = (d-1)/2$, a kölcsönhatási vertex dimenziója d dimenziós téridőben:

$$[d^dx\bar{\psi}\,\not{A}\psi] \quad = \quad -d + (d-1) + \frac{d}{2} = \frac{d}{2} - 1. \tag{1.1}$$

Az elmélet renormálhatóságának feltétele, hogy a vertex dimenziója ne legyen pozitív, ahonnan $d \leq 2$ következik. Ugyanakkor az $m = 0$ tömegű vektortér kanonikus dimenziója $(d-2)/2$, s így az előzővel hasonló gondolatmenettel a kölcsönhatási vertex dimenziója $(d-4)/2$, vagyis a Dirac-fermionokhoz csatolt ábeli mértékelmélet a hatványkitevők leszámlálásának módszerével $d \leq 4$ dimenzióban adódik renormálhatónak.

A kapott eredmény első pillantásra kétségessé teszi, hogy az elektromágneses tér kvantumtérelmélete konzisztensen megfogalmazható, mint egy tömeges elmélet $m \to 0$ határesete.

Kételyeink még tovább fokozódhatnak, ha megmutatjuk, hogy a tömeges vektortér propagátorának nem létezik az $m \to 0$ határértéke.

Tekintsük a tömeges vektorteret megadó hatást:

$$S[A] \;=\; \int d^dx \left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}m^2A_\mu^2\right], \tag{1.2}$$

ahol

$$F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.3}$$

a térerősségtenzor. Az összefüggő Green-függvények generáló funkcionálja

$$W[J] \;=\; \ln\int \mathcal{D}A \exp\left\{-S[A] + \int dx J_\mu A_\mu\right\}. \tag{1.4}$$

A Gauss-integrál elvégezhető, és eredményül az alábbi kifejezést kapjuk:

$$W[J] \;=\; \frac{1}{2}\int d^dk \tilde{J}_\mu(k)\Delta_{\mu\nu}(k)\tilde{J}_\nu(-k), \tag{1.5}$$

ahol a szabad vektortér propagátora:

$$\Delta_{\mu\nu}(k) \;=\; \frac{\delta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu/m^2}{k^2+m^2}. \tag{1.6}$$

Innen látjuk, hogy nem létezik a propagátor $m \to 0$ határértéke.

Valójában jobb a helyzet, mint gondolnánk. Ha a tömeges vektortér megmaradó áramhoz csatolódik, akkor a propagátora úgy viselkedik, mint egy skalártér propagátora. Ilyenkor megvan a remény, hogy az elmélet $m \to 0$ határesete létezik és $d = 4$ dimenzióban is renormálható.

Csakugyan, ha az áram megmaradó, vis. $\partial_\mu J_\mu = 0$, azaz $k_\mu \tilde{J}_\mu(k) = 0$, akkor az összefüggő Green-függvények generáló funkcionálja az alábbi alakot ölti:

$$W[J] \;=\; \frac{1}{2}\int d^dk \tilde{J}_\mu(k)\frac{1}{k^2+m^2}\tilde{J}_\mu(-k). \tag{1.7}$$

Megmaradó áram tekintetében tehát a vektortér propagátora úgy viselkedik mint a skalártér propagátora és így létezik az $m \to 0$ határértéke. Ha bevezetjük a k_μ hullámvektorra transzverzális (három-dimenziós) hipersík és a k_μ-vel párhuzamos egy-dimenziós altér projektorát,

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^{\perp} = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \qquad \mathcal{P}_{\mu\nu}^{||} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \tag{1.8}$$

akkor a vektortér propagátorát felbonthatjuk transzverzális és longitudinális tagok összegére:

$$\Delta_{\mu\nu}(k) \;=\; \frac{1}{k^2+m^2}\mathcal{P}_{\mu\nu}^{\perp} + \frac{1}{m^2}\mathcal{P}_{\mu\nu}^{||} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \tag{1.9}$$

Ennek az a haszna, hogy nyilvánvalóan látszik, hogy (1) a propagátor $m \to 0$ határértéke a longitudinális tag miatt nem létezik, (2) a longitudinális rész megmaradó áramok között zérus járulékot ad. Ebből arra gondolunk, hogy a tömeges vektortér longitudinális komponense nem fizikai szabadsági fok.

Ezt a sejtést könnyen igazolhatjuk először a klasszikus elmélet, majd a kvantumtérelmélet szintjén.

Nézzük először a klasszikus mozgásegyenleteket, amelyek a csupasz hatásból a legkisebb hatás elve értelmében adódnak:

$$\partial_\nu \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A_\nu + m^2 A_\mu = J_\mu. \tag{1.10}$$

Innen, a ∂_μ parciális deriválást mindkét oldalon elvégezve, az

$$m^2 \partial_\mu A_\mu = \partial_\mu J_\mu = 0 \tag{1.11}$$

egyenlőségre jutunk. Mivel a vektortér tömege nem zérus, $\partial_\mu A_\mu = 0$ adódik, mint a mozgásegyenletek és a megmaradó áram következménye. Fourier-transzformáció után ez ekvivalens a $k_\mu A_\mu(k) = 0$ egyenlettel, ami azt jelenti, hogy a tömeges vektortér transzverzális. (Vigyázat, a k_μ négyesvektorra transzverzális négy-dimenziós térben és nem a $\vec{k}$ hármasvektorra!) Csakugyan, ha bevezetjük a tér transzverzális és longitudinális komponensét,

$$A_\mu^\perp = \mathcal{P}_{\mu\nu}^\perp A_\nu(k), \qquad A_\mu^{||} = \mathcal{P}_{\mu\nu}^{||} A_\nu(k), \tag{1.12}$$

akkor látjuk, hogy a tér longitudinális komponense azonosan eltűnik, $A^{||}(k) \equiv 0$, míg a transzverzális komponens a

$$(k^2 + m^2) A_\mu^\perp(k) = J_\mu(k) \tag{1.13}$$

egyenletet elégíti ki. Klasszikusan tehát a tömeges vektortérnek, ha forrása megmaradó áram, csak transzverzális komponensei vannak.

Most megmutatjuk, hogy a tömeges vektortér longitudinális komponense a kvantálás után sem válik fizikaivá. Nevezetesen megmutatjuk, hogy a vektortér longitudinális komponensének átdefiniálása nem jelent többet mint a generáló funkcionál normálási együtthatójának megváltozását. A bizonyítás során egyúttal olyan határértékképzési eljárást is találunk, amellyel képezhetjük a tömeges elmélet propagátorából az $m = 0$ elmélet propagátorát.

A hatást kiegészíthetjük a χ regulátorteret tartalmazó taggal:

$$S[A, \chi] \quad = \quad S[A] - \frac{1}{2} \int d^d x \left((\partial_\mu \chi)^2 + \mu^2 \chi^2 \right). \tag{1.14}$$

Ha az utóbbit nem csatoljuk külső forráshoz, akkor a Z generáló funkcionál csak egy lényegtelen normálási tényezővel módosul, az összefüggő Green-függvények generáló funkcionálja pedig egy (a Green-függvények szempontjából lényegtelen) additív állandóval:

$$W[J] \quad = \quad \ln \int \mathcal{D}\chi \int \mathcal{D}A e^{-S[A,\chi] + \int dx A_\mu J_\mu} + \text{const.}. \tag{1.15}$$

Vezessük most be az új

$$A'_\mu \;=\; A_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu\chi \tag{1.16}$$

integrálási változót. A változó-transzformáció során sem az integrálási mérték, sem a térerősség tenzora nem módosul. Ha a külső forrás árama megmaradó, $\partial_\mu J_\mu = 0$, akkor a forrástag sem változik. Parciális integrálással kapjuk ugyanis., hogy:

$$\begin{aligned}\int d^d x A_\mu J_\mu &= \int d^d x \left(A'_\mu + \frac{1}{m}\partial_\mu\chi\right) J_\mu \\ &= \int d^d x \left(A'_\mu - \frac{1}{m}\chi\partial_\mu\right) J_\mu \\ &= \int d^d x A'_\mu J_\mu. \end{aligned} \tag{1.17}$$

A tömegtag változása miatt:

$$S[A',\chi] \;=\; S[A'] + \int d^d x \left(mA'_\mu\partial_\mu\chi - \frac{1}{2}\mu^2\chi^2\right). \tag{1.18}$$

A fentieket figyelembe véve elvégezhetjük a χ szerinti Gauss-integrált:

$$W[J] \;=\; \ln\int \mathcal{D}A' e^{-S_\xi[A'] + \int dx A'_\mu J_\mu}, \tag{1.19}$$

ahol

$$S_\xi[A'] \;=\; S[A'] + \frac{1}{2\xi}\int d^d x \left(\partial_\mu A'_\mu\right)^2 \tag{1.20}$$

és bevezettük a ξ paramétert:

$$\xi \;=\; \frac{\mu^2}{m^2}, \qquad 0 \le \xi. \tag{1.21}$$

Az így definiált elméletben a propagátor:

$$\begin{aligned}\Delta_\xi(k) &= \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2+m^2} + \frac{(\xi-1)k_\mu k_\nu}{(k^2+m^2)(k^2+\xi m^2)} \\ &= \frac{1}{k^2+m^2}\mathcal{P}^{\perp}_{\mu\nu} + \frac{\xi}{k^2+\xi m^2}\mathcal{P}^{\parallel}_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

A kapott elmélet ξ tetszőleges értéke esetén a levezetésből adódóan ugyanazokat az összefüggő Green-függvényeket adja mint az eredeti elmélet. Ugyanakkor a kapott propagátornak rögzített ξ esetén létezik az $m \to 0$ határértéke:

$$\Delta_\xi(k) \to \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2} - \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}(\xi - 1). \tag{1.23}$$

Ez mindenképpen reményt kelt, hogy az $m = 0$ elmélet létezik mint a tömeges elmélet határesete, ha a vektorteret megmaradó áramhoz csatoljuk. (Pl. a $\xi = 1$ választás esetén a propagátor egy skalártér propagátora.) Világos azonban, hogy az $m \to 0$ határesetben IR divergenciák léphetnek fel. Kérdés, hogy ezek a perturbációs sorok felösszegzése során kiejtik-e egymást.

Az irodalomban az alábbi elnevezések használatosak:

- $\xi = 0$: Landau-mérték;
- $\xi = 1$: Feynman-mérték;
- $\xi \to \infty$: unitér mérték.

A jelen fejezetben megmutattuk tehát, hogy van arra remény, hogy egy megmaradó áramokhoz csatolt vektortér négy téridő dimenzióban is renormálható legyen. Ennek az az oka, hogy az ilyen vektortér propagátora hasonló egy skalártér propagátorához. Reményteljes tehát az a törekvés, hogy a Dirac-fermionok megmaradó áramához csatolt zérus tömegű elektromágneses tér elméletét mint egy tömeges elmélet határesetét értelmezzük. æ

2 Lokális $U(1)$ szimmetria

Induljunk ki a szabad Dirac-fermionok terére vonatkozó klasszikus hatásból:

$$S[\bar{\psi},\psi] \;=\; -\int d^d x \bar{\psi}(x)\left(\partial\!\!\!/ + M\right)\psi(x). \tag{2.1}$$

Első megállapításunk, hogy ez a hatás globális $U(1)$ szimmetriával rendelkezik:

$$\psi = e^{\mathrm{i}\Lambda}\psi', \qquad \bar{\psi} \;=\; e^{-\mathrm{i}\Lambda}\bar{\psi}'. \tag{2.2}$$

Ehhez a szimmetriához az alábbi megmaradó Noether-áram tartozik:

$$J_\mu \;=\; -\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \tag{2.3}$$

Ha a Λ paramétert az x koordinátától függővé tesszük, akkor infinitezimális transzformáció esetén a hatás megváltozása:

$$\delta S \;=\; -\mathrm{i}\int d^d x\bar{\psi}\;\partial\!\!\!/\Lambda\psi \equiv \int d^d x J_\mu(x)\partial_\mu\Lambda(x), \tag{2.4}$$

ahonnan leolvashatjuk a megmaradó áram kifejezését.

Csatoljunk a megmaradó J_μ áramhoz egy A_μ, zérus tömegű ($m = 0$) vektorteret:

$$S[A,\bar{\psi},\psi] \;=\; S[A] - \int d^d x\bar{\psi}\left(\partial\!\!\!/ + M + \mathrm{i}e\,A\!\!\!/\right)\psi. \tag{2.5}$$

Az így nyert hatás lokális $U(1)$ mértékszimmetriával rendelkezik, vis. invariáns a terek alábbi, ,,helyfüggő'' $\Lambda(x)$ paraméterekkel megadott

$$\psi(x) \;=\; e^{\mathrm{i}\Lambda(x)}\psi'(x), \tag{2.6}$$
$$\bar{\psi}(x) \;=\; e^{-\mathrm{i}\Lambda(x)}\bar{\psi}'(x), \tag{2.7}$$
$$A_\mu(x) \;=\; -\frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x) + A'_\mu(x). \tag{2.8}$$

transzformációival szemben.

Az $m^2 A_\mu A_\mu$ tömegtag bevezetése ($m \neq 0$) esetén a lokális mértékszimmetria megsérül. Ennek ellenére az $m = 0$ esetet célszerű úgy tárgyalni, mint a megmaradó áramhoz csatolt nem zérus tömegű vektortér $m \to 0$ határesetét. Ebből az alábbi előnyök származnak:

- A pályaintegrál mindvégig jól definiált ellentétben az $m = 0$ esettel, amikor az A_μ vektortérnek nem minden komponense igazi dinamikai szabadsági fok és ezért a pályaintegrál arányos a mértékcsoport térfogatával [ld. Trócsányi].

- Az $m \neq 0$ tömeg egyúttal természetes IR levágást is jelent az elméletben, amelynek révén megkerülhetjük az IR divergenciák problémáját. (Pl. előbb $m \neq 0$ esetben összegezzük fel a perturbációs sorokat és utána az eredménynek vesszük az $m \to 0$ határértékét. Ha az utóbbi létezik, akkor a tömeg nélküli elmélet mentes az IR divergenciáktól.)

Beszélnünk kell még arról, hogy hogyan kell regularizálni az elméletet ahhoz, hogy a regularizálással ne sértsük meg a lokális mértékszimmetriát ($m \neq 0$ esetben a klasszikus hatás szimmetrikus részének lokális mértékszimmetriáját). A Feynman-diagrammok látszólagos divergenciafokának meghatározása a $\Delta_\xi(k)$ propagátor (azaz a ξ paraméterrel jellemzett kovariáns mérték) használata esetén ugyanúgy történik mint skalártér esetén. Kényelmes a dimenzionális regularizációt használni, amely automatikusan biztosítja, hogy a regularizált pályaintegrál lokálisan mértékinvariáns marad. Az ok abban rejlik, hogy a dimenzionális regularizáció nem távolít el Fourier-komponenseket a mértéktérből ellentétben a Pauli-Villars– és a rácsregularizációval. Utóbbi esetekben a regularizált elméletben:

$$\tilde{A}_\mu(k) = 0, \qquad \text{ha} \qquad k > K, \tag{2.9}$$

ahol K UV levágás (rácsregularizáció esetén $K \sim 1/a$). Ugyanakkor egy tetszőleges $\Lambda(x)$ mértéktranszformáció ezt a tulajdonságot nem hagyja meg, ami a mértéktranszformáció Fourier-transzformáltakra felírt alakjából rögtön látható:

$$\tilde{A}_\mu(k) \;\; = \;\; -\frac{1}{e}k_\mu\tilde{\Lambda}(k) + \tilde{A}'_\mu(k). \tag{2.10}$$

æ

2 A Ward-Takahashi-azonosságok

Amikor globális folytonos szimmetriát explicit módon vagy spontán sértő elméletet vizsgáltunk, akkor megtanultuk, hogy ezek az elméletek a csupasz elmélet WT-azonosságainak megőrzésével renormálhatók. Most valami hasonló dolgot fogunk látni: a mértékelméletek a mértékszimmetria megőrzésével renormálhatók. Az 1PI generáló funkcionál divergens részei ugyanis kielégítik a WT-azonosságot tetszőleges hurok rendben, ezért az ellentagok az adott hurokrendben ugyancsak. Következésképpen a renormált hatás is ki fogja elégíteni a WT-azonosságot a hurokkifejtés tetszőleges rendjében.

Képezzük a forrástagokkal kiegészített klasszikus hatás megváltozását infinitezimális mértéktranszformáció során:

$$\begin{aligned}&\delta\left(S-\int dx J_\mu A_\mu-\int dx(\bar\eta\psi+\bar\psi\eta)\right)\\ &= -\frac{1}{e}\int dx\Lambda(x)\left\{\left(\frac{1}{\xi}\partial^2-m^2\right)(\partial_\mu A_\mu)+\partial_\mu J_\mu+\mathrm{i}e(\bar\eta\psi-\bar\psi\eta)\right\}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Abból a tényből, hogy a Green-függvények generáló funkcionálja invariáns a térmennyiségek mint integrálási változók mértéktranszformációjával szemben, következik az alábbi azonosság:

$$\left\{\left(m^2-\frac{1}{\xi}\partial^2\right)\partial_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}+\mathrm{i}e\left(\bar\eta\frac{\delta}{\delta\bar\eta}+\eta\frac{\delta}{\delta\eta}\right)\right\}Z[J,\eta,\bar\eta] \;=\; \partial_\mu J_\mu Z[J,\eta,\bar\eta]. \tag{2.2}$$

(Hallgatólagosan kihasználtuk, hogy a funkcionálintegrálás az euklideszi mérték szerint történik, amely invariáns az infinitezimális mértéktranszformációkkal mint lineáris változó transzformációkkal szemben.) Az azonosság mindkét oldalát osztva a $Z[J,\eta,\bar\eta]$ funkcionállal, az összefüggő Green-függvények generáló funkcionáljára vonatkozó alábbi azonosságot kapjuk.

$$\left\{\left(m^2-\frac{1}{\xi}\partial^2\right)\partial_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}+\mathrm{i}e\left(\bar\eta\frac{\delta}{\delta\bar\eta}+\eta\frac{\delta}{\delta\eta}\right)\right\}W[J,\eta,\bar\eta] \;=\; \partial_\mu J_\mu. \tag{2.3}$$

A vektortér összefüggő 2–pont Green-függvényére vonatkozó Ward-Takahashi-azonosságot innen $J_\nu(y)$ szerinti funkcionálderiválással kapjuk:

$$\left(m^2-\frac{1}{\xi}\partial^2\right)\partial_\mu G^{(2)}_{c\,\mu\nu}(x,y) \;=\; \partial_\mu\delta(x-y)\delta_{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

Fourier-transzformáció után az azonosság az alábbi alakot ölti:

$$\left(m^2 + \frac{1}{\xi}k^2\right) k_\mu \tilde{G}^{(2)}_{c\,\mu\nu}(k) \quad = \quad k_\nu. \tag{2.5}$$

Innen átrendezéssel kapjuk a vektortér propagátorára az alábbi megszorítást:

$$k_\mu \tilde{G}^{(2)}_{c\,\mu\nu}(k) \quad = \quad \frac{\xi k_\nu}{k^2 + \xi m^2}. \tag{2.6}$$

A generáló funkcionálra vonatkozó azonosságból az összefüggő Green-függvényekre az alábbi általános összefüggéseket vezethetjük le:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{k^2}{\xi} + m^2\right) k_\mu \tilde{G}^{(1,2n)}_{c\,\mu}(k; p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n) \\
&= \mathrm{i}e \sum_{i=1}^{n} \Big[\tilde{G}^{2n}_c(p_1, \ldots, p_i + k, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n) \\
&\quad -\tilde{G}^{2n}_c(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_i + k, \ldots, q_n)\Big].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Itt a bal oldalon olyan Green-függvény áll, amelynek egy ,,lába" vektortér-vonal, n ,,lába" (anti)fermion-vonal, a jobb oldalon pedig olyanok, amelyeknek n lába (anti)fermion-vonal.

Legendre-transzformációval az 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljára az alábbi azonosság adódik:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\xi}\partial^2 - m^2\right) \partial_\mu A_\mu + \partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)} \\
&\quad +\mathrm{i}e\left[\psi(x)\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)} - \bar{\psi}(x)\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Ha az elmélet mértékszimmetrikus, akkor a bal oldalon álló utolsó három tag összege nulla. A mértékszimmetriát a tömegtag és a mértéket rögzítő tag sérti. A fenti azonosságnak az a jelentése, hogy a csupasz 1PI vertexfüggvények generáló funkcionálja

$$\Gamma \quad = \quad \Gamma_{szim} + \frac{1}{2}\int dx \left[m^2 A_\mu^2 + \frac{1}{\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2\right] \tag{2.9}$$

alakú, ahol Γ_{szim} az 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljának szimmetrikus (mértékinvariáns) része.

A kapott WT-azonosság alapján beláthatjuk, hogy az elmélet renormálható.

Tekintsük az 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljának hurok-kifejtését:

$$\Gamma \;=\; \Gamma_{fa} + \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_l, \tag{2.10}$$

ahol Γ_{fa} a fagráf-járulék, azaz a klasszikus hatás, Γ_l ($l > 0$) pedig az l–hurok járulék. A fagráf-járulék, vis. a klasszikus hatás kielégíti az inhomogén WT-azonosságot. Ebből az következik, hogy az l–hurok járulékok külön-külön a homogén WT-azonosságot elégítik ki:

$$\partial_\mu \frac{\delta \Gamma_l}{\delta A_\mu(x)} + \mathrm{i}e \left[\psi(x) \frac{\delta \Gamma_l}{\delta \psi(x)} - \bar{\psi}(x) \frac{\delta \Gamma_l}{\delta \bar{\psi}(x)} \right] = 0. \tag{2.11}$$

Ez azt jelenti, hogy külön-külön valamennyi hurok-járulék mértékinvariáns. Természetesen, ha Γ_l–et Laurent-sorba fejtjük az $\epsilon = 4 - d$ paraméter szerint, akkor a Laurent-sor tagjainak külön-külön is mértékinvariánsnak kell lenniük. Ezt azt jelenti, hogy az l–hurok járulék divergens része is mértékinvariáns. Ezért az elmélet renormálható, ha úgy vezetünk be adott hurok-rendben ellentagokat, hogy azok összege mértékinvariáns legyen. A renormálási eljárás során a vektortér tömegtagja és a mértéket rögzítő tag nem renormálódik, vis. nem adódnak hozzájuk ellentagok. Ha 0 alsó indexszel jelöljük a csupasz mennyiségeket, akkor:

$$m^2 A^2 = m_0^2 A_0^2, \qquad \frac{1}{\xi}(\partial A)^2 = \frac{1}{\xi_0}(\partial A_0)^2. \tag{2.12}$$

Hasonló a helyzet mint globális folytonos szimmetria explicit lineáris sérülése esetén, amikor a szimmetriasértő tag nem renormálódik.

A mértéktranszformáció alakja a renormált terekre is ugyanaz, mint a csupasz terekre, azaz:

$$(A_0)_\mu \longrightarrow (A_0')_\mu - \frac{1}{e_0}\partial_\mu \Lambda, \tag{2.13}$$

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda. \tag{2.14}$$

Ezért a mértékszimmetria megőrződése a renormálás során azt kell jelentse, hogy a kovariáns derivált sem renormálódik:

$$(D_\mu)_0 \;=\; D_\mu, \tag{2.15}$$

azaz

$$\partial_\mu + \mathrm{i}e_0 (A_0)_\mu \;=\; \partial_\mu + \mathrm{i}e A_\mu. \tag{2.16}$$

Vezessük be a töltés és a hullámfüggvény renormálási állandóját:

$$e_0 = Z_e^{1/2} e, \qquad\qquad (A_0)_\mu = Z_A^{1/2} A_\mu. \tag{2.17}$$

A kovariáns derivált fenti tulajdonságát az biztosítja, hogy a töltés és a hullámfüggvény renormálási állandójának szorzata:

$$Z_e Z_A \;=\; 1. \tag{2.18}$$

A fentieket összegezve mondhatjuk:

- A Dirac-fermionok megmaradó Noether-áramához csatolt vektortér elmélete renormálható.
- A renormálás során a hatás szimmetrikus részének mértékszimmetriája tovább örökíthető a renormált elmélet 1PI vertexfüggvényei generáló funkcionáljának 1–hurok, 2–hurok, stb. rendű járulékaira.
- A mértékszimmetriát explicit módon sértő tagok nem renormálódnak.
- A renormált elmélet mértékszimmetriájának megkövetelése azt jelenti, hogy a töltés és a vektortér renormálási állandója nem független egymástól.
- A fentiek közvetlen folyománya, hogy ha létezik a renormált elmélet $m \to 0$ határesete, akkor az éppen a keresett mértékszimmetrikus kvantumtérelmélet.

æ

4 Mértékfüggés

A mértékszimmetrikus fizikai elméletben a fizikai állítások nem függhetnek a mérték megválasztásától. A fentebb bevezetett kovariáns mérték esetén ez azt jelenti, hogy a fizikai állítások nem függnek a ξ paramétertől. Különösen érdekes tehát tisztázni, hogy az elméletben hogyan jelenik meg a ξ paramétertől való függés. Ezzel kapcsolatban bizonyítás nélkül mondom el a legfontosabbakat. (A bizonyításokat az érdeklődő olvasó megtalálhatja [Zinn-Justin]-ben.)

- A fermiontér renormálási állandója mértékfüggő, a ξ–függés az alábbi alakban faktorizálódik:

$$Z_\psi(\xi) \;=\; Z_\psi(0) \exp\left\{ -\frac{\xi e^2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{k^2(k^2+\xi m^2)} \right\} \tag{4.1}$$

- Az összefüggő, renormált fermion 2-pont Green-függvény mértékfüggése ugyancsak faktorizálható:

$$G^{(2)}_{c\,\xi}(x,y) \;=\; G^{(2)}_{c\,(\xi=0)}(x,y) \exp\left\{ \frac{\xi e^2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{k^2(k^2+\xi m^2)} e^{ik(x-y)} \right\}. \tag{4.2}$$

- A töltés és a mértéktér renormálási állandója mértékfüggetlenek.
- Az S–mátrix elemei mértékinvariánsak, vis. nincsenek ξ-függő pólusaik, és ennek következtében az S–mátrix unitér.
- A terek mértékinvariáns lokális polinomjai mértékinvariáns lokális operátor betétrészek az elméletben.
- Feynman-mértékben ($\xi = 1$) létezik a Green-függvények $m \to 0$ határértéke, s ebből következik, hogy az bármilyen más mértékben is létezik, hiszen ξ változása csak egy véges szorzótényező megjelenését jelenti. *Ez azt jelenti, hogy a tömeges elmélet renormálási állandóinak létezik az $m \to 0$ határértéke.* Ez biztosítja, hogy a megmaradó fermion áramhoz csatolt tömeges vektortérnek a WT-azonosságok figyelembevételével renormált kvantumtérelmélete rendelkezik az $m \to 0$ határesettel, amely akkor egy konzisztens, mértékszimmetrikus kvantumtérelmélet. A mértékinvariáns operátorok $m \to 0$ határértéke ugyancsak létezik (IR véges).
- A szórási amplitúdók $m \to 0$ határértéke általában nem létezik, mert IR divergens. Ha azonban valamely szórási amplitúdóhoz hozzáadjuk a mértéktér kis impulzusú gerjesztéseinek keltését leíró amplitúdókat, vis. figyelembe vesszük a kezdő– és végállapoti fékezési sugárzást, akkor olyan amplitúdókat kapunk, amelyek az $m \to 0$ határesetben végesek. Adott mérés eredményét megadó

amplitúdók számolása során természetesen figyelembe kell venni az adott mérésben az impulzusmeghatározás pontosságát. Az impulzusmérés hibájánál kisebb impulzusú fotonok detektálása nem lehetséges. Ugyanakkor ezek szinte korlátlan számban keletkezhetnek, mert keltésük lényegében energia befektetése nélkül lehetséges. A kezdő– és végállapoti fékezési sugárzás figyelembe vétele azt jelenti, hogy olyan mérhető amplitúdókat (hatáskeresztmetszeteket) határozunk meg, amelyek megfelelnek az adott mérési szituációnak.

æ

2 Az ábeli Higgs-mechanizmus

Vizsgáljunk olyan térelméleti modellt, amelyben a mértéktér töltött, önkölcsönható skalártérrel hat kölcsön:

$$S[A_\mu,\phi] = \int dx \left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 + M^2|\phi|^2 + \frac{1}{6}g|\phi|^4\right) \tag{2.1}$$

Itt

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu \tag{2.2}$$

a kovariáns derivált.

Ebben a fejezetben először a klasszikus elmélet szintjén (fagráf–szinten) vizsgáljuk meg a fenti hatással definiált elméletet. A hatás lokális $U(1)$ mértékszimmetriával rendelkezik, azaz invariáns a

$$A_\mu(x) = A'_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x), \tag{2.3}$$

$$\phi(x) = e^{\mathrm{i}e\Lambda(x)}\phi'(x) \tag{2.4}$$

transzformációkkal szemben. Ha $M^2 > 0$, akkor nincsen spontán szimmetriasértés. Ilyenkor a komplex skalártér helyett bevezethetünk két valós skalárteret a

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \mathrm{i}\varphi_2) \tag{2.5}$$

definícióval. Ezeknek az egy-részecskés gerjesztései (fagráf szinten) azonos nyugalmi tömegűek:

$$\begin{aligned} S[A,\varphi_1,\varphi_2] = \int dx \Big\{ & \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ & +\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 \\ & -eA_\mu(\varphi_2\partial_\mu\varphi_1 - \varphi_1\partial_\mu\varphi_2) + \frac{1}{2}e^2A_\mu A_\mu(\varphi_1^2+\varphi_2^2) \\ & +\frac{1}{2}M^2(\varphi_1^2+\varphi_2^2) \\ & +\frac{1}{24}g(\varphi_1^4+\varphi_2^4+2\varphi_1^2\varphi_2^2)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ilyenkor a vektortér egyrészecskés gerjesztéseinek a nyugalmi tömege zérus.

Tegyük most fel, hogy $M^2 < 0$, és ezért az $U(1)$ szimmetria spontán sérül. Ez abban jut kifejezésre, hogy a töltött skalártér vákuum várható értéke nem zérus:

$$\langle\phi\rangle = v \neq 0. \tag{2.7}$$

A spontán sértett szimmetriájú ϕ^4 elméletben

$$v^2 = -\frac{6M^2}{g}. \tag{2.8}$$

(Ez az összefüggés, amit spontán sérülő globális folytonos szimmetria esetén találtunk, most is érvényes, mert a globális transzformációk a lokális transzformációk speciális esetei.) Tudjuk, hogy amikor folytonos globális szimmetria sérül spontán, akkor annak az a következménye, hogy pontosan annyi zérus nyugalmi tömegű skalár részecske, Goldstone-bozon jelenik meg az elméletben, amennyi a sértett szimmetriákhoz tartozó generátorok száma. Most azt a kérdést vizsgáljuk, hogy mi történik, ha a folytonos szimmetria, amely spontán sérül, lokális.

Vezessük be a $\rho(x)$ és $\theta(x)$ valós skalártereket:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+\rho(x))\,e^{i\theta(x)}. \tag{2.9}$$

Hajtsuk végre ezután a

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \phi(x)e^{-i\theta(x)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v+\rho(x)),\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \tag{2.11}$$

lokális mértéktranszformációt, amelynek a paramétere $\theta(x)$. Ennek eredménye, hogy a hatásból eltűnik a $\theta(x)$ skalártér (a komplex skalártér fázisa):

$$\begin{aligned}S[A,\rho] = \int dx\,\Big\{&\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{1}{2}e^2(v+\rho)^2A_\mu^2\\ &+\frac{1}{2}M^2(\rho+v)^2 + \frac{g}{24}(\rho+v)^4\Big\}\end{aligned} \tag{2.12}$$

Innen leolvashatjuk, hogy a ρ tér kvantumai nyugalmi tömeget nyernek:

$$m_\rho^2 = M^2 + \frac{g}{2}v^2 = \frac{1}{3}gv^2. \tag{2.13}$$

Ezek a *Higgs-bozonok* és $\rho(x)$ a *Higgs-tér*. Másrészről azt is látjuk a hatás kifejezéséből, hogy a $\theta(x)$ tér eltűnt, ugyanakkor a mértéktér kvantumainak nyugalmi tömeg generálódott:

$$m_A^2 = e^2v^2. \tag{2.14}$$

Ezt a mechanizmust nevezzük *Higgs-mechanizmusnak.* A skalártérnek eltűnt egy szabadsági foka, ugyanakkor azáltal, hogy a vektortér tömeget nyert, megjelentek a vektortér transzverzális rezgései mellett a longitudinális módusok is. A fizikai szabadsági fokok száma tehát nem változott. A skalártér $\theta(x)$ komponense, amely globális szimmetria spontán sérülése esetén Goldstone-tér lett volna („would-be-Goldstone boson"), a Higgs-mechanizmus révén beleolvadt a vektortér longitudinális komponensébe, amely megjelent mint valóságos dinamikai szabadsági fok.

A Higgs-mechanizmus tehát alkalmas arra, hogy mértékelméletben a mértéktérnek tömeget generáljunk miközben – mint később látni fogjuk – az elmélet renormálható marad.

æ

6 Az ábeli Higgs-mechanizmus. (Kvantálás)

Az IR divergenciák elkerülése érdekében érdemes az $m \neq 0$ elmélet $m \to 0$ határesetét vizsgálni. Ekkor az alábbi klasszikus hatásból indulunk ki:

$$\begin{aligned} S[A,\phi] &= \int dx \left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}m^2 A_\mu^2 \right. \\ &\quad \left. + D_\mu\phi(D_\mu\phi)^* + M^2\phi^*\phi + \frac{g}{6}(\phi^*\phi)^2\right], \end{aligned} \tag{6.1}$$

ahol $M^2 < 0$. Legyen a ϕ skalártér klasszikus (fagráf-közelítésben számolt) várható értéke:

$$\langle\phi\rangle_{fa} = \frac{v}{\sqrt{2}}, \tag{6.2}$$

ahol v valós. Válasszuk ezt le a skalártérből az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + \varphi(x)\right)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}\chi(x)}{v}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + \varphi(x) + \mathrm{i}\chi(x) + \right. \\ &\quad \left. \text{kvadratikus és magasabb rendű tagok}\right). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Ekkor a hatás – a magasabb rendű tagokat elhagyva – az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} S &= \int dx \left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}m^2 A_\mu^2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{2}M^2\left[(v+\varphi)^2 + \chi^2\right] + \frac{g}{24}\left[(v+\varphi)^2 + \chi^2\right]^2 \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi - eA_\mu\chi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\chi + eA_\mu(v+\varphi)\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Innen megkapjuk a hatás kvadratikus tagjait:

$$\begin{aligned} S_2 &= \int dx \left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu^2 \right. \\ &\quad + ev\chi\partial_\mu A_\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}M^2\varphi^2 + \frac{1}{2}M^2\chi^2 + \frac{gv^2}{12}\chi^2 + \frac{gv^2}{4}\varphi^2\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int dx \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu^2 \right. \\
&\quad - ev \partial_\mu \chi \cdot A_\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} M^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} m_\varphi^2 \varphi^2 \right] .
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

Itt felhasználtuk, hogy fagráf közelítésben $m_A^2 = m^2 + e^2 v^2$ és $m_\varphi^2 = M^2 + \frac{1}{2} g v^2 = \frac{1}{3} g v^2$, valamint, hogy $M^2 = -g v^2 / 6$. Írjuk át a hatást impulzus-reprezentációba:

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2} k^2 \tilde{A}_\nu(k) \tilde{A}_\nu(-k) - \frac{1}{2} k_\mu k_\nu \tilde{A}_\mu(k) \tilde{A}_\nu(-k) + \frac{1}{2\xi} k_\mu k_\nu \tilde{A}_\mu(k) \tilde{A}_\nu(-k) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} m_A^2 \tilde{A}_\mu(k) \tilde{A}_\mu(-k) - \mathrm{i} ev k_\mu \frac{1}{2} \left(\tilde{\chi}(k) \tilde{A}_\mu(-k) - \tilde{\chi}(-k) \tilde{A}_\mu(k) \right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} m_\varphi^2 \tilde{\varphi}(k) \tilde{\varphi}(-k) + \frac{1}{2} k^2 \tilde{\varphi}(k) \tilde{\varphi}(-k) + \frac{1}{2} k^2 \tilde{\chi}(k) \tilde{\chi}(-k) \right] .
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

Válasszuk külön a vektortér transzverzális és longitudinális módusait:

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{2} (m_A^2 + k^2) A_\mu^\perp(k) A_\mu^\perp(-k) + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu^{||}(k) A_\mu^{||}(-k) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2\xi} k^2 A_\mu^{||}(k) A_\mu^{||}(-k) + \frac{1}{2} k^2 \chi(k) \chi(-k) \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathrm{i} ev k_\mu \left(\chi(k) A_\mu^{||}(-k) - \chi(-k) A_\mu^{||}(k) \right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (m_\varphi^2 + k^2) \varphi(k) \varphi(-k) \right\} .
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Az így nyert kvadratikus alak még nem diagonális. Ha azonban a $\chi(x)$ tér helyett bevezetjük az $\eta(x)$ teret a

$$
\tilde{\eta}(k) \;=\; \tilde{\chi}(k) - \alpha \tilde{A}_\mu^{||}(k) k_\mu \tag{6.8}
$$

definícióval, akkor a hatás kvadratikus része diagonális lesz az $\alpha = -\mathrm{i} ev / k^2$ választás esetén:

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \\
&\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left[(m_A^2 + k^2) A_\mu^\perp(k) A_\mu^\perp(-k) + \left(m^2 + \frac{1}{\xi} k^2 \right) A_\mu^{||}(k) A_\mu^{||}(-k) \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} k^2 \tilde{\eta}(k) \tilde{\eta}(-k) + \frac{1}{2} (m_\varphi^2 + k^2) \tilde{\varphi}(k) \tilde{\varphi}(-k) \right] .
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Az eredmény, amit leolvashatunk, az, hogy az η skalártér egy-részecskés gerjesztései zérus tömegű Goldstone-bozonok. Az η-tér a χ tér és a vektortér longitudinális komponensének keveréke, mint a definíciója mutatja. A Goldstone-bozonok most azért jelentek meg, mert a vektortér nyugalmi tömege $m \neq 0$, ezért a mértékszimmetria explicit módon is sérül.

Az előző fejezetben láttuk, hogy $m = 0$ esetén Goldstone-bozonok nem jelennek meg: olyankor a vektortér longitudinális komponense „megeszi" őket és ezáltal válik a mértéktér tömeges vektortérré. A fenti hatást vizsgálva az $m = 0$ esetben azt mondhatjuk, hogy szabad mértéket rögzíteni. Válasszuk a mértékfeltételt az

$$\mathrm{i}k_\mu A_\mu^{||}(k) - (k^2\xi)^{1/2}\eta(k) = 0 \tag{6.10}$$

alakban. Ekkor olyan elmélet marad vissza, amelyben csak a (tömegessé vált) vektortér 3 transzverzális (négyes-vektor értelemben) szabadsági foka, és a Higgs-bozon vannak jelen. A szabadsági fokok ezen száma megegyezik az eredeti néggyel: a zérus tömegű vektortér 2 (három-dimenziós értelemben) transzvezális szabadsági foka és a skalártér 2 szabadsági foka.

