VÉGES HŐMÉRSÉKLETŰ RENDSZEREK KVANTUMTÉRELMÉLETE

Sailer Kornél

(Speciális előadások)

Kossuth Lajos Tudományegyetem
Debrecen
1991.

BEVEZETÉS

Az anyag mikroszkópikus leírása a kvantumelmélet segítségével lehetséges. Ha az anyagot alkotó részecskék közötti kölcsönhatást fundamentális szinten kívánjuk kezelni, akkor az anyag leírására a kvantumtérelméletet kell használnunk. Vizsgálatainkat csak a kvantumelektrodinamikára és a kvantumszíndinamikára fogjuk korlátozni. Ekkor könnyű fermionok között zérus nyugalmi tömegű mértékbozonok közvetítik a kölcsönhatást. Mindaddig, amíg olyan rendszereket vizsgálunk, amelyekben a fermionok száma állandó, nem szükséges a kvantumtérelmélet módszereihez folyamodnunk. Ha azonban a vizsgált anyagban (közegben) a fermionok száma nem állandó, akkor csak ez az út járható. A fermionok száma viszont egy közegben akkor szokott általában változni, ha a magas hőmérséklet miatt részecske-antirészecske párok keletkezhetnek a vákuumból, vagy ha a nagy nyomás miatt a fermionok ütközéseik során nagy energiájú fékezési sugárzást tudnak kibocsátani, amely aztán részecske-antirészecske párt tud kelteni. Ezért a földitől általában erősen eltérő magas hőmérsékleten és nyomáson az anyagot a kvantumtérelmélet módszereivel kell leírni.

Bármely közeg makroszkópikus viselkedésének mikroszkópikus modell alapján történő megértésére a statisztikus fizika szolgáltat módszert. A jelen jegyzetben azt vázoljuk fel, hogyan használható a statisztikus fizika, ha a rendszert kvantumtérelméleti mikroszkópikus modellel írjuk le. Éppen ezért a jegyzetet csak annak ajánljuk olvasásra, aki a statisztikus fizika és a kvantumtérelmélet alapjait már megtanulta.

A vizsgált közegek, amelyekről szó lesz, az elektron-pozitron plazma és a kvarkgluon-plazma. Normál földi körülmények között egyik sem létezik. A kvarkgluon-plazma az anyagnak olyan fázisa, amelynek létezését a kvantumszíndinamika jósolja. Megfigyelése talán földi körülmények között is lehetséges lesz nagy energiás nukleon- ill. nehézion-ütközésekben. Mivel nem tudhatjuk, mennyire fogja a tapasztalat a kvarkgluon-plazma létét igazolni, ezért a jegyzetben általános elvi keretet kívánunk adni arra, hogyan lehet a kvantumtérelmélet és a statisztikus fizika segítségével közegek extrém magas hőmérsékleten és nyomáson való viselkedését vizsgálni.

Egy közeg makroszkópikus viselkedésének megértése azzal kezdődik, hogy jellemezni tudjuk termodinamikai egyensúlyi állapotait. Hötartályban és részecsketartályban elhelyezett rendszer statisztikus fizikai jellemzésére a Z makrokanonikus állapotösszeg alkalmas. A rendszer termodinamikai egyensúlyi állapotaira vonatkozó valamennyi információ kiolvasható az $\Omega = -T \ln Z$ termodinamikai potenciálból a termodinamika ismert összefüggései szerint. Így pl. a P nyomás is mint a T hőmérséklet és a V térfogat függvénye, vis. az állapotegyenlet. Elsődleges célunk ezért az lesz, hogy meghatározzuk a kvantumelektrodinamikai és a kvantumszíndinamikai modellel leírt makroszkópikus rendszerek makrokanonikus állapotösszegét.

A statisztikus fizika arra is lehetőséget nyújt, hogy vizsgáljuk a fenti rendszereket gyenge külső perturbáció hatása alatt. A rendszerben ilyen hatásra bekövetkező változásokról az egyensúlyi rendszer korrelációs függvényei adnak számot, mint az a statisztikus fizika elemeiből ismeretes. A korrelációkat a térelméletben a valós idejű Green-függvények írják le. Ezek pólusai mondják meg, hogy gyenge külső zavarra a rendszer hogyan válaszol. A Green-függvények pólusainak helyét viszont az határozza meg, hogy milyen a közeg polarizációja. A jegyzet utolsó részében ezért a közegek polarizációjával foglalkozunk.

A jegyzetben nem törekedtünk teljességre. Lényegében végig a képzetes idővel dolgozó Matsubara-féle tárgyalásmódot és a perturbatív leírási módot használjuk. æ

I. KÖLCSÖNHATÁS MENTES RENDSZEREK

1 Az útintegrál és az állapotösszeg

Először átismételjük a térelmélet útintegrálok segítségével történő kvantálásának fontosabb lépéseit. Ezt követően definiáljuk a (makro)kanonikus állapotösszeget az útintegrál felhasználásával.

Tegyük fel, hogy a teret Schrödinger-képben a $\hat{\Phi}(\vec{x},0)$ téroperátorok és a hozzájuk kanonikusan konjugált $\hat{\pi}(\vec{x},0)$ impulzusok írják le a $t=0$ pillanatban. Vezessük be a téroperátorok sajátállapotait:

$$\hat{\Phi}(\vec{x},0)|\Phi> \; = \; \Phi(\vec{x})|\Phi> . \tag{1.1}$$

A sajátvektorok az alábbi ortonormáltsági és teljességi relációt elégítik ki;

$$< \Phi_a|\Phi_b> \; = \; \delta[\Phi_a(\vec{x})-\Phi_b(\vec{x})], \tag{1.2}$$

$$\int d\Phi(\vec{x})|\phi>< \phi| \; = \; 1. \tag{1.3}$$

Az integrálás kiterjed az összes lehetséges $\Phi(\vec{x})$ térkonfigurációra, $\Phi_a(\vec{x})$ és $\Phi_b(\vec{x})$ ezek közül jelöl két tetszőlegeset. Hasonlóképpen bevezetjük a kanonikus impulzus sajátvektorait:

$$\hat{\pi}(\vec{x},0)|\pi> \; = \; \pi(\vec{x})|\pi>, \tag{1.4}$$

amelyekre az ortonormáltsági és a teljességi reláció az alábbi alakú:

$$< \pi_a|\pi_b> \; = \; \delta[\pi_a(\vec{x})-\pi_b(\vec{x})], \tag{1.5}$$

$$\int \frac{d\pi(\vec{x})}{2\pi}|\pi>< \pi| \; = \; 1. \tag{1.6}$$

A kvantummechanikai $< x|p>=\exp(\mathrm{i}px)$ összefüggéssel analóg módon a koordinátaés az impulzusreprezentáció közötti áttérést a

$$< \Phi|\pi> \; = \; \exp\left\{\mathrm{i}\int d^3x\; \pi(\vec{x})\Phi(\vec{x})\right\} \tag{1.7}$$

"mátrix" biztosítja.

A rendszer dinamikáját a

$$H \; = \; \int d^3x\; \mathcal{H}(\hat{\pi},\hat{\Phi}) \tag{1.8}$$

Hamilton-operátor szabja meg. A $t=0$ pillanatban megvalósuló $|\Phi_a>$ állapotból az $\exp(-\mathrm{i}Ht_f)$ időfejlesztő operátor a $t=t_f$ pillanatra az $\exp(-\mathrm{i}Ht_f)|\Phi_a>$ állapotot fejleszti ki. A fizikus ezt az állapotot úgy vizsgálja, hogy megkérdi, milyen valószínűséggel vannak benne jelen az egyes $|\Phi_b>$ bázisállapotok. A választ az átmeneti amplitúdó adja meg:

$$A_{ba}(t_f) \; = \; < \Phi_b|\exp(-\mathrm{i}Ht_f)|\Phi_a> . \tag{1.9}$$

Az átmeneti amplitúdó a Feynman-féle útintegrál segítségével is felírható. Járjunk el a következőképpen. Osszuk fel a $[0, t_f]$ intervallumot $\Delta t = t_f/N$ hosszúságú N darab intervallumra. Bontsuk fel az időfejlesztő operátort az egyes Δt intervallumokhoz tartozó időfejlesztő operátorok szorzatára. Az egyes tényezők közé írjunk be egy koordináta- és egy impulzus-reprezentációhoz tartozó egységfelbontást. Ekkor az átmeneti amplitúdó az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} A_{ba}(t_f) &= \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{d\pi_i d\Phi_i}{2\pi} \right) < \Phi_b|\pi_N >< \pi_N| \exp(-\mathrm{i}H\Delta t)|\Phi_N > \cdot \\ & < \Phi_N|\pi_{N-1} >< \pi_{N-1}| \exp(-\mathrm{i}H\Delta t)|\Phi_{N-1} > \cdots \\ & < \Phi_2|\pi_1 >< \pi_1| \exp(-\mathrm{i}H\Delta t)|\Phi_1 >< \Phi_1|\Phi_a > . \end{aligned} \tag{1.10}$$