Keressük meg a fenti $m \neq 0$ elméletben a propagátorokat fagráf-szinten. Látjuk, hogy a vektortér inverz propagátora:

$$(D^{-1})_{\mu\nu}(k) \;=\; (m_A^2 + k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \left(m^2 + \frac{k^2}{\xi}\right)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \tag{6.11}$$

A felbontás megfelel a k_μ–re merőleges és a k_μ–vel párhuzamos térkomponensekre való felbontásnak. Keressük a vektortér propagátorát ennek megfelelően

$$D_{\mu\nu}(k) \;=\; A(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + B(k^2)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tag{6.12}$$

alakban. Elemi számolással kapjuk az

$$D_{\mu\rho}(k)(D^{-1})_{\rho\nu} \;=\; g_{\mu\nu} \tag{6.13}$$

egyenletbe történő behelyettesítés után, hogy:

$$A(k^2) = \frac{1}{m_A^2 + k^2}, \qquad B(k^2) = \frac{\xi}{k^2 + \xi m^2}. \tag{6.14}$$

A tömeges skalártér és a Goldstone-tér propagátorát közvetlenül leolvashatjuk a hatás kvadratikus részének diagonalizált alakjából:

$$D^{(\varphi)}(k) \;=\; \frac{1}{m_\varphi^2 + k^2}, \tag{6.15}$$

$$D^{(\eta)}(k) \;=\; \frac{1}{k^2} \tag{6.16}$$

Az ábeli Higgs-modellben is érvényesek Ward-Takahashi-azonosságok. Ezeket a megmaradó áramhoz csatolt tömeges vektortér elméletében lehet megfogalmazni. Megőrzésükkel renormálhatjuk az elméletet, majd képezhetjük a renormált Green-függvények $m \to 0$ határesetét. Így jutunk el a renormált ábeli Higgs-elmélethez. A WT–azonosságok az alábbiak:

$$\left(\frac{1}{\xi}\partial^2 - m^2\right)\partial_\mu A_\mu + e\left(\varphi + v\right)\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi} - e\chi\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} + \partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} = 0. \tag{6.17}$$

A forrástagok a generáló funkcionál integrandusában a következő alakúak:

$$\int dx J_\mu A_\mu + \int dx\left(j^*\phi + \phi^* j\right). \tag{6.18}$$

A skalártérre vonatkozó forrástag átírható a valós terek és áramok kifejezéseként:

$$\begin{aligned} j^*\phi + \phi^* j &= \frac{1}{2}\left(j_1 - \mathrm{i}j_2\right)\left(v + \varphi + \mathrm{i}\chi\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(j_1 + \mathrm{i}j_2\right)\left(v + \varphi - \mathrm{i}\chi\right) \\ &= j_1(v + \varphi) + j_2\chi. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Hajtsunk végre egy infinitezimális $\Lambda(x)$ paraméterekkel jellemzett $U(1)$ mértéktranszformációt. Ekkor a vektortér tömegtagja és a mértékrögzítő tag, valamint a forrástagok nem maradnak invariánsak.

$$\begin{aligned} \delta\left(S - \text{forrás}\right) &= -\frac{1}{e}\int dx\Lambda(x)\left\{\left(\frac{1}{\xi}\partial^2 - m^2\right)\partial_\mu A_\mu + \partial_\mu J_\mu(x)\right. \\ &\quad \left. + \mathrm{i}e\left(j^*\phi - \phi^* j\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{e}\int dx\Lambda(x)\left\{\left(\frac{1}{\xi}\partial^2 - m^2\right)\partial_\mu A_\mu + \partial_\mu J_\mu(x)\right. \\ &\quad \left. + e j_2(v + \varphi) - e j_1\chi\right\}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Másrészről, ha a $Z[J, j_1, j_2]$ generáló funkcionálon infinitezimális $U(1)$ mértéktranszformációnak megfelelő változótranszformációt hajtunk végre, akkor a generáló funkcionál invariáns marad, mert ez lineáris transzformáció, amellyel szemben az euklideszi integrálási mérték invariáns. A $\delta Z = 0$ egyenlet mindkét oldalát osztva $Z[J, j_1, j_2]$-vel, az összefüggő Green-függvények generáló funkcionáljára az alábbi azonosság adódik:

$$\left\{\left(\frac{1}{\xi}\partial^2 - m^2\right)\partial_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu} + e j_2\left(v + \frac{\delta}{\delta j_1}\right) - e j_1\frac{\delta}{\delta j_2}\right\}W = -\partial_\mu J_\mu. \tag{6.21}$$

Innen Legendre-transzformációval az 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljára az alábbi azonosságot kapjuk:

$$\left(\frac{1}{\xi}\partial^2 - m^2\right)\partial_\mu A_\mu + e(v + \varphi)\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi} - e\chi\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} + \partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} = 0. \tag{6.22}$$

A felírt azonosság alapján egzaktul bizonyíthatjuk, hogy spontán szimmetriasértés esetén ($v \neq 0$) a χ tér egy-részecskés gerjesztései zérus tömegű Goldstone-bozonok.

Deriváljuk a kapott azonosságot funkcionálisan $\chi(y)$ szerint és vegyük az eredmény Fourier–transzformáltját:

$$ev\tilde{\Gamma}^{(2)}_{\chi\chi}(k) - \mathrm{i}k_\mu\tilde{\Gamma}^{(2)}_{\chi\mu}(k) \quad = \quad 0. \tag{6.23}$$

Innen $k_\mu = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $ev\tilde{\Gamma}^{(2)}_{\chi\chi}(0) \equiv evm^2_\chi = 0$, ahonnan $v \neq 0$ esetén $m^2_\chi = 0$, amit bizonyítani akartunk.

æ

II. A SLAVNOV-TAYLOR– ÉS A BECCHI-ROUET-STORA–SZIMMETRIA

7 Slavnov-Taylor-szimmetria

A kvantumtérelméletben sok esetben nem olyan dinamikai változókkal dolgozunk, amelyek mind függetlenek, hanem annak érdekében, hogy a hatást egyszerű alakban írhassuk fel, esetleg többel, amelyek között valamilyen kényszerek állnak fenn. Persze a kezdeti lépések egyszerűségének az árát ott kell megfizetnünk, amikor fizikai mennyiségek várható értékeit akarjuk kiszámolni. Ilyenkor biztosítanunk kell, hogy a pályaintegrálban a kényszereket megfelelő módon figyelembe vegyük, hogy csak a független szabadsági fokokra integráljunk.

Vizsgáljunk egy rendszert, amelyet olyan φ_α a dinamikai változókkal írunk le, amelyekre

$$F_\alpha(\varphi) \;=\; 0 \tag{7.24}$$

alakú feltételek (kényszerek) állnak fenn. Tegyük fel, hogy ezeknek egyértelműen létezik a φ^S_α megoldása. (Az α index kvantumterek esetében általában magában foglalja a folytonos x téridő koordinátákat, valamint azokat a diszkrét indexeket, amelyek megmutatják, hogy a térmennyiség melyik komponenséről van szó. Az S felső index arra a hiperfelületre utal, amelyre a kényszerek a dinamikai változókat korlátozzák.) Általában a dinamikai változók valamilyen $\sigma(\varphi)$ függvényének a kényszerek figyelembevételével képezett értékét keressük a térelméletben, vis. azt az értéket, ami a φ^S_α megoldáshoz tartozik:

$$\sigma(\varphi^S) \;=\; \int \left(\prod_\alpha d\varphi_\alpha \delta\left(F_\alpha(\varphi)\right)\right) \sigma(\varphi)\mathrm{det}M(\varphi), \tag{7.25}$$

ahol

$$M_{\alpha\beta}(\varphi) \;=\; \frac{\partial F_\alpha}{\partial \varphi_\beta}. \tag{7.26}$$

Ebben az integrálban bevezethetjük az

$$\mathrm{det}M \prod_\alpha d\varphi_\alpha \;=\; d\rho(\varphi) \tag{7.27}$$

integrálási mértéket.

Az integrálási mérték az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- Az integrálási mérték nem változik meg, ha a kényszereket

  $$F_\alpha(\varphi) - \nu_\alpha \;=\; 0 \tag{7.28}$$

  alakúra változtatjuk, ahol ν_α a dinamikai változók tekintetében állandó (nem függ a dinamikai változóktól, azaz a φ_α terektől).

  M csak az $F_\alpha(\varphi)$ kényszerek parciális deriváltjaitól függ, ezért az említett állandóval történő eltolás során M nem változik meg, s így $d\rho(\varphi)$ sem.

- A $d\rho(\varphi)$ integrálási mérték invariáns a dinamikai változók olyan

$$\varphi_\alpha \to \varphi'_\alpha \tag{7.29}$$

transzformációival szemben, amelynek következtében a kényszerek egy (a térmennyiségektől független) állandóval tolódnak el,

$$F_\alpha(\varphi') - \nu_\alpha \;=\; F_\alpha(\varphi), \tag{7.30}$$

azaz

$$\mathrm{det}M(\varphi)\prod_\alpha d\varphi_\alpha \;=\; \mathrm{det}M(\varphi')\prod_\alpha d\varphi'_\alpha. \tag{7.31}$$

Ez a *Slavnov-Taylor–szimmetria.*

Képezzük a kényszerek transzformációját leíró egyenlet mindkét oldalának teljes differenciálját:

$$M_{\alpha\beta}(\varphi')d\varphi'_\beta \;=\; M_{\alpha\beta}(\varphi)d\varphi_\beta. \tag{7.32}$$

Innen leolvassuk, hogy a változótranszformáció Jacobi–determinánsa:

$$J \;=\; \frac{\mathrm{det}M(\varphi')}{\mathrm{det}M(\varphi)}, \tag{7.33}$$

s ezért

$$\mathrm{det}M(\varphi)\prod_\alpha d\varphi_\alpha = \mathrm{det}M(\varphi)J\prod_\alpha d\varphi'_\alpha = \mathrm{det}M(\varphi')\prod_\alpha d\varphi'_\alpha. \tag{7.34}$$

A (??), (??) Slavnov-Taylor–transzformációk az eltolások csoportjának nem lineáris ábrázolásait valósítják meg. A térmennyiségek olyan - nem lineáris - transzformációi, amelyek következtében a kényszerfeltételek a térmennyiségektől független állandóval tolódnak el. Az infinitezimális Slavnov-Taylor-transzformáció alakja:

$$\delta\varphi_\alpha \;=\; \left(M^{-1}(\varphi)\right)_{\alpha\beta}\nu_\beta, \tag{7.35}$$

ahol ν_α infinitezimális.

Írjuk, hogy

$$\varphi'_\alpha \;=\; \varphi_\alpha + \delta\varphi_\alpha, \tag{7.36}$$

ekkor:

$$F_\alpha(\varphi+\delta\varphi) - \nu_\alpha \;=\; F_\alpha(\varphi), \tag{7.37}$$

$$F_\alpha(\varphi) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial\varphi_\beta}\delta\varphi_\beta \;=\; F_\alpha(\varphi) + \nu_\alpha, \tag{7.38}$$

$$\delta\varphi_\alpha \;=\; \left(M^{-1}\right)_{\alpha\beta}\nu_\beta. \tag{7.39}$$

Fordítva is feltehető a kérdés: mi azon transzformációk alakja, amelyek az eltolások csoportjának nem lineáris ábrázolásait valósítják meg. Legyen az infinitezimális transzformáció

$$\delta\varphi_\alpha = \left(N^{-1}(\varphi)\right)_{\alpha\beta}\nu_\beta. \tag{7.40}$$

Ekkor a kérdés az, hogy dinamikai változók függvényeinek terén milyen $N_{\alpha\beta}(\varphi)$ mátrixok ábrázolják az eltolásokat. A válasz az, hogy ennek a mátrixnak

$$N_{\delta\alpha}(\varphi) = \frac{\partial F_\delta(\varphi)}{\partial\varphi_\alpha} \equiv M_{\delta\alpha}(\varphi) \tag{7.41}$$

alakúnak kell lenni.

A φ_α dinamikai változók függvényeinek terén a transzformációt a

$$\Delta_\alpha = \left(N^{-1}\right)_{\alpha\beta}(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi_\beta} \tag{7.42}$$

operátorok ábrázolják. Ezek akkor és csak akkor az eltolások csoportjának ábrázolásai, ha

$$[\Delta_\alpha, \Delta_\beta] = 0. \tag{7.43}$$

Azonos átalakítással írhatjuk a következőket:

$$\begin{aligned}
[\Delta_\alpha, \Delta_\beta] &= (N^{-1})_{\alpha\beta'}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\beta'}}\left((N^{-1})_{\beta\alpha'}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\alpha'}}\right) - (N^{-1})_{\beta\alpha'}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\alpha'}}\left((N^{-1})_{\alpha\beta'}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\beta'}}\right)\\
&= \left((N^{-1})_{\alpha\beta'}(N^{-1})_{\beta\alpha'} - (N^{-1})_{\beta\alpha'}(N^{-1})_{\alpha\beta'}\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi_{\alpha'}\partial\varphi_{\beta'}}\\
&\quad +(N^{-1})_{\alpha\beta'}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\beta'}}(N^{-1})_{\beta\alpha'}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\alpha'}} - (N^{-1})_{\beta\beta'}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\beta'}}(N^{-1})_{\alpha\alpha'}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\alpha'}} = 0,
\end{aligned} \tag{7.44}$$

ahonnan

$$(M^{-1})_{\alpha\beta'}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\beta'}}(M^{-1})_{\beta\alpha'} - (M^{-1})_{\beta\beta'}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\beta'}}(M^{-1})_{\alpha\alpha'} = 0. \tag{7.45}$$

Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát először $M_{\delta\alpha}$–val,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_\delta}(N^{-1})_{\beta\alpha'} + (N^{-1})_{\beta\beta'}\frac{\partial N_{\delta\alpha}}{\partial\varphi_{\beta'}}(N^{-1})_{\alpha\alpha'} = 0, \tag{7.46}$$

majd $N_{\alpha'\gamma}$–val,

$$-(N^{-1})_{\beta\alpha'}\frac{\partial N_{\alpha'\gamma}}{\partial\varphi_\delta} + (N^{-1})_{\beta\beta'}\frac{\partial N_{\delta\gamma}}{\partial\varphi_{\beta'}} = 0. \tag{7.47}$$

Végül $N_{\alpha\beta}$–val szorozva az egyenlet mindkét oldalát, kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial N_{\delta\gamma}}{\partial\varphi_\alpha} = \frac{\partial N_{\alpha\gamma}}{\partial\varphi_\delta}. \tag{7.48}$$

Ebből következik, hogy létezni kell olyan $F_\delta(\varphi)$ függvényeknek, hogy

$$N_{\delta\alpha} = \frac{\partial F_\delta}{\partial\varphi_\alpha}. \tag{7.49}$$

A fordított kérdésfeltevéshez tartozik annak tisztázása is, hogy mi az eltolási csoport fenti nem lineáris ábrázolásaihoz tartozó csoportinvariáns integrálási mérték. A válasz az, hogy általánosan a csoportinvariáns integrálási mérték

$$d\rho(\varphi) = \text{const.} \cdot \det M \prod_\alpha d\varphi_\alpha. \tag{7.50}$$

Keressük az invariáns integrálási mértéket

$$J(\varphi) \prod_\alpha d\varphi_\alpha \tag{7.51}$$

alakban. Ekkor

$$\begin{aligned}
0 &= J(\varphi') \prod_\alpha d\varphi'_\alpha - J(\varphi) \prod_\alpha d\varphi_\alpha \\
&= J(\varphi') \prod_\alpha d\varphi'_\alpha - J(\varphi) \prod_\alpha d\varphi'_\alpha + J(\varphi) \left(\prod_\alpha d\varphi'_\alpha - \prod_\alpha d\varphi_\alpha \right) \\
&= \frac{\partial J}{\partial\varphi_{\alpha'}} \delta\varphi_{\alpha'} \prod_\alpha d\varphi_\alpha + J(\varphi) \left[\prod_\alpha \left(d\varphi_\alpha + \frac{\partial}{\partial\varphi_\gamma} (M^{-1})_{\alpha\beta} \nu_\beta d\varphi_\gamma \right) - \prod_\alpha d\varphi_\alpha \right] \\
&= \frac{\partial J}{\partial\varphi_{\alpha'}} (M^{-1})_{\alpha'\beta}(\varphi)\nu_\beta \prod_\alpha d\varphi_\alpha + J(\varphi) \sum_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial\varphi_{\alpha'}} (M^{-1})_{\alpha'\beta}\nu_\beta d\varphi_{\alpha'} \prod_{\alpha\neq\alpha'} d\varphi_\alpha.
\end{aligned} \tag{7.52}$$

Innen kapjuk a következőket, ha figyelembe vesszük, hogy ν_α tetszőleges:

$$0 = \frac{\partial J}{\partial\varphi_{\alpha'}} (M^{-1})_{\alpha'\beta} + J(\varphi) \sum_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial\varphi_{\alpha'}} (M^{-1})_{\alpha'\beta}. \tag{7.53}$$

Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát $M_{\beta\alpha}$–val:

$$0 = \frac{\partial J}{\partial\varphi_\alpha} - J(\varphi)(M^{-1})_{\alpha'\beta} \frac{\partial}{\partial\varphi_{\alpha'}} M_{\beta\alpha}, \tag{7.54}$$

$$\frac{\partial \ln J}{\partial\varphi_\alpha} = (M^{-1})_{\alpha'\beta} \frac{\partial}{\partial\varphi_{\alpha'}} M_{\beta\alpha}. \tag{7.55}$$

Az egyenlet jobb oldalát azonosan átalakíthatjuk, ha felhasználjuk, hogy:

$$\det M = \exp\{\mathrm{Tr} \ln M\}. \tag{7.56}$$

Deriváljuk ezt az összefüggést:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha}\mathrm{det}M &= \mathrm{det}M\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha}\mathrm{Tr}\ln M \\
&= \mathrm{det}M\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha}\sum_\beta(\ln M)_{\beta\beta} \\
&= \mathrm{det}M\cdot(M^{-1})_{\beta\gamma}\frac{\partial M_{\gamma\beta}}{\partial\varphi_\alpha} \\
&= \mathrm{det}M\cdot(M^{-1})_{\beta\gamma}\frac{\partial M_{\gamma\alpha}}{\partial\varphi_\beta}.
\end{aligned}\tag{7.57}$$

A $J(\varphi)$–re vonatkozó egyenlet tehát az alábbi alakot ölti:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha}\left(\ln J-\ln\mathrm{det}M\right) = 0,\tag{7.58}$$

és a megoldása:

$$J(\varphi) = \mathrm{const.}\cdot\mathrm{det}M.\tag{7.59}$$

æ

8 A Becchi-Rouet-Stora–szimmetria

Mint azt az előző fejezetben megtanultuk, a Slavnov-Taylor–transzformációk az eltolások nem lineáris ábrázolásait valósítják meg: a térmennyiségek olyan – nem lineáris – transzformációi, amelyek következtében a kényszerfeltételek (a mértékfeltételek) a térmennyiségektől független állandóval tolódnak el. Helyettük az eltolások lineáris transzformációkkal is ábrázolhatók, de ennek az az ára, hogy antikommutáló segédváltozókat kell bevezetnünk.

Induljunk ki ismét abból, hogy

$$\sigma(\varphi^S) = \int\left(\prod_\alpha d\varphi_\alpha\delta[F_\alpha(\varphi)]\right)\mathrm{det}M\cdot\sigma(\varphi)\tag{8.1}$$

alakú kifejezéseket kell kiszámolnunk, ahol φ^S_α feltevés szerint az $F_\alpha(\varphi)=0$ kényszerfeltételek egyértelmű megoldása. Írjuk ebben a kifejezésben a Dirac-deltákat exponenciális alakba,

$$\prod_\alpha\delta[F_\alpha(\varphi)] = \int_I\prod_\alpha\frac{d\lambda_\alpha}{2\pi\mathrm{i}}e^{-\lambda_\alpha F_\alpha(\varphi)},\tag{8.2}$$

ahol az integrálás a komlex λ_α síkon a képzetes tengely mentén történik. Vezessük be a C_α és $\bar{C}_\alpha$ Grassmann-változókat, amelyek segítségével a determinánst Gauss-integrál alakba írjuk:

$$\mathrm{det}M = \int\prod_\alpha\left(dC_\alpha d\bar{C}_\alpha\right)e^{\bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}C_\beta}.\tag{8.3}$$

A fenti átalakítások után:

$$\sigma(\varphi^S) = \mathcal{N}\int\left(\prod_\alpha d\varphi_\alpha dC_\alpha d\bar{C}_\alpha d\lambda_\alpha\right)\sigma(\varphi)e^{-S\left[\varphi,C,\bar{C},\lambda\right]}, \tag{8.4}$$

ahol a hatás:

$$S\left[\varphi, C, \bar{C}, \lambda\right] = \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi) - \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi)C_\beta. \tag{8.5}$$

A $\det M\cdot\prod_\alpha d\varphi_\alpha$ integrálási mérték Slavnov-Taylor–szimmetriájának a következménye, hogy az $S[\varphi, C, \bar{C}, \lambda]$ effektív hatás invariáns a *Becchi-Rouet-Stora–transzformációval (BRS–transzformációval)* szemben, amely az alábbi módon van definiálva:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_\alpha &= \bar{\epsilon}C_\alpha, & \delta C_\alpha &= 0, \\ \delta\bar{C}_\alpha &= \bar{\epsilon}\lambda_\alpha, & \delta\lambda_\alpha &= 0,. \end{aligned} \tag{8.6}$$

ahol $\bar{\epsilon}$ tetszőleges Grassmann-értékű állandó (a BRS–transzformáció paramétere), amelyre:

$$\begin{aligned} & & \bar{\epsilon}\bar{\epsilon} &= 0, \\ \bar{\epsilon}C_\alpha + C_\alpha\bar{\epsilon} &= 0, & \bar{\epsilon}\bar{C}_\alpha + \bar{C}_\alpha\bar{\epsilon} &= 0. \end{aligned} \tag{8.7}$$

A definícióból látszik, hogy a BRS–transzformáció keveri a közönséges és a Grassmann típusú dinamikai változókat.

A BRS–transzformáció az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- A BRS–transzformáció nilpotens, azaz:

$$\begin{aligned} \delta^2\varphi_\alpha &= \delta(\bar{\epsilon}C_\alpha) = 0, \\ \delta^2\bar{C}_\alpha &= \delta(\bar{\epsilon}\lambda_\alpha) = 0, \\ \delta^2 C_\alpha &= 0, \\ \delta^2\lambda_\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{8.8}$$

  A nilpotencia bizonyítása triviális.

- Az effektív hatás, $S[\varphi, C, \bar{C}, \lambda]$, BRS–invariáns, azaz a megváltozása BRS–transzformáció során zérus:

$$\delta S[\varphi, C, \bar{C}, \lambda] = 0. \tag{8.9}$$

  Formálisan az effektív hatás megváltozása BRS–transzformáció során:

$$\delta S = \lambda_\alpha\frac{\partial F_\alpha}{\partial\varphi_\beta}\bar{\epsilon}C_\beta - \bar{\epsilon}\lambda_\alpha M_{\alpha\beta}C_\beta - \bar{C}_\alpha\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial\varphi_\gamma}\bar{\epsilon}C_\gamma C_\beta. \tag{8.10}$$

Az egyenlet jobb oldalán az első két tag összege zérus, mert a Slavnov-Taylor-szimmetriának köszönhetően $M_{\alpha\beta} = \partial F_\alpha / \partial\varphi_\beta$. A harmadik tag ugyancsak eltűnik, mert

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial\varphi_\gamma} = \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial\varphi_\gamma \partial\varphi_\beta} \tag{8.11}$$

a γ és β indexekben szimmetrikus, és kontrakciója az antiszimmetrikus $C_\gamma C_\beta$ mátrixszal zérust ad. Látjuk tehát, hogy a BRS-szimmetria a Slavnov-Taylor-szimmetria következménye.

- Definiáljuk a BRS–transzformáció operátorát:

$$D = C_\alpha \frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha} + \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial\bar{C}_\alpha}. \tag{8.12}$$

Segítségével a hatás megváltozása BRS-transzformáció során:

$$\delta S[\varphi, C, \bar{C}, \lambda] = \bar{\epsilon} D S[\varphi, C, \bar{C}, \lambda]. \tag{8.13}$$

A BRS–transzformáció operátora nilpotens, azaz

$$D^2 = 0. \tag{8.14}$$

Ennek következtében minden $DQ[\varphi, C, \bar{C}, \lambda]$ alakú kifejezés triviálisan BRS–invariáns.

- Az effektív hatás is ilyen alakú:

$$S = D[\bar{C}_\alpha F_\alpha(\varphi)]. \tag{8.15}$$

Azonos átalakítással:

$$\begin{aligned} & D[\bar{C}_\alpha F_\alpha(\varphi)] \\ = {} & C_\beta \bar{C}_\alpha \frac{\partial F_\beta}{\partial\varphi_\alpha} + \lambda_\beta F_\beta = \lambda_\alpha F_\alpha - \bar{C}_\alpha \frac{\partial F_\beta}{\partial\varphi_\alpha} C_\beta = S. \end{aligned} \tag{8.16}$$

æ

9 A mértékfeltételekben szereplő állandók

A mértékfeltételekben szereplő ν_α állandók megválasztása önkényes, hiszen a Slavnov-Taylor-szimmetria következtében az értéküktől nem függenek a fizikai várható értékek. Ezért tekinthetjük a ν_α állandókat adott eloszlású véletlen változóknak is, amelyekre történő átlagolással olyan kifejezésekhez jutunk, amelyek explicit módon is függetlenek ezen változóktól.

Tegyük fel, hogy a fizikai rendszer φ_α dinamikai változói

$$F_\alpha(\varphi,\nu) \quad = \quad 0 \tag{9.17}$$

egyenleteknek tesznek eleget, ahol ν_α adott eloszlású valószínűségi változók. A dinamikai változók valamely $\sigma(\varphi)$ függvényének várható értékét ekkor a ν_α valószínűségi változókra történő átlagolással kaphatjuk meg:

$$\langle\sigma(\varphi)\rangle \quad = \quad \int d\rho(\nu)\prod_\alpha d\varphi_\alpha \delta[F_\alpha(\varphi,\nu)]\mathrm{det}M\cdot\sigma(\varphi). \tag{9.18}$$

Itt a $d\rho(\nu)$ integrálási mérték tartalmazza a ν_α valószínűségi változók sűrűségfüggvényét. Az előző fejezetekben végzett azonos átalakításokat megismételve kapjuk, hogy:

$$\langle\sigma(\varphi)\rangle \quad = \quad \mathcal{N}\int d\rho(\nu)\left(\prod_\alpha d\varphi_\alpha dC_\alpha d\bar{C}_\alpha d\lambda_\alpha\right)\sigma(\varphi)\exp\left\{-S(\varphi,C,\bar{C},\lambda,\nu)\right\}, \tag{9.19}$$

ahol a hatás:

$$S(\varphi,C,\bar{C},\lambda,\nu) \quad = \quad \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi,\nu) - \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi,\nu)C_\beta, \tag{9.20}$$

és itt az F_α „kényszerek" valamint az

$$M_{\alpha\beta}(\varphi,\nu) \quad = \quad \frac{\partial F_\alpha(\varphi,\nu)}{\partial\varphi_\beta} \tag{9.21}$$

determináns függ a véletlen változóktól. A teljes formális analógia következtében a hatás BRS–invariáns.

A véletlen változókra történő átlagolás elvégzésével definiálhatunk egy új effektív hatást:

$$e^{-\Sigma[\varphi,C,\bar{C},\lambda]} \quad = \quad \int d\rho(\nu)e^{-S[\varphi,C,\bar{C},\lambda,\nu]}. \tag{9.22}$$

Használva a BRS–transzformáció korábban bevezetett

$$D \quad = \quad C_\alpha\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha} + \lambda_\alpha\frac{\partial}{\partial\bar{C}_\alpha} \tag{9.23}$$

differenciáloperátorát, az effektív hatás BRS–szimmetriáját a

$$D\Sigma[\varphi, C, \bar{C}, \lambda] \;=\; 0 \tag{9.24}$$

egyenlettel fejezhetjük ki.

Az alábbiakban példákat adunk meg az effektív hatás alakjára.

1. Példa. Legyen a mértékfeltételek alakja:

$$F_\alpha(\varphi, \nu) \;\equiv\; F_\alpha(\varphi) - \nu_\alpha = 0. \tag{9.25}$$

A ν_α véletlen változók szerinti integrálás a

$$\int d\rho(\nu) e^{\lambda_\alpha \nu_\alpha} \;\equiv\; e^{w(\lambda)} \tag{9.26}$$

Laplace-transzformált felléptéhez vezet. Felhasználhatjuk továbbá, hogy

$$M_{\alpha\beta}(\varphi, \nu) = \frac{\partial F_\alpha(\varphi, \nu)}{\partial \varphi_\beta} \;=\; \frac{\partial F_\alpha(\varphi)}{\partial \varphi_\beta} = M_{\alpha\beta}(\varphi). \tag{9.27}$$

Az effektív hatásra azt kapjuk tehát, hogy:

$$\begin{aligned} e^{-\Sigma} &= \int d\rho(\nu) e^{-\lambda_\alpha F_\alpha(\varphi,\nu) + \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi,\nu) C_\beta} \\ &= e^{w(\lambda) - \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi) + \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi) C_\beta}, \end{aligned} \tag{9.28}$$

azaz

$$\Sigma(\varphi, C, \bar{C}, \lambda) \;=\; -w(\lambda) + \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi) - \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi) C_\beta. \tag{9.29}$$

Ez a kifejezés a

$$D\Sigma \;=\; 0 \tag{9.30}$$

egyenlet legáltalánosabb

$$\Sigma(\varphi, C, \bar{C}, \lambda) \;=\; \Sigma(\varphi, \lambda) - \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi) C_\beta \tag{9.31}$$

alakú, – azaz a $\bar{C}$ és C Grassmann-értékű változókban kvadratikus – megoldása.

Definíció szerint:

$$\begin{aligned} D\Sigma(\varphi, C, \bar{C}, \lambda) &= C_\alpha \frac{\partial \Sigma(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi_\alpha} - C_\alpha \bar{C}_\beta \frac{\partial M_{\beta\gamma}(\varphi)}{\partial \varphi_\alpha} C_\gamma - \lambda_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi) C_\beta \\ &= 0, \end{aligned} \tag{9.32}$$

ahonnan

$$C_\alpha \bar{C}_\beta \frac{\partial M_{\beta\gamma}}{\partial \varphi_\alpha} C_\gamma = 0, \tag{9.33}$$

$$C_\alpha \frac{\partial \Sigma(\varphi,\lambda)}{\partial \varphi_\alpha} - \lambda_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi) C_\beta = 0. \tag{9.34}$$

Az (??) egyenletből

$$\frac{\partial M_{\beta\gamma}}{\partial \varphi_\alpha} - \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \varphi_\gamma} = 0, \tag{9.35}$$

ami azt jelenti, hogy léteznek olyan $F_\alpha(\varphi)$ függvények, hogy

$$M_{\alpha\beta}(\varphi) = \frac{\partial F_\alpha(\varphi)}{\partial \varphi_\beta}. \tag{9.36}$$

a (??) egyenletből ekkor:

$$\frac{\partial \Sigma(\varphi,\lambda)}{\partial \varphi_\alpha} = \lambda_\beta \frac{\partial F_\beta(\varphi)}{\partial \varphi_\alpha}, \tag{9.37}$$

ahonnan integrálással adódik a tetszőleges $w(\lambda)$ függvényt additíven tartalmazó eredmény:

$$\Sigma(\varphi,\lambda) = \lambda_\beta F_\beta(\varphi) - w(\lambda). \tag{9.38}$$

2. Példa. Legyen a mértékfeltételek alakja:

$$F_\alpha(\varphi,\nu) \equiv F_\alpha(\varphi) - e_{\alpha a}(\varphi)\nu_a = 0. \tag{9.39}$$

Tegyük fel továbbá, hogy a ν_α paraméterekkel leírt ,,zaj" normális eloszlású:

$$d\rho(\nu) = \prod_a d\nu_a e^{-\frac{1}{2}\nu_a^2}. \tag{9.40}$$

Felhasználjuk továbbá, hogy:

$$\frac{\partial F_\alpha(\varphi,\nu)}{\partial \varphi_\beta} = \frac{\partial F_\alpha(\varphi)}{\partial \varphi_\beta} - \frac{\partial e_{\alpha a}(\varphi)}{\partial \varphi_\beta}\nu_a. \tag{9.41}$$

Mindezeket figyelembe véve:

$$\begin{aligned} e^{-\Sigma} = \int \prod_a d\nu_a \exp\Big\{ & -\frac{1}{2}\nu_a^2 - \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi) + \lambda_\alpha e_{\alpha a}(\varphi)\nu_a \\ & + \bar{C}_\alpha \left(M_{\alpha\beta}(\varphi) - \frac{\partial e_{\alpha a}(\varphi)}{\partial \varphi_\beta}\nu_a \right) C_\beta \Big\}. \end{aligned} \tag{9.42}$$

Innen a véletlen változókra vonatkozó Gauss–integrálok elvégzése után leolvashatjuk az effektív hatást:

$$\begin{aligned} \Sigma(\varphi, C, \bar{C}, \lambda) = & \ \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi) - \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi) C_\beta \\ & -\frac{1}{2}\sum_a \left(\lambda_\alpha e_{\alpha a}(\varphi) - \bar{C}_\alpha \frac{\partial e_{\alpha a}(\varphi)}{\partial \varphi_\beta} C_\beta \right)^2. \end{aligned} \tag{9.43}$$

Az effektív hatás most λ–kban és $\bar{C}C$–kben kvadratikus kifejezéseket tartalmaz.

Meg lehet mutatni, hogy a legáltalánosabb utóbbi tulajdonságú kifejezés, amely egyúttal a

$$D\Sigma \;=\; 0 \tag{9.44}$$

egyenlet megoldása, az alábbi alakú:

$$\Sigma \;=\; D\tilde{\Sigma}, \tag{9.45}$$

ahol

$$\tilde{\Sigma} \;=\; \bar{C}_\alpha \bar{C}_\beta C_\gamma \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta,\gamma}(\varphi) + \bar{C}_\alpha \lambda_\beta \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}(\varphi). \tag{9.46}$$

3. Példa. Tegyük fel, hogy a $\nu_a(x)$ véletlen változók normális eloszlásúak:

$$d\rho(\nu) \;=\; \prod_{a,x} d\nu_a(x)\,[\mathrm{Det}w]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int dxdy\nu_a(x)w^{-1}_{ab}(x,y)\nu_b(y)\right\}. \tag{9.47}$$

A véletlen változókra történő átlagolás elvégzése az effektív hatásban az alábbi összefüggéssel adott $w(\lambda)$ tagot eredményezi:

$$e^{w(\lambda)} \;=\; \int d\rho(\nu)e^{\int dx\lambda_a(x)\nu_a(x)} = \exp\left\{\int dxdy\lambda_a(x)w_{ab}(x,y)\lambda_b(y)\right\}. \tag{9.48}$$

Az effektív hatás ezekután a

$$\Sigma \;=\; -w(\lambda) + \int dx\lambda_a(x)F_a[\varphi(x)] - \int dxdy\bar{C}_a(x)M_{ab}(x,y)C_b(y) \tag{9.49}$$

alakot ölti, $M_{ab}(x,y) = \delta F_a[\varphi(x)]/\delta\varphi_b(y)$.

10 A BRS–szimmetria és a WT–azonosságok

Tudjuk, hogy a folytonos szimmetriák következményei összefoglalhatók a generáló funkcionálokra vonatkozó Ward-Takahashi–azonosságok formájában. Utóbbiakból azonosságok származtathatók le a Green-függvényekre ill. az 1PI vertexfüggvényekre funkcionálderiválással. Hasonlóan, a BRS–szimmetria is WT-azonosságokra vezet.

Induljunk ki a Green-függvények generáló funkcionáljának

$$Z[J,\bar\eta,\eta,\ell] \;=\; \int \mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\bar C\mathcal{D}C\mathcal{D}\lambda e^{-S[\varphi,C,\bar C,\lambda]}\,\cdot$$
$$\cdot \exp\left\{\int dx(J_a\varphi_a+\bar\eta_a C_a+\bar C_a\eta_a+\ell_a\lambda_a)\right\} \qquad (10.50)$$

definíciójából egy olyan elméletben, ahol a hatás invariáns a

$$\delta\varphi_a=\bar\epsilon C_a, \qquad \delta C_a=0,$$
$$\delta\bar C_a=\bar\epsilon\lambda_a, \qquad \delta\lambda_a=0 \qquad (10.51)$$

BRS–transzformációval szemben. A generáló funkcionálban szereplő euklideszi (vagy más néven sík) integrálási mérték is invariáns a BRS–transzformációval szemben, mivel az utóbbi lineáris a térmennyiségekben. Ez azt jelenti, hogy a BRS–transzformációval, mint változó-transzformációval szemben a generáló funkcionál, azaz a megfelelő kvantumtérelmélet invarianciáját az biztosítja, hogy ha a forrástagok megváltozásából eredő járulék zérus:

$$0 \;=\; \int \mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\bar C\mathcal{D}C\mathcal{D}\lambda \int dx\,(J_a\bar\epsilon C_a+\bar\epsilon\lambda_a\eta_a)\,e^{-S[\varphi,C,\bar C,\lambda]}\,\cdot$$
$$\cdot \exp\left\{\int dx(J_a\varphi_a+\bar\eta_a C_a+\bar C_a\eta_a+\ell_a\lambda_a)\right\}. \qquad (10.52)$$

Innen az alábbi azonosságot kapjuk, ha kifejezzük a pályaintegrál integrandusában szereplő térmennyiségeket a generáló funkcionál funkcionálderiváltjaival:

$$0 \;=\; \int dx\left(J_a(x)\frac{\delta}{\delta\bar\eta_a(x)}-\eta_a(x)\frac{\delta}{\delta\ell_a(x)}\right)Z. \qquad (10.53)$$

Innen Z-vel való osztással kapjuk az összefüggő Green-függvények generáló funkcionáljára az alábbi azonosságot:

$$0 \;=\; \int dx\left(J_a(x)\frac{\delta}{\delta\bar\eta_a(x)}-\eta_a(x)\frac{\delta}{\delta\ell_a(x)}\right)W. \qquad (10.54)$$

Legendre–transzformációval az 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljára végül a következő WT–azonosság adódik:

$$\int dx \left(C_a(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_a(x)} + \lambda_a(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}_a(x)} \right) \; = \; 0. \tag{10.55}$$

A WT-azonosságoknak nagyon fontos következménye van a renormált elmélet S_r hatásának alakjára nézve. Tegyük fel, hogy az elmélet lokális, a kitevők leszámlálása („power counting") alapján renormálható és létezik BRS–invariáns regularizáció. Ekkor az elmélet a BRS-szimmetria megőrzésével renormálható, ha az ellentagokat úgy vezetjük be, hogy a WT–azonosság az 1PI Green-függvények generáló funkcionáljára a hurkok számának tetszőleges rendjében érvényes maradjon. A renormált hatásra ekkor ugyancsak érvényesek a WT-azonosságok.

Tegyük fel, hogy meg lehet mutatni, hogy a szellemterek a renormált effektív hatásban kvadratikus alakban szerepelnek, azaz hogy az

$$S_r \; = \; -\int dxdy M^r_{ab}(x,y) \bar{C}_a(x) C_b(y) + \Sigma[\varphi, \lambda] \tag{10.56}$$

alakú. Ekkor a BRS–invariáns renormált effektív hatás alakjára, éppen a BRS-szimmetria következtében, még további megszorítás érvényes. A korábbiakból tudjuk, hogy léteznie kell olyan $F^r_a[\varphi]$ és $w^r[\lambda]$ funkcionáloknak, hogy:

$$\begin{aligned} M^r_{ab}(x,y) &= \frac{\delta F_a[\varphi]}{\delta \varphi_b(y)]}, \\ \Sigma[\varphi, \lambda] &= \int dx \lambda_a(x) F^r_a[\varphi] - w^r[\lambda]. \end{aligned} \tag{10.57}$$

Ez azt jelenti, hogy ilyenkor a BRS–invariáns hatás szerkezete a renormálás során megőrződik.

Egyszerűen ilyen alakú a legáltalánosabb olyan BRS–invariáns kifejezés, amely a szellemterekben kvadratikus alakú.

æ

11 A szupertér

A dinamikai változók α indexe a kvantumtérelméletben általában a folytonos téridő koordinátákat tartalmazza, meg azokon túl további indexeket, ha a terek többkomponensűek. Most kiegészítjük az x_μ téridő koordináták terét a $\bar\theta$ Grassmann-értékű koordinátával. Az így kapott teret *szupertérnek* nevezzük.

Vezessünk be a szuperetéren értelmezett függvényeket a φ_α, C_α, $\bar C_\alpha$ és λ_α dinamikai változók helyett. Erre a legáltalánosabb lehetőség, hogy egy közönséges és egy Grassmann-értékű függvényt definiálunk az alábbiak szerint:

$$\phi_\alpha(\bar\theta) = \varphi_\alpha + \bar\theta C_\alpha, \tag{11.58}$$
$$\Lambda_\alpha(\bar\theta) = \bar C_\alpha + \bar\theta \lambda_\alpha. \tag{11.59}$$

A szupertér használata lehetővé teszi, hogy a BRS–szimmetriát átfogalmazzuk, mint a $\bar\theta$ koordináta eltolásával szembeni invarianciát.

- A BRS–transzformáció $\bar\epsilon$ állandóval történő eltolás a $\bar\theta$ Grassmann-értékű koordináta irányában.

  A BRS–transzformáció definícióját felhasználva:

$$\begin{aligned}\delta\phi_\alpha(\bar\theta) = \bar\epsilon C_\alpha = \phi_\alpha(\bar\theta+\bar\epsilon) - \phi_\alpha(\bar\theta) \equiv \bar\epsilon\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\bar\theta},\\ \delta\Lambda_\alpha(\bar\theta) = \bar\epsilon\lambda_\alpha = \Lambda_\alpha(\bar\theta+\bar\epsilon) - \Lambda_\alpha(\bar\theta) \equiv \bar\epsilon\frac{\partial\Lambda_\alpha}{\partial\bar\theta}.\end{aligned} \tag{11.60}$$

- Az effektív hatás átírható

$$S[\varphi, C, \bar C, \lambda] = \int d\bar\theta \Lambda_\alpha(\bar\theta) F_\alpha[\phi(\bar\theta)] \tag{11.61}$$

  alakba, amely alak nyilvánvalóan BRS–invariáns (invariáns a $\bar\theta$ változó eltolásával szemben.

  Azonos átalakítással:

$$\begin{aligned}\Lambda_\alpha(\bar\theta)F_\alpha[\phi(\bar\theta)] &= \left(\bar C_\alpha + \bar\theta\lambda_\alpha\right) F_\alpha[\varphi_\beta + \bar\theta C_\beta]\\ &= \left(\bar C_\alpha + \bar\theta\lambda_\alpha\right)\left(F_\alpha(\varphi) + \bar\theta\frac{\partial F_\alpha}{\partial\varphi_\beta}C_\beta\right)\\ &= \bar C_\alpha F_\alpha(\varphi) + \bar\theta\left[\lambda_\alpha F_\alpha(\varphi) - \bar C_\alpha\frac{\partial F_\alpha}{\partial\varphi_\beta}C_\beta\right].\end{aligned} \tag{11.62}$$

  (A levezetés során F_α–t Taylor-sorba fejtettük a $\bar\theta$ változó szerint.) Nyilvánvaló, hogy a $\bar\theta$ változó szerinti integrálás után a szögletes zárójelet kapjuk eredményül.

- Az effektív hatás maga is felírható mint egy a szuperteren értelmezett függvény $\bar{\theta}$ szerinti deriváltja.

  Az állítás triviális, mert az integrálás és a deriválás egy Grassmann-változó szerint definícióból adódóan ugyanaz a művelet, úgyhogy:

$$S[\varphi, C, \bar{C}, \lambda] \;=\; \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \Lambda_\alpha(\bar{\theta}) F_\alpha[\phi(\bar{\theta})]. \tag{11.63}$$

- A kvantumtérelméletben az α index általában magában foglalja az x téridő koordinátkat és és valamilyen további diszkrét a indexe(ke)t, $\alpha = (a, x)$. Ekkor a BRS–transzformáció alakja:

$$\begin{array}{ll} \delta\varphi_a(x) = \bar{\epsilon} C_a(x), & \delta C_a(x) = 0, \\ \delta\bar{C}_a(x) = \bar{\epsilon}\lambda_a(x), & \delta\lambda_a(x) = 0. \end{array} \tag{11.64}$$

  Vezessük be az $(x, \bar{\theta})$ koordinátákkal kifeszített szuperteret, és efölött a

$$\begin{aligned} \phi_a(x, \bar{\theta}) &= \varphi_a(x) + \bar{\theta} C_a(x), \\ \Lambda_a(x, \bar{\theta}) &= \bar{C}_a(x) + \bar{\theta}\lambda_a(x) \end{aligned} \tag{11.65}$$

  érmennyiségeket. Ekkor az előzőek alapján a hatás explicite BRS–invariáns alakja:

$$S \;=\; \int d\bar{\theta} dx \Lambda_a(x, \bar{\theta}) F_a[\phi_a(x, \bar{\theta})]. \tag{11.66}$$

- A BRS–transzformáció operátora a szuperteren értelmezett függvényeken:

$$D \;=\; C_\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi_\alpha} + \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{C}_\alpha}. \tag{11.67}$$

  Elemi számolással azonnal adódik, hogy:

$$\bar{\epsilon} D \phi_\alpha \;=\; \delta\phi_\alpha, \tag{11.68}$$

$$\bar{\epsilon} D \Lambda_\alpha \;=\; \delta\Lambda_\alpha. \tag{11.69}$$

- A BRS–transzformáció operátora nilpotens, azaz

$$D^2 \;=\; 0. \tag{11.70}$$

  Ennek következtében minden $DQ[\varphi, C, \bar{C}, \lambda]$ alakú kifejezés triviálisan BRS–invariáns.

- Az effektív hatás is ilyen alakú:

$$S = D[\bar{C}_\alpha F_\alpha(\varphi)]. \tag{11.71}$$

Azonos átalakítással:

$$D[\bar{C}_\alpha F_\alpha(\varphi)] \\ = C_\beta \bar{C}_\alpha \frac{\partial F_\beta}{\partial \varphi_\alpha} + \lambda_\beta F_\beta = \lambda_\alpha F_\alpha - \bar{C}_\alpha \frac{\partial F_\beta}{\partial \varphi_\alpha} C_\beta = S. \tag{11.72}$$

Látjuk tehát, hogy a szuperteret bevezetve a BRS–szimmetria a Grassmann-értékű koordináta irányában történő eltolással szembeni invarianciaként fogalmazható meg. A BRS–szimmetria a φ_α dinamikai változók függvényeinek várható értékei tekintetében egyenértékű a Slavnov-Taylor–szimmetriával.

Induljunk ki a

$$\det M \cdot (M^{-1})_{\alpha\beta} = \int \prod_\alpha \left(dC_\alpha d\bar{C}_\alpha\right) \bar{C}_\beta C_\alpha \exp\left\{\bar{C}_\gamma M_{\gamma\delta} C_\delta\right\} \tag{11.73}$$

azonosságból. Szorozzuk ezt az infinitezimális ν_β állandó paraméterrel:

$$\det \cdot (M^{-1})_{\alpha\beta}\nu_\beta = \int \prod_\alpha \left(dC_\alpha d\bar{C}_\alpha\right) C_\alpha \left(-\bar{C}_\beta \nu_\beta\right) \exp\left\{\bar{C}_\gamma M_{\gamma\delta} C_\delta\right\}, \tag{11.74}$$

ahonnan a dinamikai változók Slavnov-Taylor–transzformáció miatti

$$\delta_{ST}\varphi_\alpha = (M^{-1})_{\alpha\beta}\nu_\beta \tag{11.75}$$

megváltozását a BRS–transzformáció során bekövetkező

$$\delta_{BRS}\varphi_\alpha = \bar{\epsilon} C_\alpha = -C_\alpha \bar{\epsilon} \tag{11.76}$$

megváltozásnak feleltetve meg azt kapjuk, hogy:

$$\det M \cdot \delta_{ST}\varphi_\alpha = \int \prod_\alpha \left(dC_\alpha d\bar{C}_\alpha\right) \delta_{BRS}\varphi_\alpha \exp\left\{\bar{C}_\gamma M_{\gamma\delta} C_\delta\right\}. \tag{11.77}$$

Ez az összefüggés mutatja, hogy a dinamikai változók várható értékeinek ST– és BRS–szimmetriája ugyanazt jelenti.

A ST–transzformáció nem lineáris és nem lokális. Ezzel szemben a BRS–transzformáció nagy előnye, hogy lineáris és lokális transzformáció. A kvantumtér-elméletben érdemesebb tehát a BRS–invariáns megfogalmazást használni.

Ennek a fejezetnek a végén még megvizsgáljuk azt az esetet, amikor a φ_α dinamikai változók egy G csoport valamilyen mátrixreprezentációban vett elemeit parametrizálják. A dinamikai változók BRS–transzformációja átírható ilyen esetben a csoportelemek transzformációjává. Ha a φ_α változónak a $g(\varphi_\alpha)$ csoportelem felel meg, akkor a $\phi_\alpha(\bar\theta)$ dinamikai változónak a

$$\Gamma_\alpha(\bar\theta) \;=\; g(\varphi_\alpha)\left(1+\bar\theta C_a T_a\right) \tag{11.78}$$

mátrix felel meg, ahol C_a Grassmann-értékű állandók és T_a a csoport generátorai az adott mátrixreprezentációban. Vegyük észre, hogy

$$1+\bar\theta C_a T_a \;=\; \exp\{\bar\theta C_a T_a\} \tag{11.79}$$

éppen a szokásos exponenciális alak általánosítása. A térmennyiség változása BRS–transzformáció során:

$$\delta\phi_\alpha \;=\; \bar\epsilon\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\bar\theta}, \tag{11.80}$$

aminek a $\Gamma_\alpha(\bar\theta)$ mátrix

$$\delta\Gamma_\alpha(\bar\theta) \;=\; \bar\epsilon\frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial\bar\theta} \tag{11.81}$$

megváltozása felel meg. A megváltozásra:

$$\delta g_\alpha(1+\bar\theta C_a T_a)+g_\alpha\bar\theta\delta C_a T_a \;=\; \bar\epsilon g_\alpha C_a T_a, \tag{11.82}$$

ahonnan leolvashatjuk, hogy:

$$\delta g_\alpha \;=\; \bar\epsilon g_\alpha C_a T_a, \tag{11.83}$$

$$\delta g_\alpha=\bar\epsilon g_\alpha C_a T_a C_b T_b \;=\; -g_\alpha \delta C_a T_a. \tag{11.84}$$

Ez azt jelenti, hogy a ϕ_α dinamikai változóval parametrizált csoportelem közönséges mátrix tényezője $\bar\epsilon C_a$ paraméterekkel adott csoporttranszformációt szenved, míg a csoportelem Grassmann-mátrix része

$$\delta C_a T_a \;=\; -\bar\epsilon C_a C_b T_a T_b = -\bar\epsilon C_a C_b \frac{1}{2}[T_a, T_b] \tag{11.85}$$

módon transzformálódik, vis.

$$\delta C_a \;=\; -\frac{1}{2}\bar\epsilon f_{abc} C_b C_c. \tag{11.86}$$

A térelméletben az a tipikus, hogy a dinamikai változók, mint a csoport-transzformációk paraméterei az α indexükben hordozzák az a csoportindexet és egyúttal a folytonos x_μ téridő koordinátákat. Ha a BRS–transzformáció Grassmann-paraméterei is lokálisak, akkor C_a-k az x_μ téridőkoordinátáktól is függenek. Ilyenkor C_a helyett C_α–t kell írnunk. æ

12 A sztochasztikus egyenletek

A kvantumtérelmélet és a sztochasztikus egyenleteket kielégítő dinamikai változókkal leírt klasszikus fizikai rendszer között jelentős hasonlóság mutatkozik. Ebben a fejezetben ilyen sztochasztikus rendszereket fogunk vizsgálni.

Tegyük fel, hogy a fizikai rendszer φ_α dinamikai változói

$$F_\alpha(\varphi, \nu) \;=\; 0 \tag{12.87}$$

egyenleteknek tesznek eleget, ahol ν_α adott eloszlású valószínűségi változók. A dinamikai változók valamely $\sigma(\varphi)$ függvényének várható értékét ekkor a ν_α valószínűségi változókra történő átlagolással kaphatjuk meg:

$$\langle\sigma(\varphi)\rangle \;=\; \int d\rho(\nu) \prod_\alpha d\varphi_\alpha \delta[F_\alpha(\varphi, \nu)] \mathrm{det} M \cdot \sigma(\varphi). \tag{12.88}$$

Itt a $d\rho(\nu)$ integrálási mérték tartalmazza a ν_α valószínűségi változók sűrűségfüggvényét. Az előző fejezetekben végzett azonos átalakításokat megismételve kapjuk, hogy:

$$\langle\sigma(\varphi)\rangle \;=\; \mathcal{N} \int d\rho(\nu) \left(\prod_\alpha d\varphi_\alpha dC_\alpha d\bar{C}_\alpha d\lambda_\alpha \right) \sigma(\varphi) \exp\left\{ -S(\varphi, C, \bar{C}, \lambda, \nu) \right\}, \tag{12.89}$$

ahol a hatás:

$$S(\varphi, C, \bar{C}, \lambda, \nu) \;=\; \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi, \nu) - \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi, \nu) C_\beta, \tag{12.90}$$

és itt az F_α „kényszerek” valamint az

$$M_{\alpha\beta}(\varphi, \nu) \;=\; \frac{\partial F_\alpha(\varphi, \nu)}{\partial \varphi_\beta} \tag{12.91}$$

determináns függ a véletlen változóktól. A teljes formális analógia következtében a hatás BRS–invariáns.

A véletlen változókra történő átlagolás elvégzésével definiálhatunk egy új effektív hatást:

$$e^{-\Sigma[\varphi, C, \bar{C}, \lambda]} \;=\; \int d\rho(\nu) e^{-S[\varphi, C, \bar{C}, \lambda, \nu]}. \tag{12.92}$$

Használva a BRS–transzformáció korábban bevezetett

$$D \;=\; C_\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi_\alpha} + \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{C}_\alpha} \tag{12.93}$$

differenciáloperátorát, az effektív hatás BRS–szimmetriáját a

$$D\Sigma[\varphi, C, \bar{C}, \lambda] \;=\; 0 \tag{12.94}$$

egyenlettel fejezhetjük ki.

Az alábbiakban példákat adunk meg az effektív hatás alakjára.

1. Példa. Legyen a sztochasztikus egyenletek alakja:

$$F_\alpha(\varphi, \nu) \;\equiv\; F_\alpha(\varphi) - \nu_\alpha = 0. \tag{12.95}$$

A ν_α véletlen változók szerinti integrálás a

$$\int d\rho(\nu) e^{\lambda_\alpha \nu_\alpha} \;\equiv\; e^{w(\lambda)} \tag{12.96}$$

Laplace-transzformált felléptéhez vezet. Felhasználhatjuk továbbá, hogy

$$M_{\alpha\beta}(\varphi, \nu) = \frac{\partial F_\alpha(\varphi, \nu)}{\partial \varphi_\beta} \;=\; \frac{\partial F_\alpha(\varphi)}{\partial \varphi_\beta} = M_{\alpha\beta}(\varphi). \tag{12.97}$$

Az effektív hatásra azt kapjuk tehát, hogy:

$$\begin{aligned} e^{-\Sigma} &= \int d\rho(\nu) e^{-\lambda_\alpha F_\alpha(\varphi,\nu) + \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi,\nu) C_\beta} \\ &= e^{w(\lambda) - \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi) + \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi) C_\beta}, \end{aligned} \tag{12.98}$$

azaz

$$\Sigma(\varphi, C, \bar{C}, \lambda) \;=\; -w(\lambda) + \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi) - \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi) C_\beta. \tag{12.99}$$

Ez a kifejezés a

$$D\Sigma \;=\; 0 \tag{12.100}$$

egyenlet legáltalánosabb

$$\Sigma(\varphi, C, \bar{C}, \lambda) \;=\; \Sigma(\varphi, \lambda) - \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi) C_\beta \tag{12.101}$$

alakú, – azaz a $\bar{C}$ és C Grassmann-értékű változókban kvadratikus – megoldása.

Definíció szerint:

$$\begin{aligned} D\Sigma(\varphi, C, \bar{C}, \lambda) &= C_\alpha \frac{\partial \Sigma(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi_\alpha} - C_\alpha \bar{C}_\beta \frac{\partial M_{\beta\gamma}(\varphi)}{\partial \varphi_\alpha} C_\gamma - \lambda_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi) C_\beta \\ &= 0, \end{aligned} \tag{12.102}$$

ahonnan

$$C_\alpha \bar{C}_\beta \frac{\partial M_{\beta\gamma}}{\partial \varphi_\alpha} C_\gamma \;=\; 0, \tag{12.103}$$

$$C_\alpha \frac{\partial \Sigma(\varphi,\lambda)}{\partial \varphi_\alpha} - \lambda_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi) C_\beta \;=\; 0. \tag{12.104}$$

Az (**??**) egyenletből

$$\frac{\partial M_{\beta\gamma}}{\partial \varphi_\alpha} + \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \varphi_\gamma} = 0, \tag{12.105}$$

ami azt jelenti, hogy léteznek olyan $F_\alpha(\varphi)$ függvények, hogy

$$M_{\alpha\beta}(\varphi) \;=\; \frac{\partial F_\alpha(\varphi)}{\partial \varphi_\beta}. \tag{12.106}$$

a (**??**) egyenletből ekkor:

$$\frac{\partial \Sigma(\varphi,\lambda)}{\partial \varphi_\alpha} \;=\; \lambda_\beta \frac{\partial F_\beta(\varphi)}{\partial \varphi_\alpha}, \tag{12.107}$$

ahonnan integrálással adódik a tetszőleges $w(\lambda)$ függvényt additíven tartalmazó eredmény:

$$\Sigma(\varphi,\lambda) \;=\; \lambda_\beta F_\beta(\varphi) - w(\lambda). \tag{12.108}$$

2. Példa. Legyen a sztochasztikus egyenletek alakja:

$$F_\alpha(\varphi,\nu) \;\equiv\; F_\alpha(\varphi) - e_{\alpha a}(\varphi)\nu_a = 0. \tag{12.109}$$

Tegyük fel továbbá, hogy a ν_α paraméterekkel leírt ,,zaj" normális eloszlású:

$$d\rho(\nu) \;=\; \prod_a d\nu_a e^{-\frac{1}{2}\nu_a^2}. \tag{12.110}$$

Felhasználjuk továbbá, hogy:

$$\frac{\partial F_\alpha(\varphi,\nu)}{\partial \varphi_\beta} \;=\; \frac{\partial F_\alpha(\varphi)}{\partial \varphi_\beta} - \frac{\partial e_{\alpha a}(\varphi)}{\partial \varphi_\beta}\nu_a. \tag{12.111}$$

Mindezeket figyelembe véve:

$$\begin{aligned} e^{-\Sigma} \;=\; & \prod_a d\nu_a \exp\left\{ -\frac{1}{2}\nu_a^2 - \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi) + \lambda_\alpha e_{\alpha a}(\varphi)\nu_a \right. \\ & \left. + \bar{C}_\alpha \left(M_{\alpha\beta}(\varphi) - \frac{\partial e_{\alpha a}(\varphi)}{\partial \varphi_\beta}\nu_a \right) C_\beta \right\}. \end{aligned} \tag{12.112}$$

Innen a véletlen változókra vonatkozó Gauss–integrálok elvégzése után leolvashatjuk az effektív hatást:

$$\begin{aligned} \Sigma(\varphi, C, \bar{C}, \lambda) \;=\; & \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi) - \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}(\varphi) C_\beta \\ & - \frac{1}{2}\sum_a \left(\lambda_\alpha e_{\alpha a}(\varphi) - \bar{C}_\alpha \frac{\partial e_{\alpha a}(\varphi)}{\partial \varphi_\beta} C_\beta \right)^2. \end{aligned} \tag{12.113}$$

Az effektív hatás most λ–kban és $\bar{C}C$–kben kvadratikus kifejezéseket tartalmaz.

Meg lehet mutatni, hogy a legáltalánosabb utóbbi tulajdonságú kifejezés, amely egyúttal a

$$D\Sigma = 0 \tag{12.114}$$

egyenlet megoldása, az alábbi alakú:

$$\Sigma = D\tilde{\Sigma}, \tag{12.115}$$

ahol

$$\tilde{\Sigma} = \bar{C}_\alpha \bar{C}_\beta C_\gamma \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta,\gamma}(\varphi) + \bar{C}_\alpha \lambda_\beta \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}(\varphi). \tag{12.116}$$

3. Példa. Tegyük fel, hogy a sztochasztikus dinamikát normális eloszlású $\nu_a(x)$ véletlen változók szabják meg:

$$d\rho(\nu) = \prod_{a,x} d\nu_a(x)\,[\mathrm{Det}w]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int dxdy\nu_a(x)w^{-1}_{ab}(x,y)\nu_b(y)\right\}. \tag{12.117}$$

Ekkor a hatás explicite BRS–invariáns alakja:

$$\begin{aligned} S[\Phi] &= \int d\theta d\bar{\theta}\left\{\int dx\theta\frac{\partial\Phi_a(x,\bar{\theta},\theta)}{\partial\theta}F_a[\Phi(x,\bar{\theta},\theta)]\right. \\ &\left.+\int dxdy\frac{\partial\Phi_a(x,\bar{\theta},\theta)}{\partial\theta}w_{ab}(x,y)\frac{\partial\Phi_b(y,\bar{\theta},\theta)}{\partial\bar{\theta}}\right\}. \end{aligned} \tag{12.118}$$

Itt bevezettük az ún. szupertérmennyiséget az alábbi definícióval:

$$\Phi_a(x,\bar{\theta},\theta) = \phi_a(x,\bar{\theta}) + \Lambda_a(x,\bar{\theta})\theta. \tag{12.119}$$

Az alábbiakban belátjuk, hogy a hatás valóban a fenti alakban írható fel.

- A véletlen változókra történő átlagolás elvégzése az effektív hatásban az alábbi összefüggéssel adott $w(\lambda)$ tagot eredményezi:

$$e^{w(\lambda)} = \int d\rho(\nu)e^{\int dx\lambda_a(x)\nu_a(x)} = \exp\left\{\int dxdy\lambda_a(x)w_{ab}(x,y)\lambda_b(y)\right\}. \tag{12.120}$$

Az effektív hatás ezekután – mint a korábbiakból tudjuk – az

$$S = -w(\lambda) + \int dx\lambda_a(x)F_a[\varphi(x)] - \int dxdy\bar{C}_a(x)M_{ab}(x,y)C_b(y) \tag{12.121}$$

alakot ölti, $M_{ab}(x,y) = \delta F_a[\varphi(x)]/\delta\varphi_b(y)$.

- Az effektív hatásnak a zajtól független részét átírjuk BRS–invariáns alakba. A szupertérmennyiség definíciójából következően érvényesek az alábbiak:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} &= \Lambda_a(x,\bar\theta) = \bar C_a(x) + \bar\theta\lambda_a(x), && (12.122)\\
\theta\frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} &= \theta\bar C_a(x) + \theta\bar\theta\lambda_a(x), && (12.123)\\
F_a[\Phi(x,\bar\theta,\theta)] &= F_a[\phi+\Lambda\theta] = F_a[\varphi+\bar\theta C+\bar C\theta+\bar\theta\theta\lambda]\\
&= F_a[\varphi(x)] + \left(\bar\theta C_b(x) + \bar C_b(x)\theta + \bar\theta\theta\lambda_b\right)\frac{\partial F_a[\varphi(x)]}{\partial\varphi_b(y)}. && (12.124)
\end{aligned}$$

Ezek alapján megállapíthatjuk az alábbi azonosságot:

$$\begin{aligned}
\int d\theta d\bar\theta \int dx\theta\frac{\partial\Phi_a}{\partial\theta} &= \int d\theta d\bar\theta\int dx\left(\theta\bar C_a(x)+\theta\bar\theta\lambda_a(x)\right)[F_a[\varphi(x)]+\\
&\quad + \int dy\left(\bar\theta C_b(y) + \bar C_b(y)\theta + \bar\theta\theta\lambda_b(y)\right)\frac{\delta F_a[\varphi(x)]}{\delta\varphi_b(y)}\Big]\\
&= \int dx\left(\lambda_a(x)F_a[\varphi(x)] - \int dy\bar C_a(x)M_{ab}(x,y)C_b(y)\right).
\end{aligned} \qquad (12.125)$$

- A zajra végzett átlagolás következtében fellépő tagot is explicite BRS–invariáns alakra hozzuk. Felhasználjuk, hogy:

$$\frac{\partial\Phi_b}{\partial\bar\theta} = \frac{\partial\phi_b}{\partial\bar\theta} + \frac{\partial\Lambda_b}{\partial\bar\theta}\theta = C_b(x) + \lambda_b(x)\theta, \qquad (12.126)$$

ekkor a következőket írhatjuk:

$$\begin{aligned}
&\int d\theta d\bar\theta\int dxdy\frac{\partial\Phi_a(x,\bar\theta,\theta)}{\partial\theta}w_{ab}(x,y)\frac{\partial\Phi_b(y,\bar\theta,\theta)}{\partial\bar\theta}\\
&= \int d\theta d\bar\theta\int dxdy\left(\bar C_a(x)+\bar\theta\lambda_a(x)\right)w_{ab}(x,y)\left(C_b(y)+\theta\lambda_b(y)\right)\\
&= \int dxdy\lambda_a(x)w_{ab}(x,y)\lambda_b(y). \qquad (12.127)
\end{aligned}$$

æ

13 A BRS–szimmetria következményei

A BRS–szimmetria megfogalmazásához kiegészítettük a téridőkoordináták együttesét egy $\bar{\theta}$ Grassmann-értékű koordinátával. Így jutottunk a szupertérhez. Bevezettünk továbbá olyan általánosított dinamikai változókat, amelyek a szupertéren értelmezett közönséges értékű $\phi_\alpha(\bar{\theta})$ ill. Grassmann-értékű $\Lambda_\alpha(\bar{\theta})$ függvények. Segítségükkel bevezettük a $\Sigma(\phi, \Lambda)$ effektív hatást:

$$e^{-\Sigma(\phi,\Lambda)} = \int d\rho(\nu) e^{-\int d\bar{\theta}\Lambda_\alpha(\bar{\theta})F_\alpha(\phi(\bar{\theta}),\nu)}. \tag{13.128}$$

Ez az alak explicit mutatja a BRS-szimmetriát, vis. az invarianciát a $\bar{\theta}$ Grassmann–értékű koordináta tetszőleges eltolásával szemben.

A fentieknek van néhány – a továbbiak szempontjából – fontos következménye:

- Az effektív hatást Taylor-sorba fejthetjük a $\Lambda_\alpha(\bar{\theta})$ Grassmann–értékű változók szerint:

$$\begin{aligned}\Sigma(\phi, \Lambda) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\bar{\theta}_1 \ldots d\bar{\theta}_n \Lambda_{\alpha_1}(\bar{\theta}_1) \ldots \Lambda_{\alpha_n}(\bar{\theta}_n) \cdot \\ & \cdot \Sigma^{(n)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}[\phi(\bar{\theta}_1), \ldots, \phi(\bar{\theta}_n)],\end{aligned} \tag{13.129}$$

  ahol

$$\Sigma^{(n)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}[\phi(\bar{\theta}_1), \ldots, \phi(\bar{\theta}_n)] = \int d\rho(\nu) F_{\alpha_1}(\phi(\bar{\theta}_1), \nu), \ldots, F_{\alpha_n}(\phi(\bar{\theta}_n, \nu). \tag{13.130}$$

  Ez az alak közvetlenül a BRS–szimmetria következménye.

- A Grassmann-értékű koordináta irányában végzett eltolások generátora a $\Sigma(\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_n)$ függvények terében:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i}. \tag{13.131}$$

- Ha figyelembe vesszük, hogy a Grassmann-változók szerinti deriválás és integrálás definíció szerint azonos, akkor az effektív hatás szuperderivált alakba írható:

$$\Sigma(\phi, \Lambda) = D\tilde{\Sigma}(\varphi, C, \bar{C}, \lambda) \tag{13.132}$$

ahol

$$\tilde{\Sigma}(\varphi, C, \bar{C}, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\bar{\theta}_2 \dots d\bar{\theta}_n \Lambda_{\alpha_2}(\bar{\theta}_2) \cdots$$
$$\cdots \Lambda_{\alpha_n}(\bar{\theta}_n) \tilde{\Sigma}^{(n)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}[\varphi, \phi(\bar{\theta}_2), \dots, \phi(\bar{\theta}_n)] \tag{13.133}$$

ahol

$$\tilde{\Sigma}^{(n)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}[\varphi, \phi(\bar{\theta}_2), \dots, \phi(\bar{\theta}_n)] = \left(\lambda_{\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_1}\right) \Sigma^{(n)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}[\phi(\bar{\theta}_1), \dots, \phi(\bar{\theta}_n)]. \tag{13.134}$$

A fentiek belátásához csak azt kell felhasználni, hogy:

$$D \int d\bar{\theta}_2 \dots d\bar{\theta}_n = \sum_{i=1}^{n} \int d\bar{\theta}_i d\bar{\theta}_2 \dots d\bar{\theta}_n = \int d\bar{\theta}_1 \dots d\bar{\theta}_n. \tag{13.135}$$

- Annak, hogy az effektív hatás szuperderivált alakba írható, van néhány közvetlen következménye:
  1. Mivel $D^2 = 0$, az effektív hatás (és általában minden $D\tilde{\Sigma}$ alakú kifejezés) BRS invariáns:
  $$D(D\tilde{\Sigma}) = 0. \tag{13.136}$$
  2. Fordítva, a $D\Sigma = 0$ egyenlet minden megoldása $\Sigma = D\tilde{\Sigma}$ alakú.

A fentiek jelentősége abban nyilvánul meg, hogy egy $\Sigma = D\tilde{\Sigma}$ alakú effektív hatással rendelkező rendszer partíciós függvénye (generáló funkcionálja) explicite BRS–invariáns.

A $\Sigma = D\tilde{\Sigma}$ effektív hatással rendelkező dinamikai rendszer ppartíciós függvénye:

$$Z \equiv \langle 1 \rangle = \int \prod_{\alpha} \left(d\varphi_\alpha dC_\alpha d\bar{C}_\alpha d\lambda_\alpha\right) e^{-\Sigma(\varphi, C, \bar{C}, \lambda)}. \tag{13.137}$$

Legyen $\delta F_\alpha(\varphi)$ a kényszerek megváltozása BRS–transzformáció során, és feleljen meg ennek az effektív hatás $\delta\Sigma = D\delta\tilde{\Sigma}(\varphi, C, \bar{C}, \lambda)$ megváltozása, ahol $D = \sum_\alpha \left(C_\alpha \frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha} + \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial C_\alpha}\right)$. Ekkor a partíciós függvény megváltozása:

$$\delta Z = \int \prod_{\alpha} \left(d\varphi_\alpha dC_\alpha d\bar{C}_\alpha d\lambda_\alpha\right) D\delta\tilde{\Sigma} \cdot e^{-\Sigma}. \tag{13.138}$$

Az integrandusban végezhetjük az alábbi azonos átalakítást:

$$D\delta\tilde{\Sigma} \cdot e^{-\Sigma} = D\left(\delta\tilde{\Sigma} e^{-\Sigma}\right) - \delta\tilde{\Sigma} D e^{-\Sigma}. \tag{13.139}$$

A jobb oldal első tagját integrálva a térkonfigurációkra zérust kapunk. A második tagban pedig $De^{-\Sigma} = -D\Sigma \cdot e^{-\Sigma} = 0$, mert az effektív hatás BRS–szimmetriája miatt $D\Sigma = 0$. Mivel az integrálási mérték is BRS–invariáns, ezért a fentiekből következik, hogy $\delta Z = 0$, vis. hogy a partíciós függvény BRS–invariáns.

A C_α és a $\bar{C}_\alpha$ Grassmann–változók általában nem szimmetrikusan szerepelnek az elméletben és ennek megfelelően különböző szerepet játszanak. Van azonban egy speciális eset, amikor $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$, és ekkor egy további BRS–szimmetria jelenik meg és a Grassmann–változók két csoportja hasonló szerepet játszik.

Ha az $M_{\alpha\beta}$ mátrix szimmetrikus, azaz

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \varphi_\beta} = \frac{\partial F_\beta}{\partial \varphi_\alpha}, \tag{13.140}$$

akkor létezik olyan $A(\varphi)$ függvény, hogy valamennyi kényszer

$$F_\alpha(\varphi) = \frac{\partial A}{\partial \varphi_\alpha} \tag{13.141}$$

alakba írható.

A járulékos BRS–szimmetriát nyilvánvalóvá tehetjük, ha bevezetjük a θ és a $\bar{\theta}$ Grassmann–változókat, valamint ezen változók szuperfüggvényeit:

$$\Phi_\alpha(\theta, \bar{\theta}) = \varphi_\alpha + \bar{\theta} C_\alpha + \bar{C}_\alpha \theta + \bar{\theta}\theta\lambda_\alpha. \tag{13.142}$$

Ekkor a hatás a θ és a $\bar{\theta}$ változók szerinti Grassmann-integrál alakjába írható,

$$\begin{aligned} S &= \lambda_\alpha F_\alpha - \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta} C_\beta \\ &= \int d\theta d\bar{\theta}\theta \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \theta} F_\alpha[\Phi(\theta, \bar{\theta})], \end{aligned} \tag{13.143}$$

amely mind a θ mind a $\bar{\theta}$ változó irányában történő eltolásokkal szemben invariáns.

A Grassmann-integrált az alábbi lépések révén tudjuk a hatás eredeti alakjára hozni:

- Az $F_\alpha[\Phi]$ függvényt Taylor sorba fejtjük a Grassmann–változók szerint:

$$F_\alpha(\varphi + \bar{\theta}C + \bar{C}\theta + \bar{\theta}\theta\lambda) = F_\alpha(\varphi) + (\bar{\theta}C_\beta + \bar{C}_\beta\theta + \bar{\theta}\theta\lambda_\beta)\frac{\partial F_\alpha(\varphi)}{\partial \varphi_\beta}. \tag{13.144}$$

- Felhasználjuk, hogy

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \theta} = = \bar{C}_\alpha - \bar{\theta}\lambda_\alpha. \tag{13.145}$$

- Mindezeket behelyettesítjük a Grassmann-integrálok integrandusába és elvégezzük az integrálást:

$$\begin{aligned} & - \int d\theta d\bar{\theta}\theta (\bar{C}_\alpha + \bar{\theta}\lambda_\alpha) \left(F_\alpha + (\bar{\theta}C_\beta + \bar{C}_\beta\theta + \bar{\theta}\theta\lambda_\beta) M_{\alpha\beta}\right) \\ &= \lambda_\alpha F_\alpha - \bar{C}_\alpha C_\beta M_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{13.146}$$

Helyettesítsük be a hatásba a kényszerek $F_\alpha = \partial A/\partial\varphi_\alpha$ alakját:

$$
\begin{aligned}
S(\Phi) &= \int d\theta d\bar{\theta}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\theta}F_\alpha \\
&= -\int d\theta d\bar{\theta}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Phi_\alpha F_\alpha\right) - \theta\Phi_\alpha\frac{\partial F_\alpha}{\partial\theta} \\
&= \int d\theta d\bar{\theta}A[\Phi(\theta,\bar{\theta})]. \qquad (13.147)
\end{aligned}
$$

Ha a φ_α koordináták sztochasztikus dinamikának tesznek eleget, amelyet a ν_α véletlen változók Gauss-eloszlása szab meg, és az M mátrix szimmetrikus, akkor az effektív hatás az alábbi alakot ölti:

$$
S(\Phi) = \int d\theta d\bar{\theta}\left\{\frac{1}{2}w_{\alpha\beta}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\bar{\theta}} + A(\Phi)\right\}. \qquad (13.148)
$$

A sztochasztikus dinamika következtében megjelent a hatásban egy a kinetikus e-nergiára emlékeztető tag: ,,a szupertérbeli mozgás kinetikus energiája".