Alakítsuk most át az infinitezimális átmeneti amplitúdót, felhasználva, hogy $\Delta t \to 0$:

$$\begin{aligned} < \pi_j| \exp(-\mathrm{i}H\Delta t)|\Phi_j > &\approx < \pi_j|1 - \mathrm{i}H\Delta t|\Phi_j > \\ &= < \pi_j|\Phi_j > (1 - \mathrm{i}H_j\Delta t) \\ &= (1 - \mathrm{i}H_j\Delta t) \exp\left\{ -\mathrm{i} \int d^3x \; \pi_j(\vec{x}) \; \Phi_j(\vec{x}) \right\} \\ &\approx \exp(-\mathrm{i}H_j\Delta t) \exp\left\{ -\mathrm{i} \int d^3x \; \pi_j(\vec{x}) \; \Phi_j(\vec{x}) \right\}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

ahol

$$H_j = \int d^3x \mathcal{H}(\pi_j(\vec{x}), \Phi_j(\vec{x})). \tag{1.12}$$

A rendszer állapotösszegének definíciójához annak az amplitúdójára lesz szükségünk, hogy a rendszer marad eredeti $|\Phi_a >$ állapotában:

$$\begin{aligned} A_{aa}(t_f) &= < \Phi_a| \exp(-\mathrm{i}H\Delta t)|\Phi_a > \\ &= \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{d\pi_i d\Phi_i}{2\pi} \right) \delta[\Phi_1(\vec{x}) - \Phi_a(\vec{x})] \exp\left\{ \mathrm{i} \sum_{j=1}^{N} \int d^3x \pi_j(\vec{x}) \Phi_{j+1}(\vec{x}) \right\} \cdot \\ & \exp\left\{ -i \sum_{j=1}^{N} \int d^3x \pi_j(\vec{x}) \Phi_j(\vec{x}) \right\} \exp\left\{ -\mathrm{i}\Delta t \; \sum_{j=1}^{N} H_j \right\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{d\pi_i d\Phi_i}{2\pi} \right) \delta[\Phi_1(\vec{x}) - \Phi_a(\vec{x})] \cdot \\ & \exp\left\{ -\mathrm{i}\Delta t \sum_{j=1}^{N} \int d^3x [\mathcal{H}(\pi_j, \Phi_j) - \pi_j(\Phi_{j+1} - \Phi_j)/\Delta t] \right\}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

ahol $\Phi_{N+1}=\Phi_a$. A fenti kifejezést formálisan a következőképpen fogjuk jelölni:

$$\begin{aligned} A_{aa}(t_f) &= \int[d\pi]\int_{\Phi(\vec{x},0)=\Phi_a(\vec{x})}^{\Phi(\vec{x},t_f)=\Phi_a(\vec{x})}[d\Phi]\cdot \\ & \exp\left\{\mathrm{i}\int_0^{t_f}\int d^3x\left(\pi(\vec{x},t)\partial_t\Phi(\vec{x},t)-\mathcal{H}(\pi(\vec{x},t),\Phi(\vec{x},t))\right)\right\}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ne felejtsük azonban el, hogy ez csak az egyszerűbb írásmód kedvéért bevezetett jelölés. Igazi jelentését a végtelen sok integrál szorzatának határértéke adja. Vegyük észre, hogy az útintegrál egyáltalán nem tartalmaz operátorokat. Benne integrálás történik az összes lehetséges $(\Phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x},t))$ térkonfigurációra, azzal a megszorítással, hogy a $\Phi(\vec{x},t)$ térmennyiség a $t=0$ és a $t=t_f$ pillanatban ugyanazt a $\Phi_a(\vec{x})$ konfigurációt jelenti. Mivel az integrálás felső határa egy véges t_f, ezért a Lorentz-invariancia megsérül. Ez azonban természetes, mert a statisztikus fizikai leírás, amelyre törekszünk, abban a vonatkoztatási rendszerben lesz érvényes, amelyben a vizsgált fizikai rendszer nyugalomban van.

Keressünk most kapcsolatot a (makro)kanonikus állapotösszeg és az A_{aa} átmeneti amplitúdó között. Egyelőre a bozonterekkel foglalkozunk, a fermionterek esetét későbbre halasztjuk. Tegyük fel, hogy

$$N = \int d^3x\mathcal{N}(\hat{\pi},\hat{\Phi}) \tag{1.15}$$

megmaradó töltés operátora. Az egyszerűség kedvéért csak olyan esettel foglalkozunk, amikor egyetlen megmaradó töltés van. Az általánosítás több megmaradó töltés esetére triviális. Legyen μ az N töltéshez tartozó kémiai potenciál. Véges szabadsági fokú rendszerekre vonatkozó kvantummechanikai ismereteink extrapolációja alapján a végtelen szabadsági fokú terek makrokanonikus állapotösszege:

$$Z=\mathrm{Tr}\exp\left\{-\beta(H-\mu N)\right\}=\int\sum_a d\Phi_a<\Phi_a|\exp\{-\beta(H-\mu N)\}|\Phi_a>. \tag{1.16}$$

Most szeretnénk ezt a kifejezést az A_{aa} átmeneti amplitúdóval kapcsolatba hozni. Folytassuk ezért az A_{aa} amplitúdót analitikusan a komplex idősíkon a képzetes tengelyre, $t\rightarrow\tau=it$. Az integrálás határaiban végezzük a $(0,t_f)\rightarrow(0,\beta)$ helyettesítést. Itt $\beta=1/T$ az inverz hőmérséklet. (A jegyzetben a $\hbar=1$, $c=1$ és $k_B=1$ egységrendszert használjuk.) Helyettesítsük továbbá a Hamilton-sűrűséget $\mathcal{H}\rightarrow\mathcal{H}-\mu\mathcal{N}$ módon. Az eredeti $\Phi(\vec{x},t_f)=\Phi(\vec{x},0)=\Phi_a(\vec{x})$ megszorítással analóg módon továbbra is csak olyan térkonfigurációkra integráljunk, amelyek periodikusak, azaz amelyekre

$$\text{(B)}\qquad \Phi(\vec{x},\beta)=\Phi(\vec{x},0)=\Phi_a(\vec{x}). \tag{1.17}$$

(A (B) jel arra utal, hogy ez a megszorítás fermionterek esetén módosulni fog.) A fentiek eredményeképpen

$$A_{aa}\;\rightarrow\;\mathcal{A}_{aa}=\lim_{N\rightarrow\infty}\int\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{d\pi_i d\Phi_i}{2\pi}\right)\delta[\Phi_1(\vec{x})-\Phi_a(\vec{x})]\cdot$$

$$\exp\left\{\Delta\tau\sum_{j=1}^{N}\int d^3x[-\mathcal{H}_j+\mu\mathcal{N}_j+\mathrm{i}\pi_j(\Phi_{j+1}-\Phi_j)/\Delta\tau]\right\} \tag{1.18}$$

adódik ($\Delta\tau=\beta/N$). A makrokanonikus állapotösszeget ezek után az összes periodikus $\Phi_a(\vec{x})$ térkonfigurációra történő integrálás révén kapjuk:

$$\begin{aligned} Z &= \int\sum_a d\Phi_a\,\mathcal{A}_{aa} \\ &= \int[d\pi]\int_{\text{per.}}[d\Phi]\exp\left\{\int_0^\beta d\tau\int d^3x\,(\mathrm{i}\pi\partial_\tau\Phi-\mathcal{H}+\mu\mathcal{N})\right\}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ezzel megmutattuk, hogy a kvantummechanikai átmeneti amplitúdó analitikus folytatása és az állapotösszeg között szoros kapcsolat van. A fenti összefüggések véges szabadsági fokú kvantummechanikai rendszerek esetén egzaktul igazak. Az általánosításuk végtelen szabadsági fokú terekre, ahogy ezt fentebb megtettük, nem egzakt bizonyítás, hanem csak a megfelelő összefüggések kézenfekvővé tétele volt. A (**??**) kifejezést a továbbiakban a makrokanonikus állapotösszeg definíciójaként fogadjuk el. æ

2 A semleges skalártér

Ebben a fejezetben meghatározzuk a semleges skalártér kanonikus állapotösszegét. Mivel nincsen megmaradó töltés, nem szükséges kémiai potenciált bevezetnünk. A semleges $\Phi(x)$ skalártér Lagrange-sűrűsége

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}m^2\Phi^2-\mathcal{U}(\Phi), \tag{2.1}$$

ahol $\mathcal{U}(\Phi)$ az önkölcsönhatás. A $\Phi(x)$ térmennyiséghez kanonikusan konjugált impulzus

$$\pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)}=\partial_t\Phi. \tag{2.2}$$

A Hamilton-sűrűség:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi\partial_t\Phi-\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Phi)^2+\frac{1}{2}m^2\Phi^2+\mathcal{U}(\Phi). \end{aligned} \tag{2.3}$$

A (**??**) definíciót alkalmazva, a kanonikus állapotösszeg:

$$Z = \lim\left(\prod_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\pi_i}{2\pi}\int_{\text{per.}}d\Phi_i\right)\cdot$$

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{N}\int d^3x\left[\mathrm{i}\pi_j(\Phi_{j+1}-\Phi_j)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\Delta\tau\left(\frac{1}{2}\pi_j^2+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Phi_j)^2+\frac{1}{2}m^2\Phi_j^2+\mathcal{U}(\Phi_j)\right)\right]\right\}. \tag{2.4}$$

Itt a j index mindenütt ugyanarra a $\tau_j = \mathrm{i}j\Delta\tau = \mathrm{i}j\beta/N$ képzetes időre vonatkozik.

A tényleges számolásokhoz az állapotösszegben szereplő integrált még pontosítjuk. Ahhoz, hogy Z dimenziótlan legyen, mint azt a statisztikus fizikában megszoktuk, más integrálási mértéket kell használni. Osszuk először a $V = L^3$ integrálási térfogatot M^3 egyenlő részre, $a = L/M$ és $a \to 0$, $M \to \infty$. Felhasználva, hogy a hatás dimenziója 1, könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a térmennyiség dimenziója $[\Phi] = [a\Delta\tau]^{-1/2}$ és a kanonikusan konjugált impulzus dimenziója $[\pi] = [a^3\Delta\tau]^{-1/2}$. Vezessük be a

$$A_j = \pi_j(a^3\Delta\tau)^{1/2}, \qquad F_j = \Phi_j(a\Delta\tau)^{1/2} \tag{2.5}$$

integrálási változókat és a $dA_i\, dF_i/(2\pi)$ integrálási mértéket. Ezzel elértük, hogy Z dimenziótlan lett:

$$\begin{aligned} Z &= \lim\left(\prod_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dA_i}{2\pi}\int_{\mathrm{per.}}dF_i\right)\cdot \\ &\quad\exp\left\{\sum_{j=1}^{N}\sum_{\vec{x}}\left[\frac{a}{\Delta\tau}\mathrm{i}A_{j,\vec{x}}(F_{j+1,\vec{x}}-F_{j,\vec{x}})\right.\right. \\ &\quad\left.\left.-\left(\frac{1}{2}A_{j,\vec{x}}^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}(F_{j,\vec{x}+a\vec{n}_\alpha}-F_{j,\vec{x}})^2+\frac{1}{2}m^2F_j^2+\mathcal{U}(F_j)\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Az impulzusok szerinti integrálok Gauss-típusúak és így könnyen elvégezhetők:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dA}{2\pi}\quad & \exp\quad\left\{\frac{a}{\Delta\tau}\mathrm{i}Ab-\frac{1}{2}A^2\right\} \\ &= \quad (2\pi)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{a^2b^2}{2(\Delta\tau)^2}\right\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Esetünkben $b = F_{j+1} - F_j$, így a Gauss-integrálok eredménye:

$$\begin{aligned} \textstyle\int[d\pi]\quad & \exp\left\{\int_0^\beta\int d^3x\left(-\frac{1}{2}\pi^2+\mathrm{i}\pi\partial_\tau\Phi\right)\right\} \\ &= \quad (2\pi)^{-NM^3/2}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{N}\sum_{\vec{x}}\frac{a^2(F_{j+1}-F_j)^2}{2(\Delta\tau)^2}\right\} \\ &= \quad \mathcal{N}'\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\int d^3x\frac{1}{2}(\partial_\tau\Phi)^2\right\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Itt $\mathcal{N}'$ végtelen normálási együttható, amely azonban független a hőmérséklettől, s ezért azt a későbbiekben elhanyagoljuk. Az impulzusok szerinti integrálok elvégzése után az állapotösszeg csak a térmennyiségek szerinti integrálást tartalmaz:

$$\begin{aligned}
Z &= \lim \mathcal{N}' \int \left(\prod_{i=1}^{N} dF_i \right) \cdot \\
&\quad \exp \left\{ \Delta\tau\; a^3 \sum_{j=1}^{N} \sum_{\vec{x}} \frac{1}{2a\Delta\tau} \left[- \left(\frac{F_{j+1} - F_j}{\Delta\tau} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{\alpha=1}^{3} (F_{j,\vec{x}+a\vec{n}_\alpha} - F_{j,\vec{x}})^2 - m^2 F_j^2 - \mathcal{U}(F_j) \right] \right\} \\
&= \mathcal{N}' \int_{\mathrm{per.}} [d\Phi] \exp \left\{ \int_0^\beta \int d^3x \mathcal{L} \right\}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

ahol a $t = \mathrm{i}\tau$ helyettesítés után

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\tau \Phi)^2 - \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \Phi \right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - \mathcal{U}(\Phi). \tag{2.10}$$

Ebben a fejezetben a továbbiakban feltesszük, hogy nincsen önkölcsönhatás, azaz $\mathcal{U}(\Phi) = 0$. A kölcsönható tér esetére később fogunk visszatérni. Alakítsuk át a hatás kifejezését parciális integrálással. Közben felhasználjuk, hogy az integrálási térfogat határán $\Phi = 0$ és hogy a tér a képzetes időben periodikus, $\Phi(\beta) = \Phi(0)$:

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L} \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[(\partial_\tau \Phi)^2 + (\nabla\Phi)^2 + m^2 \Phi^2 \right] \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \Phi \left(-\partial_\tau^2 - \nabla^2 + m^2 \right) \Phi \\
&\quad -\frac{1}{2} \int d^3x \Phi \partial_\tau \Phi \,|_{\tau=0}^{\tau=\beta} - \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d\sigma (\Phi \nabla_n \Phi) \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \Phi \left(-\partial_\tau^2 - \nabla^2 + m^2 \right) \Phi.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

A Φ teret a véges $(0, \beta)$ intervallumon Fourier-sorba fejthetjük:

$$\Phi(\vec{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V} \right)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} \exp\{\mathrm{i}(\vec{p}\vec{x} + \omega_n \tau)\} \Phi_n(\vec{p}). \tag{2.12}$$

Itt ω_n a π/β egész számú többszöröse. A periodikusság $\Phi(\vec{x}, \beta) = \Phi(\vec{x}, 0)$ következtében azonban $\omega_n = 2\pi n T$. A semleges skalártér Fourier-sorával kapcsolatban jegyezzük még meg a következőket:

1. A V integrálási térfogat véges. Ezért a $\vec{p}$ impulzusok diszkrét sorozatot alkotnak: $p_\alpha = \pi n_\alpha / L_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, ahol n_α egész számok. Következésképpen:

$$\int d^3x \exp\{\mathrm{i}(\vec{p} + \vec{p}\,')\vec{x}\} = V\delta_{\vec{p},-\vec{p}\,'}. \tag{2.13}$$

2. A frekvenciák diszkrétek, s ezért:

$$\int_0^\beta d\tau \exp\{\mathrm{i}(\omega_n + \omega_{n'})\tau\} = \beta\delta_{n,-n'}. \tag{2.14}$$

3. A semleges skalártér valós, $\Phi^* = \Phi$, amiből

$$\Phi_n^*(\vec{p}) = \Phi_{-n}(-\vec{p}) \tag{2.15}$$

következik.

Helyettesítsük be a (**??**) Fourier-sort a hatás (**??**) képletébe. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$-\partial_\tau^2 \Phi = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{1/2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \omega_n^2 \exp\{\mathrm{i}(\vec{p}\vec{x} + \omega_n\tau)\}\Phi_n(\vec{p}), \tag{2.16}$$

$$-\vec{\nabla}^{\,2}\Phi = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{1/2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \vec{p}^{\,2} \exp\{\mathrm{i}(\vec{p}\vec{x} + \omega_n\tau)\}\Phi_n(\vec{p}), \tag{2.17}$$

és

$$\begin{aligned}
\int_0^\beta d\tau \int d^3x \quad \Phi^* \left(\frac{\beta}{V}\right)^{1/2} & \sum_n \sum_{\vec{p}} q_{np}^2 \exp\{\mathrm{i}(\vec{p}\vec{x} + \omega_n\tau)\}\Phi_n(\vec{p}) \\
= & \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{\beta}{V} \sum_{n\vec{p}} \sum_{n'\vec{p}\,'} q_{np}^2 \exp\{-\mathrm{i}(\vec{p}\,'\vec{x} + \omega_{n'}\tau)\}\Phi_{n'}^*(\vec{p}\,') \cdot \\
& \exp\{\mathrm{i}(\vec{p}\vec{x} + \omega_n\tau)\}\Phi_n(\vec{p}\,) \\
= & \frac{\beta}{V} \sum_{n\vec{p}} \sum_{n'\vec{p}\,'} V\delta_{\vec{p}\vec{p}\,'}\beta\delta_{nn'} q_{np}^2 \Phi_n^*(\vec{p})\Phi_n(\vec{p}) \\
= & \beta^2 \sum_{n\vec{p}} q_{np}^2 |\Phi_n(\vec{p})|^2,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

ahol q_{np}^2 tetszőleges n-től és $\vec{p}$-től függő mennyiség. Végül a hatásra az alábbi eredmény adódik:

$$S = -\frac{1}{2}\beta^2 \sum_{n\vec{p}} \left(\omega_n^2 + \omega^2\right) |\Phi_n(\vec{p})|^2, \tag{2.19}$$

ahol $\omega^2 = m^2 + \vec{p}^{\,2}$.

A hatásnak az (??) alakját helyettesítjük be a partíciós függvény (??) kifejezésébe. Az útintegrál a Fourier-amplitúdók szerinti integrállá írható át. A $\Phi_n(\vec{p}) = A_n(\vec{p}) \exp\{\mathrm{i}\alpha_n(\vec{p})\}$ Fourier-amplitúdók $\alpha_n(\vec{p})$ fázisai szerinti integrálás elvégezhető, mert a hatás nem függ a fázisoktól. Ezért írhatjuk, hogy

$$\int_{\text{per.}} [d\Phi] = \prod_n \prod_{\vec{p}} \int dA_n(\vec{p}) \int_0^{2\pi} d\alpha_n(\vec{p}) \propto \prod_n \prod_{\vec{p}} \int_{-\infty}^{\infty} dA_n(\vec{p}). \tag{2.20}$$

Itt elhanyagoltunk egy β-tól és V-től független állandó szorzótényezőt, Φ periodikusságát pedig a Fourier-sorával történő helyettesítéssel vettük figyelembe. A partíciós függvény ezek után

$$Z = N' \prod_n \prod_{\vec{p}} \int_{-\infty}^{\infty} dA_n(\vec{p}) \exp\left\{-\frac{1}{2}\beta^2(\omega_n^2 + \omega^2) A_n^2(\vec{p})\right\} \tag{2.21}$$

alakot ölt. Az integrálok (Gauss-integrálok) elvégezhetők, és a partíciós függvényre

$$Z = \prod_n \prod_{\vec{p}} \left[\beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)\right]^{-1/2} \tag{2.22}$$

adódik.