Tegyük fel, hogy a ν paraméterek Gauss-eloszlásúak,

$$
d\rho(\nu) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_\alpha \nu_\alpha(w^{-1})_{\alpha\beta}\nu_\beta\right\}, \qquad (13.149)
$$

ahol a $w_{\alpha\beta}$ mátrix szimmetrikus. Induljunk ki a várható értékek általános kifejezéséből:

$$
\begin{aligned}
\langle\sigma\rangle &\equiv \\
&\equiv \prod_\alpha\left(\int d\varphi_\alpha dC_\alpha d\bar{C}_\alpha d\lambda_\alpha d\nu_\alpha\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_\alpha\nu_\alpha(w^{-1})_{\alpha\beta}\nu_\beta + \int d\theta d\bar{\theta}A[\Phi(\theta,\bar{\theta});\nu]\right\}\sigma(\varphi) \\
&= \prod_\alpha\left(\int d\varphi_\alpha dC_\alpha d\bar{C}_\alpha d\lambda_\alpha d\nu_\alpha\right)\cdot \\
&\quad\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_\alpha\nu_\alpha(w^{-1})_{\alpha\beta}\nu_\beta + \sum_\alpha\lambda_\alpha(F_\alpha-\nu_\alpha) - \sum_{\alpha\beta}\bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}C_\beta\right\}\sigma(\varphi) \\
&= \prod_\alpha\left(\int d\varphi_\alpha dC_\alpha d\bar{C}_\alpha d\lambda_\alpha\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_\alpha\lambda_\alpha w_{\alpha\beta}\lambda_\beta + \sum_\alpha\lambda_\alpha F_\alpha - \sum_{\alpha\beta}\bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}C_\beta\right\}\sigma(\varphi).
\end{aligned}
$$

(13.150)

A kitevőt a következőképpen hozhatjuk a BRS-szimmetriát explicite tükröző alakra:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_\alpha\lambda_\alpha w_{\alpha\beta}\lambda_\beta + \sum_\alpha\lambda_\alpha F_\alpha - \sum_{\alpha\beta}\bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}C_\beta \\
&= \int d\theta d\bar{\theta}A[\Phi] + \frac{1}{2}\int d\theta d\bar{\theta}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\theta}w_{\alpha\beta}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\bar{\theta}}. \qquad (13.151)
\end{aligned}
$$

Itt felhasználtuk, hogy:

$$
-\int d\theta d\bar{\theta}\left(\bar{C}_\alpha + \bar{\theta}\lambda_\alpha\right)w_{\alpha\beta}\left(C_\beta + \theta\lambda_\beta\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int d\theta d\bar{\theta}\bar{\theta}\lambda_\alpha w_{\alpha\beta}\theta\lambda_\beta \\
&= -\lambda_\alpha w_{\alpha\beta}\lambda_\beta, \qquad (13.152)
\end{aligned}
$$

uis. definíció szerint $\int d\theta = \int d\bar{\theta} = 0$, $\int d\theta\theta = \int d\bar{\theta}\bar{\theta} = 1$.

æ

14 A BRS-transzformáció általánosítása

Ez a fejezet egy érdekes kitekintés, amelynek kapcsán vázoljuk, hogy a BRS–szimmetria általánosítása révén eljuthatunk a szuperszimmetriához. A szuperszimmetria legfontosabb következménye az, hogy minden bozonnak megvan a maga fermion párja és fordítva. A szuperszimmetria a kölcsönhatások egyesítésére való törekvés során jelentős szerephez jutott, mert a szuperszimmetrikus elméletek mentesek az UV-divergenciáktól és az anomáliáktól.

A BRS–transzformációkat általánosíthatjuk több Grassmann-változós $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ függvények esetére, mint az egyes θ_i változókban történő eltolásokat. Ezek generátorai a $\partial/\partial\theta_i$ operátorokkal reprezentálhatók, és antikommutálnak egymással:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_j} + \frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_i} = 0. \tag{14.153}$$

A Lie-csoportok esetében a generátorok kommutátorai kifejezhetők a generátorok lineáris kombinációiként. Az olyan csoportot, amelynek generátorai között vannak olyanok, amelyeknek az antikommutátorai fejezhetők ki mint a generátorok lineáris kombinációi, *szupercsoportoknak* nevezzük. A szupercsoportnak a generátorai *szuperalgebrát* alkotnak. A szuperalgebrának vannak páros generátorai és páratlan generátorai. A páros generátorokra nézve kommutátor relációk, a páratlan generátorokra nézve antikommutátor relációk állnak fenn, továbbá egy páros és egy páratlan generátor kommutátora kifejezhető ugyancsak a generátorok lineáris kombinációjaként. Így zárul a szuperalgebra.

A szupercsoportokkal szembeni szimmetriát szuperszimmetriának nevezzük. æ

III. A NEM ÁBELI MÉRTÉKELMÉLETEK

15 A mértékterek differenciálgeometriai jelentése

Tegyük fel, hogy egy $\phi(x)$ (általában többkomponensű) Lorentz-skalártér olyan elméletnek tesz eleget, amely egy G Lie-csoport $g \in G$ elemeivel adott $g(x)$ lokális

$$\phi(x) \to \phi^g(x) \equiv g(x)\phi(x) \tag{15.154}$$

mértéktranszformációkkal szemben invariáns. A ϕ tér komponenseinek száma megegyezik a G csoport azon mátrixábrázolásának dimenziójával, amelyet megvalósít. Szemléletesen úgy képzelhetjük, hogy a téridő–sokaság minden x pontjában elképzelünk egy az ábrázolás dimenziójával megegyező dimenziós absztrakt teret (belső tér). A ϕ térmennyiséget ebben egy vektor ábrázolja. A mértéktranszformáció pedig a térmennyiséget képviselő absztrakt vektort forgatja a belső térben. A térmennyiséget ábrázoló absztrakt vektor természetesen a térfüggés miatt különbözőképpen áll az x és az $y \neq x$ pontban. Az x és y pontokhoz tartozó, tehát különböző belső terekben értelmezett $\phi(x)$ és $\phi(y)$ vektorok összehasonlítása csak úgy lehetséges, ha értelmezzük a párhuzamos eltolást. Menjünk a térben az x pontból az infinitezimálisan közeli $x + dx$ pontba. Az ezen elmozdulással együttjáró párhuzamos eltolást az

$$U(x; x + dx) \;=\; 1 - A_\mu(x + dx)dx_\mu \tag{15.155}$$

eltolási mátrixszal definiáljuk. Itt $A_\mu(x)$ a párhuzamos eltolást definiáló ún. affin összefüggés (konnexió). Természetesen maga is mátrix. Az eltolási mátrixnak unitérnek kell lennie, hogy ne változtassa meg a vektorok hosszát az eltolás során. Ebből következően az affin összefüggés mátrixa anti-hermitikus. Az affin összefüggés transzformációját a térmennyiség mértéktranszformációja során az definiálja, hogy a párhuzamos eltolás és a mértéktranszformáció felcserélhető legyen.

A mértéktranszformáció és a párhuzamos eltolás felcserélhetősége azt jelenti, hogy:

$$U'(x; x + dx)g(x)\phi(x) \;=\; g(x + dx)U(x; x + dx)\phi(x), \tag{15.156}$$

ahonnan az eltolási mátrix mértéktranszformáltja:

$$U'(x; x + dx) \;=\; g(x + dx)U(x; x + dx)g^{-1}(x). \tag{15.157}$$

Az eltolási mátrixot az affin összefüggéssel kifejezve megtaláljuk az A_μ mátrix mértéktranszformációját ($y = x + dx$):

$$1 - A'_\mu(y)dx_\mu \;=\; g(y)\left(1 - A_\mu(y)dx_\mu\right)\left(g^{-1}(y) - \partial_\mu g^{-1}(y)dx^\mu\right), \tag{15.158}$$

ahonnan:

$$A'_\mu(y) \;=\; g(y)A_\mu(y)g^{-1}(y) + g(y)\partial_\mu g^{-1}(y). \tag{15.159}$$

A transzformációs tulajdonság alapján felismerjük az affin összefüggésben a nem–ábeli mértékteret. Az affin összefüggés mértéktér jelentését azáltal ,,csempésztük be", hogy megköveteltük a ϕ anyagtér tekintetében az euklideszi térbeli eltolás és a mértéktranszformáció felcserélhetőségét. Ez csak azáltal biztosítható, ha az affin összefüggés a fenti módon (mértéktér módjára) transzformálódik.

Miután a párhuzamos eltolást értelmeztük, bevezetjük a kovariáns derivált fogalmát. A D_μ kovariáns deriválttal tudjuk kifejezni, hogy mekkora a különbség az eredeti $\phi(x)$ vektor és azon vektor között, amelyet úgy kapunk, hogy a $\phi(y = x+dx)$ vektort párhuzamosan visszatoljuk az x pontba:

$$U(x+dx;x)\phi(x+dx) - \phi(x) \equiv dx_\mu D_\mu \phi(x). \tag{15.160}$$

A kovariáns derivált explicit kifejezése:

$$D_\mu = 1 \cdot \partial_\mu + A_\mu(x). \tag{15.161}$$

Erről az eltolási mátrix explicit alakjának felhasználásával győződhetünk meg:

$$(1 + A_\mu(x)dx_\mu)\left(\phi(x) + \partial_\nu\phi(x)dx_\nu\right) - \phi(x) = dx_\mu(A_\mu(x) + 1\cdot\partial_\mu)\phi(x) = dx_\mu D_\mu\phi(x). \tag{15.162}$$

A kovariáns derivált mértéktranszformáció során az alábbi módon változik:

$$D'_\mu = g(x)D_\mu g^{-1}(x). \tag{15.163}$$

A jobb oldalra beírjuk a kovariáns derivált explicit alakját:

$$\begin{aligned} g(x)D_\mu g^{-1}(x) &= 1\cdot\partial_\mu + g(x)\partial_\mu g^{-1}(x) + g(x)A_\mu(x)g^{-1}(x) \\ &= 1\cdot\partial_\mu + A'_\mu(x) = D'_\mu. \end{aligned} \tag{15.164}$$

Adjuk meg az infinitezimális mértéktranszformációt az

$$g(x) = 1 + \omega(x) \tag{15.165}$$

parametrizált alakban, ahol $\omega \in \mathcal{L}(G)$. Az affin összefüggés infinitezimális megváltozása mértéktranszformáció során éppen az $\omega(x)$ mennyiség kovariáns deriváltja:

$$\delta A_\mu = -\left(\partial_\mu\omega + [A_\mu, \omega]\right) \equiv D_\mu\omega. \tag{15.166}$$

Csakugyan,

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= A_\mu(x) + \delta A_\mu(x) = -(1+\omega)\partial_\mu\omega + (1+\omega)A_\mu(1-\omega) \\ &= -\left(\partial_\mu\omega + [A_\mu,\omega]\right) + A_\mu + \mathcal{O}(\omega^2), \end{aligned} \tag{15.167}$$

ahonnan a kívánt összefüggés leolvasható.

Adott párhuzamos eltolással ill. affin összefüggéssel kapcsolatban beszélhetünk a sokaság görbületéről. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a mértéktér térerősség tenzora játssza a görbületi tenzor szerepét.

Tegyük fel, hogy a ϕ vektort az x pontból először párhuzamosan eltoljuk a μ irányban a C_1 infinitezimális görbeív mentén az y pontba és onnan a ν irányban C_2 mentén az infinitezimálisan közeli z pontba. A z pontba úgy is eltolhatjuk a ϕ vektort önmagával párhuzamosan, hogy először a ν irányban a C_3 ív mentén toljuk az u pontba, majd onnan μ irányban a C_4 mentén a z pontba. A két úton való eltolás általában különböző eredményre vezet:

$$U_{C_3+C_4}\phi - U_{C_1+C_2}\phi = dx_\mu dx_\nu (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\phi. \tag{15.168}$$

A két vektor különbségét az

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] \tag{15.169}$$

görbületi tenzor határozza meg. Benne felismerjük a a nem ábeli mértéktér térerősség tenzorát.

A görbületi tenzor a mértékcsoport adjungált ábrázolása szerint transzformálódik:

$$F'_{\mu\nu}(x) = g(x) F_{\mu\nu} g^{-1}(x). \tag{15.170}$$

Ez rögtön következik a kovariáns derivált hasonló transzformációs tulajdonságából.

A korábban azt tanultuk, hogy a lokális mértékszimmetria következtében az anyagtér részecskéi között a kölcsönhatást egy vektortér, a mértéktér közvetíti. Most beláttuk, hogy a mértékszimmetria geometriai jelentése az, hogy az anyagtér párhuzamos eltolása és mértéktranszformációja felcserélhetők. A mértéktér a párhuzamos eltolást definiáló affin összefüggés szerepét játssza. Erre az affin összefüggésre nézve az euklideszi tér pontjainak sokasága görbült. æ

16 A mértékinvariáns hatás

A mérték– és Lorentz–invariáns hatást az alábbi alakban vesszük fel:

$$S[A] \quad = \quad -\frac{1}{4e^2}\int d^d x \mathrm{tr} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x), \tag{16.171}$$

ahol a G mértékcsoport t^a generátorait felhasználva a térerősség tenzora

$$F_{\mu\nu} \quad = \quad F^a_{\mu\nu} t^a \tag{16.172}$$

alakú. A hatás alakjához még a következő magyarázatot kell fűzni:

- A hatás előjele aszerint negatív ill. pozitív, hogy antihermitikus vagy hermitikus generátorokat használunk.
- Az $1/e^2$ szorzó azért jelent meg, mert a (klasszikus elektrodinamikában megszokott) A_μ vektorpotenciál helyett az eA_μ vektortérrel dolgozunk. Ennek az a következménye, hogy a geometriai (görbület) jelentést hordozó térerősség így független az e csatolási állandótól:

$$F^a_{\mu\nu} \quad = \quad \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A_\mu + f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{16.173}$$

A nem ábeli mértéktér a lokális mértékszimmetria miatt nem dinamikai szabadsági fokokkal is rendelkezik, s ebben hasonló az ábeli mértéktérhez. Ugyanakkor a nem ábeli mértéktér önkölcsönhatást tartalmaz, vis. nem tekinthető szabad térnek. Ez lényeges különbség az ábeli mértéktérhez képest, amely szabad, azaz önkölcsönhatástól mentes.

A hatásból a vektorpotenciál szerinti variálással kapjuk a Yang–Mills–tér egyenleteit, vis. a Maxwell-egyenletek nem ábeli általánosításait:

$$D_\mu F_{\mu\nu}(x) \quad \equiv \quad \partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0, \tag{16.174}$$

azaz komponensekben:

$$(D_\mu F_{\mu\nu})^a = \partial_\mu F^a_{\mu\nu} + f^{abc} A^b_\mu F^c_{\mu\nu} = 0. \tag{16.175}$$

Az anyagtereket megmaradó áramuk révén minimális csatolással csatoljuk a Yang–Mills–terekhez, hogy ezáltal biztosítsuk a teljes hatás lokális mértékszimmetriáját. Fermiontér esetén a hatás a

$$\delta S[\bar{\psi}, \psi] \quad = \quad -\int d^d x \bar{\psi}(x)(\not{D} + M)\psi(x), \tag{16.176}$$

taggal egészül ki, ahol a kovariáns derivált:

$$(D_\mu \psi)_r = \left(\delta_{rs}\partial_\mu + A^a_\mu (t^a)_{rs}\right)\psi_s \tag{16.177}$$

alakú. Bozontér esetén a hatás a

$$\delta S[\phi] = \int d^d x[(D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) + V(\phi)], \tag{16.178}$$

ahol $V(\phi)$ csoportinvariáns önkölcsönhatás és a kovariáns derivált explicit alakja:

$$(D_\mu \phi)_r = \left(\delta_{rs}\partial_\mu + A^a_\mu (t^a)_{rs}\right)\phi_s. \tag{16.179}$$

æ

17 A pályaintegrálos kvantálás

A Yang–Mills-tereket is kvantálhatjuk a Faddeev–Popov–féle módszerrel. Tekintsük a térkonfigurációk $\mathcal{A}$ sokaságát. A mértéktranszformációk *mértéktrajektóriát* definiálnak a térkonfigurációk sokaságában, ha a G mértékcsoport $g(x)$ elemein folytonosan „végigmegyünk" és egy kiindulásul vett $B_\mu(x)$ térkonfiguráció $B_\mu^g(x)$ transzformáltjait tekintjük. Természetesen általában egy másik térkonfigurációból indulva egy másik trajektóriát kapunk. Tegyük fel, hogy létezik a klasszikus térkonfigurációk $\mathcal{A}$ sokaságának olyan $\mathcal{B}$ szelete, amelyet minden mértéktrajektória pontosan egyszer metsz. Ekkor tetszőleges $A_\mu(x) \in \mathcal{A}$ térkonfiguráció előállítható

$$A_\mu(x) \;=\; [B_\mu(x)]^g \equiv g(x)B_\mu(x)g^{-1}(x) + g(x)\partial_\mu g^{-1}(x) \tag{17.180}$$

alakban, ahol $B_\mu(x) \in \mathcal{B}$ és $g(x) \in G$. Ilyen módon szétválasztottuk az igazi B_μ dinamikai szabadsági fokokat és a $g(x)$ mérték szabadsági fokokat. A $g(x)$ változtatásával szemben a hatás invariáns, vis. a hatás nem rögzíti a mérték szabadsági fofko dinamikáját. Ezt kihasználva megtehetjük, hogy a mérték szabadsági fofko dinamikáját önkényesen választjuk meg. Azt írjuk elő, hogy a mérték szabadsági fokok sztochasztikus dinamikának tegyenek eleget a

$$\partial_\mu[B_\mu(x)]^g \;\equiv\; \partial_\mu A_\mu(x) = \nu(x), \tag{17.181}$$

azaz a

$$\partial_\mu([B_\mu(x)]^g)^a \;\equiv\; \partial_\mu A_\mu^a(x) = \nu^a(x) \tag{17.182}$$

egyenlet(ek) alapján, ahol $\nu^a(x)$ Gauss-eloszlású véletlen változók:

$$d\rho(\nu) \;=\; \mathcal{D}\nu \exp\left\{\frac{1}{2\xi e^2}\int d^dx \mathrm{tr}\nu^2(x)\right\} \tag{17.183}$$

és $\xi \geq 0$ paraméter. Ezt nevezzük a *mérték kovariáns rögzítésének*. Tegyük fel a továbbiakban azt, hogy a mértéket rögzítő sztochasztikus egyenletnek rögzített $\nu(x)$ és $B_\mu(x)$ esetén egyértelműen létezik $g(x)$ megoldása. Perturbáció számításban, amikor csak infinitezimális $g(x) = 1 + \omega(x)$ mértéktranszformációkra szorítkozunk, a sztochasztikus egyenlet lineáris és mindig létezik egyértelmű megoldása $\omega(x)$-re.

Ha véges mértéktranszformációkat is megengedünk, akkor meg lehet mutatni, hogy a sztochasztikus egyenletek nem mindig szolgáltatnak egyértelmű megoldást. Ez az ún. *Gribov–féle önkényesség („Gribov's ambiguity")*. A Gribov–féle ambiguitás következtében a kvantálás Faddeev–Popov–féle módszere igazából csak a perturbatív számolásokban alkalmazható.

Még mielőtt kiátlagolnánk a sztochasztikus változókra, a generáló funkcionál (a korábban tett általános megfontolások alapján) a következő alakú:

$$Z[\nu] \;=\; \int \mathcal{D}g\mathcal{D}B_\mu\mathcal{D}\lambda \mathrm{Det}M \cdot \exp\left\{-S[B] + \int d^dx \mathrm{tr}\left[\lambda(x)\left(\partial_\mu A_\mu(x) - \nu(x)\right)\right]\right\}. \tag{17.184}$$

Itt az első két integrálás együtt a $\mathcal{D}A_\mu$ sík integrálási mérték szerinti integrálást jelenti. Az integrandusban a determináns a Slavnov–Taylor–szimmetria tárgyalása során megbeszélt módon lép fel és

$$M_{ab}(x,y) = \frac{\delta F^a(x)}{\delta\omega^b(y)}, \qquad (17.185)$$

ahol $F^a = \partial_\mu([B_\mu(x)]^g)^a$ a $g = 1+\omega$ beírásával kifejezett mértékfeltétel, azaz

$$\begin{aligned} \delta F^a(x) &= \omega^b(x)\partial_\mu\left(-D_\mu(A)\right)^{ab}, \\ M_{ab}(x,y) &= -\delta(x-y)\partial_\mu^{(x)}\left(D_\mu(A(x))\right)^{ab}. \end{aligned} \qquad (17.186)$$

Faddeev és Popov módszerének lényege, hogy a pályaintegrál alatti determinánst a $C^a(x)$ és $\bar{C}^a(x)$ Grassmann-értékű szellemterekre vonatkozó Gauss–integrállal helyettesítjük:

$$\mathrm{Det}M = \int \mathcal{D}C\mathcal{D}\bar{C}\exp\left\{\int dx\bar{C}\partial_\mu D_\mu C\right\}. \qquad (17.187)$$

Az eredmény lényegesen különbözik az ábeli mértékterek esetétől: a szellemterek nem csatolódnak le, hanem kölcsönhatnak (a kovariáns derivált révén) a Yang–Mills–térrel.

A fentiek alapján a Yang–Mills-elmélet generáló funkcionálja

$$Z[\nu] = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}C\mathcal{D}\bar{C}\mathcal{D}\lambda\exp\left\{-S[A,\bar{C},C,\lambda,\nu]\right\}, \qquad (17.188)$$

alakú, ahol

$$\begin{aligned} S[A,\bar{C},C,\lambda,\nu] = \int d^dx\mathrm{tr}\Big\{&-\frac{1}{4e^2}F^2_{\mu\nu}(A) + \lambda(x)\left(\partial_\mu A_\mu(x) - \nu(x)\right) \\ &+\bar{C}(x)\partial_\mu D_\mu C(x)\Big\} \end{aligned} \qquad (17.189)$$

és $C = C^a t^a$, $\lambda = \lambda^a t^a$, és

$$D_\mu C = \partial_\mu C + [A_\mu, C]. \qquad (17.190)$$

Átlagoljunk ezután a ξ paraméterrel jellemzett normális eloszlású sztochasztikus változókra. Ekkor megkapjuk a kvantált Yang–Mills–elmélet Green–függvényeinek a generáló funkcionálját:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\rho(\nu)Z[\nu,J] \\ &= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}C\mathcal{D}\bar{C}\mathcal{D}\lambda\exp\left\{-S[A,\bar{C},C,\lambda] + \int dx J^a_\mu(x)A^a_\mu(x)\right\} \end{aligned} \qquad (17.191)$$

ahol a hatás a következő alakú:

$$\begin{aligned} S[A,\bar{C},C,\lambda] &= \int d^dx \mathrm{tr}\left[-\frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}^2 + \frac{\xi e^2}{2}\lambda^2(x)\right. \\ &\left. +\lambda(x)\partial_\mu A_\mu(x) + \bar{C}(x)\partial_\mu D_\mu C(x)\right] . \end{aligned} \tag{17.192}$$

A második tag a sztochasztikus zajra történt átlagolás révén lépett fel, a harmadik tag pedig a mérték rögzítésének következtében. A negyedik tag a mértéktérnek a Faddeev–Popov–féle szellemterekhez való csatolódását írja le. A hatás ebben az alakjában szerkezeténél fogva BRS-invariáns.

Ha $\xi \neq 0$, akkor integrálhatunk $\lambda(x)$–re is. Ekkor a hatás:

$$\begin{aligned} S[A,\bar{C},C] &= \int d^dx \mathrm{tr}\left\{-\frac{1}{e^2}\left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2\right]\right. \\ &\left. +\bar{C}(x)\partial_\mu D_\mu C(x)\right\} . \end{aligned} \tag{17.193}$$

(Mégegyszer emlékeztetünk rá, hogy a generáló funkcionál itt tárgyalt alakja a Gribov–féle ambiguitás miatt csak a perturbációszámításban alkalmazható.) æ

17 A Yang–Mills-tér BRS–szimmetriája

Az előző fejezetben mértékrögzítés után kapott hatás többé már nem mértékinvariáns. Rendelkezik azonban BRS–szimmetriával a konstrukciójánál fogva. A hatást uis. úgy konstruáltuk, hogy a mérték szabadsági fokok dinamikáját sztochasztikusnak tételeztük fel. Most megmutatjuk, hogy a BRS–transzformáció során a vektorpotenciál ugyanúgy transzformálódik mint mértéktranszformáció során.

Mint azt a BRS–szimmetria általános tárgyalása során a 11. fejezetben megmutattuk, csoportsokaság esetén a BRS–transzformáció alakja:

$$\begin{aligned} \delta g(x) &= \bar{\epsilon} g(x) C(x), \\ \delta C(x) &= -\bar{\epsilon} C^2(x), \\ \delta \bar{C}(x) &= \bar{\epsilon} \lambda(x), \\ \delta \lambda(x) &= 0, \end{aligned} \tag{17.1}$$

ami a sztochasztikus dinamika által vezérelt terek megváltozásait illeti, és az igazi dinamikai szabadsági fokok megváltozása zérus:

$$\delta B_\mu(x) = 0. \tag{17.2}$$

Itt használjuk a $C = C^a T^a$ jelölést, ahol T^a a mértékcsoport generátorai.

Ennek alapján kiszámoljuk az $A_\mu(x) = B_\mu^g(x)$ általános térkonfiguráció BRS–transzformáció nyomán bekövetkező megváltozását:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(x) &= \delta B_\mu^g(x) = \delta g \cdot B_\mu g^{-1} + g B_\mu \delta g^{-1} \\ &\quad + \delta g \cdot \partial_\mu g^{-1} + g \partial_\mu \delta g^{-1}. \end{aligned} \tag{17.3}$$

Figyelembe véve, hogy

$$g^{-1} \delta g \cdot g^{-1} = -\delta g^{-1}, \tag{17.4}$$

a vektorpotenciál megváltozása:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= -g \partial_\mu (\bar{\epsilon} C) g^{-1} + g \bar{\epsilon} C B_\mu g^{-1} - g B_\mu \bar{\epsilon} C g^{-1} \\ &= g \left(\partial_\mu (C \bar{\epsilon}) + [B_\mu, C \bar{\epsilon}] \right) g^{-1} \\ &= g \left(D_\mu(B) C \bar{\epsilon} \right) g^{-1} = D_\mu(A) C \bar{\epsilon}. \end{aligned} \tag{17.5}$$

Látjuk tehát, hogy a BRS transzformáció során a vektorpotenciál úgy transzformálódik mint $C\bar{\epsilon}$ paraméterű infinitezimális mértéktranszformáció során. A mértékrögzítés során megsértettük a hatás mértékszimmetriáját. A szellemtagok azonban biztosítják, hogy ez a szimmetria helyreáll az általánosabb BRS–szimmetria alakjában.

A mértékelméletek legfontosabb tulajdonsága, hogy renormálhatók $D = 4$ dimenziós térben. A kitevők leszámlálásának módszerével legalábbis erre a következtetésre jutunk.

Határozzuk meg először a propagátorokat kovariáns mértékben, majd ezek aszimptotikus viselkedéséből a térmennyiségek kanonikus dimenzióját.

- A Yang-Mills–hatás

$$S_g = \frac{1}{4e^2}\int d^4x F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi e^2}\int d^4x(\partial_\mu A^a_\mu)^2 \tag{17.6}$$

vektorpotenciálban kvadratikus részéből a mértéktér propagátorára

$$\Delta^{ab}_\xi = e^2\delta^{ab}\left[\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2} + (\xi - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}\right] \tag{17.7}$$

adódik. A propagátor $k \rightarrow \lambda k$ ($\lambda \rightarrow \infty$) esetén $\Delta \rightarrow \lambda^{-2}\Delta$ aszimptótikus viselkedést mutat. Korábbi jelölésünk szerint (ld. Szimmetriák II.) $\sigma = 2$ és a vektortér kanonikus dimenziója $[A]_c = (D - \sigma)/2 = 1$.

- A hatás szellemtereket tartalmazó tagja

$$S_{ghost} = \int d^4x\bar{C}^a\partial_\mu\left(\delta_{ab}\partial_\mu + f_{bca}A^b_\mu\right)C^c, \tag{17.8}$$

amelynek a diagonális részéből a szellemtér propagátora:

$$\Delta^{ab}(p^2) = \frac{\delta_{ab}}{p^2}, \tag{17.9}$$

ami $p \rightarrow \lambda p$ ($\lambda \rightarrow \infty$) esetén $\Delta \rightarrow \lambda^{-2}\Delta$ aszimptotikus viselkedést mutat, azaz $\sigma = 2$. A szellemterek kanonikus dimenziója tehát $[C]_c = (D - 2)/2 = 1$.

A Yang–Mills-elmélet kölcsönhatási vertexei

és azok kanonikus dimenziói rendre:

$$\delta_1 = -4 + 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0,$$

$$
\begin{aligned}
\delta_2 = -4 + 1 + 3 \cdot 1 &= 0, \\
\delta_3 = -4 + 0 + 4 \cdot 1 &= 0, \\
\delta_4 = -4 + 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} &= 0.
\end{aligned}
\tag{17.10}
$$

Itt felhasználtuk, hogy a fermiontér kanonikus dimenziója 3/2. A Yang–Mills-elmélet tehát a renormálható elméletek közé tartozik.

æ

18 A Higgs-mechanizmus nem ábeli mértékelméletekben

A Higgs-mechanizmus alapötlete a nem ábeli mértékelméletekben ugyanaz mint az ábeli mértékelméletekben. A mértékszimmetriával kapcsolatos globális szimmetria spontán sérülése tömeget generál a mértékbozonok számára anélkül, hogy $m = 0$ Goldstone-bozonok jelennének meg.

Vizsgáljuk példaként a mértéktérhez csatolt önkölcsönható skalártér esetét:

$$S[A,\phi] \;=\; \int d^4x \left[-\frac{1}{4e^2}\mathrm{tr}F^2_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)(D_\mu\phi) + V(\phi)\right]. \tag{18.1}$$

Feltesszük, hogy az önkölcsönhatás $V(\phi)$ invariáns a mértékcsoport transzformációival szemben, de a ϕ =const. térkonfigurációkon van a szimmetriát sértő minimuma. Ez azt jelenti, hogy fagráf szinten a mértékcsoportnak megfelelő globális szimmetria spontán sérül a vákuumállapotban.

A továbbiakban két fontos esetet fogunk megvizsgálni.

- A hatás invariáns a G szimmetriacsoporthoz tartozó globális és lokális transzformációkkal szemben, vis. a globális szimmetriák csoportja azonos a mértékcsoporttal. Tegyük fel továbbá, hogy $\underline{\phi}$ a G csoport valamely irreducibilis ábrázolása szerint transzformálódik. Jelölje t^a a G csoport generátorait. Legyen $\underline{v}$ a potenciál minimuma. Indexeljük a csoport generátorait úgy, hogy az első p darab generátor legyen pontosan az, amelyik invariánsan hagyja a szimmetriasértő vákuumot, vis. amelyekre

$$t^a\underline{v} = 0, \qquad (a \le p). \tag{18.2}$$

  Ezek a generátorok kifeszítenek egy $\mathcal{L}(H)$ Lie-algebrát, amely egy H alcsoportot generál (az egységelemet is). H azaz az alcsoport, amelyhez tartozó szimmetriák nem sérülnek spontán. A többi t^a $(a > p)$ generátor egy $\mathcal{L}(G/H)$ algebrát feszít ki.

  Használjuk az alábbi parametrizációt:

$$\underline{\phi}(x) \;=\; e^{\sum_{a>p} t^a\theta^a(x)}\left(\underline{v} + \underline{\rho}(x)\right), \tag{18.3}$$

  ahol $\underline{\rho}$ ortogonális a belső térben a $t^a\underline{v}$ $(a > p)$ vektorokra. A használt paraméterezés esetén a skalártér úgy tekinthető mint a $\underline{\phi}' = \underline{v}+\underline{\rho}$ mértéktranszformáltja:

$$\underline{\phi}(x) \;=\; g(x)\underline{\phi}'(x), \tag{18.4}$$

ahol

$$g(x) \;=\; \exp\left\{\sum_{a>p} t^a\theta^a(x)\right\} \qquad (18.5)$$

a szóbanforgó mértéktranszformáció. Ekkor az $A_\mu(x)$ vektorpotenciált is tekinthetjük úgy mint az $A'_\mu(x)$ vektorpotenciál mértéktranszformáltját:

$$A_\mu(x) \;=\; g(x)A'_\mu(x)g^{-1}(x) + g(x)\partial_\mu g^{-1}(x). \qquad (18.6)$$

Mindezt behelyettesítve a hatásba majd elhagyva a ,,vesszőket":

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\left[-\frac{1}{4e^2}\mathrm{tr}F^2_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Big(gD_\mu(\underline{v}+\underline{\rho})\Big)\cdot\Big(gD_\mu(\underline{v}+\underline{\rho})\Big) + V\right] \\ &= \int d^4x\left[-\frac{1}{4e^2}\mathrm{tr}F^2_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Big(D_\mu(\underline{v}+\underline{\rho})\Big)\cdot\Big(D_\mu(\underline{v}+\underline{\rho})\Big) + V\right], \end{aligned} \qquad (18.7)$$

ahol a potenciál csak a

$$\underline{\phi}\cdot\underline{\phi} \;=\; g(\underline{v}+\underline{\rho})\cdot g(\underline{v}+\underline{\rho}) = (\underline{v}+\underline{\rho})\cdot(\underline{v}+\underline{\rho}) \qquad (18.8)$$

invariánstól függ. (Felhasználtuk, hogy g unitér.)

Vizsgáljuk most a mértéktér M_{ab} tömegmátrixát fagráf szinten. Ezt a minimális csatolást biztosító tagokból olvashatjuk le $\underline{\rho}(x) = 0$ helyettesítéssel:

$$\frac{1}{2}A^a_\mu t^a\underline{v}\cdot A^b_\mu t^b\underline{v} \;\equiv\; \frac{1}{2}M_{ab}A^a_\mu A^b_\mu, \qquad (18.9)$$

azaz

$$M_{ab} \;=\; (t^a)_{ij}v_j(t^b)_{ik}v_k. \qquad (18.10)$$

A tömegmátrixról belátjuk, hogy

- pozitív szemidefinit mátrix;

  Vezessük be az $\underline{e}^a = t^a\underline{v}$ vektorokat a belső térben. Ekkor $M_{ab} = \underline{e}^a\cdot\underline{e}^b$ miatt az

  $$M_{ab}\xi^a\xi^b \;=\; (\underline{e}^a\xi^a)^2 \geq 0 \qquad (18.11)$$

  kvadratikus alak nem negatív tetszőleges ξ^a esetén sem.

- a rangja pontosan megegyezik a spontán sérülő szimmetriák generátorainak a számával.

  A $\underline{e}^a$ $(a > p)$ vektorok lineárisan függetlenek. Ha uis, nem lennének azok, akkor lehetne belőlük olyan további generátort nem triviálisan lineárisan kombinálni, amely a szimmetriasértő vákuumot nullába viszi. Ez olyan generátor lenne, amelyhez nem sérülő szimmetria tartozik, de ez ellentmondás, mert az összes ilyen generátor feltevésünk szerint az első p darab. Ezekszerint a $\underline{e}^a$ $(a > p)$ vektorok valóban lineárisan függetlenek. Mivel $M_{ab} = \underline{e}^a \underline{e}^b$, ezért M_{ab} kvázidiagonális. A diagonális helyzetű $p \times p$ dimenziós felső blokk zérus. Beláttuk továbbá, hogy az $\underline{e}^a$ $(a > p)$ vektorok lineárisan függetlenek, így a tömegmátrix rangja megegyezik az $\mathcal{L}(G/H)$ algebra generátorainak a számával (az $a > p$ generátorok számával), azaz a spontán sérülő szimmetriák generátorainak a számával.

Ha a G csoport nem lenne egyúttal lokális szimmetriacsoport is, akkor pontosan annyi Goldstone–bozon jelenne meg zérus tömeggel, mint amennyi a spontán sérülő szimmetriák generátorainak a száma. Most azonban a megfelelő θ^a $a > p$ skalárterek mértéktranszformációval kitranszformálhatók a hatásból. Egyúttal ezek a „would–be" Goldstone–bozonok azonban tömeget adnak mértéktér azon komponenseinek, amelyek a sérülő szimmetriákhoz tartoznak. Ha a G csoport teljesen lesérül, akkor a mértéktér minden komponense tömeget nyer a Higgs–mechanizmus révén. Ilyenkor a skalártér valamennyi komponense kitranszformálható és végül egy tömeges vektortér elméletéhez jutunk. Ha közvetlenül így indultunk volna, akkor az elmélet nem lenne sem mértékszimmetrikus, sem renormálható. Mivel azonban az elméletben a tömegeket a mértékcsoporthoz tartozó globális szimmetriák spontán sértésével generáltuk, elméletünk most mértékszimmetrikus és renormálható. Ez a Higgs–mechanizmus nagy előnye.

- Tegyük fel hogy az elmélet szimmetriája $G \otimes G$, ahol az első tényező lokális mértékszimmetriát, a második csak globális szimmetriát jelent. Tegyük fel, hogy a skalárteret mátrixszal ábrázoljuk, azaz transzformációja:

$$\phi \to g_1 \phi g_2^{-1} \tag{18.12}$$

ahol g_1 és g_2 a G csoport elemei valamely mátrixábrázolásban. Tegyük fel továbbá, hogy a $V(\phi)$ önkölcsönhatás minimuma $\phi = v1$ $(v \neq 0)$, ami azt jelenti, hogy már fagráf szinten a mértékszimmetria teljesen sérül. Vezessük be továbbá a G-vel izomorf

$$H \;=\; \{(g,g)|\, g \in G\}\,, \tag{18.13}$$

csoportot, amely a $G \otimes G$ csoportnak az ún. *diagonális alcsoportja.* Mivel H transzformációinak hatására a skalártér vákuumállapota invariánsan marad,

$$g\; v1\; g^{-1} = v1, \tag{18.14}$$

ezért a diagonális alcsoport szimmetriái sértetlenek maradnak. A fenti tulajdonságú önkölcsönhatás esetén tehát a $G \otimes G$ csoport a diagonális alcsoportjára sérül le. A Higgs–mechanizmus egyúttal tömeget generál – a mértékcsoport teljes sérülése miatt – a mértéktér összes komponensének. Erről meg is győződhetünk, ha a minimális csatolást létesítő tagokban megkeressük a mértéktér tömegtagjait:

$$tr\,(D_\mu \phi)^\dagger\,(D_\mu \phi)\Big|_{\phi = v1} \;=\; -v^2 \mathrm{tr} A_\mu^2, \tag{18.15}$$

ahonnan $M_a^2 = e^2 v^2 \neq 0$ a mértéktér valamennyi komponensére.

æ

19 Elemi példa Higgs–mechanizmusra nem ábeli mértékelméletben

Az alábbiakban olyan elméletet fogunk vizsgálni, ami az elektrogyenge kölcsönhatás elméletének egy leegyszerűsített változata. Legyen az elmélet globális szimmetriája $SU(2) \otimes SU(2)$ és legyen az első $SU(2)$ csoport egyúttal lokális mértékszimmetria is. A hozzá tartozó mértéktér $A_\mu = A_\mu^a \frac{\tau^a}{2}$. A ϕ skalártér $2 \otimes 2$–es komplex elemű mátrix, amely az $SU(2) \otimes SU(2)$ csoport $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ábrázolása szerint transzformálódik. A hatás legyen az alábbi alakú:

$$
\begin{aligned}
S[A_\mu, \phi] &= \int d^4x \left[\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}^2 + \mathrm{tr}(D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) \right. \\
&\left. + a\mathrm{tr}(\phi^\dagger \phi) + \frac{\lambda}{6} \left(\mathrm{tr}\phi^\dagger \phi \right)^2 \right],
\end{aligned} \tag{19.1}
$$

ahol $a < 0$ és $\lambda > 0$. A térerősség tenzor:

$$
\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu - \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu. \tag{19.2}
$$

(Bevezettük a $\left(\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \right)_a = f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ jelölést.) A skalártér kovariáns deriváltja:

$$
D_\mu \phi = \left(\partial_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2} \vec{A}_\mu \vec{\tau} \right) \phi. \tag{19.3}
$$

Parametrizáljuk a skalárteret az alábbi módon:

$$
\phi = \frac{1}{2}(\sigma + \mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi}), \tag{19.4}
$$

ahol σ és $\vec{\pi}$ valós terek. Az infinitezimális $\vec{\omega}(x)$ paraméterű mértéktranszformációk alakja:

$$
\begin{aligned}
\delta \vec{A}_\mu &= \partial_\mu \vec{\omega} - \vec{A}_\mu \times \vec{\omega}, \\
\delta \sigma &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\pi}, \\
\delta \vec{\pi} &= -\frac{1}{2} \sigma \vec{\omega} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \times \vec{\pi}.
\end{aligned} \tag{19.5}
$$

A hatás skalártértől függő része:

$$
\begin{aligned}
S_{sk} = &\int d^4x \left[\frac{1}{2} \left(\partial_\mu \sigma - \frac{1}{2} \vec{\pi} \vec{A}_\mu \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \vec{\pi} + \frac{1}{2} \sigma \vec{A}_\mu - \frac{1}{2} \vec{A}_\mu \times \vec{\pi} \right)^2 \right. \\
&\left. + V(\sigma^2 + \vec{\pi}^{\,2}) \right].
\end{aligned} \tag{19.6}
$$

Mivel $a < 0$ választással éltünk, a V potenciálnak van elfajult klasszikus minimuma. Általában a belső térben úgy szokás koordinátarendszert választani, hogy a szimmetriát spontán sértő vákuum fagráf szinten $\langle\sigma\rangle = v \neq 0$, $\langle\vec{\pi}\rangle = 0$ legyen. A vákuum állapot a mértékcsoporthoz tartozó $SU(2)$ globális szimmetriákat sérti:

$$\tau^a(v1 + \mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{0}) \neq 0. \tag{19.7}$$

Ugyanakkor a diagonális $SU(2)$ alcsoport szimmetriái sértetlenek maradnak:

$$e^{\mathrm{i}\theta^a\tau^a}(v1 + \mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{0})e^{-\mathrm{i}\theta^a\tau^a} = v1. \tag{19.8}$$

Ha az egyik SU(2) csoport nem lenne lokális szimmetriája is a hatásnak, akkor a $\vec{\pi}$ terek zérustömegű Goldstone–bozonok lennének. Most azonban a $\vec{\pi}$ terek lokális mértéktranszformációval kitranszformálhatók a hatásból. A skalárteret

$$\phi = \sigma 1 + \mathrm{i}\vec{\tau}\vec{\pi} = e^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\tau^a\tilde{\pi}^a(x)}1\tilde{\sigma}(x) \tag{19.9}$$

alakba írva ez rögtön látszik. A hatás csak fizikai szabadsági fokokat tartalmazó alakja ekkor:

$$\begin{aligned} S[\vec{A}_\mu, \sigma] &= \int d^4x \left[\frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{8}\sigma^2\vec{A}_\mu^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{a}{2}\sigma^2 + \frac{\lambda}{24}\sigma^4\right], \end{aligned} \tag{19.10}$$

ahol $\tilde{\sigma}(x)$ helyett újra $\sigma(x)$-et írtunk. Éljünk a $\sigma(x) = v + s(x)$ helyettesítéssel. Ekkor leolvashatjuk, hogy a vektortérnek csakugyan minden komponense tömeget nyer, $m_A = ev/2$ (fagráf szinten), ahogy azt általános megfontolásaink alapján vártuk.

Eddigi tárgyalásunk nem volt teljesen korrekt, mert elhagytuk a hatásból a mértékrögzítő és a szellemtagot. Most ezeket is figyelembe véve megvizsgáljuk fagráf szinten az elméletet. Az első megállapításunk az, hogy a szokásos kovariáns mértékben a hatás tartalmaz az S_{sk} skalár részből származó $\partial_\mu\vec{\pi}\cdot\vec{A}_\mu$ alakú kvadratikus tagot, amelyben a vektortér és a „would-be" Goldstone-bozon keveredik. A kovariáns mérték tehát nem alkalmas arra, hogy leolvassuk a propagátorokat és a tömegeket. Van azonban olyan mérték, az ún. *'t Hooft–mérték*, amelyben ilyen keveredés nem lép fel. A 't Hooft–féle mértékfeltétel:

$$\vec{F}(\vec{A}_\mu, \vec{\pi}) = \partial_\mu\vec{A}_\mu + \frac{1}{2}\beta\xi\vec{\pi}. \tag{19.11}$$

Ha a β paraméter értékét alkalmasan választjuk meg, akkor a „would-be" Goldstone–bozonok lecsatolódnak a mértékterekről. Alább megkeressük β ezen értékét.

A hatás a 't Hooft–mértékben:

$$S = \int d^4x \frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}^2 + S_{sk} + S_{gauge} + S_{ghost}, \tag{19.12}$$

ahol a mértékrögzítő rész:

$$S_{gauge} = \frac{1}{2\xi e^2}\int d^4x\left(\partial_\mu\vec{A}_\mu + \frac{1}{2}\beta\xi\vec{\pi}\right)^2. \tag{19.13}$$

A hatás szellemterektől származó tagját az M_{ab} mátrix segítségével tudjuk felírni:

$$M_{ab}(x,y) = \frac{\delta F_g^a(x)}{\delta\omega^b(y)}, \tag{19.14}$$

ahol a tetszőleges g mértéktranszformációval transzformált terek lokális funkcionáljaként felírt mértékfeltétel:

$$\begin{aligned} F_g^a(x) &= \partial_\mu(A_\mu^g)^a + \frac{1}{2}\beta\xi(\pi^g)^a \\ &= F^a(x) + \partial_\mu(\delta A_\mu^a) + \frac{1}{2}\beta\xi(\delta\pi)^a \\ &= F^a(x) + \partial_\mu(\partial_\mu\omega^a - \epsilon^{abc}A_\mu^b\omega^c) \\ &\quad +\frac{1}{2}\beta\xi\left(-\frac{1}{2}\sigma\omega^a + \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\omega^b\pi^c\right). \end{aligned} \tag{19.15}$$

Elvégezve a funkcionálderiválást:

$$\begin{aligned} M_{ab}(x,y) &= \frac{\delta F_g^a(x)}{\delta\omega^b(y)} \\ &= \delta^{ab}\partial_\mu^x\partial_\mu^x\delta(x-y) - \epsilon^{ab'c'}\partial_\mu^x\left(A_\mu^{b'}(x)\delta^{c'b}\delta(x-y)\right) \\ &\quad -\frac{1}{4}\beta\xi\sigma(x)\delta^{ab}\delta(x-y) + \frac{1}{4}\beta\xi\epsilon^{ab'c'}\pi^{c'}(x)\delta^{bb'}\delta(x-y). \end{aligned} \tag{19.16}$$

Ezt felhasználva a hatás szellemterektől származó tagja:

$$\begin{aligned} S_{ghost} &= \int d^4x d^4y \bar{C}_a(x) M_{ab}(x,y) C_b(y) \\ &= \int d^4x d^4y \left\{\partial_\mu^x\bar{C}_a(x)\cdot\partial_\mu^y\delta(x-y)\cdot C_a(y) + \partial_\mu^x\bar{C}_a(x)\epsilon^{ab'b}A_\mu^{b'}(x)\delta(x-y)C_b(y)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}\beta\xi\left[-\bar{C}_a(x)\sigma(x)C_b(y)\delta(x-y) + \bar{C}_a(x)\epsilon^{abc'}\pi^{c'}(x)\delta(x-y)C_b(y)\right]\right\} \\ &= -\int d^4x\left\{\partial_\mu\bar{C}^a(\partial_\mu C - \epsilon^{abc}A_\mu^bC^c) + \frac{1}{4}\beta\xi\bar{C}^a(\sigma C^a + \epsilon^{abc}\pi^bC^c)\right\}. \end{aligned} \tag{19.17}$$

A π^a terek és a vektortér keveredését okozó kvadratikus tagok a hatás S_{gauge} és S_{sk} tagjaiból származnak. Követeljük meg ezek összegének eltűnését:

$$-\frac{1}{2\xi e^2}\vec{A}_\mu\cdot\beta\xi\partial_\mu\vec{\pi} + \frac{1}{2}v\partial_\mu\vec{\pi}\cdot\vec{A}_\mu = 0. \tag{19.18}$$

Innen leolvashatjuk, hogy

$$\beta \; = \; e^2 v \tag{19.19}$$

esetén a nem kívánatos keveredést a 't Hooft–mérték megszűnteti.

Ha behelyettesítjük a térmennyiségek Fourier-kifejtését a hatás kvadratikus tagjaiba és elvégezzük az x koordinátára az integrálást, akkor leolvashatjuk a propagátorokat 't Hooft-mértékben, fagráf közelítésben:

- A vektortér propagátora:

$$\begin{aligned} G_{\mu a\, \nu b}(k) &= \left[\frac{e^2 \delta_{\mu\nu}}{k^2 + m_A^2} + \frac{e^2 (\xi - 1) k_\mu k_\nu}{(k^2 + m_A^2)(k^2 + \xi m_A^2)} \right] \delta_{ab} \\ &= \left[\frac{e^2}{k^2 + m_A^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \xi \frac{e^2}{k^2 + \xi m_A^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \delta_{ab}. \end{aligned} \tag{19.20}$$

  Az utóbbi kifejezésben különválasztottuk a vektortér transzverzális és longitudinális komponensét. A transzverzális módusok tömege $m_A^2 = e^2 v^2/4$, a longitudinális módusoké ξm_A^2.

- A „would–be" Goldstone–bozonok propagátora:

$$G_{ab}^{\pi\pi} \; = \; \frac{1}{k^2 + \xi m_A^2} \delta^{ab}, \tag{19.21}$$

  vis. a tömegük ξm_A^2.

- A szellemterek propagátora:

$$G_{ab}^{CC} \; = \; \frac{1}{k^2 + \xi m_A^2} \delta^{ab}, \tag{19.22}$$

  vis. a szellemterek tömege ξm_A^2.

Mivel az elmélet mértékinvariáns, azok a módusok, amelyeknek a tömege függ a ξ mértékparamétertől, nem lehetnek fizikai módusok. Ez azt jelenti, hogy a vektortér longitudinális komponense, a szellemterek és a „would-be" Goldstone-bozonok nem fizikai szabadsági fokok. Csak a vektortér transzverzális módusai és a $\sigma(x)$ skalártér a fizikai szabadsági fokok . Meg lehet mutatni, hogy az S–mátrix független ξ–től, ami azt jelenti, hogy a nem fizikai szabadsági fokok járulékai a szórásmátrixban kölcsönösen kiejtik egymást.

æ

20 Az elektrogyenge kölcsönhatás Standard Modellje

Tudjuk, hogy a kvarkok és a leptonok családokba oszthatók. Jelenleg három ilyen családot ismerünk. Didaktikai okokból először az elméletet egy családra fogalmazzuk meg, amely két flavourt tartalmaz. A leptonok közül az elektron és az elektron–neutrinó, a kvarkok közül az u– és a d–kvark tartozik ide.

Az elektrogyenge kölcsönhatás a Standard Modell alapfeltevése szerint az $SU(2)\otimes U(1)$ mértékszimmetria következménye. A mértékterek egy skalártérhez csatolódnak minimális csatolással. A skalártér önkölcsönható és az önkölcsönhatás olyan, hogy a mértékszimmetriát spontán sértő vákuumállapotra vezet. A skalárteret úgy választjuk, hogy $SU(2)$ dublett (1/2) ábrázolást valósítson meg. Ezzel elérhető, hogy az $SU(2)\otimes U(1)$ mértékcsoport egy $U(1)$ szimmetriára sérül le. A Higgs–mechanizmus következtében a mértékterek 3 komponense tömeget nyer, míg 1 komponense zérus tömegű marad. A tömeges vektortereket a $W^{\pm}$ és a Z^0 vektorbozonokkal, a zérustömegű vektorteret az elektromágneses térrel azonosítjuk. A komplex skalártér 3 szabadsági foka nem fizikai és mértéktranszformációval kitranszformálható a hatásból. A skalártér negyedik komponense az önkölcsönhatás révén tömeget nyer, ez a Higgs–tér. Az elektron–neutrinó és a balkezes elektron $SU(2)$ dublettet alkotnak, ugyanakkor a jobbkezes elektron $SU(2)$ szinglett. A neutrinóból uis. a tapasztalat szerint nincsen jobbkezes. A balkezes u és d kvarkok egy $SU(2)$ dublettet alkotnak, míg a jobbkezes kvarkok $SU(2)$ szinglett ábrázoláshoz tartoznak. A fermionok mind az $U(1)$ szimmetria sziglett ábrázolásához tartoznak. Mivel a bal- és jobbkezes fermionok különböző $SU(2)$ ábrázoláshoz tartoznak, így tömeget csak a Higgs–térrel való kölcsönhatás révén nyerhetnek.

Az elektrogyenge kölcsönhatás elméletét a kísérletek fényesen igazolták a vektorbozonok kimutatásával. A Higgs–bozon keresésére pedig folynak a kísérletek.

Az elmélet 2 csatolási állandót tartalmaz: g az $SU(2)$ csatolás, $g'/2$ az $U(1)$ csatolás erősségét adja meg. Ezért azt szokás mondani, hogy az elmélet nem egyesíti, hanem csak közös elméleti keretbe foglalja az elektromágneses és a gyenge kölcsönhatást. Szigorú értelemben vett egyesítésről akkor lehetne beszélni, ha egyetlen csatolási állandó lenne csak az elméletben. Az elektrodinamika pl. valódi egyesített elmélete az elektromos és a mágneses kölcsönhatásnak. A kvantumtérelméletben a nagy egyesített elméletek (GUT – Grand Unified Theories) tesznek az elektromágneses, a gyenge és az erős kölcsönhatás valódi egyesítésére kísérletet.

A Standard Modellben az S_{SM} hatás mértéktereket definiáló tagja:

$$S_{gauge}[A^a_\mu, B_\mu] \;=\; \frac{1}{4}\int d^4x \left(\vec{F}^{\,2}_{\mu\nu} + B^2_{\mu\nu}\right), \tag{20.1}$$

ahol a mértékterek térerősségtenzorai:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g\epsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu, \tag{20.2}$$
$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \tag{20.3}$$

A leptonok és a skalártér flavour kvantumszámait (T, T_3) és gyenge hipertöltését (Y), amelyek rendre az $SU(2)$ és $U(1)$ ábrázolásokat definiálják, az alábbiakban foglalhatjuk össze:

Részecske	T	T_3	Y
$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	$+1$ -1	-1
$R = e_R$	0	0	-2
$\underline{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	$+1$ -1	$+1$

A hatás skalártértől származó tagja:

$$S_{sk}[A^a_\mu, B_\mu, \underline{\varphi}] = \int d^4x \left\{ \left[\partial_\mu \underline{\varphi}^\dagger - \frac{1}{2} \mathrm{i} \underline{\varphi}^\dagger \left(g' B_\mu + g \vec{A}_\mu \vec{\tau} \right) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\partial_\mu \underline{\varphi} + \frac{1}{2} \mathrm{i} \underline{\varphi}^\dagger \left(g' B_\mu + g \vec{A}_\mu \vec{\tau} \right) \right] + V(\underline{\varphi}) \right\}, \tag{20.4}$$

ahol az önkölcsönhatás potenciálja:

$$V(\underline{\varphi}) = a\varphi^\dagger \varphi + \frac{\lambda}{6} (\underline{\varphi}^\dagger \underline{\varphi})^2, \tag{20.5}$$

és $a < 0$, $\lambda > 0$. Mivel a kvadratikus tag előjele negatív, a potenciál fagráf közelítésben nem triviális minimummal rendelkezik. A szokásos választás ennek jelölésére:

$$\langle \underline{\varphi} \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{20.6}$$

ahol $v \neq 0$. A skalártér szokásos parametrizációja

$$\underline{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sigma_1(x) + \mathrm{i}\sigma_2(x) \\ v + \eta_1(x) + \mathrm{i}\eta_2(x) \end{pmatrix}. \tag{20.7}$$

Tekintve, hogy sem az $U(1)$ csoport generátora, sem az $SU(2)$ csoport generátorai nem teszik zérussá a $\langle \underline{\varphi} \rangle$ várható értéket, azért az $SU(2) \otimes U(1)$ szimmetria spontán sérül. Az eredeti generátorokból azonban képezhető pontosan egy olyan lineáris kombináció, $Q=(Y\cdot 1+\tau^3)/2$ (a skalártér gyenge hipertöltése $Y=1$), amelyik a vákuum várható értéket zérusba viszi:

$$\frac{1}{2}(Y\cdot 1+\tau^3)\frac{1}{\sqrt{2}}v\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0. \tag{20.8}$$

Ez a generátor olyan $U(1)$ szimmetriát generál, amely nem sérül spontán. Látjuk tehát, hogyan sérül le az $SU(2)\otimes U(1)$ szimmetria egy $U(1)$ szimmetriára. Ehhez a globális szimmetriához az elektromos töltés megmaradását kapcsoljuk. Korábbi táblázatunk alapján az elektromos töltések:

$$\begin{aligned}Q(\nu_e) &= (-1+1)/2=0,\\ Q(e_L) &= (-1-1)/2=-1,\\ Q(e_R) &= (-2+0)/2=-1,\\ Q(\varphi_1) &= (1+1)/2=+1,\\ Q(\varphi_2) &= (1-1)/2=0.\end{aligned} \tag{20.9}$$

Ennek megfelelően a Higgs-bozon töltése zérus. (A gyenge hipertöltést éppen úgy választották meg, hogy a helyes elektromos töltések adódjanak ki.)

Vegyük észre, hogy alkalmasan választott

$$U(x) \;=\; \exp\left\{-\mathrm{i}\alpha_0(x)-\mathrm{i}\frac{1}{2}\vec{\tau}\vec{\alpha}(x)\right\} \tag{20.10}$$

mértéktranszformációval kitranszformálhatjuk a hatásból a skalártér 3 nem fizikai szabadsági fokát:

$$U\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_1(x)+\mathrm{i}\sigma_2(x)\\ v+\eta_1(x)+\mathrm{i}\eta_2(x)\end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+H(x)\end{pmatrix}, \tag{20.11}$$

ahol $H(x)$ az ún. Higgs–tér. Természetesen a mértéktereken (és a fermiontereken) is el kell végeznünk a megfelelő mértéktranszformációt. A transzformáció azonban a mértékinvariáns S_{SM} hatás alakját változatlanul hagyja. Tegyük tehát fel, hogy elvégeztük ezt a lokális mértéktranszformációt. Ekkor az S_{sk} tagba beírhatjuk a

$$\underline{\varphi}(x) \;\to\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+H(x)\end{pmatrix} \tag{20.12}$$

alakot. A kovariáns derivált explicit kifejezése:

$$\begin{aligned}D_\mu\underline{\varphi} \;&\to\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \partial_\mu H\end{pmatrix}+\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}g'B_\mu+gA_\mu^3 & g(A_\mu^1-\mathrm{i}A_\mu^2)\\ g(A_\mu^1+\mathrm{i}A_\mu^2) & g'B_\mu-gA_\mu^3\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+H\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \partial_\mu H\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{i}}{2}(v+H)\begin{pmatrix}g(A_\mu^1-\mathrm{i}A_\mu^2)\\ g'B_\mu-gA_\mu^3\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{20.13}$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$(D_\mu \underline{\varphi})^\dagger D_\mu \underline{\varphi} = \frac{1}{2}\partial_\mu H \cdot \partial_\mu H + \frac{1}{8}(v+H)^2 \left(g^2 (A_\mu^1)^2 + g^2 (A_\mu^2)^2 + (g' B_\mu - g A_\mu^3)^2 \right). \tag{20.14}$$

Felhasználva, hogy

$$\underline{\varphi}^\dagger \underline{\varphi} = \frac{1}{2}(v+H)^2, \tag{20.15}$$

az önkölcsönhatás:

$$\begin{aligned} V &= \frac{a}{2}(v^2 + 2vH + H^2) \\ &+ \frac{\lambda}{6}(v^4 + 4v^2H^2 + H^4 + 4v^3H + 2v^2H^2 + 4vH^3). \end{aligned} \tag{20.16}$$

A potenciál minimumát ($H = 0$) az

$$\left.\frac{dV}{dH}\right|_{H=0} = v\left(a + \frac{2}{3}\lambda v^2\right) = 0 \tag{20.17}$$

egyenlet definiálja, ahonnan

$$v = \sqrt{\frac{-3a}{2\lambda}}. \tag{20.18}$$

Ekkor – a lényegtelen konstans tagot elhagyva –,

$$V = \frac{1}{2}m_H^2 H^2 + \frac{2}{3}\lambda v H^3 + \frac{\lambda}{6}H^4, \tag{20.19}$$

ahol a Higgs–bozon tömege $m_H^2 = -2a$. A hatás S_{sk} tagja tehát az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} S_{sk} &= \frac{1}{2}\partial_\mu H \cdot \partial_\mu H + \frac{1}{8}(v+H)^2 \left(g^2 (A_\mu^1)^2 + g^2 (A_\mu^2)^2 + (g' B_\mu - g A_\mu^3)^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2}m_H^2 H^2 + \frac{2}{3}\lambda v H^3 + \frac{\lambda}{6}H^4. \end{aligned} \tag{20.20}$$

Mivel a spontán szimmetriasérülés nem teljes, ezért általános megfontolásaink alapján azt várjuk, hogy a mértékterek 3 komponense tömeget nyer Higgs-mechanizmus révén, míg 1 komponens (a sértetlen szimmetriának megfelelő) zérus tömegű marad. Utóbbit fogjuk az elektromágneses térrel azonosítani, a tömeges vektortereket pedig a vektorbozonokkal. A hatás S_{sk} tagjából látszik, hogy a hatásban az A_μ^1 és A_μ^2 terekben kvadratikus tagok diagonálisak. Ezen térkomponensek nyugalmi tömege: $m_W =$

$gv/2$. Diagonalizáljuk a hatás B_μ és A^3_μ terekben kvadratikus tagját! Vezessük be ennek érdekében a θ_W *Weinberg–szöget* és a következő lineáris kombinációkat:

$$\begin{aligned} A_\mu &= B_\mu \cos\theta_W + A^3_\mu \sin\theta_W, \\ Z_\mu &= -B_\mu \sin\theta_W + A^3_\mu \cos\theta_W. \end{aligned} \tag{20.21}$$

Az inverz relációk:

$$\begin{aligned} B_\mu &= A_\mu \cos\theta_W - Z_\mu \sin\theta_W, \\ A^3_\mu &= A_\mu \sin\theta_W + Z_\mu \cos\theta_W. \end{aligned} \tag{20.22}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} &\frac{v^2}{8}\left(g' B_\mu - g A^3_\mu\right)^2 \\ &= \frac{v^2}{8}\Big[(g'\cos\theta_W - g\sin\theta_W)^2 A^2_\mu + (g'\sin\theta_W + g\cos\theta_W)^2 Z^2_\mu \\ &\quad -2A_\mu Z_\mu (g'\cos\theta_W - g\sin\theta_W)(g'\sin\theta_W + g\cos\theta_W)\Big] \end{aligned} \tag{20.23}$$

adódik, ami akkor és csak akkor diagonális, ha

$$g'\cos\theta_W = g\sin\theta_W. \tag{20.24}$$

Ekkor

$$\frac{v^2}{8}\left(g' B_\mu - g A^3_\mu\right)^2 = \frac{1}{2} m_Z^2 Z^2_\mu, \tag{20.25}$$

ahol

$$m_Z = \frac{v}{2}(g'\sin\theta_W + g\cos\theta_W) = v g' \sin\theta_W. \tag{20.26}$$

A Weinberg–szöget kifejezhetjük a csatolási állandókkal: $\tan\theta_W = g'/g$, úgyhogy:

$$\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \qquad \cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \tag{20.27}$$

és a vektorbozonok csatolási állandókkal kifejezett tömegei:

$$m_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}, \qquad m_W = m_Z \cos\theta_W = \frac{1}{2} g v \tag{20.28}$$

és természetesen $m_A = 0$ a foton tömege. A hatásban a vektorterek tömegtagjait az alábbi alakban is írhatjuk:

$$\frac{g^2 v^2}{4} W^+_\mu W^-_\mu + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z_\mu = \frac{1}{2} m_W^2 \left((W^+_\mu)^* W^+_\mu + (W^-_\mu)^* W^-_\mu\right) + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z_\mu. \tag{20.29}$$

ahol bevezettük a

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^1 \pm \mathrm{i}A_\mu^2\right) \tag{20.30}$$

töltött tereket. Megmutatjuk, hogy $W_\mu^\pm$ rendre ± 1 elektromos töltéssel rendelkezik. Hajtsunk végre ezeken a tereken az elektromos töltés megmaradásával kapcsolatos globális $U(1)$ transzformációt:

$$\begin{aligned} e^{-\mathrm{i}\omega\frac{1}{2}(1+\tau_3)}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tau^1 A_\mu^1 + \tau^2 A_\mu^2\right)e^{+\mathrm{i}\omega\frac{1}{2}(1+\tau_3)} &= e^{-\mathrm{i}\omega\frac{1}{2}(1+\tau_3)}\begin{pmatrix} 0 & W_\mu^- \\ W_\mu^+ & 0 \end{pmatrix} e^{+\mathrm{i}\omega\frac{1}{2}(1+\tau_3)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & e^{-\mathrm{i}\omega}W_\mu^- \\ e^{+\mathrm{i}\omega}W_\mu^+ & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20.31}$$

Innen leolvashatjuk, hogy a $W_\mu^\pm$ vektorbozonok töltése ± 1. Hasonlóan láthatjuk be, hogy Z_μ és A_μ töltése zérus.

A hatás leptonikus tagja:

$$\begin{aligned} S_{lepton} &= -\int d^4x \left[\bar{R}\gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}g'B_\mu)R \right. \\ &\left. +\bar{L}\gamma_\mu\left(\partial_\mu - \frac{1}{2}\mathrm{i}g'B_\mu + \frac{1}{2}\mathrm{i}g\vec{A}_\mu\cdot\vec{\tau}\right)L\right]. \end{aligned} \tag{20.32}$$

Ezzel kapcsolatosan az alábbiakat érdemes megjegyezni:

- Ha áttérünk a fizikai tartalommal rendelkező $W_\mu^\pm$ töltött és Z_μ semleges vektorbozon–terekre valamint az A_μ elektromágneses térre, akkor az elektromágneses tér és az elektronok csatolásából leolvashatjuk az elektron töltését (az elektromágneses kölcsönhatás csatolási állandóját. Pl. a jobbkezes elektronokra a csatolás:

  $$\mathrm{i}g'\bar{R}\gamma_\mu RB_\mu = \mathrm{i}\bar{R}\gamma_\mu R(g'A_\mu\cos\theta_W - g'Z_\mu\sin\theta_W), \tag{20.33}$$

  ahonnan az elektromágneses kölcsönhatás csatolási állandója:

  $$e = g'\cos\theta_W = g\sin\theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}. \tag{20.34}$$

  Ugyanezt kapjuk, ha részletesen kiírjuk a balkezes leptonok csatolását a vektorterekhez:

  $$\begin{aligned} &\mathrm{i}(\bar{\nu}_e, \bar{e}_L)\gamma_\mu\left[-\frac{1}{2}g'B_\mu + \frac{1}{2}gA_\mu^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{i}\frac{1}{2}(g\cos\theta_W + g'\sin\theta_W)Z_\mu\bar{\nu}_e\gamma_\mu\nu_e + \mathrm{i}eA_\mu\bar{e}_L\gamma_\mu e_L \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{i}\frac{1}{2}(g\cos\theta_W - g'\sin\theta_W)Z_\mu\bar{e}_L\gamma_\mu e_L \\
= \;& \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}Z_\mu\bar{\nu}_e\gamma_\mu\nu_e + \mathrm{i}eA_\mu\bar{e}_L\gamma_\mu e_L \\
&-\mathrm{i}\frac{1}{2}\frac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu\bar{e}_L\gamma_\mu e_L
\end{aligned}
\tag{20.35}
$$

- A vektorterek és a fermionáramok csatolása mutatja, hogy a semleges vektorbozon nem változtatja meg a flavourt. Ugyanakkor a töltött vektorbozonok megváltoztatják:

$$
-\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}g\bar{L}\gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} L = -\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}g\left[\bar{\nu}_e\gamma_\mu e_L W_\mu^+ + \bar{e}_L\gamma_\mu\nu_e W_\mu^-\right]. \tag{20.36}
$$

- A paritásszimmetria explicite sérül, mert a bal– és a jobbkezes fermionok különböző $SU(2)$ multiplettbe tartoznak.

Az $SU(2)$ szimmetria miatt az elektronnak nem lehet zérustól különböző tömeget adni a hatásban, mert ez mindjárt azt is jelentené, hogy a neutrinónak is ugyanilyen tömege lenne. A kiutat az elektrontérnek a Higgs–térhez történő csatolása jelenti:

$$
S_{lH} \;=\; G_e\int d^4x(\bar{R}\varphi^\dagger L + \bar{L}\varphi R), \tag{20.37}
$$

avagy részletesen kiírva az indexeket:

$$
(\bar{R})_\alpha(\varphi^\dagger)_i L_{i\alpha} \tag{20.38}
$$

ahol $\alpha = 0,1,2,3$ Dirac–spinor index, $i = 1,2$ az $SU(2)$ dublett-ábrázolás indexe. Ez a csatolás nem sérti explicit módon az $SU(2)\otimes U(1)$ szimmetriát. Ha a skalárteret felbontjuk

$$
\varphi \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \tag{20.39}
$$

alakban, akkor a következő tömegtagot kapjuk:

$$
G_e\frac{v}{\sqrt{2}}(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) \;=\; \frac{G_e v}{\sqrt{2}}\bar{e}e \equiv m_e\bar{e}e. \tag{20.40}
$$

A leptontömeg ilymódon szabad paraméter, amely meghatározza az elméletben a leptonterek és a Higgs-tér csatolási állandóját.

A Standard Modell alacsony energiás határesetben visszaadja a gyenge kölcsönhatás Fermi-féle elméletét. Valóban az $m_W \to \infty$ határesetben csak az A_μ^1 és A_μ^2 tereket tartalmazó tagok fontosak a hatásban:

$$S_F = \int d^4x \frac{1}{8} g^2 v^2 (A_\mu^1 A_\mu^1 + A_\mu^2 A_\mu^2) - \int d^4x \frac{1}{2} \mathrm{i} g \bar{L} \gamma_\mu (A_\mu^1 \tau_1 + A_\mu^2 \tau_2) L. \tag{20.41}$$

Ha kiintegrálunk az A_μ^1 és A_μ^2 terekre, amelyeknek a részecskéi nagy tömegük miatt nem terjednek ebben a közelítésben, akkor a Fermi-féle elmélet generáló funkcionálját kapjuk meg:

$$\begin{aligned} Z_F &= \int \mathcal{D}A_\mu^1 \mathcal{D}A_\mu^2 e^{-S_F} \\ &= e^{-\int dx \mathcal{L}_F}, \end{aligned} \tag{20.42}$$

ahol a Fermi-féle elmélet Lagrange-sűrűsége:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \frac{\frac{1}{4} g^2 \left\{ \left(\bar{L} \gamma_\mu \tau_1 L \right)^2 + \left(\bar{L} \gamma_\mu \tau_2 L \right)^2 \right\}}{4 \frac{1}{8} g^2 v^2} \\ &= \frac{1}{2v^2} \left\{ \left(\bar{L} \gamma_\mu \tau_1 L \right)^2 + \left(\bar{L} \gamma_\mu \tau_2 L \right)^2 \right\} \\ &= \frac{2}{v^2} (\bar{\nu}_e \gamma_\mu e_L)(\bar{e}_L \gamma_\mu \nu_e) \\ &\equiv \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger(x) J_\mu(x), \end{aligned} \tag{20.43}$$

ahol bevezettük a leptonáramot,

$$J_\mu(x) = \bar{e}(1 - \gamma_5) \gamma_\mu \nu_e = 2 \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_e, \tag{20.44}$$

és a gyenge kölcsönhatás Fermi-féle csatolási állandóját:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8 m_W^2}. \tag{20.45}$$

A gyenge kölcsönhatás Fermi-féle csatolási állandója tehát lényegében a v vákuum várható értéket rögzíti.

A Standard Modell egy fermion generációt véve figyelembe és a kvarkszektortól eltekintve az alábbi 5 független paramétert tartalmazza: g, θ_W, m_e, m_H, v. Jelenlegi ismereteink szerint a fermionoknak 3 generációja létezik, s ennek megfelelően a modell két további paramétert tartalmaz, a müon m_μ és a τ részecske m_τ nyugalmi tömegét.

Vizsgáljuk végül a Standard Modell kvarkszektorát. Kezdjük először egy generációval, az általánosítás 3 generációra egyszerűen megtehető. Az első generációt alkotó u és d kvarkok színtöltéssel rendelkeznek és $SU_c(3)$ triplettet alkotnak. A balkezes kvarkok flavour tekintetében $SU(2)$ dublettet alkotnak, a jobbkezesek pedig $SU(2)$ szinglettek:

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}; \qquad Q_{1R} = u_R; \qquad Q_{2R} = d_R. \tag{20.46}$$

Valamennyi kvark $U(1)$ sziglett, a megfelelő gyenge hipertöltéseket az elektromos töltés és a gyenge hipertöltés közötti $q = \frac{1}{2}(T_3 + Y)$ összefüggés alapján kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} q_1 = \frac{2}{3} = \frac{1}{2}(1 + Y_L), &\quad \rightarrow \quad Y_L = \frac{1}{3}; \\ q_1 = \frac{2}{3} = \frac{1}{2} Y_{1R}, &\quad \rightarrow \quad Y_{1R} = \frac{4}{3}; \\ q_2 = -\frac{1}{3} = \frac{1}{2} Y_{2R}, &\quad \rightarrow \quad Y_{2R} = -\frac{2}{3}. \end{aligned} \tag{20.47}$$

Ezek az összefüggések teljesen meghatározzák a hipertöltéseket. A balkezes kvarkok $SU(2)$ flavour-dublett szerkezetének konzisztenciáját mutatja, hogy a további

$$q_2 = -\frac{1}{3} = \frac{1}{2}(-1 + Y_L) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{3}\right) \tag{20.48}$$

reláció is teljesül.

A hatásnak a kvarkszektort leíró tagjai:

$$\begin{aligned} S_{kvark} = & -\int d^4x \left[\bar{Q}_L \left(\not{\partial} + \frac{1}{2} \mathrm{i} g' Y_L \not{B} + \frac{1}{2} \mathrm{i} g \not{\vec{A}} \cdot \vec{\tau} \right) Q_L \right. \\ & + \bar{Q}_{1R} \left(\not{\partial} + \frac{1}{2} \mathrm{i} g' Y_{1R} \not{B} \right) Q_{1R} \\ & \left. + \bar{Q}_{2R} \left(\not{\partial} + \frac{1}{2} \mathrm{i} g' Y_{2R} \not{B} \right) Q_{2R} \right]. \end{aligned} \tag{20.49}$$

Példaként írjuk ki a balkezes kvarkoktól származó tagokat teljes részletességgel:

$$(\bar{Q}_L)^a_{i\alpha} \left(\delta^{ab} \delta_{ij} \not{\partial}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \mathrm{i} g' Y_L \delta^{ab} \delta_{ij} \not{B}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \mathrm{i} g \not{\vec{A}}_{\alpha\beta} \cdot \vec{\tau}_{ij} \delta^{ab} \right) (Q_L)^b_{j\beta}, \tag{20.50}$$

ahol α, $\beta = 0, 1, 2, 3$ Dirac-spinor index, a, $b = 1, 2, 3$ színindex, $i, j = 1, 2$ flavour index.

Mivel a bal- és jobbkezes kvarkok különböző $SU(2)$ multipletteket alkotnak, azért a tömegtag nem lehet zérustól különböző. A tapasztalat szerint azonban a kvarktömeg nem zérus. A kvarkok tömege, hasonlóan mint a leptonoké, spontán szimmetriasértés révén a skalártérhez való csatolás által generálható:

$$G_{q2}\bar{Q}_{2R}\varphi^{\dagger}Q_L + G_{q1}\bar{Q}_L \mathrm{i}\tau_2\varphi^{*}Q_{1R} + \quad \text{h.c.}. \tag{20.51}$$

Több fermion-generáció esetén a fenti skalártérhez való csatolódás csak annyit változik, hogy a bal- és jobb oldalon álló kvark bármelyik családhoz tartozhat. Ha a skalárteret várható értékével helyettesítjük, akkor leolvashatjuk a tömegmátrixot. A tömegmátrix általában O ortogonális mátrix segítségével diagonalizálható. Ha $n = 2$ fermioncsalád létezését feltételezzük, azaz (u, d) és (c, s) kvarkokét, akkor az O ortogonális mátrix elemei egyetlen szöggel, az ún. θ_C Cabibbo-szöggel fejezhetők ki. Ez a szög meghatározza, hogy az első és második generációs kvarkok milyen arányú keveréke képez tömegsajátállapotokat. A természetben 3 fermioncsaládot ismerünk. Ezek leírásában a tömegmátrix diagonalizálásához 3×3 ortogonális mátrix szükséges. Ez a *Kobayashi–Maskawa-mátrix*, amely 3 valós forgási szöget tartalmaz paraméterként. Ezenkívül a tömegsajátállapotokat jelentő kvarktereket még egy külön fázisfaktorral kell szorozni annak érdekében, hogy figyelembe lehessen venni a CP–szimmetria sérülését, amelyet a kaon gyenge bomlása során valóban megfigyeltek.

æ

22 Kvantumszíndinamika: az erős kölcsönhatás elmélete

A színtöltéssel rendelkező kvarkok közötti erős kölcsönhatás a lokális $SU_c(3)$ színszimmetria következménye. Az erős kölcsönhatást a lokális nem-ábeli szimmetriát biztosító mértéktér, a gluontér közvetíti. A kvarkok az $SU_c(3)$ csoport alapábrázolása szerint transzformálódnak, míg a gluonok vektorpotenciálja az adjungált ábrázolás szerint.
A kvantumszíndinamikában a hatás:

$$S_{QCD}[A_\mu, \bar{\psi}_f, \psi_f] = -\int d^4x \left[\frac{1}{4g^2}\mathrm{tr}F^2_{\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f \left(\not{D} + m_f\right)\psi_f\right], \quad (22.1)$$

ahol a gluon-térerősség

$$F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}\frac{\lambda^a}{2}, \quad (22.2)$$

λ^a a Gell-Mann-mátrixok és összegzés történik az f flavourre. Az egyes kifejezések explicit alakja:

$$\mathrm{tr}F^2_{\mu\nu} = \left(F^a_{\mu\nu}\frac{\lambda^a}{2}\right)\left(F^b_{\mu\nu}\frac{\lambda^b}{2}\right) = 2F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}, \quad (22.3)$$

$$\not{D}_{\alpha a\,\beta b} = \mathrm{i}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left[\delta_{ab}\partial_\mu - \mathrm{i}gA^c_\mu\frac{1}{2}(\lambda^c)_{ab}\right], \quad (22.4)$$

$$\bar{\psi}_f\left(\not{D} + m_f\right)\psi_f = (\bar{\psi}_f)_{\alpha a}\left\{(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\mathrm{i}\left[\delta_{ab}\partial_\mu - \mathrm{i}gA^c_\mu\frac{1}{2}(\lambda^c)_{ab}\right] + m_f\delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}\right\}(\psi_f)_{\beta b}. \quad (22.5)$$

Mint azt a ,,Szimmetriák és sérülésük a kvantumtérelméletben" c. jegyzetben láttuk, a kvantumszíndinamika futó csatolási állandója növekvő impulzusátadással csökken és nagy impulzusoknál nullához tart. Ezért a kvarkok nagy impulzusátadással járó folyamatokban szabad pontszerű részecskékként viselkednek és a gluontér is közelitőleg abeli jellegűnek látszik. Ez az *aszimptotikus szabadság* jelensége. A protonokon végzett mélyen rugalmatlan leptonszórási kísérletek az aszimptotikus szabadságot fényesen igazolták. Az aszimptotikus szabadság azt a technikai könnyebbséget eredményezi, hogy a nagy impulzusátadással járó folyamatok a perturbációszámítás módszerével számolhatók.