Az állapotösszeget átírhatjuk formálisan még egy másik alakba is. Vezessük be a

$$D = \beta^2 \left(-\partial_\tau^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2\right) \tag{2.23}$$

operátort. Ennek sajátfüggvényei $\exp\{\mathrm{i}(\vec{p}\vec{x} + \omega_n \tau)\}$ a $\beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)$ sajátértékekkel. A (??) képlet jobboldala kifejezhető tehát a D operátor determinánsával. Irhatjuk, hogy

$$Z = \int_{\text{per.}} [d\Phi] e^S = \int_{\text{per.}} [d\Phi] \exp\{-\frac{1}{2}(\Phi, D\Phi)\} = \text{const.}(\det D)^{-1/2}. \tag{2.24}$$

Miután rendelkezésünkre áll a semleges skalártér partíciós függvénye, meghatározhatjuk a tér energiáját és nyomását a hőmérséklet függvényében. A vákuum E_0 energiájához és P_0 nyomásához képesti különbség adja meg a véges hőmérséklet hatására a vákuumból kigerjesztődő semleges részecskék ideális gázának az E energiáját és P nyomását:

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} - E_0, \tag{2.25}$$

$$P = T\frac{\partial \ln Z}{\partial V} - P_0. \tag{2.26}$$

Összegezzünk először a frekvenciákra $\ln Z$-ben. Felhasználjuk az alábbi azonosságot:

$$\ln\left((2\pi n)^2+\beta^2\omega^2\right)=\int_1^{\beta^2\omega^2}\frac{d\theta^2}{\theta^2+(2\pi n)^2}+\ln\left[1+(2\pi n)^2\right]. \tag{2.27}$$

Ennek segítségével:

$$\ln Z=-\frac{1}{2}\sum_{\vec{p}}\int_1^{\beta^2\omega^2}\frac{d\theta^2}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2}, \tag{2.28}$$

ahol a hőmérséklettől független tagot elhagytuk, mivel az úgyis csak a vákuum energiájához és nyomásához ad járulékot. Az n szerinti sor összege:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2}=\frac{2\pi^2}{\theta}\left(1+\frac{2}{e^\theta-1}\right). \tag{2.29}$$

Ezt behelyettesítjük $\ln Z$-be:

$$\begin{aligned}\ln Z &= -\frac{1}{2(2\pi)^2}\sum_{\vec{p}}\int_1^{\beta\omega}2\theta\, d\theta\,\frac{2\pi^2}{\theta}\left(1+\frac{2}{e^\theta-1}\right)\\ &= -V\int\frac{d^3p^3}{(2\pi}\int_1^{\beta\omega}d\theta\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}\right)\\ &= V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[-\frac{1}{2}\beta\omega-\ln\left(1-e^{-\beta\omega}\right)\right]+\text{const.}\end{aligned} \tag{2.30}$$

Itt áttértünk az impulzusok szerinti összegzésről integrálásra és a hőmérséklettől független tagot megint elhagytuk. Felhasználva, hogy a vákuum energiája és nyomása

$$E_0=-\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta}\,|_{T=0}\,,\qquad P_0=T\frac{\partial\ln Z}{\partial V}\,|_{T=0}\,, \tag{2.31}$$

a rendszer energiájára és nyomására

$$E = V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\omega n(\omega), \tag{2.32}$$

$$P = T\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln\left(1+n(\omega)\right) \tag{2.33}$$

adódik, ahol bevezettük az

$$n(\omega) = \left[\exp(\beta\omega)-1\right]^{-1} \tag{2.34}$$

betöltési számot.

A későbbiek szempontjából érdemes megjegyezni, hogy $m = 0$ esetén az impulzus szerinti integrál is elvégezhető $\ln Z$-ben:

$$\begin{aligned}
\ln Z &= -\frac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty dp\, p^2 \ln\left(1-e^{-\beta p}\right) \\
&= \frac{V\beta}{6\pi^2}\int_0^\infty \frac{dp\, p^3}{e^{\beta p}-1} \\
&= V\beta\, \frac{\pi^2}{90}\, T^4. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

æ

3 A töltött skalártér. Bose-Einstein-kondenzáció

Töltött skalártér Lagrange-sűrűsége:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \lambda (\Phi^* \Phi)^2. \qquad (3.1)$$

Ez a Lagrange-sűrűség globális U(1) szimmetriával rendelkezik, vis. invariáns a $\Phi \to \Phi' = e^{-\mathrm{i}\alpha}\Phi$ transzformációval szemben, ahol α tetszőleges valós állandó. A megmaradó áramot úgy határozzuk meg, hogy α-t x-függővé tesszük. Lokális U(1) transzformáció során a Lagrange-sűrűség megváltozása:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;\to\; & \mathcal{L}' = \partial_\mu \left(\Phi^* e^{\mathrm{i}\alpha(x)}\right) \partial^\mu \left(\Phi e^{-\mathrm{i}\alpha(x)}\right) \\
& - m^2 \Phi^* \Phi - \lambda (\Phi^* \Phi)^2 \\
= \; & \mathcal{L} + \Phi^* \Phi \partial_\mu \alpha \partial^\mu \alpha + \mathrm{i} \partial_\mu \alpha (\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Ezt felhasználva $\alpha(x)$ mozgásegyenlete

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial^\mu \alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \alpha} = 0 \qquad (3.3)$$

alakot ölt, ahonnan a megmaradó áram

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial^\mu \alpha)} = \Phi^* \Phi \partial_\mu \alpha + \mathrm{i}(\Phi^* \partial_\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*). \qquad (3.4)$$

Az $\alpha = \text{const.}$ helyettesítéssel megkapjuk az eredeti elmélet megmaradó áramát:

$$j_\mu = \mathrm{i}(\Phi^* \partial_\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*), \qquad (3.5)$$

amelyre $\partial^\mu j_\mu = 0$, és a megmaradó töltés

$$Q = \int d^3x\, j_0(x). \qquad (3.6)$$

Kényelmi okok miatt célszerű áttérni valós térmennyiségekre a $\Phi = 2^{-1/2}(\Phi_1 + i\Phi_2)$ összefüggéssel. Elemi átalakítás után a Lagrange-sűrűség

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi_1\partial^\mu\Phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi_2\partial^\mu\Phi_2 - \frac{1}{2}m^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 \tag{3.7}$$

alakot ölt. A valós Φ_a $(a = 1, 2)$ terekhez kanonikusan konjugált impulzusok: $\pi_a = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}_a = \partial_t\Phi_a$. A Hamilton-sűrűség:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\pi_1^2 + \frac{1}{2}\pi_2^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Phi_2)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Látjuk, hogy amennyiben nincsen kölcsönhatás $(\lambda = 0)$, akkor a Φ_a $(a = 1, 2)$ terek egymástól függetlenek. A megmaradó áram

$$j_\mu = \Phi_2\partial_\mu\Phi_1 - \Phi_1\partial_\mu\Phi_2 \tag{3.9}$$

alakra hozható, úgyhogy

$$j_0 = \Phi_2\pi_1 - \Phi_1\pi_2 \quad \text{és} \quad Q = \int d^3x(\Phi_2\pi_1 - \Phi_1\pi_2). \tag{3.10}$$

Az 1. fejezetben kapott eredmény alapján a töltött skalártér partíciós függvényére az alábbi kifejezés adódik:

$$\begin{aligned}Z &= \int[d\pi_1][d\pi_2]\int_{\text{per.}}[d\Phi_1][d\Phi_2]\exp\left\{\int_0^\beta d\tau\int d^3x\,[i\pi_1\partial_\tau\Phi_1 + i\pi_2\partial_\tau\Phi_2\right. \\ &\quad \left. -\mathcal{H} + \mu(\Phi_2\pi_1 - \pi_2\Phi_1)]\right\}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

A partíciós függvényben a kanonikus impulzusok szerinti integrálok Gauss-típusúak és elvégezhetők:

$$\begin{aligned}&\int[d\pi_a]\quad\exp\quad\left\{\int_0^\beta\int d^3x\left[-\frac{1}{2}\pi_a^2 + \pi_a(i\partial_\tau\Phi_a + \mu\Phi_a)\right]\right\} \\ &\qquad = N'\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\int d^3x\frac{1}{2}(\partial_\tau\Phi_a + i\mu\Phi_a)^2\right\}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ezt felhasználva a partíciós függvény

$$\begin{aligned}Z &= (N')^2\int_{\text{per.}}[d\Phi_1][d\Phi_2]\exp\left\{\int_0^\beta d\tau\int d^3x\left[-\frac{1}{2}(\partial_\tau\Phi_1 - i\mu\Phi_2)^2\right.\right. \\ &\quad -\frac{1}{2}(\partial_\tau\Phi_2 + i\mu\Phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Phi_2)^2 \\ &\quad \left.\left. -\frac{1}{2}m^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2\right]\right\}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

A kitevő itt $\mathcal{L}(\mu = 0) + \mu j_0 + \mu^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)/2$ alakú, ami az $m^2 \to m^2 - \mu^2$ helyettesítésnek felel meg.

A valós és τ-ban periodikus Φ_a tereket most is Fourier-sorba fejtjük:

$$\Phi_a = \sqrt{2}\zeta_a + \left(\frac{\beta}{V}\right)^{1/2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \exp\{\mathrm{i}(\vec{p}\vec{x} + \omega_n \tau)\}\Phi_{an}(\vec{p}), \tag{3.14}$$

ahol $\Phi_{a0} = 0$, vis. a zérus impulzusú komponenst teljes egészében az első taggal vesszük figyelembe, $\zeta_1 = \zeta \cos\Theta$ és $\zeta_2 = \zeta \sin\Theta$, ζ és Θ valósak. Amennyiben $\zeta \neq 0$ adódik majd, akkor ez azt jelenti, hogy makroszkópikus mennyiségű részecske kondenzálódott az egyrészecskés alapállapotba. Ebben a fejezetben a továbbiakban a kölcsönhatás nélküli esetet tárgyaljuk.