A kavntumszíndinamika feltehetően magyarázatot ad egy másik fontos jelenségre is, az ún. *bezárásra.* Az a tapasztalat. hogy szabad kvarkok nem léteznek, és szabad gluonok sem. Ezek a részecskék be vannak zárva a hadronok belsejébe. Ha valamelyiküknek elég nagy impulzust adunk, akkor sem szabad részecskeként távozik el a hadronból, hanem a folyamat során keletkező hadronokba bezárva. A bezárás az erős kölcsönhatás hosszútávú viselkedésének fő jellemzője, vagyis a kis impulzusátadással járó folyamatokban észlelhető hatása. Az egyelőre csak feltételezés, hogy a kvantumszíndinamika megmagyarázza a bezárást, mert ezt még nem sikerült bebizonyítani. Ugyanakkor a diszkrét téridő-rácson megfogalmazott kvantumszíndinamika számot ad a bezárás jelenségéről. Ez a folytonos elméletre nézve mégsem bizonyító erejű, mert nem tudjuk biztosan, hogy a kvantált rácstérelméletek ekvivalensek-e a megfelelő, kvantált folytonos elmélettel. (A rácselmélet folytonos határesetének és a folytonos téridőben megfogalmazott elméletnek az ekvivalenciáját csak fagráf szinten lehet egyszerűen biztosítani.)

Mivel a bezárás kis impulzusátadással járó folyamatokban jelentkezik, amikor a futó csatolási állandó értéke nagy, azért nem vizsgálható a perturbációszámítás módszerével. A nem-perturbatív rácstáerelméleti vizsgálatokból arra lehet következtetni, hogy a bezárás szempontjából alapvető fontosságú az ún. *globális centrum szimmetria.* Egy csoport centrumát azok a csoportelemek alkotják, amelyek a csoport valamennyi elemével felcserélhetők. A centrumban benne van az egységelem. Ezért a centrum egy abeli alcsoport. Az $SU_c(3)$ csoport centruma a harmadik egységgyökökből áll:

$$C = \left\{1, e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \cdot 1, e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} \cdot 1\right\}. \tag{22.6}$$

A globális centrumtranszformációk a helytől független $g\delta(x_0 - x_*)$ $(g \in C)$ transzformációk, ahol x_* tetszőleges rögzített időpont. A globális centrumtranszformációk a mértéktranszformációk speciális esetei, s így az S_{QCD} hatás velük szemben invariáns. A rácselméleti vizsgálat azt mutatja, hogy a hadronok belsejében uralkodó perturbatív vákuumállapot dinamikai okoknál fogva sérti a globális centrumszimmetriát. Ugyanakkor a hadronokon kívül uralkodó bezáró vákuum a globális centrumszimmetriát nem sértő állapot. Más vonatkozásban ez azt jelenti, hogy alacsony hőmérsékleten a kvantumszíndinamikai vákuum a globális centrum szimmetriát nem sértő, bezáró vákuum. Ugyanakkor magas hőmérsékleten a vákuum a globális centrum szimmetriát sértő állapot.

IV. A MÉRTÉKELMÉLETEK RENORMÁLÁSA

A jegyzet most következő részében azt kívánjuk megmutatni, hogy a mértékelméletek renormálhatóak. Megkeressük a renormált hatás általános alakját, és megmutatjuk, hogy a renormált elméletnek mértékfüggetlen fizikai tartalma van.

22 A generáló funkcionál

Mielőtt felírjuk általános alakban a nem-ábeli mértékelméletek generáló funkcionálját, vezessünk be néhány jelölést, ami leegyszerűsíti a későbbiekben az összefüggéseink konkrét alakját. Vizsgáljunk olyan elméletet, amelyben mértéktér $A^a_\mu(x)$ és valamilyen más bozontér $\varphi_b(x)$ van. Fermionokat is tartalmazó elméletre az általánosítás könnyen megtehető. Foglaljuk össze a bevezetett tereket egyetlen $A_i \equiv (A^a_\mu(x), \varphi_b(x))$ vektorban, ahol az i index egyszerre képviseli az x téridő-koordinátát, a μ Lorentz-indexet és az a és b csoport-indexeket. Tegyük fel, hogy a mértéktranszformációk kompakt Lie-csoportot (G) alkotnak és az infinitezimális mértéktranszformációk

$$\delta A_i \;=\; D^\alpha_i(A)\omega_\alpha \tag{22.1}$$

alakúak, ahol ω_α a mértéktranszfomáció infinitezimális paraméterei és $\alpha \equiv (x, a)$ a téridő-koordinátát és a csoportindexet képviseli. A (**??**) egyenlet tehát az alábbi egyenletek tömör, szimbólikus írására szolgál:

$$\delta A^a_\mu(x) \;=\; \int dy \left[\partial^x_\mu \delta(x-y)\delta_{ab} + g f_{abc} A^c_\mu(x)\delta(x-y)\right]\omega_b(y), \tag{22.2}$$

$$\delta\varphi_{a'}(x) \;=\; \int dy \delta(x-y) g t^{b'}_{a'c'}\varphi_{c'}(x)\omega_{b'}(y). \tag{22.3}$$

Itt f_{abc} a G csoporthoz tartozó Lie-algebra szerkezeti állandói, $t^{b'}_{a'c'}$ pedig a generátorainak mátrixai valamilyen (általában reducibilis) ábrázolásban. Jelölje továbbá $\mathcal{S}(A)$ a mértékinvariáns hatást. A mértékinvariancia következménye, hogy

$$\delta\mathcal{S} = \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta A_i}\delta A_i = \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta A_i} D^\alpha_i(A)\omega_\alpha = 0 \tag{22.4}$$

tetszőleges ω_α paraméterek esetén, azaz

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta A_i} D^\alpha_i(A) = 0. \tag{22.5}$$

Közvetlen számolással igazolható, hogy érvényes az alábbi azonosság:

$$\frac{\delta D^\alpha_i}{\delta A_j} D^\beta_j - \frac{\delta D^\beta_i}{\delta A_j} D^\alpha_j \;=\; f_{\gamma\alpha\beta} D^\gamma_i, \tag{22.6}$$

ahol $f_{\alpha\beta\gamma} \equiv f_{abc}\delta(x-y)\delta(y-z)$. (Fel kell használni a Lie-algebra kommutátorait.) Az utóbbi azonosságok a (??) egyenlet integrálhatósági feltételei.

A mértékinvariancia következtében a (klasszikus) térkonfigurációk osztályokba sorolhatók, amelyeken belül az egyes térkonfigurációk egymásból mértéktranszformációval megkaphatók. Válasszunk minden ekvivalencia-osztályból egy reprezentánst, B_i. Ekkor az általános térkonfiguráció $A_i = (B_i)^g$, ahol g a mértéktranszformációnak megfelelő csoportelem. Miután a hatás mértékinvariáns, $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$. A B_i reprezentánsokat mértékfeltételek segítségével választjuk ki:

$$F_\alpha(B^g) = \nu_\alpha, \tag{22.7}$$

ahol ν_α a térmennyiségektől független állandók. A továbbiakban feltesszük, hogy a mértékfeltételeknek tetszőleges, rögzített g esetén egyértelműen létezik a megoldása. A ν_α paramétereket, amelyektől a Slavnov-Taylor-szimmetria következtében nem függnek a fizikai állítások, Gauss-eloszlású véletlen változóknak tekintjük és rájuk is kiintegrálunk. A $\mathcal{D}A$ síkmértéket $\mathcal{D}B\mathcal{D}g$ alakba írjuk, hogy elkülönítsük a fizikai szabadsági fokokra és a mérték szabadsági fokokra vonatkozó integrálást. Ekkor a korrelációs függvények generáló funkcionálja:

$$Z[J] \;=\; \int \mathcal{D}\rho(\nu) \int \mathcal{D}B\mathcal{D}g\delta[F_\alpha(B^g) - \nu_\alpha]\det\, M(B)\exp\{-\mathcal{S}(B) + J_i B_i^g\} \tag{22.8}$$

Itt a Faddeev-Popov-determinánst a szokásos módon az

$$\det\, M(B)\int \mathcal{D}g\delta[F_\alpha(B^g) - \nu_\alpha] \;=\; 1 \tag{22.9}$$

definícióval vezetjük be, s így:

$$M_{\alpha\beta}(B) = \frac{\delta F_\alpha}{\delta\omega_\beta} = \frac{\delta F_\alpha}{\delta A_i}(B)D_i^\beta(B). \tag{22.10}$$

A Faddeev-Popov-determináns azonban definíciójánál fogva mértékinvariáns, ezért $\det\, M(B) = \det\, M(B^g)$ és hasonló helyettesítés a hatásban is elvégezhető, $\mathcal{S}(B) = \mathcal{S}(B^g)$. Ekkor a generáló funkcionál a következő alakot ölti:

$$Z[J] \;=\; \int \mathcal{D}\rho \int \mathcal{D}A\det\, M(A)\delta[F_\alpha(A) - \nu_\alpha]\exp\{-\mathcal{S}(A) + J_i A_i\}. \tag{22.11}$$

Írjuk át a Dirac-delta funkcionált exponenciális alakba a λ_α segédtérre történő integrál segítségével, továbbá vezessük be A C_α, $\bar{C}_\alpha$ szellemtereket, amelyek révén a Faddeev-Popov-determinánst pályaintegrál alakjába írjuk:

$$Z[J] \;=\; \int \mathcal{D}\rho(\nu) \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\lambda\mathcal{D}\bar{C}\mathcal{D}C\exp\left\{-\mathcal{S}(A) + \nu_\alpha\lambda_\alpha - \lambda_\alpha F_\alpha(A) + \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}C_\beta + J_i A_i\right\}. \tag{22.12}$$

Végül végezzük el a ν_α paraméterek szerinti integrálást,

$$\int \mathcal{D}\rho(\nu) \exp\{\lambda_\alpha \nu_\alpha\} \;=\; \exp\{w(\lambda)\}. \tag{22.13}$$

Ekkor a generáló funkcionál az alábbi alakot ölti:

$$Z[J] \;=\; \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\lambda\mathcal{D}\bar{C}\mathcal{D}C \exp\left\{-S(A,C,\bar{C},\lambda) + J_i A_i\right\}, \tag{22.14}$$

ahol az effektív hatás

$$S(A,C,\bar{C},\lambda) \;=\; \mathcal{S}(A) - w(\lambda) + \lambda_\alpha F_\alpha(A) - \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta} C_\beta. \tag{22.15}$$

A továbbiakban az elméletet ebben a megfogalmazásában fogjuk vizsgálni. Az $S(A,C,\bar{C},\lambda)$ effektív hatás az eredeti $\mathcal{S}(A)$ hatással szemben nem mértékinvariáns. Ez annak a következménye, hogy definíciójához a mértékfeltételek bevezetésével, azaz mértékrögzítéssel jutottunk. A következő fejezetben megmutatjuk, hogy a mértékszimmetriának még megvan az emléke azáltal, hogy az effektív hatás BRS-invariáns.

22 BRS-szimmetria és Ward-Takahashi-azonosságok

Mint azt a 7. fejezetben láttuk, a generáló funkcionál a ν_α paraméterekre történő integrálás előtt, $J = 0$ külső forrás esetén invariáns az olyan mértéktranszformációkkal szemben, amelyek a ν_α paramétereket (a mértékfeltételeket) a térmennyiségektől független konstanssal tolják el. Ezek a Slavnov-Taylor-transzformációk és az alakjuk:

$$\delta A_i = D_i^\alpha M^{-1}_{\alpha\beta}\mu_\beta, \tag{22.1}$$

hiszen hatásukra a mértékfeltételek megváltozása:

$$\delta[F_\alpha(A)] = \frac{\delta F_\alpha}{\delta A_i} D_i^\beta M^{-1}_{\beta\gamma}\mu_\gamma = M_{\alpha\beta}M^{-1}_{\beta\gamma}\mu_\gamma = \mu_\alpha. \tag{22.2}$$

Most megmutatjuk, hogy a Slavnov-Taylor-szimmetria következtében a nem-ábeli mértékelméletek S effektív hatása BRS-invariáns. Megmutatjuk, hogy az effektív hatás invariáns a

$$\begin{aligned} \delta A_i &= \bar\epsilon D_i^\alpha C_\alpha, & \delta C_\alpha &= -\frac{1}{2}\bar\epsilon f_{\alpha\beta\gamma}C_\beta C_\gamma, \\ \delta\bar C_\alpha &= \bar\epsilon\lambda_\alpha, & \delta\lambda_\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{22.3}$$

BRS-transzformációval szemben.

Konstruáljuk meg az S effektív hatást invariánsan hagyó BRS-transzformációt. A 8. fejezet általános megfontolásai alapján tudjuk, hogy a $\bar C$ és λ szabadsági fokok BRS-transzformációja lényegében független a dinamikától:

$$\delta\bar C_\alpha = \bar\epsilon\lambda_\alpha, \qquad \delta\lambda_\alpha = 0. \tag{22.4}$$

Ezek a szabályok ezen változók tekintetében automatikusan biztosítják a nilpotenciát.

Keressük a mértéktér BRS-megváltozását $\delta A_i = \bar\epsilon D_i$ alakban, és határozzuk meg D_i és δC_α kifejezéseit úgy, hogy (a) $\delta S = 0$, és (b) $\delta^2 A_i = 0$ legyen. Az effektív hatás megváltozása:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta\left(\lambda_\alpha F_\alpha - \bar C_\alpha M_{\alpha\beta}C_\beta\right) \\ &= \lambda_\alpha\delta F_\alpha - \delta\bar C_\alpha\cdot M_{\alpha\beta}C_\beta - \bar C_\alpha\delta(M_{\alpha\beta}C_\beta) \\ &= \lambda_\alpha\frac{\partial F_\alpha}{\partial A_i}\bar\epsilon D_i - \bar\epsilon\lambda_\alpha\frac{\partial F_\alpha}{\partial A_i}D_i^\beta C_\beta - \bar C_\alpha\delta(M_{\alpha\beta}C_\beta). \end{aligned} \tag{22.5}$$

Vegyük észre, hogy a $D_i = D_i^\beta C_\beta$ választás esetén az első két tag kiejti egymást. Az utolsó tag ezután a következőképpen bontható fel:

$$\delta S = -\bar C_\alpha\delta\left(\frac{\delta F_\alpha}{\delta A_i}D_i\right) = -\bar C_\alpha\delta\left(\frac{\delta F_\alpha}{\delta A_i}\right)\cdot D_i - \bar C_\alpha\left(\frac{\delta F_\alpha}{\delta A_i}\right)\delta D_i. \tag{22.6}$$

Ha most megköveteljük a BRS-transzformáció nilpotenciáját, azaz $\delta D_i = 0$ teljesülését, akkor

$$\begin{aligned} \delta S &= -\bar{C}_\alpha \delta \left(\frac{\delta F_\alpha}{\delta A_i} \right) \cdot D_i \\ &= -\bar{C}_\alpha \frac{\delta^2 F_\alpha}{\delta A_i \delta A_j} \bar{\epsilon} D_j D_i \\ &= -\bar{C}_\alpha \frac{\delta^2 F_\alpha}{\delta A_i \delta A_j} \bar{\epsilon} D_j^\beta C_\beta D_i^\gamma C_\gamma = 0, \end{aligned} \tag{22.7}$$

mert a jobb oldalon egy i, j indexekben szimmetrikus és antiszimmetrikus kifejezés kontrakciója áll.

A transzformáció nilpotenciájának megköveteléséből kapjuk meg a C_α szabadsági fokok transzformációját:

$$0 = \delta D_i \;=\; D_i^\beta \delta C_\beta + \frac{\partial D_i^\beta}{\partial A_j} \bar{\epsilon} D_j^\gamma C_\gamma C_\beta, \tag{22.8}$$

ahol a második tagban az γ, α indexpárban antiszimmetrikus $C_\gamma C_\beta$ szorzat együtthatóját antiszimmetrizálhatjuk. Ekkor az előző fejezetben tárgyalt (**??**) azonosságot használva

$$0 = D_i^\beta \delta C_\beta + \frac{1}{2} f_{\alpha\gamma\beta} \bar{\epsilon} D_i^\alpha C_\gamma C_\beta, \tag{22.9}$$

azaz

$$\delta C_\alpha \;=\; -\frac{1}{2} f_{\alpha\beta\gamma} C_\beta C_\gamma \tag{22.10}$$

adódik. Végezetül marad annak igazolása, hogy $\delta^2 C_\alpha = 0$, ami a szerkezeti állandókra vonatkozó Jacobi-azonosságból következik.

A fenti BRS-transzformáció formailag egy $\bar{\epsilon}$ paraméterű mértéktranszformációként hat az A_i térmennyiségekre. További tulajdonsága, hogy kompakt Lie-csoport esetén a generáló funkcionálban szereplő integrálási mérték is invariáns a BRS-transzformációval szemben.

Vezessük be az antikommutáló BRS-operátort,

$$\Delta_0 \;=\; D_i^\alpha C_\alpha \frac{\delta}{\delta A_i} + \frac{1}{2} f_{\alpha\beta\gamma} C_\beta C_\gamma \frac{\delta}{\delta C_\alpha} + \lambda_\alpha \frac{\delta}{\delta \bar{C}_\alpha}. \tag{22.11}$$

Az effektív hatás BRS-szimmetriája ekkor

$$\Delta_0 S(A, C, \bar{C}, \lambda) = 0 \tag{22.12}$$

alakban fejezhető ki. A BRS-transzformáció nilpotens, ezért $[\Delta_0]^2 = 0$. Az (**??**) egyenletnek a mértékinvariáns megoldásokon túl minden $\Delta_0 \Sigma(A, C, \bar{C}, \lambda)$ alakú funkcionál megoldása. Az effektív hatás valóban egy mértékinvariáns részből (λ-t mértékinvariánsnak kell tekinteni) és egy utóbbi szerkezetű részből tevődik össze:

$$S = \mathcal{S}(A) - w(\lambda) + \Delta_0[\bar{C}_\alpha F_\alpha(A)]. \tag{22.13}$$

A fentiek alapján leszármaztathatjuk a generáló funkcionálra vonatkozó azon Ward-Takahashi-azonosságokat, amelyek a BRS-szimmetria következményei. Ennek érdekében általánosítsuk a generáló funkcionált úgy, hogy mindazokhoz az ,,operátorokhoz", amelyeket a BRS-transzformációk generálnak, külső forrásokat csatolunk:

$$\begin{aligned} Z[J,\eta,\bar{\eta},\ell,K,L] &= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\lambda\mathcal{D}C\mathcal{D}\bar{C}\exp\{-S[A,C,\bar{C},\lambda,K,L] \\ &\quad +J_iA_i + \bar{\eta}_\alpha C_\alpha + \bar{C}_\alpha\eta_\alpha + \ell_\alpha\lambda_\alpha\}, \end{aligned} \tag{22.14}$$

ahol

$$\begin{aligned} S[A,C,\bar{C},\lambda,K,L] &= \mathcal{S}(A) - w(\lambda) + \lambda_\alpha F_\alpha(A) - \bar{C}_\alpha M_{\alpha\beta}C_\beta \\ &\quad -K_iD_i - \frac{1}{2}L_\alpha f_{\alpha\beta\gamma}C_\beta C_\gamma. \end{aligned} \tag{22.15}$$

A BRS-szimmetria és a BRS-transzformáció nilpotens volta miatt a (**??**) módosított effektív hatás is BRS-invariáns. A generáló funkcionál BRS-transzformáció során csak az A, C és $\bar{C}$ terek forrástagjai révén változhat meg,

$$\delta[J_iA_i + \bar{\eta}_a lpha C_\alpha + \bar{C}_\alpha\eta_\alpha] = \bar{\epsilon}(J_iD_i + \frac{1}{2}\bar{\eta}_\alpha f_{\alpha\beta\gamma}C_\beta C_\gamma + \lambda_\alpha\eta_\alpha). \tag{22.16}$$

Ha megköveteljük, hogy a (**??**) generáló funkcionál BRS-invariáns legyen, akkor az alábbi azonosságra jutunk:

$$\left(J_i\frac{\delta|}{\delta K_i} + \bar{\eta}_\alpha\frac{\delta}{\delta L_\alpha} + \eta_\alpha\frac{\delta}{\delta l_\alpha}\right)Z = 0. \tag{22.17}$$

(Most látjuk, hogy azért volt érdemes a generáló funkcionált a BRS-transzformáció által generált ,,operátorok" forrśtagjaival kiegészíteni, hogy a fenti azonosságot a megfelelő külső források szerinti deriválások segítségével egyszerű alakban írhassuk fel.) Az összefüggő Green-függvények generáló funkcionálja ekkor az

$$\left(J_i\frac{\delta}{\delta K_i} + \bar{\eta}_\alpha\frac{\delta}{\delta L_\alpha} + \eta_\alpha\frac{\delta}{\delta l_\alpha}\right)W = 0 \tag{22.18}$$

azonosságot elégíti ki. Hajtsunk végre Legendre-transzformációt,

$$\Gamma[A,C,\bar{C},\lambda,K,L] + W[J,\eta,\bar{\eta},\ell,K,L] = J_iA_i + \bar{\eta}_\alpha C_\alpha + \bar{C}_\alpha\eta_\alpha + \ell_\alpha\lambda_\alpha, \tag{22.19}$$

ahol

$$J_i = \frac{\delta\Gamma}{\delta A_i}, \qquad \bar{\eta}_\alpha = \frac{\delta\Gamma}{\delta C_\alpha},$$
$$\eta_\alpha = \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{C}_\alpha}, \qquad \ell_\alpha = \frac{\delta\Gamma}{\delta\lambda_\alpha}. \tag{22.20}$$

hogy megkapjuk az 1PI Green-függvények generáló funkcionáljára vonatkozó Ward-Takahashi-azonosságokat:

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_i} + \frac{\delta\Gamma}{\delta C_\alpha}\frac{\delta\Gamma}{\delta L_\alpha} - \lambda_\alpha\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{C}_\alpha} = 0. \tag{22.21}$$

Itt felhasználtuk a Legendre-transzformáció azon tulajdonságát, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma}{\delta K_i} + \frac{\delta W}{\delta K_i} &= 0, \\ \frac{\delta\Gamma}{\delta L_\alpha} + \frac{\delta W}{\delta L_\alpha} &= 0. \end{aligned} \tag{22.22}$$

A (??) azonosságot fagráfok szintjén alkalmazva kiderül, hogy az eredeti hatás ugyanennek az azonosságnak tesz eleget:

$$\frac{\delta S}{\delta A_i}\frac{\delta S}{\delta K_i} + \frac{\delta S}{\delta C_\alpha}\frac{\delta S}{\delta L_\alpha} - \lambda_\alpha\frac{\delta S}{\delta\bar{C}_\alpha} = 0. \tag{22.23}$$

Fordítva is igaz, ha az eredeti hatásra érvényes a (??) azonosság, akkor abból következik, hogy az 1PI Green-függvények generáló funkcionáljára is érvényes a (??) azonosság.

A (??) azonosságot felhasználva írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 = & \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\lambda\mathcal{D}C\mathcal{D}\bar{C}\left[\frac{\delta S}{\delta A_i}\frac{\delta S}{\delta K_i} + \frac{\delta S}{\delta C_\alpha}\frac{\delta S}{\delta L_\alpha} - \lambda_\alpha\frac{\delta S}{\delta\bar{C}_\alpha}\right] \\ & \exp\{-S + J_iA_i + \bar{\eta}_\alpha C_\alpha + \bar{C}_\alpha\eta_\alpha + \ell_\alpha\lambda_\alpha\}. \end{aligned} \tag{22.24}$$

Használjuk fel, hogy

$$\frac{\delta S}{\delta A_i}e^{-S} = -\frac{\delta}{\delta A_i}e^{-S}, \qquad \frac{\delta S}{\delta C_\alpha}e^{-S} = -\frac{\delta}{\delta C_\alpha}e^{-S},$$
$$\frac{\delta S}{\delta\bar{C}_\alpha}e^{-S} = -\frac{\delta}{\delta\bar{C}_\alpha}e^{-S}, \tag{22.25}$$

és integráljunk parciálisan az A_i, C_α és $\bar{C}_\alpha$ változók szerint:

$$\begin{aligned} 0 = & \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\lambda\mathcal{D}C\mathcal{D}\bar{C}\left[\frac{\delta^2 S}{\delta A_i\delta K_i} + \frac{\delta^2 S}{\delta C_\alpha\delta L_\alpha} + J_i\frac{\delta S}{\delta K_i} + \bar{\eta}_\alpha\frac{\delta S}{\delta L_\alpha} - \eta_\alpha\lambda_\alpha\right] \\ & \exp\{-S + J_iA_i + \bar{\eta}_\alpha C_\alpha + \bar{C}_\alpha\eta_\alpha + \ell_\alpha\lambda_\alpha\}. \end{aligned} \tag{22.26}$$

A hatásnak a jobb oldali integrandusban szereplő második deriváltjai eltűnnek, mert a Lie-algebrát ábrázoló mátrixok spúrjaival arányosak, azok pedig kompakt csoport esetén zérussal egyenlők. Ekkor a (**??**) azonosságot kapjuk eredményül, amiből az 1PI Green-függvények generáló funkcionáljára vonatkozó (**??**) azonosság a korábban tárgyalt módon következik.

22 A renormálhatóság bizonyítása

A hatványkitevők leszámlálásának módszerével kiválaszthatjuk azokat a nem-ábeli mértékelméleteket, amelyek a renormálható elméletek közé sorolhatók. Ebben a fejezetben belátjuk, hogy az ilyen, a hatvány kitevők leszámlĺásának módszerével renormálhatónak talált nem-ábeli mértékelmélet a Ward-Takahashi-azonosságok megtartásával, azaz a (mértékszimmetria emlékét őrző) BRS-szimmetria megőrzésével renormálható. Azt mutatjuk meg, hogy a fagráf szintű hatásra érvényes (**??**) azonosság a renormált hatásra is igaz marad a hurkok számá szerinti tetszőleges rendben. Pontosabban, belátjuk, hogy tetszőleges rendben meg lehet úgy választani az ellentagokat, hogy a Ward-Takahashi-azonosságok ne sérüljenek.

Induljunk ki abból, hogy az 1PI Green-függvények generáló funkcionálja a hurokkifejtésben

$$\Gamma = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Gamma_\ell \tag{22.1}$$

alakú. Itt $\Gamma_0 = S$ a fagráf szintű hatás. Vezessük be továbbá a μ_α segédteret úgy, hogy hozzáadjuk a $-\mu_\alpha \lambda_\alpha$ tagot a fagráf szintű hatáshoz is és az 1PI Green-függvények Γ generáló funkcionáljához is, hogy írhassuk:

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\mu_\alpha} = -\lambda_\alpha. \tag{22.2}$$

Ekkor a (**??**) és (**??**) Ward-Takahashi-azonosságok homogén kvadratikus alakot öltenek és szimbólikusan az alábbi alakban írhatjuk fel őket:

$$S * S = 0, \qquad \Gamma * \Gamma = 0. \tag{22.3}$$

Annak bizonyítása, hogy ezek az egyenletek megőrzik az alakjukat a renormálás során, teljes indukcióval történik. Tegyük fel, hogy $\ell - 1$ hurok rendben sikerült megszerkeszteni a renormált $S_{\ell-1}$ hatást úgy, hogy (a) az kielégíti az

$$S_{\ell-1} * S_{\ell-1} = 0 \tag{22.4}$$

egyenletet és (b) végessé teszi a Γ funkcionált $\ell - 1$ hurok rendben. Nézzük most, hogy meg tudjuk-e az ℓ hurok rendben a renormált hatás újabb ellentagjait úgy választani, hogy

$$\left(\sum_{l=0}^{\ell} \Gamma_l\right) * \left(\sum_{l=0}^{\ell} \Gamma_l\right) = 0 \tag{22.5}$$

teljesüljön, vagyis hogy a renormált $S_{\ell-1}$ hatásból származtatott Γ funkcionál ($\Gamma_0 = S_{ell-1}$) ℓ hurok rendben is teljesítse a Ward-Takahashi azonosságot. (Ne felejtsük el, hogy minden újabb hurok rendű Γ_ℓ korrekció meghatározásához az új, előző rendben renormált $S_{\ell-1}$ hatásból indulunk ki, mint fagráf hatásból!) Kiírva a fenti egyenlet következményét az ℓ hurok rendű tagokra,

$$S_{\ell-1} * \Gamma_\ell + \Gamma_\ell * S_{\ell-1} = -\sum_{m=1}^{\ell-1} \Gamma_m * \Gamma_{\ell-m} \tag{22.6}$$

adódik. Indukciós feltevésünk értelmében az egyenlet jobb oldala véges. Ekkor az ℓ hurok rendű divergens járulék, Γ_ℓ^{div} eleget kell tegyen az

$$S_{\ell-1} * \Gamma_\ell^{div} + \Gamma_\ell^{div} * S_{\ell-1} = 0 \tag{22.7}$$

egyenletnek. Ekkor a

$$S_\ell = S_{\ell-1} - \Gamma_\ell^{div} + \ldots \tag{22.8}$$

definícióval kapott, ℓ hurok rendben renormált hatás (a) ki fogja elégíteni az $S_\ell * S_\ell = 0$ egyenletet, és (b) konstrukciójánál fogva végessé teszi a Γ funkcionált ℓ hurok rendben. (Az S_ℓ definíciójában azért szerepel $\ldots$, mert Γ_ℓ^{div} pl. dimenzionális regularizáció esetén az ϵ paraméter szerinti pólustagokat tartalmazza, míg az ϵ paraméterben tetszőleges analitikus rész is szerepelhet S_ℓ-ben, aszerint, hogy hogyan választjuk meg a véges részeket rögzítő renormálási sémát.)

Ha ehhez még hozzátesszük, hogy indukciós feltevéseink az $\ell = 0$ rendben, azaz fagráf szinten triviálisan teljesünek, akkor befejeztük a teljes indukcióval történő bizonyítást.

22 A renormált hatás alakja

A renormált hatás általános alakja olyan kell legyen, ami megoldása az $S * S = 0$ egyenletnek és egyúttal a hatvány kitevők leszámlálásának módszere szerint is megengedett.

Tegyünk először néhány általános megjegyzést.

1. Vezessük be a Δ differenciáloperátort a
$$\Delta = \frac{\delta S}{\delta A_i}\frac{\delta}{\delta K_i} + \frac{\delta S}{\delta K_i}\frac{\delta}{\delta A_i} + \frac{\delta S}{\delta C_\alpha}\frac{\delta}{\delta L_\alpha} + \frac{\delta S}{\delta L_\alpha}\frac{\delta}{\delta C_\alpha} - \lambda_\alpha \frac{\delta}{\delta \bar{C}_\alpha} \tag{22.1}$$
definícióval. Az 1PI Green-függvények generáló funkcionáljának divergens része tetszőleges ℓ hurok rendben az
$$\Delta \Gamma_\ell^{div} = 0 \tag{22.2}$$
egyenletet kell kielégítse.

2. A Δ operátor nilpotens.

   A bizonyításhoz használjuk újra a μ_α segédteret. Írjuk továbbá a Ward-Takahashi-azonosságokat az alábbi alakba:
$$\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial \theta_i} = 0, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_i} = 0, \tag{22.3}$$
ahol x_i jelöli általánosan a kommutáló A_i, L_α, μ_α változókat, θ_i pedig az antikommutáló K_i, C_α, $\bar{C}_\alpha$ változókat. A Δ operátor akkor az
$$\Delta = \frac{\partial S}{\partial \theta_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \theta_i} \tag{22.4}$$
alakot ölti. Elemi számolás után (felhasználva, hogy az i, j indexpárban szimmetrikus és antiszimmetrikus kifejezések kontrakciója zérus) kapjuk, hogy
$$\begin{aligned}
\Delta^2 F = & \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \theta_i}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \theta_j} + \frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial^2 S}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\right. \\
& + \left(\frac{\partial S}{\partial \theta_i}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial^2 S}{\partial \theta_i \partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial \theta_j} \\
& + \left(\frac{\partial S}{\partial \theta_i}\frac{\partial S}{\partial \theta_j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_j}\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right. \\
& \left.\left. + \frac{\partial S}{\partial \theta_i}\frac{\partial S}{\partial x_j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \theta_j} + \frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial \theta_j}\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial x_j}\right)\right] F \\
= & \left[-\frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial \theta_i}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta_i}\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \theta_j}\right] F = 0.
\end{aligned} \tag{22.5}$$

Az utolsó egyenlőség a Ward-Takahashi-azonosságok következménye.

3. A Ward-Takahashi-azonosság az (x_i, θ_i) változók tetszőleges antikommutáló $\varphi(x', \theta)$ függvénnyel adott $(x_i, \theta_i) \to (x'_i, \theta'_i)$ kanonikus transzformációival szemben invariáns,

$$x_i = \frac{\partial \varphi(x', \theta)}{\partial \theta_i}, \tag{22.6}$$

$$\theta'_i = \frac{\partial \varphi(x', \theta)}{\partial x'_i}, \tag{22.7}$$

azaz

$$\frac{\partial S}{\partial \theta'_i} \frac{\partial S}{\partial x'_i} = 0. \tag{22.8}$$

A bizonyításhoz először a (??) egyenlet segítségével az azonosság eredeti alakjából az

$$\frac{\partial S}{\partial \theta_i} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_i \partial x'_j} \right]^{-1} \frac{\partial S}{\partial x'_j} = 0 \tag{22.9}$$

alakot nyerjük, majd az első két tényezőt az (??) egyenlet felhasználásával $\frac{\partial S}{\partial \theta'_i}$ alakba írjuk.

4. A (forrástagokkal kiegészített, renormált effektív) hatás infinitezimális

$$\varphi = \theta_i x'_i + \epsilon \psi(\theta, x') \tag{22.10}$$

kanonikus transzformáció során (a BRS transzformáció is ilyennek tekinthető)

$$S(\theta', x') - S(\theta, x) = \epsilon \Delta \psi(\theta, x) \tag{22.11}$$

megváltozást szenved.

A kanonikus transzformáció generáló függvényéből az infinitezimális transzformációra

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i - \epsilon \frac{\partial \psi(\theta, x)}{\partial \theta_i}, \\ \theta'_i &= \theta_i + \epsilon \frac{\partial \psi(\theta, x)}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{22.12}$$

adódik. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$S(\theta', x') = S(\theta, x) + \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial x'_i} \frac{\partial S}{\partial \theta_i} - \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial \theta_i} \frac{\partial S}{\partial x_i}. \tag{22.13}$$

Ez éppen a bizonyítani kívánt állítás.

5. A bevezetett terek és források dimenziójára a következők érvényesek $d = 4$ téridő dimenzióban. A Lagrange-sűrűség dimenziója 4. A bozontér (Yang-Mills-tér és skalárterek) dimenziója 1. Válasszunk olyan mértékfeltételeket, amelyeknek a dimenziója $[F(A)] = 2$. Ekkor $[\lambda] = 2$, Ekkor dimenzionális okoknál fogva $w(\lambda)$ kvadratikus alakú, $w(\lambda) = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta$, ahol $a_{\alpha\beta}$ dimenziótlan csatolási állandók. A kovariáns deriváltnak van egy konstans része, ami egy téridő-koordináta szerinti deriválást tartalmaz, meg egy az A-ban lineáris tagja, ezért a dimenziója $[D_i^\alpha(A)] = 1$. Ekkor $[M_{\alpha\beta}] = 2 - 1 + 1 = 2$, amiből következik, hogy $[C] + [\bar{C}] = 2$. Egyszerűség kedvéért a $[C] = [\bar{C}] = 1$ választással élünk. A fentiekből a forrásokra $[K_i] = [L_\alpha] = 2$ következik.

6. Tekintve, hogy a csupasz effektív hatásban a szellemterek csak kvadratikusan fordulnak elő, $\bar{C}C$ alakban, ezért a szellemszám megmarad. Ha a $\bar{C}$ és C terekhez a -1 ill. $+1$ szellemszámoy rendeljük, akkor a K_i és az L_α források szellemszáma rendre -1 ill. -2.

A fenti általános megfontolások után most már nekikezdhetünk a renormált hatás szerkezetének meghatározásához.

A renormált hatást a csupasz hatáshoz hasonló alakban parametrizáljuk. Figyeljünk azonban arra, hogy a csatolási állandók és terek most a megfelelő renormált mennyiségek. Mivel a K és az L források dimenziója 2, ezért csak a szellemterek lineáris vagy kvadratikus kifejezéséhez csatolódhatnak. Ha még a szellemszám megmaradását is figyelembe vesszük, akkor a -1 szellemszámmal rendelkező K_i csak a $+1$ szellemszámú C_α-hoz csatolódhat és csak lineárisan, míg a -2 szellemtöltésű L_α csak a C_α kvadratikos kifejezéséhez. A K és L források magasabb hatványai dimenzionális okoknál fogva nem lehetségesek. Ekkor a renormált hatás alakja:

$$S_{ren} = -K_i D_i^\alpha[A]C_\alpha - \frac{1}{2}L_\alpha f_{\alpha\beta\gamma}C_\beta C_\gamma + \tilde{S}(A, \lambda, C, \bar{C}. \qquad (22.14)$$

Itt az $f_{\alpha\beta\gamma}$ mennyiségek dimenziója 0, s így a terektől független állandók. D_i^α dimenziója 1, és ezért az A_i terektől csak lineárisan függhet. A D_i^α mennyiség nem függhet sem λ-tól, sem $\bar{C}C$-től, mert akkor legalább 2 lenne a dimenziója.

A renormált hatásra vonatkozó (**??**) Ward-Takahashi-azonosságoknak a K és L forrásokban lineáris tagjai az alábbi egyenleteket eredményezik:

$$f_{\beta\alpha\gamma}f_{\alpha\delta\epsilon}C_\gamma C_\delta C_\epsilon = 0, \qquad (22.15)$$

$$\left(\frac{\delta D_i^\alpha}{\delta A_j}D_j^\beta - \frac{1}{2}f_{\gamma\alpha\beta}D_i^\gamma\right)C_\alpha C_\beta = 0. \qquad (22.16)$$

A (**??**) egyenletből látjuk, hogy az $f_{\alpha\beta\gamma}$ mennyiségek kielégítik a Jacobi-azonosságot, mert $C_\gamma C_\delta C_\epsilon$ antiszimmetrikus a $(\gamma, \delta, \epsilon)$ index-hármasban. Ezért $f_{\alpha\beta\gamma}$ egy Lie-algebra szerkezeti állandói, ami csak az eredeti Lie-algebra lehet folytonossági okoknál fogva. Ezért ezeknek a csupasz hatásban szereplő szerkezeti állandók lineáris kombinációinak kell lenni. Az (??) egyenletek egyúttal a (??) egyenletek integrálhatósági feltételei. ennek következtében fennálnak a

$$\frac{\partial D_i^\alpha}{\partial A_j} D_j^\beta - \frac{\partial D_i^\beta}{\partial A_j} D_j^\alpha \;=\; f_{\gamma\alpha\beta} D_i^\gamma \tag{22.17}$$

kommutációs relációk. Ilymódon teljesen visszakaptuk az eredeti csoportszerkezetet.

Miután λ dimenziója 2, a hatás $\tilde{S}$ része legfeljebb kvadratikus lehet λ-ban:

$$\tilde{S} \;=\; -\frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta + \lambda_\alpha F_\alpha(A, \bar{C}, C) + \tilde{L}(A, \bar{C}, C), \tag{22.18}$$

ahol $a_{\alpha\beta}$ állandók, F_α dimenziója 2, így függhet A-tól és a $\bar{C}C$ kombinációtól. A (??) Ward-Takahashi-azonosság λ-ban kvadratikus tagjai az alábbi egyenlőséget adják:

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{C}_\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta = 0, \tag{22.19}$$

Feltéve, hogy

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{C}_\beta} \;=\; g_{\alpha\beta\gamma} C_\gamma, \tag{22.20}$$

a (??) egyenletből a $g_{\alpha\beta\gamma}$ állandókra a $g_{\alpha\beta\gamma} = -g_{\beta\alpha\gamma}$ egyenlőség következik.

A (??) azonosság λ-ban lineáris tagjai az alábbi egyenletet adják:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{C}_\alpha} + \frac{1}{2} f_{\delta\beta\gamma} C_\beta C_\gamma C_\epsilon g_{\alpha\epsilon\delta} + D_i^\beta C_\beta \frac{\partial F_\alpha}{\partial A_i} = 0. \tag{22.21}$$

A $g_{\alpha\beta\gamma}$ együtthatók antiszimmetrikussága (az első két indexben) éppen ezen egyenlet integrálhatósági feltétele. Integrálás után az alábbi alakot kapjuk:

$$\tilde{L}(A, \bar{C}, C) \;=\; -\bar{C}_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial A_i} D_i^\beta(A) C_\beta - \frac{1}{4} g_{\alpha\epsilon\delta} \bar{C}_\alpha \bar{C}_\epsilon f_{\delta\beta\gamma} C_\beta C_\gamma + \mathcal{L}(A). \tag{22.22}$$

Végezetül a (??) azonosság azon tagjai, amelyek nem függnek sem az L és K forrásoktól, sem λ-tól, adják az utolsó egyenletet:

$$D_i^\alpha C_\alpha \frac{\partial \tilde{L}}{\partial A_i} + \frac{1}{2} f_{\alpha\beta\gamma} C_\beta C_\gamma \frac{\partial \tilde{L}}{\partial C_\alpha} = 0. \tag{22.23}$$

A (??), (??) és (??) egyenletek következtében a bal oldalon csak egyetlen tag nem tűnik azonosan el:

$$D_i^\alpha C_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = 0. \tag{22.24}$$

Ez az egyenlet azt jelenti, hogy $\mathcal{L}(A)$ mértékinvariáns.

Összegezve megállapíthatjuk, hogy a renormált S_{ren} hatás hasonló szerkezetű mint a fagráf szintű $S(a, \bar{C}, C, \lambda, K, L)$ hatás, azzal a különbséggel, hogy a renormált hatás még egy további $\mathcal{L}_4(\lambda, \bar{C}, C)$ BRS-invariáns tagot is tartalmaz:

$$\mathcal{L}_4(\lambda, \bar{C}, C) \;=\; g_{\alpha\beta\gamma}\left(-\frac{1}{4}\bar{C}_\alpha \bar{C}_\beta f_{\gamma\delta\epsilon} C_\delta C_\epsilon + \lambda_\alpha \bar{C}_\beta C_\gamma\right). \tag{22.25}$$

Miután a renormált hatás ezen járulékos tag nélkül is kielégíti a $\Delta S_{ren} = 0$ egyenletet, ezért ennek a járuléknak külön is teljesítenie kell a $\Delta\mathcal{L}_4 = 0$ egyenletet. (Mindkét esetben a Δ operátorban az $\mathcal{L}_4$ tag nélküli renormált hatás szerepel. Már korábban megmutattuk, hogy az ilyen egyenlet általános megoldása egy mértékinvariáns tag, meg egy ΔF alakú tag összege. Most könnyű belátni, hogy $\mathcal{L}_4 = \Delta\left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta\gamma}\bar{C}_\alpha \bar{C}_\beta C_\gamma\right)$, vagyis alakja összhangban van az elvárással. Ennek a járulékos tagnak a jelenlétét a tereken végrehajtott kanonikus transzformáció következményének tekinthetjük.

Meg kell jegyezzük, hogy a szellemterekben negyedfokú tag megjelenése következtében a renormált hatás esetében a szellemterekre vonatkozó pályaintegrált nem egy lokális determinánst helyettesítő matematikai konstrukciónak.

22 Mértékfüggetlenség

Azt fogjuk vizsgálni, hogy a mértékelméletben ($m = 0$) a mértékinvariáns $\mathcal{O}$ operátorok korrelációs függvényei hogyan függnek a mértékfeltétel megválasztásától. Ennek érdekében a megfelelő generáló funkcionáloknak a mértékfeltétel infinitezimális δF megváltozására bekövetkező változását keressük. Az $\mathcal{O}$ operátor korrelációs függvényeit úgy tudjuk generálni, hogy a hatást kiegészítjük az $\mathcal{O}B_{\mathcal{O}}$ forrástaggal, és az így módosított hatással definiáljuk a Z generáló funkcionált. A $B_{\mathcal{O}}$ forrás szerinti funkcionál deriválással tudunk $\mathcal{O}$ betétrészeket generálni.

A fenti módon kiegészített hatás nem mértékinvariáns tagja $\Delta_0\left(\bar{C}F\right)$ alakú, amelynek megváltozása $\Delta_0\left(\bar{C}\delta F\right)$. Felhasználva, hogy Δ_0 differenciáloperátor, továbbá hogy $f_{\alpha\alpha\beta} = 0$ és $\partial D^i_\alpha/\partial A_i = 0$, a generáló funkcionál megváltozása:

$$\begin{aligned} \delta Z &= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{C}\mathcal{D}C\mathcal{D}\lambda\Delta_0(\bar{C}\delta F) \\ &= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{C}\mathcal{D}C\mathcal{D}\lambda\bar{C}\delta F\;(\Delta_0 S)\,e^{-S} = 0, \end{aligned} \tag{22.1}$$

ahol az utolsó egyenlőség a BRS-szimmetria következménye.

Ezzel megmutattuk, hogy a mértékinvariáns operátorok csupasz korrelációs függvényei mértékinvariánsak. Létezik tehát olyan renormálási eljárás, amely ezen csupasz korrelációs függvényekből mértékinvariáns renormált korrelációs függvényeket eredményez. A mértékelmélet valamennyi fizikai állítása ilyen korrelációs függvények nyelvén mondható el.

Azt is meg lehet mutatni, hogy az S-mátrix elemei, ha léteznek és megfelelően vannak normálva, akkor mértékfüggetlenek.

V. A KIRÁLIS ANOMÁLIA

Az anomália azzal kapcsolatos, hogy van egy elmélet, amely klasszikus szinten globális folytonos szimmetriával rendelkezik, de nem kvantálható meg úgy, hogy ez a szimmetria ne sérüljön meg. A szóbanforgó globális szimmetriához tartozó áram klasszikus szinten megmaradó, de a kvantált elmélet keretében nem. Erre példa a Dirac-fermionokat tartalmazó mértékelméletben megjelenő királis anomália. (Ebben a részben az egyszerűbb érthetőség kedvéért a Minkowski-térben fogunk dolgozni.)

27 Vektor– és axiálvektoráram

Induljunk ki a zérus tömegű fermionok

$$S_0 = \int d^4x \bar{\psi} \mathrm{i} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \tag{27.1}$$

hatásából, amely $U(1) \otimes U(1)$ globális királis szimmetriával rendelkezik. Keressük meg a megfelelő klasszikus megmaradó áramokat. Alkalmazhatjuk közvetlenül a Noether-tétel levezetésekor nyert kifejezést a megmaradó áramra (ld. Sailer K. Szimmetriák és megmaradási törvények). Egy másik lehetőség, hogy a megfelelő transzformációkat lokálissá téve a hatás megváltozásából olvassuk le a globális szimmetria esetén megmaradó áramokat. Mi most ezt az utat követjük.

Az egyik $U(1)$ csoportot a

$$\psi \to e^{\mathrm{i}\theta} \psi, \qquad \bar{\psi} \to e^{-\mathrm{i}\theta} \bar{\psi} \tag{27.2}$$

transzformációk képezik. Ezeket lokálissá téve kapjuk, hogy

$$\partial_\mu \psi \to e^{\mathrm{i}\theta(x)} \left(\mathrm{i} \partial_\mu \theta + \partial_\mu \right) \psi, \tag{27.3}$$

úgyhogy a hatás megváltozása:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \bar{\psi} \gamma^\mu (-\partial_\mu \theta + \mathrm{i} \partial_\mu) \psi - \int \bar{\psi} \mathrm{i} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ &= \int d^4x \theta(x) \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi). \end{aligned} \tag{27.4}$$

Ha a szimmetria globális, akkor ez a megváltozás zérus, ahonnan leolvashatjuk, hogy a fenti szimmetriához megmaradó vektoráram tartozik:

$$V_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \tag{27.5}$$

és

$$\partial_\mu V^\mu = 0. \tag{27.6}$$

A másik $U(1)$ csoportot a

$$\psi \to e^{\mathrm{i}\gamma_5\theta}\psi, \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{\mathrm{i}\gamma_5\theta} \tag{27.7}$$

ún. valódi királis transzformációk alkotják. Tegyük ezeket megint lokálissá és számoljuk a hatás megváltozását:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\bar{\psi}e^{\mathrm{i}\gamma_5\theta(x)}e^{-\mathrm{i}\gamma_5\theta(x)}\gamma^\mu\left(-\gamma_5\partial_\mu\theta + \mathrm{i}\partial_\mu\right)\psi \\ &= \int d^4x\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi. \end{aligned} \tag{27.8}$$

Innen leolvassuk, hogy a valódi királis transzformációkhoz axiálvektoráram tartozik, amely a klasszikus elméletben megmarad:

$$A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \tag{27.9}$$

és

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{27.10}$$

A fentiek alapján azt is írhatjuk, hogy a tömeg nélküli szabad fermionok elmélete $U_V(1)\otimes U_A(1)$ globális folytonos szimmetriával rendelkezik. Ez nem meglepő hiszen a tömeg nélküli elméletben a bal- és a jobbkezes fermionok egymástól függetlenek. Mind a bal– mind a jobbkezes fermionok transzformálhatók függetlenül egy $U_L(1)$ ill. egy $U_R(1)$ csoport transzformációival. Ezek generátorai rendre

$$\frac{1+\gamma_5}{2}, \qquad \text{és} \qquad \frac{1-\gamma_5}{2}, \tag{27.11}$$

amelyekből lineáris kombinációval kapjuk az $U_V(1)$ és az $U_A(1)$ csoportok 1 és γ_5 generátorait.

Amennyiben a fermionok nem zérus tömegűek, akkor a

$$-\int d^4xm\bar{\psi}\psi \tag{27.12}$$

tömegtag explicite sérti a valódi királis transzformációkkal szembeni szimmetriát. Ekkor az axiálvektoráram nem marad meg. A hatás megváltozása valódi királis transzformáció esetén:

$$\delta S = \int d^4x\theta(x)\partial_\mu A^\mu - \int d^4x\theta(x)2m\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_5\psi. \tag{27.13}$$

Innen leolvashatjuk, hogy az axiálvektoráram nem marad meg:

$$\partial_\mu A^\mu = 2m\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_5\psi. \tag{27.14}$$

Ha az m tömeg kicsi, akkor a jobb oldal kicsi és ilyenkor az axiálvektoráram részleges megmaradásáról (PCAC – partial conservation of the axialvector current) szokás beszélni. (Ez a helyzet a hadronok gyenge axiálvektorárama esetén, csak akkor a szimmetria nem ábeli.)

A fentiek még tovább általánosíthatók arra az esetre, amikor a hatás a globális $U(1)\otimes U(1)$ szimmetrián túl még $SU(N)$ mértékszimmetriával is rendelkezik. Jelölje $a_\mu = a^a_\mu t^a$ a megfelelő mértékteret, t^a a mértékcsoport generátorait. Ekkor a hatás

$$S \;=\; \int d^4x\bar{\psi}\left[\mathrm{i}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \mathrm{i}g a^a_\mu t^a\right) - m\right]\psi \tag{27.15}$$

alakot ölt. Ilyen, további globális királis szimmetriával is rendelkező mértékelméletben jelenik meg az ún. királis anomália. Klasszikus szinten azonban semmi különös nem történik. Változatlanul érvényesek a globális szimmetriákhoz tartozó áramok (**??**) és (**??**) definíciói. A vektoráram most is megmarad, az axiálvektoráram pedig részlegesen marad meg, vis. a (**??**) és a (**??**) egyenletek most is érvényesek. (Figyelem! Az áramok, amelyekről szó van, nem a mértékszimmetriához tartoznak.)

A kvantumszíndinamikában hasonló a helyzet. A hatás $SU_c(3)$ színszimmetriával rendelkezik. Ez lokális mértékszimmetria. Ugyanakkor, ha különböző flavourű kvarkokat, pl. u és d kvarkokat engedünk meg, akkor további globális királis szimmetria áll fenn, pl. $SU(2)\otimes SU(2)\otimes U(1)\otimes U(1)$, amelyet a tömegtagok explicite sértenek. Itt az egyik $U(1)$ csoport a bariontöltéssel kapcsolatos, a másik $U(1)$ szimmetriához tartozó axiális bariontöltés megmaradását nem figyelték meg. Ez a QCD–ben az ún. $U(1)$ *probléma*, amellyel azonban most nem kívánunk foglalkozni. Amire összpontosítjuk a figyelmünket, az az elmélet valamilyen értelmű inkonzisztenciája, ami a kvantálás, a renormált kvantumtérelmélet megfogalmazása során úgy jelentkezik, hogy nem tudjuk az elméletet a globális szimmetriák teljes megtartásával renormálni. Ezt a tényt nevezzük az elmélet anomálıájának.

22 Hogyan jelentkezik az anomália?

Nézzük didaktikai okokból egy egyszerű példán, hogyan is jelentkezik az anomália. Legyen kiindulási alapunk a (**??**) hatással megfogalmazott mértékelmélet, amelyben a mértékszimmetria melletti globális $U(1) \otimes U(1)$ királis szimmetriát a tömegtag explicite sérti.

Nézzük először az $m = 0$ esetet, amikor nincsen a királis szimmetriát explicite sértő tag a hatásban. Az anomália most azt jelenti, hogy az elméletet nem lehet úgy kvantálni (renormálni), hogy a globális folytonos szimmetriák legalább részben ne sérüljenek. Mivel a sérülő globális szimmetria ábeli, ezért *ábeli anomáliáról* beszélünk. Hogyan vesszük észre, hogy az elmélet nem renormálható a szimmetriák megőrzésével? A globális folytonos $U(1) \otimes U(1)$ szimmetriához Ward-Takahashi-azonosságok tartoznak. Ezeket majd alább levezetjük a szokásos módon, a levezetés során feltételezve az integrálási mérték invarianciáját királis transzformációk során. Azt fogjuk tapasztalni, hogy az ilyen módon kapott Ward–Takahashi–azonosságok nem elégülnek ki a renormált mértékelméletben. Helyettük olyan azonosságok teljesülnek, amelyek közül bizonyosakban egy az eredeti Ward-Takahashi–azonosságokban nem szereplő ún. *anomália- tag* jelenik meg. Az anomália-tag megjelenése a Ward-Takahashi-azonosságok némelyikében azt mutatja, hogy a globális királis szimmetriák egy része sérül a mértékelmélet kvantálása során.

Ha az elmélet a globális királis szimmetriát explicite sértő tömegtaggal is kiegészül, akkor a szokásos levezetés még mindig eredményez Ward-Takahashi-azonosságokat, amelyek most egy tömegfüggő taggal is kiegészülhetnek. Ez általában így van minden globális folytonos szimmetria explicit sértése esetén, mint azt a ,,Szimmetriák és sérülésük a kvantumtérelméletben" c. jegyzetben megmutattuk. Az anomália most ismét úgy jelentkezik, hogy a szokásos levezetéssel (az integrálási mérték invarianciájának feltételezésével) kapott Ward-Takahashi-azonosságok nem elégülnek ki a kvantált mértékelméletben. Most is anomália-tag jelenik meg a Ward-Takahashi-azonosságokban. Az anomália tag pontosan ugyanaz, mint zérus fermion tömeg esetén. Az anomália független a tömegtől.

Alább részletes számolással megmutatjuk, hogy hogyan néznének ki a Ward-Takahashi-azonosságok és mi az az anomália-tag, amivel módosulnak. Végül meg fogjuk mutatni, hogy tulajdonképpen akkor követtünk el hibát a Ward-Takahashi-azonosságok levezetésénél, amikor feltéleleztük a fermionikus pályaintegrál invarianciáját a globális királis transzformációk során. Ha gondosan figyelembe vesszük az integrálási mérték transzformációját, akkor eleve az anomális Ward-Takahashi-azonosságokat kapjuk meg. Ezzel csak azt tesszük nyilvánvalóvá, hogy a klasszikus hatás globális királis szimmetriáját már a kvantumtérelmélet generáló funkcionáljának pályaintegrál alakjában történő felírásakor megsértettük.

22 A globális $U(1) \otimes U(1)$ szimmetriához tartozó Ward-Takahashi-azonosságok

A (**??**) hatásból kiindulva keressük meg a szóbanforgó mértékelmélet globális királis szimmetriához tartozó Ward-Takahashi-azonosságait. Az elméletben fontos szerepet fognak játszani azok a Green-függvények, amelyek vektor- (V_μ), axiálvektoráram (A_μ), valamint skalár- (S) és pseudoskalársűrűség (P) operátorbetétrészeket tartalmaznak. Képezzük az ilyen Green-függvények generáló funkcionálját:

$$\begin{aligned} & Z[j,\bar\zeta,\zeta;K,L,\pi,\sigma] \\ &= \int \mathcal{D}a\mathcal{D}\bar\zeta\mathcal{D}\zeta \exp\left\{-\mathrm{i}S[a,\bar\psi,\psi] + \mathrm{i}\int d^4x(V_\mu K_\mu + A_\mu L_\mu + S\sigma + P\pi + j^b_\mu a^b_\mu + \bar\zeta\psi + \bar\psi\zeta)\right\}, \end{aligned} \tag{22.1}$$

ahol definíció szerint:

$$\begin{aligned} V^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi, \qquad & A^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi, \\ S = \bar\psi\psi, \qquad & P = \bar\psi\gamma_5\psi, \end{aligned} \tag{22.2}$$

és K_μ, L_μ, σ, π rendre a nekik megfelelő külső források, míg j^b_μ a mértéktér és $\bar\zeta$, ζ a fermiontér külső forrásai. (Megjegyzem, hogy a QCD-ben csak azok az amplitudók megfigyelhetők a bezárás miatt, amelyeknek nincsenek kvark vagy gluon lábaik, hanem csak hadronikus külső áramokhoz csatolódnak. Ez is mutatja a vizsgált genberáló funkcionál rendkívüli fontosságát.)

Vizsgáljuk a (**??**) generáló funkcionál megváltozását infinitezimális valódi királis transzformáció,

$$\psi \to (1 + \mathrm{i}\gamma_5\theta)\psi, \tag{22.3}$$

során:

$$\begin{aligned} \delta Z &= \int d^4x \int \mathcal{D}a\mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\theta\mathrm{i}(-\partial_\mu A^\mu + m\bar\psi 2\mathrm{i}\gamma_5\psi + 2\mathrm{i}P\sigma - 2\mathrm{i}S\pi)\cdot \\ &\quad \cdot\exp\left\{-\mathrm{i}S[a,\bar\psi,\psi] + \mathrm{i}\int d^4x(V_\mu K_\mu + A_\mu L_\mu + S\sigma + P\pi + j^b_\mu a^b_\mu + \bar\zeta\psi + \bar\psi\zeta)\right\}. \end{aligned} \tag{22.4}$$

Felhasználtuk, hogy az áramok megváltozásai rendre:

$$\begin{aligned} \delta V_\mu = 0, \qquad & \delta A_\mu = 0, \\ \delta S = \theta 2\mathrm{i}P, \qquad & \delta P = -\theta 2\mathrm{i}S. \end{aligned} \tag{22.5}$$

Ha megköveteljük, hogy a kvantumtérelméletnek a globális királis transzformációk szimmetriái legyenek, akkor meg kell követeljük, hogy a generáló funkcionál invariáns legyen velük szemben. Ez az alábbi azonosságot eredményezi:

$$\left(\partial_\mu \frac{\delta}{\delta L_\mu(x)} - 2m\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\pi(x)} - 2\mathrm{i}\sigma(x)\frac{\delta}{\delta\pi(x)} + 2\mathrm{i}\pi(x)\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\right) Z = 0. \tag{22.6}$$

Osszuk az egyenlet mindkét oldalát Z–vel, akkor az árambetétrészeket tartalmazó összefüggő Green-függvények generáló funkcionáljára kapunk hasonló összefüggést:

$$\left(\partial_\mu \frac{\delta}{\delta L_\mu(x)} - 2m\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\pi(x)} - 2\mathrm{i}\sigma(x)\frac{\delta}{\delta\pi(x)} + 2\mathrm{i}\pi(x)\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\right) W = 0. \tag{22.7}$$

Hajtsunk végre Legendre–transzformációt a $j_m u^b$, $\bar{\zeta}$ és ζ változók szerint. Ekkor megkapjuk az áram betétrészekkel rendelkező 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljára vonatkozó Ward–Takahashi–azonosságokat:.

$$\left(\partial_\mu \frac{\delta}{\delta L_\mu(x)} - 2m\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\pi(x)} - 2\mathrm{i}\sigma(x)\frac{\delta}{\delta\pi(x)} + 2\mathrm{i}\pi(x)\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\right) \Gamma[a, \bar{\psi}, \psi; K, L, \pi, \sigma) = 0 \tag{22.8}$$

Képezzük mindkét oldal $\delta^2/\delta K_\nu(y)\delta K_\rho(z)$ funkcionál deriváltját és vegyük az eredményt eltűnő külső források esetén:

$$\partial^x_\mu \frac{\delta^3\Gamma}{\delta L_\mu(x)\delta K_\nu(y)\delta K_\rho(z)}\bigg|_0 \;=\; 2mi\,\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\pi(x)\delta K_\nu(y)\delta K_\rho(z)}\bigg|_0. \tag{22.9}$$

Ebből a gluon és fermion lábakat nem tartalmazó (AVV) és (πVV) vertexfüggvényekre az alábbi Ward–Takahashi–azonosság adódik:

$$\partial^x_\mu \Gamma^5_{\mu\nu\rho}(x; y, z) \;=\; 2m\mathrm{i}\Gamma^5_{\nu\rho}(x; y, z). \tag{22.10}$$

Az azonosságot diagramm nyelven, a perturbációszámítás legalacsonyabb rendjében a következőképpen ábrázolhatjuk:

Képezzük az egyenlet mindkét oldalának Fourier–transzformáltját:

$$\begin{aligned}
\text{baloldal} &= \int d^x d^4y d^4z e^{\mathrm{i}(py+qz+rx)}\partial^x_\mu \Gamma^5_{\mu\nu\rho}(x; y, z) \\
&= \mathrm{i}r \int d^4x d^4y d^4z \Gamma^5_{\mu\nu\rho}(0; y-x, z-x) e^{-\mathrm{i}(py-px+qz-qx+rx+px+qx)} \\
&= \mathrm{i}r(2\pi)^4\delta^{(4)}(r+p+q)\tilde{\Gamma}^5_{\mu\nu\rho}(p, q);
\end{aligned} \tag{22.11}$$

$$\begin{aligned}\text{jobboldal} &= 2m\mathrm{i}\int d^x d^4y d^4z e^{\mathrm{i}(py+qz+rx)}\Gamma^5_{\nu\rho}(x;y,z) \\ &= 2m\mathrm{i}(2\pi)^4\delta^{(4)}(r+p+q)\tilde{\Gamma}^5_{\nu\rho}(p,q). \end{aligned} \tag{22.12}$$

Impulzus–reprezentációban tehát a valódi királis szimmetriához tartozó Ward-Takahashi-azonosságok a következő alakúak:

$$-(p+q)^\mu\tilde{\Gamma}^5_{\mu\nu\rho}(p,q) = 2m\tilde{\Gamma}^5_{\nu\rho}(p,q). \tag{22.13}$$

Vizsgáljuk most a (**??**) generáló funkcionál megváltozását a $\psi \to (1+\mathrm{i}\theta)\psi$ infinitezimális $U(1)$ transzformációk során. Most

$$\delta V_\mu = \delta A_\mu = \delta P = \delta S = 0, \tag{22.14}$$

úgyhogy

$$\begin{aligned}\delta Z &= \int d^4x \int \mathcal{D}a\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi(-\theta\partial_\mu V^\mu)\cdot \\ &\cdot\exp\left\{-\mathrm{i}S[a,\bar{\psi},\psi]+\mathrm{i}\int d^4x(V^\mu K_\mu + A^\mu L_\mu + S\sigma + P\pi + j^{\mu b}a^b_\mu + \bar{\zeta}\psi + \bar{\psi}\zeta)\right\}\end{aligned} \tag{22.15}$$

adódik. Innen az 1PI vertexfüggvények generáló funkcionáljára a következő azonosságot kapjuk:

$$\partial_\rho\frac{\delta}{\delta K_\rho(z)}\Gamma[a,\bar{\psi},\psi;K,L,\pi,\sigma] = 0. \tag{22.16}$$

Képezzük mindkét oldal $\delta^2/\delta L_\mu(x)\delta K_\nu(y)$ funkcionálderiváltját és vegyük az eredményt eltűnő külső források esetén:

$$\partial^{z\,\rho}\Gamma^5_{\mu\nu\rho}(x;y,z) = \partial^{y\,\rho}\Gamma^5_{\mu\rho\nu}(x;y,z) = 0. \tag{22.17}$$

Áttérve impulzusreprezentációra, az alábbi Ward–Takahashi–azonosságokat kapjuk:

$$q^\rho\tilde{\Gamma}^5_{\mu\rho\nu}(q,p) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \begin{aligned} q^\rho\tilde{\Gamma}^5_{\mu\nu\rho}(p,q) = 0; \\ p^\rho\tilde{\Gamma}^5_{\mu\rho\nu}(p,q) = 0. \end{aligned} \tag{22.18}$$

Vegyük észre, hogy a globális $U(1)\otimes U(1)$ szimmetriához tartozó fenti Ward–Takahashi–azonosságokat azzal a feltevéssel kaptuk, hogy a pályaintegrálban az integrálási mérték ezen transzformációkkal szemben invariáns.

22 A Ward-Takahashi-azonosságok anomáliatagja

Ebben a fejezetben az AVV 1PI vertexfüggvények 1–hurokrendben történő explicit kiszámítása révén megmutatjuk, hogy a Ward-Takahashi-azonosságok az előző fejezetben levezetett alakban nem teljesülnek. Kiszámoljuk az eltérést okozó anomália tagot.

Az ábrán látható diagrammnak az alábbi kifejezés felel meg 1–hurok rendben:

$$\tilde{\Gamma}^5_{\mu\nu\delta}(p,q) \quad = \quad F_{\mu\nu\delta}(p,q) + F_{\mu\delta\nu}(q,p), \tag{22.1}$$

$$F_{\mu\nu\delta}(p,q) \quad = \quad -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{\mathrm{i}}{\not{k}+\not{q}-m}\gamma_\nu\frac{\mathrm{i}}{\not{k}-m}\gamma_\delta\frac{\mathrm{i}}{\not{k}-\not{p}-m}\gamma_\mu\gamma_5\right]. \tag{22.2}$$

Mivel $F_{\mu\nu\delta}(p,q)$ a két vektoráram betétrész felcserélésével szemben szimmetrikus (amiről a spúr átrendezésével közvetlenül is meggyőződhetünk), azaz $F_{\mu\nu\delta}(p,q) = F_{\mu\delta\nu}(q,p)$, azért:

$$\tilde{\Gamma}^5_{\mu\nu\delta}(p,q;m) \quad = \quad 2F_{\mu\nu\delta}(p,q). \tag{22.3}$$

A későbbiek céljából a vertexfüggvény argumentumában feltüntettük a fermiontömeget, amelytől mint paramétertől függ.

Az $F_{\mu\nu\delta}(p,q)$ integrál, mint az a hatványok leszámlálásának módszerével megállapítható, látszólag lineárisan UV-divergens:

$$F_{\mu\nu\delta}(p,q) \quad \sim \quad \int^\Lambda \frac{k^3dk}{k^3} \sim \Lambda. \tag{22.4}$$

Ennél kicsit jobb a helyzet, mert az a tag, amelyik aszimptótikusan független p–től és q–tól, el kell tűnjön. Mivel $\Gamma^5_{\mu\nu\delta}(p,q)$ μ-ben axiálvektor, ν-ben és δ-ban vektor, valamint a $(\nu, p) \to (\delta, q)$ felcseréléssel szemben szimmetrikus, ezért az általános alakja:

$$\begin{aligned}
\Gamma^5 \mu\nu\delta(p,q) &= A_1(p,q)\epsilon_{\mu\nu\delta\alpha}(p^\alpha - q^\alpha) \\
&\quad + B_1(p,q)(p_\nu \epsilon_{\mu\delta\alpha\beta} - q_\delta \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta})p^\alpha q^\beta \\
&\quad + B_2(p,q)(q_\nu \epsilon_{\mu\delta\alpha\beta} - p_\delta \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta})p^\alpha q^\beta, \qquad (22.5)
\end{aligned}$$

ahol $A_1(p,q)$, $B_1(p,q)$ és $B_2(p,q)$ skalárfüggvények. A fenti alakot $F_{\mu\nu\delta}$ explicit kifejezésével összehasonlítva, látjuk, hogy

$$A_1(p,q)p^\alpha \sim p^\alpha \int k^3 dk \frac{k^2}{k^6} \sim \int^\Lambda \frac{dk}{k} \sim \ln\Lambda, \qquad (22.6)$$

vis. A_1 logaritmikusan divergens, míg a B_1 és B_2 konvergens (az integrandus számlálójában még alacsonyabb k hatványok szerepelnek). Vegyük észre továbbá, hogy a logaritmikusan divergens tag független a tömegtől.

Az elmélet regularizálására egy lehetőség a Pauli-Villars-féle eljárás. Vezessük be az $M \to \infty$ tömegparamétert, és definiáljuk a regularizált AVV vertexfüggvényt az alábbi módon:

$$\tilde\Gamma^5_{\mu\nu\delta}(p,q;m,M) = \tilde\Gamma^5_{\mu\nu\delta}(p,q;m) - \tilde\Gamma^5_{\mu\nu\delta}(p,q;M). \qquad (22.7)$$

Ezzel a tömegtől független divergens járulékot kiejtettük.

Megmutatjuk, hogy a regularizált 1PI AVV vertexfüggvényre az alábbi Ward-Takahashi-azonosságok érvényesek:

$$\begin{aligned}
-(p+q)^\mu \tilde\Gamma^5_{\mu\nu\delta}(p,q;m,M) &= 2m\tilde\Gamma^5_{\nu\delta}(p,q;m) - 2M\tilde\Gamma^5_{\nu\delta}(p,q;M), &(22.8)\\
p^\delta \tilde\Gamma^5_{\mu\nu\delta}(p,q;m,M) &= q^\nu \tilde\Gamma^5_{\mu\nu\delta}(p,q;m,M) = 0. &(22.9)
\end{aligned}$$

Kezdjük el a (**??**) azonosság bal oldalát azonosan átalakítani. A $(p+q)^\mu$ szorzót bevisszük a spur alá, majd a

$$\begin{aligned}
\not p + \not q &= (\not q + \not k - m) - (\not k - \not p - m), \\
\frac{1}{\not k - \not p - m}(\not q + \not k - m)\gamma_5 &= \frac{1}{\not k - \not p - m}\gamma_5(-\not q - \not k - m) \\
&= -\frac{1}{\not k - \not p - m}\gamma_5(\not q + \not k - m + 2m), \qquad (22.10)
\end{aligned}$$

algebrai átalakítást használjuk. Ekkor a (**??**) egyenlet baloldala:

$$\begin{aligned}
&-2\cdot(-1)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{\mathrm{i}}{\not k + \not q - m}\gamma_\nu \frac{\mathrm{i}}{\not k - m}\gamma_\delta \frac{\mathrm{i}}{\not k - \not p - m}(\not p + \not q)\gamma_\mu\gamma_5 - (m \leftrightarrow M)\right] \\
&= 2\mathrm{i}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\not k + \not q - m}\gamma_\nu \frac{1}{\not k - m}\gamma_\delta\gamma_5 - (m \leftrightarrow M)\right] \\
&\quad + 2\mathrm{i}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\nu \frac{1}{\not k - m}\gamma_\delta \frac{1}{\not k - \not p - m}\gamma_5 - (m \leftrightarrow M)\right] \\
&\quad + 2m\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\not k + \not q - m}\gamma_\nu \frac{1}{\not k - m}\gamma_\delta \frac{1}{\not k - \not p - m}\gamma_5\right] - (m \leftrightarrow M).
\end{aligned}$$

(22.11)

A két első tagban a spúrok azonosan eltűnnek, csak a harmadik tag ad nem zérus járulékot és ez éppen a keresett

$$2m\tilde{\Gamma}^5_{\nu\delta}(p,q;m) - 2M\tilde{\Gamma}^5_{\nu\delta}(p,q;M) \tag{22.12}$$

kifejezés, ahol

$$\tilde{\Gamma}^5_{\nu\delta}(p,q;M) = \mathrm{i}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\not k + \not q - M}\gamma_\nu \frac{1}{\not k - M}\gamma_\delta \frac{1}{\not k - \not p - M}\gamma_5\right]. \tag{22.13}$$

A (??) azonosság hasonló számolás eredményeként adódik.

Az UV–regulátor eltávolítása az $M \to infty$ határérték képzésével történik. A (??) azonosságok ekkor átmennek a szokásos anomália mentes azonosságokba. Ugyanakkor a (??) azonosság jobb oldalán a második tag határértéke nem zérus, és ennek köszönhetően megjelenik az anomáliatag.