Helyettesítsük be a fenti Fourier-sort a hatás kifejezésébe. Kicsit hosszadalmas, de elemi számolás után a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} S &= \beta V(\mu^2 - m^2)\zeta^2 \\ &\quad - \sum_n \sum_{\vec{p}} (\Phi_{1,-n}(-\vec{p}), \Phi_{2,-n}(-\vec{p}))\ D \begin{pmatrix} \Phi_{1n}(\vec{p}) \\ \Phi_{2n}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

ahol bevezettük a

$$D = \beta^2 \begin{pmatrix} \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 & -2\mu\omega_n \\ 2\mu\omega_n & \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

mátrixot. Az állapotösszeg ezek után:

$$Z = (N')^2 \left(\prod_n \prod_{\vec{p}} \int d\Phi_{1n}(\vec{p}) d\Phi_{2n}(\vec{p}) \right) e^S. \tag{3.17}$$

Rátérünk az útintegrálok kiszámolására. Mivel Φ_a valós, most is igaz, hogy $\Phi_{a,-n}(-\vec{p}) = \Phi_{a,n}^*(\vec{p})$. Ezért a Fourier-amplitúdók szerinti integrálok, - semleges skalártér esetéhez hasonlóan -, most is a Fourier-amplitúdók abszolut értékei szerinti integrálokra vezethetők vissza. Az eredmény:

$$\ln Z = \beta V(\mu^2 - m^2)\zeta^2 + \ln(\det D)^{-1/2}, \tag{3.18}$$

ahol

$$-\frac{1}{2}\ln(\det D) = -\frac{1}{2}\ln\left\{ \prod_n \prod_{\vec{p}} \beta^4 \left[(\omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2\omega_n^2 \right] \right\}. \tag{3.19}$$

A szögletes zárójelben lévő kifejezést szorzatalakra hozzuk:

$$\left[\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2\right] \left[\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2\right] \tag{3.20}$$

Ezt felhasználva a partíciós függvény:

$$\begin{aligned}\ln Z &= \beta V(\mu^2-m^2)\zeta^2 - \sum_n\sum_{\vec p}\ln\left\{\beta^2\left[\omega_n^2+(\omega-\mu)^2\right]\right\}\\ &\quad -\sum_n\sum_{\vec p}\ln\left\{\beta^2\left[\omega_n^2+(\omega+\mu)^2\right]\right\}. \qquad (3.21)\end{aligned}$$

A két utolsó tag ugyanolyan alakú összeg, mint amilyennel semleges skalártér esetén volt dolgunk, azzal a különbséggel, hogy az $\omega \to \omega \pm \mu$ helyettesítést kell elvégezni a semleges skalártér esetében kapott eredményben. Igy

$$\begin{aligned}\ln Z &= \beta V(\mu^2-m^2)\zeta^2 - V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,[\beta\omega\\ &\quad +\ln\{1-\exp(-\beta(\omega-\mu))\}+\ln\{1-\exp(-\beta(\omega+\mu))\}] \qquad (3.22)\end{aligned}$$

a végképletünk a töltött skalártér partíciós függvényére. Az első tag az alapállapotba kondenzált részecskék járuléka, a második tag a vákuum járuléka, a harmadik és negyedik tag pedig a termikus gerjesztés révén keletkezett részecskék és antirészecskék járulékai. A harmadik és negyedik tagban szereplő integrál csak $|\mu| \leq m (< \omega)$ esetén konvergens, ezért a kémiai potenciál csak a $[-m, m]$ intervallumban változhat. Az állapotösszeg független Θ-tól, ugyanakkor függ a kondenzátum ζ amplitúdójától, ami megfigyelhető fizikai mennyiség. Ennek értékét termodinamikai egyensúlyban a

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial\zeta} = 2\beta V(\mu^2-m^2)\zeta = 0 \qquad (3.23)$$

egyenlet határozza meg. Innen $\zeta = 0$ adódik, ha $|\mu| \neq m$. Kondenzátum tehát csak akkor keletkezik, ha $\mu = \pm m$. Utóbbi esetben a kondenzátum amplitúdójának értékét az határozza meg, hogy mennyi a rendszer Q töltése, ill. $\rho = Q/V$ töltéssűrűsége. Vegyük pl. a $\mu = m$ esetet. Ekkor

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{T}{V}\frac{\partial\ln Z}{\partial\mu}\Big|_{\mu=m}\\ &= 2m\zeta^2+\rho^*(\beta,\mu=m), \qquad (3.24)\end{aligned}$$

ahol

$$\rho^* = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\exp\{\beta(\omega-m)\}-1}-\frac{1}{\exp\{\beta(\omega+m)\}-1}\right) \qquad (3.25)$$

a nem kondenzált részecskék által hordozott töltéssűrűség. A kondenzátum töltéssűrűsége $2m\zeta^2$.

A kondenzátum kialakulása kvalitatíve a következőképpen történik, ha a ρ töltéssűrűség állandó és a hőmérséklet csökken. A kémiai potenciál ilyenkor a $\mu = m$ értékig nő, amelyet a $T = T_c$ kritikus hőmérsékleten ér el. Ha a hőmérséklet a kritikus T_c érték alá csökken, akkor $\mu = m$ állandó marad, hiszen nem nőhet tovább. Közben azonban megindul a kondenzáció, amelyet a kondenzátum amplitúdójának fokozatos növekedése jelez:

$$\zeta^2 = \frac{1}{2m}\left(\rho - \rho^*(\beta, \mu = m)\right). \tag{3.26}$$

A kritikus hőmérsékletet a

$$\rho \;=\; \rho^*(\beta_c, \mu = m) \tag{3.27}$$

egyenletből határozhatjuk meg. A fázisátalakulás másodrendű és rendparamétere ζ. Ennek T-függését az ábra szemlélteti.

æ

4 Fermiontér partíciós függvénye

Az előzőekben a bozonok statisztikus fizikai leírásával foglalkoztunk. Most kiterjesztjük tanulmányainkat a fermionokra is. Az 1/2 spinű fermionok (leptonok és kvarkok) Lagrange-sűrűsége:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/ - m)\psi \\ &= \psi^+\gamma^0(\mathrm{i}\gamma^0\partial_t + \mathrm{i}\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m)\psi\end{aligned} \tag{4.1}$$

ahol $\partial\!\!\!/ = \partial_\mu\gamma^\mu$ és a Dirac-mátrixok algebrája $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Utóbbiakra a

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

ábrázolást használjuk.

A Dirac-tér Lagrange-sűrűsége invariáns a globális U(1) mértéktranszformációkkal szemben:

$$\psi \to \psi e^{-\mathrm{i}\alpha}, \qquad \psi^+ \to \psi^+ e^{\mathrm{i}\alpha}. \tag{4.3}$$

A megmaradó áramot most is megtalálhatjuk azzal a módszerrel, hogy a transzformációt lokálissá tesszük, és $\alpha(x)$ mozgásegyenletéből olvassuk ki az áramot, majd $\alpha(x)$ helyére újra állandót írunk. Lokális U(1) transzformáció során a Lagrange-sűrűség megváltozása:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \bar{\psi}(\partial\!\!\!/\alpha)\psi. \tag{4.4}$$

Az $\alpha(x)$-re vonatkozó Euler-Lagrange-egyenlet:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \alpha)} = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0, \tag{4.5}$$

mivel $\partial\mathcal{L}/\partial\alpha = 0$. Innen a megmaradó áramra

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{4.6}$$

adódik, ami $\alpha =$áll. helyettesítés után sem változik. A megmaradó töltés innen:

$$Q = \int d^3x j^0 = \int d^3x \psi^+\psi. \tag{4.7}$$

A ψ és ψ^+ komplex térmennyiségek független dinamikai változókként kezelendők a Hamilton-formalizmusban, hiszen a ψ-hez kanonikusan konjugált impulzus

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)} = \mathrm{i}\psi^+. \tag{4.8}$$

A Hamilton-sűrűség

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi\partial_t\psi - \mathcal{L} \\ &= \mathrm{i}\psi^+\partial_t\psi - \psi^+(\mathrm{i}\partial_t\psi) - \bar{\psi}(\mathrm{i}\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m)\psi \\ &= \bar{\psi}(-\mathrm{i}\vec{\gamma}\vec{\nabla} + m)\psi \end{aligned} \tag{4.9}$$

alakot ölt. Ennek ismeretében teljesen hasonlóan, mint a bozonok esetén, megkaphatjuk a partíciós függvény útintegrál alakjában történő előállítását:

$$\begin{aligned} Z &= \mathrm{Tr}\exp\{-\beta(H-\mu Q)\} \\ &= \int[\mathrm{i}d\psi^+][d\psi]\exp\left\{\int_0^\beta d\tau\int d^3x(\mathrm{i}\Pi\partial_\tau\psi - \mathcal{H} + \mu j^0)\right\} \\ &= \int[\mathrm{i}d\psi^+][d\psi]\exp\left\{\int_0^\beta d\tau\int d^3x(-\psi^+\partial_\tau\psi\right. \\ &\quad \left. +\mathrm{i}\bar{\psi}\vec{\gamma}\vec{\nabla}\psi - m\bar{\psi}\psi + \mu\psi^+\psi)\right\} \\ &= \int[\mathrm{i}d\psi^+][d\psi]\exp\left\{\int_0^\beta d\tau\int d^3x\bar{\psi}\left(-\gamma^0\partial_\tau + \mathrm{i}\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m + \mu\gamma^0\right)\psi\right\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

A formai hasonlóság ellenére két nagyon lényeges különbség van a bozonok esetéhez képest. Az egyik az, hogy a fentiekben szereplő ψ és ψ^+ klasszikus térmennyiségek nem közönséges számok, hanem az ún. Grassmann-algebra elemei között veszik fel értékeiket. A másik pedig az, hogy a fermionterek a képzetes időváltozóban nem periodikusak hanem antiperiodikusak.