Írjuk át az $M\tilde{\Gamma}^5_{\nu\delta}(p,q;M)$ kifejezést az alábbi alakba:

$$M\mathrm{i}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{\not k + \not q + M}{(k+q)^2 - M^2}\gamma_\nu \frac{\not k + M}{k^2 - M^2}\gamma_\delta \frac{\not k - \not p + M}{(k-p)^2 - M^2}\gamma_5\right]. \tag{22.14}$$

Az itt szereplő spúrt a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(\not k + \not q + M)\gamma^\nu(\not k + M)\gamma^\delta(\not k - \not p + M)\gamma_5 \\
&= \mathrm{Tr}\left[(k_\alpha + q_\alpha)\gamma^\alpha\gamma^\nu + M\gamma^\nu\right](k_\beta\gamma^\beta + M)\gamma^\delta(\not k - \not p + M)\gamma_5 \\
&= \mathrm{Tr}\left[(k_\alpha + q_\alpha)\gamma^\alpha\gamma^\nu k_\beta\gamma^\beta\gamma^\delta + (k_\alpha + q_\alpha)\gamma^\alpha\gamma^\nu M\gamma^\delta \right.\\
&\quad \left. + M\gamma^\nu k_\beta\gamma^\beta\gamma^\delta + M^2\gamma^\nu\gamma^\delta\right](\not k - \not p + M)\gamma_5.
\end{aligned} \tag{22.15}$$

Használjuk fel a

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!}\mathrm{i}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\gamma^{\alpha'}\gamma^{\beta'}\gamma^{\gamma'}\gamma^{\delta'}, \tag{22.16}$$

és az

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\delta\gamma_5) &= 4\mathrm{i}\epsilon^{\alpha\nu\beta\delta}, \\
\mathrm{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\delta\gamma^\gamma\gamma_5) &= 4\mathrm{i}\epsilon^{\alpha\nu\delta\gamma}, \\
\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\delta\gamma^\gamma\gamma_5) &= 4\mathrm{i}\epsilon^{\nu\beta\delta\gamma}, \\
\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\gamma^\delta\gamma_5) &= 0
\end{aligned} \tag{22.17}$$

azonosságokat (utóbbiakat (??) segítségével lehet belátni):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\frac{\not k + \not q + M}{(k+q)^2 - M^2}\gamma^\nu \frac{\not k + M}{k^2 - M^2}\gamma^\delta \frac{\not k - \not p + M}{(k-p)^2 - M^2}\gamma_5\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[M(k_\alpha + q_\alpha)k_\beta\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\delta\gamma_5\right. \\
&\quad + M(k_\alpha + q_\alpha)(k_\gamma - p_\gamma)\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\delta\gamma^\gamma\gamma_5 \\
&\quad + Mk_\beta(k_\gamma - p_\gamma)\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\delta\gamma^\gamma\gamma_5 \\
&\quad \left. + M^3\gamma^\nu\gamma^\delta\gamma_5\right] \\
&= 4\mathrm{i}M\left[\epsilon^{\alpha\nu\beta\delta}(k_\alpha + q_\alpha)k_\beta + \epsilon^{\alpha\nu\delta\beta}(k_\alpha + q_\alpha)(k_\beta - p_\beta)\right. \\
&\quad \left. \epsilon^{\nu\alpha\delta\beta}k_\alpha(k_\beta - p_\beta)\right] \\
&= 4\mathrm{i}M\epsilon^{\nu\delta\beta\alpha}\left[-(k_\alpha + q_\alpha)k_\beta + (k_\alpha + q_\alpha)(k_\beta - p_\beta) + k_\alpha(k_\beta - p_\beta)\right] \\
&= 4\mathrm{i}M\epsilon^{\nu\delta\beta\alpha}(-q_\alpha p_\beta - 2k_\alpha p_\beta).
\end{aligned} \tag{22.18}$$

Ezt az eredményt behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^5_{\nu\delta}(p,q;M) &= 2\mathrm{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-4\mathrm{i}M\epsilon^{\nu\delta\beta\alpha}q_\alpha p_\beta}{[(k+q)^2-M^2]\,[k^2-M^2]\,[(k-p)^2-M^2]} \\ &= 2\cdot 4\mathrm{i}M\epsilon^{\nu\delta\beta\alpha}p_\beta q_\alpha F(q,p;M),\end{aligned} \tag{22.19}$$

ahol

$$F(q,p;M) = -\mathrm{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[a][b][c]}, \tag{22.20}$$

és

$$[a]=(k+q)^2-M^2, \qquad [b]=k^2-M^2, \qquad [c]=(k-p)^2-M^2. \tag{22.21}$$

Az integrál kiszámítása a szokásos Feynman-féle parametrizációval történhet:

$$F(q,p;M) = -\mathrm{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}2\int_0^1 du\int_0^{1-u}dw\frac{1}{[aw+b(1-u-w)+cu]^3}. \tag{22.22}$$

Az integrandus nevezőjében az alábbi kifejezés harmadik hatványa áll:

$$(k+qw-pu)^2-q^2w^2-p^2u^2+2qpwu+q^2w+p^2u-M^2. \tag{22.23}$$

Végezzük el a $k\to(k+qw-pu)$ változócserét az integrálban. Ekkor az impulzus szerinti integrálást könnyen el tudjuk végezni:

$$\begin{aligned}F(q,p;M) &= -2\mathrm{i}\int_0^1 du\int_0^{1-u}dw\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[k^2+2qpwu+q^2w(1-w)+p^2u(1-u)-M^2]^3} \\ &= -\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 du\int_0^{1-u}dw[2qpwu+q^2w(1-w)+p^2u(1-u)-M^2]^{-1}.\end{aligned} \tag{22.24}$$

Ezzel explicit módon meghatároztuk a (**??**) azonosság jobb oldalán álló tagokat. Az impulzus szerinti integrálás elvégzése után képezhetjük most az $M\to\infty$ határértéket:

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty}2M\tilde{\Gamma}^5_{\nu\delta}(p,q;M) &= -\lim_{M\to\infty}2\cdot 8\mathrm{i}M^2\epsilon^{\nu\delta\beta\alpha}p_\beta q_\alpha\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 du\int_0^{1-u}\frac{dw}{-M^2} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\epsilon^{\nu\delta\beta\alpha}p_\beta q_\alpha\int_0^1 du(1-u) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi^2}\epsilon^{\nu\delta\beta\alpha}p_\beta q_\alpha.\end{aligned} \tag{22.25}$$

A fentiek alapján az anomális Ward–Takahashi–azonosságok az alábbi alakúak:

$$-(p+q)^\mu\tilde{\Gamma}^5_{\mu\nu\delta}(p,q;m) = 2m\tilde{\Gamma}^5_{\nu\delta}(p,q;m)-\frac{\mathrm{i}}{2\pi^2}\epsilon^{\nu\delta\beta\alpha}p_\beta q_\alpha, \tag{22.26}$$

$$p^\delta\tilde{\Gamma}^5_{\mu\nu\delta}(p,q;m) = q^\nu\tilde{\Gamma}^5_{\mu\nu\delta}(p,q;m)=0. \tag{22.27}$$

Megjegyezzük, hogy lehetséges lenne olyan módon regularizálni az elméletet, hogy az anomália tag ne a (**??**) azonosságban jelenjen meg, hanem a másik két azonosság valamelyikében. Egy konkrét modellnek a természetre való alkalmazása az, ami eldönti, hogy az anomáliatagot hová kell tegyük a renormálás során. Az anomáliának uis. fontos fizikai következményei vannak. Mi azt a megoldást választottuk fentebb, amikor a vektoráram megmarad. Az anomália fontos fizikai jelenségeket magyaráz meg: (i) a semleges pionok 2-fotonos bomlását; (ii) a kvantumszíndinamikában az axiális $U_A(1)$ szimmetria spontá sérüléséhez tartozó Goldstone-bozonok hiányát. Ugyancsak meg lehet mutatni, hogy az elektrogyenge kölcsönhatás Standard Modellje anomáliamentes: a kvarkok és a leptonok okozta anomália éppen kiejti egymást külön–külön a fermionok minden generációjában, ha a kvarkok 3 színállapotban létezhetnek.

22 Anomália és pályaintegrál

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a pályaintegrálos kvantálás nyelvén az anomália oka az, hogy a fermionterekre vett pályaintegrálban az integrálási mérték nem invariáns a királis transzformációkkal szemben. A Ward-Takahashi-azonosságok korábbi naív levezetésében ezt mindig feltettük. Ha a pályaintegrálban az integrálási mérték változását is figyelembe vesszük királis transzformáció során, akkor a generáló funkcionál invarianciájának megköveteléséből kapott Ward-Takahashi-azonosság éppen a már korábban megtalált anomáliataggal módosul.

Tegyük fel, hogy egy G mértékszimmetriával rendelkező elmélettel van dolgunk, amely egy további királis $U(1)$ szimmetriával rendelkezik. Jelölje $a_\mu^a(x)$ a mértékteret. A Green–függvények generáló funkcionáljában szerepel a

$$Z[a] \quad = \quad \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-\mathrm{i}\int d^4x\bar{\psi}\not{D}\psi} \tag{22.1}$$

pályaintegrál. Vizsgáljuk ebben az integrálási mérték transzformációs tulajdonságait királis $U(1)$ transzformáció során:

$$\begin{aligned} \psi(x) \quad &\rightarrow \quad \psi'(x) = (1 + \mathrm{i}\theta\gamma_5)\psi(x); \\ \bar{\psi})x) \quad &\rightarrow \quad \bar{\psi}'(x) = (1 + \mathrm{i}\theta(x)\gamma_5). \end{aligned} \tag{22.2}$$

Mint tudjuk a királis szimmetriához tartozó axiálvektor áram:

$$j_\mu^5(x) \quad = \quad \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x). \tag{22.3}$$

Azt is tudjuk, hogy ez az áram megmaradó lenne, ha nem lenne anomália.

Vezessük be az integrálási mérték transzformációjának vizsgálatához az i $\not{D}$ Dirac-operátor sajátfüggvényeit:

$$\mathrm{i}\not{D}\varphi_n(x) \quad = \quad \lambda_n\varphi_n(x). \tag{22.4}$$

Fejtsük ki a fermiontereket ezen sajátfüggvények szerint:

$$\psi(x) = \sum_n a_n\varphi_n(x), \qquad \bar{\psi}(x) = \sum_n \varphi_n^\dagger(x)\bar{b}_n. \tag{22.5}$$

Ekkor az integrálási mérték átírható:

$$\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \quad = \quad \prod_n da_n \prod_m d\bar{b}_m. \tag{22.6}$$

Az integrálási mérték transzformációját Fujikawa nyomán az alábbi módon vizsgáljuk meg. A fermiontér királis transzformáció során

$$\psi'(x) \quad = \quad \sum_n a_n'\varphi_n(x) = \sum_n a_n e^{\mathrm{i}\theta(x)\gamma_5}\varphi_n(x) \tag{22.7}$$

alakra transzformálódik. Ez felfogható úgy mint a kifejtési együtthatók $a_n \to a'_n$ transzformációja:

$$
\begin{aligned}
a'_m &= \sum_n \int d^4x \varphi^\dagger(x) a_n e^{\mathrm{i}\theta(x)\gamma_5} \varphi_n(x) \\
&\equiv \sum_n C_{mn} a_n,
\end{aligned} \tag{22.8}
$$

ahol a transzformáció mátrixa:

$$
Q_{mn} = \int d^4 \varphi_m^\dagger(x) e^{\mathrm{i}\theta(x)\gamma_5} \varphi_n(x). \tag{22.9}
$$

Következésképpen:

$$
\prod_m da'_m = \mathrm{Det}^{-1} Q \cdot \prod_n da_n. \tag{22.10}
$$

Másrészről a determinánst exponencializálhatjuk a szokásos módon:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Det}Q &= e^{\mathrm{Tr}\ln Q} = e^{\mathrm{i}\mathrm{Tr}\theta(x)\gamma_5} \\
&= \exp\left\{ \mathrm{i} \sum_n \int d^4x \theta(x) \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 \varphi_n(x) \right\}.
\end{aligned} \tag{22.11}
$$

Végül tehát a transzformált integrálási mérték:

$$
\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left\{ -2\mathrm{i} \sum_n \int d^4x \theta(x) \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 \varphi_n(x) \right\}. \tag{22.12}
$$

A generáló funkcionál infinitezimális királis transzformáció során bekövetkező megváltozása tehát:

$$
\begin{aligned}
\delta Z[a] &= \int d^4x \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left(-\theta(x) \partial_\mu j_5^\mu(x) - 2\mathrm{i}\theta(x) \sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 \varphi_n(x) \right) \cdot \\
&\cdot \exp\left\{ -\mathrm{i} \int d^4x \bar{\psi}(x) \not{D} \psi(x) \right\}.
\end{aligned} \tag{22.13}
$$

Ez a kifejezés még formális, mert a Dirac-operátor sajátfüggvényeire való felösszegzés divergens eredményre vezet. Ki lehet azonban olyan regularizációt találni, amely sem a mértékszimmetriát, sem a globális királis szimmetriát nem sérti.

- Az integrál'asi m'ert'ek kir'alis transzform'aci'o sor'an bekövetkezett megváltozását megadó fenti kifejezés mértékinvariáns. Ez abból következik, hogy a $\not{D}$ kovariáns derivált mértékinvariáns és ezért $\not{D}$ mértéktranszformáltjának sajátfüggvényei megyegyeznek $\not{D}$ sajátfüggvényeinek a mértéktranszformáltjaival. Mártéktranszformáció után tehát az integrálási mérték királis transzformáltjában az egyes módusok az exponensben

$$\varphi'^{\dagger}_n\gamma_5\varphi'_n = \varphi^{\dagger}_n\gamma_5\varphi_n \tag{22.14}$$

alakban szerepelnek, ahol a vessző a mértéktranszformáltat jelenti.

- Most még azt is megmutatjuk, hogy ha a $\lambda_n \neq 0$ módusokat exponenciálisan elnyomjuk, akkor az egy a királis szimmetriát megőrző regularizáció.

  Először is mutassuk meg, hogy a $\gamma_5\varphi_n$ függvények a $-\lambda_n$ sajátértékhez tartoznak. Mivel

$$\not{D}\varphi_n = \lambda_n\varphi_n \tag{22.15}$$

és

$$\{\gamma_5, \not{D}\} = 0, \tag{22.16}$$

azért

$$\not{D}\gamma_5\varphi_n = -\gamma_5\not{D}\varphi_n = -\lambda_n\gamma_5\varphi_n, \tag{22.17}$$

ami éppen azt jelenti, hogy minden $\lambda_n \neq= 0$ sajétértékkel együtt a $-\lambda_n$ sajátérték is előfordul a Dirac-operátor spektrumában.

A $\lambda_n \neq 0$ sajétértékhez tartozó sajátfüggvény nem királis, vis. se nem balkezes, se nem jobbkezes:

$$\not{D}(1 \pm \gamma_5)\varphi_n = (1 \mp \gamma_5)\not{D}\varphi_n = \lambda_n(1 \mp \gamma_5)\varphi_n. \tag{22.18}$$

Következő lépésként megmutatjuk, hogy a $\lambda_n = 0$ sajátértékhez tartozó sajátfüggvények mindig választhatók jól definiált kiralitásúaknak. Legyen uis. φ a $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátfüggvény. Akkor $(1\pm\gamma_5)\varphi$, amelyek γ_5–nek sajátfüggvényei,

$$\gamma_5(1 \pm \gamma_5)\varphi = \pm(1 \pm \gamma_5)\varphi, \tag{22.19}$$

egyúttal a Dirac-operátornak is zérus sajátértékhez tartozó sajátfüggvényei:

$$\not{D}(1 \pm \gamma_5)\varphi = (1 \mp \gamma_5)\not{D}\varphi = 0 \cdot (1 \pm \gamma_5)\varphi. \tag{22.20}$$

Ezen tulajdonság miatt a (**??**) kifejezés exponensében szereplő összegben a zérus sajátértékhez tartozó függvények járuléka királis transzformációval szemben invariáns.

A fenti tulajdonságok alapján azt lehet mondani, hogy ha exponenciálisan elnyomjuk a (??) kifejezésben a nem zérus sajátértékhez tartozó módusokat,

$$\int dx\theta(x)\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)\Big|_{reg} = \lim_{M\to\infty}\int dx\theta(x)\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)e^{-\lambda_n^2/M^2}, \tag{22.21}$$

akkor az olyan regularizációt jelent, amikor az eredmény mértékinvariáns és királisan is invariáns.

A (??) kifejezést a kövbetkezőképpen alakíthajuk tovább:

$$\begin{aligned}
&\int dx\theta(x)\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)\Big|_{reg}\\
&= \lim_{M\to\infty}\int d^4x\theta(x)\sum_n \mathrm{tr}\left[\varphi_n^\dagger\gamma_5 e^{-\not{D}^2/M^2}\varphi_n\right]\\
&= \lim_{M\to\infty}\int d^4x\theta(x)\lim_{y\to x}\sum_n (\varphi_n(y))_\alpha^{a*}\left(\gamma_5 e^{-\not{D}^2/M^2}\right)_{\alpha\beta}^{ab}(\varphi_n(x))_\beta^b\\
&= \lim_{M\to\infty}\int d^4x\theta(x)\lim_{y\to x}\left(\gamma_5 e^{-\not{D}^2/M^2}\right)_{\alpha\beta}^{ab}\sum_n(\varphi_n(x))_\beta^b(\varphi_n(y))_\alpha^{a*}.
\end{aligned} \tag{22.22}$$

A teljességi relációt,

$$\begin{aligned}
\sum_n(\varphi_n(x))_\beta^b(\varphi_n(y))_\alpha^{a*} &= \delta^{ab}\delta_{\alpha\beta}\langle x|n\rangle\langle n|y\rangle = \delta^{ab}\delta_{\alpha\beta}\langle x|y\rangle\\
&= \delta^{ab}\delta_{\alpha\beta}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{\mathrm{i}k(y-x)},
\end{aligned} \tag{22.23}$$

felhasználva:

$$\int dx\theta(x)\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)\Big|_{reg} = \lim_{M\to\infty}\int d^4x\theta(x)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\left[e^{\mathrm{i}kx}\gamma_5 e^{-\not{D}^2/M^2}e^{-\mathrm{i}kx}\right]. \tag{22.24}$$

Fejtsük sorba a jobb oldalon szereplő operátort:

$$e^{\mathrm{i}kx}e^{-\not{D}^2/M^2}e^{-\mathrm{i}kx} = e^{\mathrm{i}kx}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\not{D}^{2n}}{M^{2n}}e^{-\mathrm{i}kx}. \tag{22.25}$$

Használjuk fel a Dirac-operátor négyzetének explicit alakját:

$$\begin{aligned}
\not{D}^2 &= \gamma^\mu\gamma^\nu(\partial_\mu+\mathrm{i}a_\mu)(\partial_\nu+\mathrm{i}a_\nu)\\
&= \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\frac{1}{2}\{\partial_\mu+\mathrm{i}a_\mu,\partial_\nu+\mathrm{i}a_\nu\}+\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\frac{1}{2}[\partial_\mu+\mathrm{i}a_\mu,\partial_\nu+\mathrm{i}a_\nu]\\
&= (\partial_\mu+\mathrm{i}a_\mu)(\partial^\mu+\mathrm{i}a^\mu)+\mathrm{i}\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{22.26}$$

ahol

$$\hat{F}_{\mu\nu} \;=\; (\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + \mathrm{i}[a_\mu, a_\nu] \equiv f_{\mu\nu} \qquad (22.27)$$

a mértéktér térerősségtenzora, mint a mértékcsoporthoz tartozó algebra eleme. Számoljuk ki ezután a spúrt $1/M^2$–ben az első el nem tűnő renddel bezárólag:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left(\gamma_5 e^{\mathrm{i}kx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{[-\gamma_\mu(\partial_\mu+\mathrm{i}a_\mu)\gamma_\nu(\partial_\nu+\mathrm{i}a_\nu)]^n}{M^{2n}}e^{-\mathrm{i}kx}\right)\\
&= \mathrm{tr}\gamma_5 + \mathrm{tr}\left(\gamma_5 e^{\mathrm{i}kx}\frac{(\partial_\mu+\mathrm{i}a_\mu)^2+\mathrm{i}\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}}{M^2}e^{-\mathrm{i}kx}\right)\\
&+\frac{1}{2!}\mathrm{tr}\left(\gamma_5 e^{\mathrm{i}kx}\frac{\left[(\partial_\mu+\mathrm{i}a_\mu)^2+\mathrm{i}\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right]^2}{M^4}e^{-\mathrm{i}kx}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{M^6}\right). \qquad (22.28)
\end{aligned}$$

Mivel a Dirac-indexekre vett spúrral $\mathrm{tr}_4\gamma_5 = 0$ és $\mathrm{tr}_4(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0$, ezért az első el nem tűnő járulék az $n = 2$ tagé:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left(\gamma_5 e^{\mathrm{i}kx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{[-\gamma_\mu(\partial_\mu+\mathrm{i}a_\mu)\gamma_\nu(\partial_\nu+\mathrm{i}a_\nu)]^n}{M^{2n}}e^{-\mathrm{i}kx}\right)\\
&= -\frac{1}{2!}\mathrm{tr}\frac{1}{M^4}\left(\gamma_5\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\frac{1}{4}[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]f_{\mu\nu}f_{\rho\sigma}\right)\\
&= -\frac{1}{2!}\frac{1}{16M^4}\cdot 4\cdot\mathrm{tr}_4\left(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right)\mathrm{tr}_G\left(f_{\mu\nu}(x)f_{\rho\sigma}(x)\right)\\
&= -\frac{1}{2!}\frac{1}{16M^4}\cdot 4\cdot 4\mathrm{i}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}_G\left(f_{\mu\nu}(x)f_{\rho\sigma}(x)\right)\\
&= -\frac{1}{2M^4}\mathrm{i}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}_G\left(f_{\mu\nu}(x)f_{\rho\sigma}(x)\right)\\
&= -\frac{1}{M^4}\mathrm{i}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}_G\left(f_{\mu\nu}(x)\tilde{f}^{\mu\nu}(x)\right),
\end{aligned} \qquad (22.29)$$

ahol bevezettük a mértéktér térerősségének duálisát:

$$\tilde{f}^{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f_{\rho\sigma}. \qquad (22.30)$$

A fentieket felhasználva az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\int dx\theta(x)\sum_n\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)\bigg|_{reg}\\
&= -\frac{\mathrm{i}}{M^4}\int d^4x\theta(x)\int^M\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}_G\left(f_{\mu\nu}(x)\tilde{f}^{\mu\nu}(x)\right)\\
&= -\mathrm{i}\frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\theta(x)\mathrm{tr}_G\left(f_{\mu\nu}(x)\tilde{f}^{\mu\nu}(x)\right). \qquad (22.31)
\end{aligned}$$

Az utóbbi összefüggés alapján a az axiálvektor-áramot, vektoráramot, pseudoskalár sűrűséget és skalár sűrűséget mint operátorbetétrészeket tartalmazó Green-függvények generáló funkcionáljának invarianciáját követelve a királis transzformációkkal szemben, az alábbi Ward-Takahashi-azonosságra jutunk:

$$\left[\partial_\mu^x \frac{\delta}{\mathrm{i}\delta L_\mu(x)} - 2\mathrm{i}\frac{-\mathrm{i}}{32\pi^2}\int d^4x\theta(x)\mathrm{tr}_G\left(f_{\mu\nu}\left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta j_\mu^b(x)}\right]\tilde{f}^{\mu\nu}\left[\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta j_\mu^b(x)}\right]\right)\right.$$
$$\left. -2m\mathrm{i}\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta\pi(x)} - 2\mathrm{i}\sigma(x)\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta\pi(x)} + 2\mathrm{i}\pi(x)\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta\sigma(x)}\right] Z[j_\mu^b, \bar{\zeta}, \zeta; L_\mu, K_\mu, \pi, \sigma] = 0. \tag{22.32}$$

További részletes vizsgálattal meg lehet mutatni, hogy a kapott (**??**) azonosság éppen a már korábbiakban levezetett (**??**) anomális Ward-Takahashi-azonossággal egyenértékű.

Ugyanez más alakban, ha nem visszük ki a megváltozásból adódó tagokat funkcionálderiválás segítségével a pályaintegrál alól, akkor az axiálvektoráramra $m = 0$ esetén az alábbi anomális egyenletet jelenti:

$$\partial_\mu A^\mu(x) + \frac{1}{16\pi^2}\mathrm{tr}_G\left(f_{\mu\nu}(x)\tilde{f}^{\mu\nu}(x)\right) = 0. \tag{22.33}$$

A jobb oldalon álló mennyiség integrálja a téridőre az ún. Q topológikus töltés, ami definíciójából következően mértékinvariáns:

$$\int d^4x\partial_\mu A^\mu = Q \equiv -\int d^4x\frac{1}{16\pi^2}\mathrm{tr}_G\left(f_{\mu\nu}(x)\tilde{f}^{\mu\nu}\right). \tag{22.34}$$

Az axiálvektoráram anomáliája tehát szoros kapcsolatban van a mértéktér topológiai tulajdonságaival. æ

22 A mértéktér topológiája és a királis anomália

Megmutatjuk, hogy a tiszta mértéktér fizikailag inekvivalens vákuumállapotokkal rendelkezik, amelyek topológikus tulajdonságaikban különböznek egymástól.

Az a_μ (általában nem ábeli) mértéktér vákuumát az $f_{\mu\nu} = 0$ konfigurációk képviselik. Használjuk az $a_0 = 0$ fizikai mértéket. Ezt a mértéket csak olyan mértéktranszformációk nem sértik meg, amelyek függetlenek az időtől: $U(\vec{r})$,

$$(a^0)' = U\partial^0 U^{-1} = 0, \tag{22.1}$$

$$(a^i)' = UA^iU^{-1} + U\partial^i U^{-1}. \tag{22.2}$$

Ebben a mértékben a vákuumnak megfelelő térkonfigurációk

$$a^i(\vec{r}) = -U(\vec{r})\partial^i U^{-1}(\vec{r}) \tag{22.3}$$

alakú ún. *tiszta mérték térkonfigurációk.*

Fel szokás tételezni, hogy a mértékelméletekben a vákuumállapotot olyan tiszta mérték konfigurációknak kell jelenteni, amelyek a koordinátatér végtelen távoli pontjaiban közös U_∞ határértékhez tartanak. (U_∞ egyúttal globális mértéktranszformáció is.)

Tekintsük most azokat az $U(\vec{r})$ mértéktranszformációkat, amelyek a fenti tulajdonságúak. Az egyszerűség kedvéért beszéljünk a $G = SU(2)$ mértékszimmetria esetéről. Mivel ezek a mértéktranszformációk $|\vec{r}| \to \infty$ esetén közös határértékhez tartanak, ezért az ő szempontjukból a koordinátatér topológiája az S_3 3–dimenziós gömbfelületé. Az $SU(2)$ csoport topológiája maga is S_3. Gondoljunk rá, hogy a csoportelemek általában az $U = a + i\vec{b}\vec{\tau}$ alakban állíthatók elő, ahol $a^2 + \vec{b}^{\,2} = 1$. A szóbanforgó mértéktranszformációk tehát az S_3 sokaságot képezik le az S_3 sokaságra. Ezen leképezések ún. *homotópia osztályokba* sorolhatók. Definíció szerint pontosan azok a mértéktranszformációk tartoznak egy homotópia osztályba, amelyek folytonosan egymásba deformálható $S_3 \to S_3$ leképezések. A különböző homotópia osztályok az ún. *csavarodási számmal* adhatók meg, aminek a definíciója:

$$N = -\frac{1}{24\pi^2}\int d^3x \mathrm{tr}_G\left(\epsilon_{ijk}a^ia^ja^k\right). \tag{22.4}$$

A csavarodási szám értékei $N = 0, 1, 2, \ldots$ nem negatív egész számok. A csavarodási szám azt adja meg, hogy az N homotópia osztályba tartozó mértéktranszformációk az S_3 koordináta sokaság hány különböző pontjához rendeli ugyanazt a csoportsokaságbeli elemet. (Szemléletesen szólva, ha végig megyünk a koordináta sokaság pontjain, akkor N–szer járjuk végig a csoportsokaság pontjait.)

Például az $S_3 \to SU(2)$ leképezés $N = 0$ homotópia osztályát azok az $U = \exp\left\{-\frac{i}{2}\theta^a\tau^a\right\}$ mértéktranszformációk alkotják, amelyeket olyan $\theta^a(\vec{r})$ paraméterfüggvényekkel képezünk, amik folytonosan deformálhatók $\theta^a(\vec{r}) \equiv 0$–ba. Ezek a függvények $\theta^a(\vec{r}) \to 0$ aszimptótikus viselkedést mutatnak $|\vec{r}| \to \infty$ esetén. Az $N=1$ homotópia osztály elemeit azok a mértéktranszformációk alkotják, amelyeket

$$\theta^a(\vec{r}) \;=\; \frac{2\pi r^a}{(\vec{r}^{\,2}+b^2)^{1/2}} \tag{22.5}$$

alakú vagy ilyen alakba folytonosan deformálható paraméter–függvényekkel képezünk.

A különböző homotópia osztályokba tartozó transzformációk fontos tulajdonsága, hogy az $N \neq 0$ transzformációk nem kaphatók meg az egység transzformációból infinitezimális mértéktranszformációk egymás utáni alkalmazásával.

A most bevezetett csavarodási szám és a különböző csavarodási számokkal jellemzett ún. topológiai vákuumok mértékfüggő fogalmak. A különböző csavarodási számmal jellemzett topológiai vákuumokból lehet azonban igazi fizikai tartalommal rendelkező vákuumot felépíteni. Pontosabban ilyen fizikai vákuumból végtelen sok, fizikailag inekvivalens vákuum lehetséges.

Dolgozzunk továbbra is az $a_0 = 0$ mértékben. Tegyük fel, hogy a Yang-Mills-tér állapotait klasszikus térkonfigurációkon értelmezett funkcionálokkal reprezentáljuk. Az (időtől független) infinitezimális mértéktranszformációk generátorai ezen funkcionálok terében a $D_i^{ab} f_{0i}^b$ operátorok. Fizikai állapotoknak azokat az $|\mathrm{phys}\rangle$ állapotokat nevezzük, amelyekre

$$D_i^{ab} f_{0i}^b |\mathrm{phys}\rangle \;=\; 0 \tag{22.6}$$

teljesül. Ezek az állapotok uis. mértékinvariánsak:

$$e^{\mathrm{i}\int d^4x \lambda^a(x) D_i^{ab} f_{0i}^b} |\mathrm{phys}\rangle \;=\; |\mathrm{phys}\rangle. \tag{22.7}$$

Látjuk, hogy ha a mértékinvariáns fizikai állapotokra szorítkozunk, akkor ez egyenértékű azzal a kijelewntéssel, hogy csak a Gauss-tételnek elegettevő állapotok fizikaiak.

A csavarodási számnak a definíciójából következően megvan a következő tulajdonsága:

Legyen U_n az n csavarodási számmal jellemzett mértéktranszformáció, és legyen $a_i = U_n \partial_i U_n^{-1}$ tiszta mérték térkonfiguráció, amelyre tehát $N(a) = n$. Ekkor tetszőleges n' homotópia osztályból vett mértéktranszformáció esetén, az a_i mértéktranszformáltjának csavarodási száma:

$$N(U_{n'} a_i U_{n'}^{-1} + U_{n'} \partial_i U_{n'}^{-1}) \;=\; n + n'. \tag{22.8}$$

Ábrázolja az n homotópia osztályba tartozó mértéktranszformációkat $\hat{U}_n$ az állapotok terében. Ekkor a fenti állítás következménye, hogy a zérus csavarodási számú mértéktranszformációk nem változtatják meg a vákuum csavarodási számát,

$$\hat{U}_0 |0_n\rangle \;=\; |0_n\rangle, \tag{22.9}$$

ugyanakkor az $n' \neq 0$,,nagy" mértéktranszformációk megváltoztatják a vákuum térkonfigurációk csavarodási számát:

$$\hat{U}_{n'}|0_n rangle \;=\; |0_{n+n'}\rangle. \qquad (22.10)$$

Ha tehát a ,,nagy" mértéktranszformációkat is figyelembe vesszük, akkor a topológiai vákuumokra nem teljesül a Gauss-tétel. Ezek csakugyan nem fizikaiak, mert nem mértékinvariánsak. (Csak az $N = 0$ mértéktranszformációkkal szemben invariánsak.)

A fizikai $|0_{phys}\rangle$ vákuumot úgy kell a topológiai vákuumokból felépíteni, hogy legalább egy fázis erejéig invariáns legyen tetszőleges homotópia osztályba tartozó mértéktranszformációkkal szemben:

$$\hat{U}_{n'}|0_{phys}\rangle \;=\; e^{-\mathrm{i}\alpha}|0_{phys}\rangle. \qquad (22.11)$$

Ehhez képezhetjük az alábbi konstrukciót:

$$|0_{phys}\rangle \;=\; \sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}N\theta}|0_N\rangle \equiv |\Theta\rangle, \qquad (22.12)$$

ahol Θ tetszőleges valós szám. Könnyen beláthatjuk, hogy az így kapott Θ*–vákuumok* a fázistól eltekintve invariánsak az összes mértéktranszformációval szemben.

$$\begin{aligned}\hat{U}_{n'}|\Theta\rangle &= \sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}N\Theta}|0_{N+n'}\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}(n-n')\Theta}|0_n\rangle \\ &= e^{-\mathrm{i}n'\Theta}|\Theta\rangle. \end{aligned} \qquad (22.13)$$

A bevezetett Θ–vákuum tehát mértékfüggetlen fogalom. Mivel a fázis változását meghatározó Θ paraméter értéke nem következik az elméletből, azért elvileg kontinuum sok ilyen vákuum lehetséges. Az alábbi gondolatmenettel megmutatjuk, hogy a különböző $\Theta \neq \Theta'$ paraméterértékekhez tartozó Θ–vákuumok fizikailag inekvivalensek.

Legyen $\hat{O}$ tetszőleges mértékinvariáns operátor, amelyre $[\hat{O}, \hat{U}_N] = 0$. Ekkor:

$$0 = \langle\Theta|[\hat{O}, \hat{U}_N]|\Theta'\rangle = \langle\Theta|\hat{O}|\Theta'\rangle \left(e^{-\mathrm{i}N\Theta'} - e^{-\mathrm{i}N\Theta}\right), \qquad (22.14)$$

ahonnan $\Theta' \neq \Theta$ esetén $\langle\Theta|\hat{O}|\Theta'\rangle = 0$. Azaz semmilyen fizikai mennyiség operátora nem visz át egyik Θ–vákuumból a másikba. A különböző Θ–vákuumok tehát fizikailag inekvivalensek. A tapasztalattal való összehasonlításnak kell eldönteni, hogy valamely kölcsönhatás, pl. az erős kölcsönhatás, elméletében Θ-nak mi az értéke.

Mint látjuk, a Θ–vákuum fogalma mértékinvariáns fogalom. Most megkíséreljük a pályaintegrálos kvantálás módszerét úgy megfogalmazni, hogy megkapjuk a rögzített Θ-vákuumból az ugyanabba a Θ–vákuumba történő átmeneti amplitúdót. A vákuumállapotot a pályaintegrálban azáltal lehet megszabni, hogy határfeltételeket rovunk ki azokra az a_μ térkonfigurációkra, amelyekre integrálunk. Mivel klasszikus vákuumból klasszikus vákuumba történő térkonfigurációkra kívánunk integrálni, azért megköveteljük, hogy a térkonfigurációk $t \to \pm\infty$ határesetben tiszta mérték konfigurációk legyenek. Ezt biztosíthatjuk, ha az

$$a_\mu \to U^{-1}\partial_\mu U, \qquad \text{ha} \qquad |x_\mu| \to \infty \tag{22.15}$$

határfeltételnek elegettevő térkonfigurációkra integrálunk.

Ezután az a kérdés, hogy be tudunk-e vezetni a mértéktranszformációk, vis. a tiszta mérték térkonfigurációk topológiai osztályozására valamilyen mértékinvariáns mennyiséget, aminek segítségével specifikálhatnánk a kezdeti és a végállapoti Θ–vákuumot. Erre nyújt lehetőséget az ún. *topológiai töltés*:

$$Q \;=\; -\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x \mathrm{Tr}\left(f_{\mu\nu}(x)\tilde{f}^{\mu\nu}(x)\right), \tag{22.16}$$

ahol

$$\tilde{f}^{\mu\nu}(x) \;=\; \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f_{\rho\sigma}(x) \tag{22.17}$$

a térerősség tenzor duálisa. (Pontosan ezzel a topológiai töltéssel találkoztunk a királis anomália tanulmányozása során.) A topológkus töltés mértéknvariáns a definíciójából adódóan. Másrészt a topológikus töltés invariáns a mértéktér vektorpotenciáljának tetszőleges lokális infinitezimális megváltozásával szemben.

Legyen a mértéktér egy tetszőleges infinitezimális lokáls megváltozása δa_μ, ekkor:

$$\begin{aligned}\delta Q \;&\sim\; \frac{1}{2}\int d^4x \mathrm{Tr}\left(\tilde{f}_{\mu\nu}(x)\delta f^{\mu\nu}(x)\right) = \frac{1}{2}\int d^4x \mathrm{Tr}\left[\tilde{f}_{\mu\nu}(x)\left(D^\mu\delta a^\nu(x) - D^\nu\delta a^\mu(x)\right)\right] \\ &= \; -\int d^4x \mathrm{Tr}\left[D^\mu\tilde{f}_{\mu\nu}(x)\delta a^\nu\right] + \int d^4x\partial^\mu \mathrm{Tr}(\tilde{f}_{\mu\nu}\delta a^\nu) = 0.\end{aligned} \tag{22.18}$$

Az első tag a térerősség tenzorára vonatkozó Bianchi–azonosság miatt azonosan eltűnik. A második tag felületi integrállá alakítható, ami azért tűnik el, mert a térerősségek a végtelenben elég gyorsan eltűnnek.

A továbbiakban felhasználjuk az alábbi azonosságot:

$$-\frac{1}{16\pi^2}\mathrm{Tr}\left(\tilde{f}^{\mu\nu}(x)f_{\mu\nu}(x)\right) \;=\; \partial_\mu K^\mu, \tag{22.19}$$

ahol

$$K^\mu \;=\; -\frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{Tr}(f_{\alpha\beta}a_\gamma + \frac{2}{3}a_\alpha a_\beta a_\gamma). \tag{22.20}$$

Ennek értelmében a topológikus töltés egy felületi integrál a négy-dimenziós tér végtelen sugarú felületén:

$$Q \;=\; \int_{S_\infty} d\sigma_\mu K^\mu. \tag{22.21}$$

Mivel a végtelen távoli felületen a térkonfiguráció tiszta mérték, $a_\mu = U^{-1}\partial_\mu U$, a térerősség ott eltűnik és az adódik, hogy:

$$Q = -\frac{1}{24\pi^2}\int_{S_\infty} d\sigma_\mu \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{Tr}\left(U^{-1}\partial_\alpha U \cdot U^{-1}\partial_\beta U \cdot U^{-1}\partial_\gamma U\right). \qquad (22.22)$$

Tekintsük most a topologikus töltés kifejezését a_0 mértékben:

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{1}{24\pi^2}\int d^3x \epsilon^{ijk}\mathrm{Tr}\left(U^{-1}\partial_i U \cdot U^{-1}\partial_j U \cdot U^{-1}\partial_k U\right)\Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} \\ &= N_{t=\infty} - N_{t=-\infty}. \end{aligned} \qquad (22.23)$$

Felhasználva a mértékválasztás szabadságát a kezdeti konfiguráció csavarodási számát választhatjuk nullának. Azt kaptuk, hogy a topológiai töltés az a_0 mértékben pontosan megegyezik a csavarodási számmal.

A fentiek alapján azt mondhatjuk, hogy ha a pályaintegrálban a rögzített Q értékhez tartozó térkonfigurációkra integrálunk, akkor az megfelel annak, hogy a_0 mértékben olyan amplitúdót képezünk, amelyik a kezdeti vákuum csavarodási számát Q-val megnöveli.

Szerkesszük meg végül azt az amplitúdót, amely a Θ vákuumból a Θ' vákuumba visz át:

$$\begin{aligned} \langle\Theta|e^{-\mathrm{i}HT}|\Theta'\rangle &= \sum_{nm} e^{-\mathrm{i}n\Theta}\langle 0_n|e^{-\mathrm{i}HT}0_m\rangle e^{\mathrm{i}m\Theta'} \\ &= \sum_{nm} e^{-\mathrm{i}(n-m)\Theta+\mathrm{i}m(\Theta-\Theta')}\langle 0_n|e^{-\mathrm{i}HT}|0_m\rangle \\ &= \sum_{mQ} e^{-\mathrm{i}Q\Theta+\mathrm{i}m(\Theta'-\Theta)}\langle 0_{Q+m}|e^{-\mathrm{i}HT}|0_m\rangle \\ &= 2\pi\delta(\Theta'-\Theta)\sum_Q e^{-\mathrm{i}Q\Theta}\langle 0_Q|e^{-\mathrm{i}HT}|0_0\rangle \\ &= 2\pi\delta(\Theta-\Theta')\sum_Q e^{-\mathrm{i}Q\Theta}\int \mathcal{D}a_Q e^{-S_{YM}-S_{gf}-S_{ghost}} \\ &= 2\pi\delta(\Theta-\Theta')\int \mathcal{D}a e^{\mathrm{i}(S_{YM}+S_{gf}+S_{ghost})}e^{\mathrm{i}\Theta Q[a]}. \end{aligned} \qquad (22.24)$$

A kvantumszíndinamika Lagrange-sűrűsége rendelkezik $U(1)\otimes U_A(1)$ királis szimmetriával (zérus tömegű kvarkok esetén). Az egyik globális $U(1)$ szimmetriához tartozó megmaradó töltést a bariontöltéssel azonosíthatjuk. Ugyanakkor a másik $U_A(1)$ globális szimmetriához tartozó megmaradó töltést nem figyelhetünk meg a természetben. Ez az ún. $U_A(1)$ probléma. Azt lehet gondolni, hogy az $U_A(1)$ szimmetria spontán sérül. Igen ám, de ha egy folytonos globális szimmetria spontán sérül, akkor megfelelő Goldstone–bozonoknak kellene létezni. Nem figyeltünk meg azonban olyan részecskét a természetben, ami a megfelelő Goldstone–bozon szerepét játszhatná. Az $U_A(1)$ szimmetriához tartozó axiálvektoráram anomáliájának az a szerepe, hogy lehetővé teszi a szimmetria spontán sérülést anélkül, hogy Goldstone–bozon jelenne meg.

æ