Mint azzal már térelméleti bevezető tanulmányaink során megismerkedtünk, a klasszikus fermiontereket a Grassmann-algebra elemeivel kell ábrázolni. A jelen fejezetben adott előző levezetéseink során a változók sorrendjére gondosan ügyeltünk, azért azok Grassmann-értékű térváltozókra is helyesek. Hadd álljon itt még egy a továbbiak során felhasználásra kerülő Grassmann-változókra vonatkozó eredmény. Ha η_α és η_α^+ $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$ Grassmann-változók, akkor a Gauss-integrál értéke:

$$\int d\eta_1^+ d\eta_1 \ldots d\eta_N^+ d\eta_N \exp(\eta^+ D\eta) = \mathrm{det} D, \tag{4.11}$$

ahol $D_{\alpha\beta}$ $N \times N$-es mátrix.

Térjünk most rá a fermionterek és bozonterek termodinamikai leírása közötti másik különbségre. A fermionteret is Fourier-sorba-fejtjük:

$$\psi_\alpha(\vec{x}, \tau) \quad = \quad V^{-1/2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \exp\{\mathrm{i}(\vec{p}\vec{x} + \omega_n \tau)\} \psi_{\alpha,n}(\vec{p}), \tag{4.12}$$

ahol $0 \leq \tau \leq \beta$ és $\omega_n = n\pi T$ lehetne (n tetszőleges egész). Valójában azonban bozonokra és fermionokra ω_n lehetséges értékei különböznek. Az előző fejezetekben láttuk, hogy ha a bozontereket periodikusnak tekintjük,

$$\text{(B)} \qquad \Phi(\vec{y}, 0) = \Phi(\vec{y}, \beta), \tag{4.13}$$

akkor helyesen kapjuk vissza az ideális bozon-gáz állapotegyenletét, ahogyan azt kvantummechanikából megtanultuk. A periodikusságnak az a következménye, hogy a bozontér Fourier-sorában csak a páros egész számoknak megfelelő $\omega_n = 2n\pi T$ (n tetszőleges egész) frekvenciák lépnek fel. Ugyanakkor az ideális Fermi-gáz kvantummechanikából megtanult állapotegyenletét akkor kapjuk csak helyesen vissza, ha feltételezzük, hogy a fermiontér antiperiodikus:

$$\text{(F)} \qquad \psi(\vec{y}, 0) = -\psi(\vec{y}, \beta). \tag{4.14}$$

Ebből az következik, hogy a fermiontér Fourier-sorában csak a páratlan egész számoknak megfelelő $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ frekvenciák szerepelnek. A fermiontér (**??**) partíciós függvényében tehát az összes klasszikus (Grassmann-értékű), a képzetes időben antiperiodikus függvénnyel leírt térkonfigurációra integrálunk.

æ

5 Az ideális Fermi-gáz állapotegyenlete

Helyettesítsük be az előző fejezetben definiált (??) partíciós függvénybe a ψ térmennyiség Fourier-sorát. Az eredmény tömör alakban így írható:

$$Z = \left(\prod_n \prod_{\vec{p}} \prod_\alpha \int id\psi^+_{\alpha,n}(\vec{p}) d\psi_{\alpha,n}(\vec{p}) \right) e^S, \tag{5.1}$$

ahol a hatás

$$S = \sum_n \sum_{\vec{p}} i\psi^+_{\alpha,n}(\vec{p}) D_{\alpha\rho} \psi_{\rho,n}(\vec{p}) \tag{5.2}$$

és

$$D = -i\beta \left[(-i\omega_n + \mu) - \gamma^0 \vec{\gamma}\vec{p} - m\gamma^0 \right]. \tag{5.3}$$

Az állapotösszeg Gauss-integrál, úgyhogy az értéke:

$$Z = \det D. \tag{5.4}$$

A D mátrix a $\vec{p}$ és az n indexekben diagonális. A 4×4-es aldeterminánsok értéke elemi számolással adódik:

$$\begin{aligned} \det{}_4 D_n(\vec{p}) &= \beta^4 \left[(-i\omega_n + \mu)^2 - m^2 - \vec{p}^{\,2} \right]^2 \\ &= \beta^4 \left[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right]^2 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Az állapotösszeg logaritmusa ezek szerint:

$$\begin{aligned} \ln Z &= \ln \det D = \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \det{}_4 D_n(\vec{p}) \\ &= 2 \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left\{ \beta^2 \left[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right] \right\}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Tekintve, hogy az n-re vonatkozó összeg egyaránt végigfut a negatív és a pozitív egész számokon, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \ln Z &= \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left\{ \beta^2 \left[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right] \right\} \\ &\quad + \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left\{ \beta^2 \left[(-\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right] \right\}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Használjuk fel, hogy

$$\begin{aligned} &\left[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right] \left[(-\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right] \\ &= \left[\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2 \right] \left[\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2 \right], \end{aligned} \tag{5.8}$$

ekkor

$$\begin{aligned}\ln Z &= \sum_n \sum_{\vec{p}} \Big\{ \ln\left(\beta^2\left[\omega_n^2 + (\omega-\mu)^2\right]\right) \\ &\quad + \ln\left(\beta^2\left[\omega_n^2 + (\omega+\mu)^2\right]\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

A frekvenciák szerinti összegzés megint hasonlóan végezhető el, mint szabad bozonterek esetén. Felhasználjuk az

$$\begin{aligned}\ln\left[(2n+1)^2\pi^2 + \beta^2(\omega\pm\mu)^2\right] &= \int_1^{\beta^2(\omega\pm\mu)^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2n+1)^2\pi^2} \\ &\quad + \ln\left[1 + (2n+1)^2\pi^2\right] \end{aligned} \tag{5.10}$$

azonosságot, valamint a

$$\sum_n \frac{1}{\theta^2 + (2n+1)^2\pi^2} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^\theta + 1}\right) \tag{5.11}$$

nevezetes összeget. Elvégezzük a θ szerinti integrálást és ismét elhagyjuk a hőmérséklettől és a kémiai potenciáltól független tagokat, továbbá a termodinamikai limeszt képezzük, aminek kapcsán áttérünk a folytonos impulzusváltozóra. Végül a partíciós függvény az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned}\ln Z &= 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Big[\beta\omega + \ln\left(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)}\right) \\ &\quad + \ln\left(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)}\right)\Big]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Az ideális Fermi-gáz állapotegyenletét ezek után a jól ismert statisztikus fizikai összefüggések alapján számoljuk ki. A rendszer energiája:

$$\begin{aligned}E &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} + \frac{\mu}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \\ &= 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{-\omega + \omega\left[n_-(\omega) + n_+(\omega)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

ahol az első tag a vákuum energiája, amit a továbbiakban elhagyunk, mert az energiákat a vákuum energiájához viszonyítjuk. Bevezettük továbbá a részecske- és az antirészecske állapotok átlagos betöltési számát:

$$n_\pm = \left\{\exp\left(\beta(\omega\pm\mu)\right)\right\}^{-1}. \tag{5.14}$$

Az ideális Fermi-gáz nyomása:

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \\ &= \frac{2}{\beta}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\beta\omega - \ln\left(1 - n_-(\omega)\right) - \ln\left(1 - n_+(\omega)\right)\right], \end{aligned} \tag{5.15}$$

ahol az első tag megint a vákuum nyomása, amelyet a továbbiakban elhagyunk. Parciális integrálás után a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\beta\pi^2}\int_0^\infty dp\, p^2 \left[\ln\left(1+e^{-\beta(\omega-\mu)}\right)+\ln\left(1+e^{-\beta(\omega+\mu)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3\pi^2}\int_0^\infty dp\, \frac{p^4}{\omega}\left[n_+(\omega)+n_-(\omega)\right]. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Végezetül a szabad fermiongáz töltése:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \\ &= 2V\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[n_-(\omega)-n_+(\omega)\right]. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Az eddigi fejezetek eredményeit úgy összegezhetjük, hogy sikerült a statisztikus fizikai tárgyalást szabad bozon és fermionterekre általánosítani az útintegrálok módszerével. Meg tudtuk adni a partíciós függvény olyan definícióját, amely bozonok és fermionok esetén is reprodukálja az egyensúlyi ideális Fermi- és Bose-gázok termodinamikai viselkedését. Láttuk, hogy a szóban forgó partíciós függvény szoros kapcsolatban van a zérus hőmérsékletű térre vonatkozó vákuum-vákuum átmeneti amplitúdóval. A továbbiakban a partíciós függvény útintegrálos definícióját általánosan el fogjuk fogadni kölcsönható terek esetében is.

æ

II. KÖLCSÖNHATÓ RENDSZEREK

6 A partíciós függvény perturbációs sora

Bontsuk fel a hatást egy kölcsönhatásmentes S_0 és a kölcsönhatást leíró S_I tag összegére: $S = S_0 + S_I$. Fejtsük a partíciósfüggvényt a kölcsönhatás szerint hatványsorba:

$$
\begin{aligned}
Z &= N' \int [d\Phi] e^{S} \\
&= N' \int [d\Phi] e^{S_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} S_I^{\ell}.
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

A partíciós függvény logaritmusában is különválasztjuk a szabad terektől és a kölcsönhatástól származó részt:

$$
\begin{aligned}
\ln Z &= \ln \left(N' \int [d\Phi] e^{S_0} \right) + \ln \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell!} < S_I^{\ell} >_0 \right) \\
&= \ln Z_0 + \ln Z_I,
\end{aligned} \tag{6.2}
$$

ahol

$$
< S_I^{\ell} >_0 = \frac{\int [d\Phi] e^{S_0} S_I^{\ell}}{\int [d\Phi] e^{S_0}}. \tag{6.3}
$$

Itt $\ln Z_0$ a szabad terek partíciós függvénye, amely a kölcsönhatás mentes vákuumtól és a terek elemi gerjesztéseinek ideális gázától származó járulékot tartalmaz. Erre az előző fejezetekben láttunk példákat. Felhasználva, hogy

$$
\begin{aligned}
\ln < e^x > &= \ln \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{< x^{\ell} >}{\ell!} \right) \\
&= - \Bigg[- < x > - \frac{< x^2 >}{2!} - \frac{< x^3 >}{3!} - \dots \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(< x > + \frac{< x^2 >}{2!} + \dots \right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{3} < x >^3 + \dots \Bigg] \\
&= < x > + \frac{< x^2 >}{2!} - \frac{< x >^2}{2} \\
&\quad + \frac{< x^3 >}{3!} + \frac{< x^2 >}{2!} < x > - \frac{< x >^3}{3} + \dots,
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

a partíciós függvény perturbációs sora a kölcsönhatásban harmadik renddel bezárólag az alábbi alakot ölti:

$$
\begin{aligned}
\ln Z_I &= < S_I >_0 \\
&\quad + \frac{1}{2!} < S_I^2 >_0 - \frac{1}{2} < S_I >_0^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!} < S_I^3 >_0 + \frac{1}{2!} < S_I^2 >_0 < S_I >_0 - \frac{1}{3} < S_I >^3 + \dots
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

A következő fejezetekben megmutatjuk az önkölcsönható skalártér példáján, hogy hogyan írhatjuk le a kölcsönható terek termodinamikai viselkedését a perturbációszámítás módszerével. Később hasonlóan fogunk eljárni a kvantumelektrodinamikában és a kvantumszíndinamikában is.

Végül megemlítjük, hogy a fenti perturbációs sor konvergenciája, az integrálok és a sorfejtések felcserélhetősége nem triviális kérdések. Ezek vizsgálatával dönthető el az is, hogy alkalmazható-e egyáltalán a perturbációszámítás valamely konkrét esetben. E kérdések vizsgálata azonban messze túl megy egy bevezető jegyzet keretein. æ

7 Az önkölcsönható skalártér

A kölcsönhatási tag a Lagrange-sűrűségben

$$\mathcal{L}_I = -\lambda\Phi^4 \tag{7.1}$$

Az eljárásunk az lesz, hogy a perturbációszámítás első néhány rendjében kiszámolva a partíciós függvényt, megtaláljuk azokat a szabályokat, amelyek segítségével a képleteknek diagrammokat feleltethetünk meg. Ezek a $T=0$ térelméletben megszokott Feynman-diagrammok általánosításai. Ezek után $\ln Z_I$-t a kölcsönhatás tetszőleges rendjében úgy kapjuk meg, hogy megszerkesztjük az összes lehetséges, a szabályoknak megfelelő diagrammot. A perturbációszámítás első rendjében a partíciós függvény kölcsönhatási része:

$$\ln Z_1 = \frac{-\lambda\int_0^\beta d\tau\int d^3x\int[d\Phi]e^{S_0}\Phi^4(\vec{x},\tau)}{\int[d\Phi]e^{S_0}} \tag{7.2}$$

Helyettesítsük ide be a skalártér Fourier-sorát:

$$\Phi(\vec{x},\tau) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{1/2}\sum_n\sum_{\vec{p}}\exp\{i(\vec{p}\vec{x}+\omega_n\tau)\}\Phi_n(\vec{p}). \tag{7.3}$$

Ekkor az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned}\ln Z_1 = &\\ &-\lambda\int_0^\beta d\tau\int d^3x\frac{\beta^2}{V^2}\sum_{n_1n_2n_3n_4}\sum_{p_1p_2p_3p_4}\exp\{\mathrm{i}(\vec{p}_1+\ldots+\vec{p}_4)\vec{x}+\mathrm{i}(\omega_{n_1}+\ldots+\omega_{n_4})\tau\}\\ &\cdot\prod_{\ell\, q}\int d\Phi_\ell(\vec{q})\exp\left\{-\frac{1}{2}\beta^2(\omega_\ell^2+\vec{q}^{\,2}+m^2)\Phi_\ell(\vec{q})\Phi_{-\ell}(-\vec{q})\right\}\\ &\cdot\frac{\Phi_{n_1}(\vec{p}_1)\ldots\Phi_{n_4}(\vec{p}_4)}{\prod_{\ell\, q}\int d\Phi_\ell(\vec{q})\exp\left\{-\frac{1}{2}\beta^2(\omega_\ell^2+\vec{q}^{\,2}+m^2)\Phi_\ell(\vec{q})\Phi_{-\ell}(-\vec{q})\right\}}\end{aligned} \tag{7.4}$$

Ennek kiszámolásakor vegyük észre a következőket:

1. A képzetes idő és a térfogat szerinti integrálás közvetlenül elvégezhető és a

$$V\delta_{\vec{p}_1+\ldots+\vec{p}_4,0}\beta\delta_{n_1+\ldots+n_4,0}$$

eredményt adja.

2. A Fourier-amplitúdók szerinti integrálás a számlálóban zérust ad, hacsak nem az teljesül, hogy

$$\begin{aligned} n_4 &= -n_2, \qquad & \vec{p}_4 &= -\vec{p}_2, \\ n_3 &= -n_1, \qquad & \vec{p}_3 &= -\vec{p}_1, \end{aligned}$$

avagy ezek két másik permutációja. Az ok az, hogy ellenkező esetben a komplex Fourier-amplitúdók fázisa szerinti integrálok az $\ell = n_1, \ldots, n_4$ esetekben zérust adnak. A 3 különböző permutáció azonban azonos eredményt ad.

3. Az előző pontban leírt esetben az integrál szorzat alakot ölt. A nevezőben és a számlálóban szereplő tényezők kölcsönösen kiejtik egymást, kivéve az $\ell = n_1$, $\vec{q} = \vec{p}_1$ és az $\ell = n_2$, $\vec{q} = \vec{p}_2$ tényezőket. A szóbanforgó tényezők

$$\frac{\int_0^\infty dx x^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}ax^2\right\}}{\int_0^\infty dx \exp\left\{-\frac{1}{2}ax^2\right\}} = \frac{1}{a}$$

alakúak. (A Fourier-amplitúdók fázisa szerinti integrálás triviális, marad az abszolútértékük szerinti integrálás.)

Mindezeket figyelembe véve az alábbi eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} \ln Z_1 &= -3\lambda\beta V\left[\frac{\beta^2}{V^2}\sum_{n_1 n_2} V^2 \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{\beta^2(\omega_{n_1}^2+\vec{p}_1^{\,2}+m^2)}\frac{1}{\beta^2(\omega_{n_2}^2+\vec{p}_2^{\,2}+m^2)}\right] \\ &= -3\lambda\beta V\left[\frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathcal{D}_0(\omega_n,\vec{p})\right]^2. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Ezek után a következő szabály szerint járunk el, amikor a fenti képletnek diagrammot feleltetünk meg:

1. Bevezetünk egy négylábú vertexet:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \quad -\lambda\beta\delta_{\omega_{be},\omega_{ki}}V\delta_{\vec{p}_{be},\vec{p}_{ki}} \\ &\rightarrow -\lambda\beta\delta_{\omega_{be},\omega_{ki}}(2\pi)^3\delta(\vec{p}_{be}-\vec{p}_{ki}). \end{aligned} \tag{7.6}$$

2. Belső részecskevonalakkal kötjük össze a vertexeket. Ezekre:

$$\rightarrow \quad T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathcal{D}_0(\omega_n,\vec{p}). \tag{7.7}$$

Az 1. szabály következtében minden zárt diagramm esetén egy impulzus szerinti integrálás és a megfelelő frekvenciák szerinti összegzés elvégezhető és egy βV szorzót eredményez.

A fenti megfeleltetésnek megfelelően az elsőrendű korrekció diagrammja:

$$\ln Z_1 \;=\; 3 \qquad\qquad . \tag{7.8}$$

A másodrendű korrekció két tagot tartalmaz:

$$\ln Z_2 \;=\; \frac{1}{2} < S_I^2 >_0 - \frac{1}{2} < S_I >_0^2 . \tag{7.9}$$

A második tag diagrammja:

$$-\frac{1}{2}(3 \qquad\qquad)^2 \tag{7.10}$$

Az első tagnak megfelelő diagrammok két vertexet tartalmaznak. Ha az összes lehetséges módon összekötjük őket belső részecskevonalakkal, akkor az alábbi diagrammok adódnak:

$$\frac{1}{2} < S_I^2 >_0 \;=\; \frac{1}{2}\Bigg[(3 \qquad\qquad)^2 + \frac{4\cdot 4\cdot 3\cdot 3}{2!} \\ + \frac{4\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2}{4!} \qquad\qquad \Bigg] . \tag{7.11}$$

$$\tag{7.12}$$

Itt mindjárt feltüntettük, hogy a lehetséges permutációk miatt milyen kombinatorikai faktorral szerepel egy-egy diagramm. A második diagramm esetén az egyik vertex egy lábát 4-féleképpen választva, azt a másik vertex négy lábával köthetjük össze. Minden esetben az első vertex egy további szabad lábát 3-féleképpen választhatjuk ki, s azt a másik vertex 3 szabad lába közül bármelyikkel összeköthetjük. Ezek után a végeken levő szabad lábak összekötése egyértelmű. A középső két vonal 2! lehetséges permutációja miatt azonban a diagrammokat duplán számoltuk. A harmadik diagramm esetén ugyanúgy kezdjük el a vertexeket összekötni mint az előbb, azonban a baloldali két szabad láb közül bármely 2-t összeköthetjük a végén a jobboldali két szabad láb bármelyikével. Most mind a 4 részecskevonal tetszőlegesen permutálható, így minden diagrammot 4!-szorosan vettünk figyelembe.

A kombinatorikai faktorok az alábbi egyszerű szabályszerűséget mutatják:

1. Vertexenként megjelenik egy 4! szorzó (a négy vertexláb lehetséges permutációinak a száma).

2. További $(n!)^{-1}$ szorzók jelennek meg, ha két rögzített vertex között n darab részecskevonal teremt összeköttetést. (Az azonos két vertexet összekötő részecskevonalak permutációi nem jelentenek új diagrammokat.)

Az első szabály a $\lambda\Phi^4$ elméletre nézve specifikus, míg a második szabály általános érvényű. Így a kvantumelektrodinamikában és a kvantumszíndinamikában is alkalmazható a topológiailag különböző vázdiagrammok kombinatorikai faktorainak megállapítására.

Vegyük észre, hogy ha az összes másodrendű járulékot figyelembe vesszük, akkor a nem összefüggő diagrammok a partíciós függvényből kiesnek. Ez a perturbációszámítás tetszőleges rendjében bizonyíthatóan így van. A nem összefüggő diagrammok járulékai $\ln Z_I$-ben zérusra összegződnek. A partíciós függvény adott rendű korrekciójának kiszámolásához elegendő tehát az összes összefüggő gráfot megszerkeszteni az adott rendben. A kölcsönhatás második rendjében az eredmény tehát:

$$
\begin{aligned}
\ln Z_2 &= 36 \qquad\qquad + \; 12 \\
&= 36(-\lambda)^2\beta V\, T\sum_{n_1}\int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}\dots T\sum_{n_4}\int\frac{d^3p_4}{(2\pi)^3} \\
&\cdot\mathcal{D}_0(\omega_{n_1},\vec{p}_1)\mathcal{D}_0(\omega_{n_2},\vec{p}_2)\mathcal{D}_0(\omega_{n_3},\vec{p}_3)\mathcal{D}_0(\omega_{n_4},\vec{p}_4) \\
&\cdot(2\pi)^3\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\beta\delta_{n_1+n_2,0} \\
&+12(-\lambda)^2\beta V\, T\sum_{n_1}\int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}\dots T\sum_{n_4}\int\frac{d^3p_4}{(2\pi)^3} \\
&\cdot\mathcal{D}_0(\omega_{n_1},\vec{p}_1)\mathcal{D}_0(\omega_{n_2},\vec{p}_2)\mathcal{D}_0(\omega_{n_3},\vec{p}_3)\mathcal{D}_0(\omega_{n_4},\vec{p}_4) \\
&\cdot(2\pi)^3\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3+\vec{p}_4)\beta\delta_{n_1+n_2+n_3+n_4,0}. \qquad (7.13)
\end{aligned}
$$

æ

8 Skalárrészecske propagátora és sajátenergiája

Definiáljuk a véges hőmérsékletű skalártér propagátorát:

$$
\mathcal{D}(\vec{x}_1,\tau_1;\vec{x}_2,\tau_2) \;=\; <\Phi(\vec{x}_1,\tau_1)\Phi(\vec{x}_2,\tau_2)> . \qquad (8.1)
$$

A transzlációs invariancia miatt ez csak az $\vec{x}=\vec{x}_1-\vec{x}_2$ és $\tau=\tau_1-\tau_2$ változóktól függ. Éljünk ezért az $\vec{x}_1=\vec{x}$, $\vec{x}_2=0$, $\tau_1=\tau$ és $\tau_2=0$ választással és képezzük a propagátor Fourier-transzformáltját. A térmennyiség Fourier-sorát felhasználva kapjuk az alábbiakat:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\omega_n,\vec{p}) &= \int_0^\beta d\tau\int d^3x\exp\{-\mathrm{i}(\vec{p}\vec{x}+\omega_n\tau)\}\mathcal{D}(\vec{x},\tau) \\
&= \sum_{n_1n_2}\sum_{p_1p_2}\frac{\beta}{V}<\Phi_{n_1}(\vec{p}_1)\Phi_{n_2}(\vec{p}_2)> \\
&\cdot\int_0^\beta d\tau\int d^3x\exp\{\mathrm{i}(\vec{p}_1-\vec{p})\vec{x}+\mathrm{i}(\omega_{n_1}-\omega_n)\tau\} \\
&= \sum_{n_1n_2}\sum_{p_1p_2}\frac{\beta}{V}<\Phi_{n_1}(\vec{p}_1)\Phi_{n_2}(\vec{p}_2)> \;V\delta_{\vec{p}_1\vec{p}}\beta\delta_{n_1n} \\
&= \beta^2<\Phi_n(\vec{p})\Phi_{-n}(-\vec{p})> . \qquad (8.2)
\end{aligned}
$$

A harmadik egyenlőség felírásakor felhasználtuk, hogy a $<\Phi_{n_1}(\vec{p}_1)\Phi_{n_2}(\vec{p}_2)>$ várható érték akkor és csak akkor nem nulla, ha $n_1=-n_2$ és $\vec{p}_1=-\vec{p}_2$. Ha a várható értéket kiírjuk pályaintegrál alakjában, akkor a kölcsönható skalártér propagátora immpulzusreprezentációban:

$$\mathcal{D}(\omega_n,\vec{p}) \;=\; \beta^2 \frac{\int[d\Phi]e^S\Phi_n(\vec{p})\Phi_{-n}(-\vec{p})}{\int[d\Phi]e^S} \tag{8.3}$$

Következő lépésként a propagátort kifejezzük a partíciós függvény segítségével. A kölcsön nem ható skalártér $\mathcal{D}_0$ propagátorának inverze:

$$\mathcal{D}_0^{-1} \;=\; (\omega_n^2+\omega^2). \tag{8.4}$$

Ennek segítségével a kölcsön nem ható tér hatása:

$$S_0 \;=\; -\frac{1}{2}\beta^2\sum_n\sum_p \mathcal{D}_0^{-1}(\omega_n,\vec{p})|\Phi_n(\vec{p})|^2. \tag{8.5}$$

Irjuk fel a partíciós függvényt a kölcsönhatás szerinti perturbációs sor alakjában:

$$\begin{aligned} Z \;&=\; N'\int[d\Phi]e^S \\ &=\; N'\int[d\Phi]e^{S_0}\sum_\ell \frac{1}{\ell!}S_I^\ell. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Képezzük ezután $\ln Z$-nek a perturbálatlan inverz propagátor szerinti deriváltját[1]:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\ln Z}{\delta\mathcal{D}_0^{-1}} \;&=\; -\frac{\beta^2}{2Z}\int[d\Phi]|\Phi_n(\vec{p})|^2e^S \\ &=\; -\frac{1}{2}\mathcal{D}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Irhatjuk tehát, hogy

$$\mathcal{D}(\omega_n,\vec{p}) \;=\; -2\frac{\delta\ln Z}{\delta\mathcal{D}_0^{-1}(\omega_n,\vec{p})} = 2\mathcal{D}_0^2(\omega_n,\vec{p})\frac{\delta\ln Z}{\delta\mathcal{D}_0(\omega_n,\vec{p})}. \tag{8.8}$$

Kifejeztük tehát a propagátort a partíciós függvénnyel.

A skalár részecske sajátenergiáját a

$$\mathcal{D}(\omega_n,\vec{p}) \;=\; \left[\omega_n^2+\vec{p}^{\,2}+m^2+\Pi(\omega_n,\vec{p})\right]^{-1} \tag{8.9}$$

összefüggéssel definiáljuk. Azonos átalakítás után:

$$\mathcal{D} = (\mathcal{D}_0^{-1}+\Pi)^{-1} = \mathcal{D}_0(1+\mathcal{D}_0\Pi)^{-1}, \tag{8.10}$$

[1] Az impulzusreprezentációban adott tetszőleges $F[\alpha(\omega_n,\vec{p})]$ funkcionál funkcionálderiváltját a $\delta F = F[\alpha(\omega_n,\vec{p})+\delta\alpha(\omega_n,\vec{p})] - F[\alpha(\omega_n,\vec{p})] = \sum_{np}\frac{\delta F}{\delta\alpha(\omega_n,\vec{p})}\delta\alpha(\omega_n,\vec{p})$ összefüggéssel definiáljuk.

ahonnan

$$2\mathcal{D}_0 \frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_0} = (1+\mathcal{D}_0\Pi)^{-1}. \tag{8.11}$$

Felhasználjuk, hogy

$$\ln Z_0 = \frac{1}{2}\sum_n \sum_p \ln\{\beta^{-2}\mathcal{D}_0\}, \tag{8.12}$$

amiből

$$\frac{\delta \ln Z_0}{\delta \mathcal{D}_0} = \frac{1}{2}\mathcal{D}_0^{-1}. \tag{8.13}$$

Mivel $\ln Z = \ln Z_0 + \ln Z_I$, a $\Pi(\omega_n, \vec{p})$ sajátenergia az

$$(1+\mathcal{D}_0\Pi)^{-1} = 1 + 2\mathcal{D}_0 \frac{\delta \ln Z_I}{\delta \mathcal{D}_0} \tag{8.14}$$

egyenletnek tesz eleget. Fejtsük sorba a sajátenergiát a λ csatolási állandó hatványai szerint:

$$\Pi = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Pi_\ell, \tag{8.15}$$

ahol $\Pi_\ell \sim \mathcal{O}(\lambda^\ell)$ a sajátenergia ℓ-edrendű korrekciója.

Elsőrendben írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(1+\mathcal{D}_0\Pi_1)^{-1} &\approx 1 - \mathcal{D}_0\Pi_1 \\
&= 1 + 2\mathcal{D}_0 \frac{\delta \ln Z_1}{\delta \mathcal{D}_0} \\
&= 1 + 2\mathcal{D}_0 \frac{\delta}{\delta \mathcal{D}_0}(3 \qquad\qquad) \\
&= 1 + 12\mathcal{D}_0
\end{aligned} \tag{8.16}$$

$$\tag{8.17}$$

Innen a sajátenergia elsőrendű korrekciója

$$\Pi_1 = -12 \qquad\qquad . \tag{8.18}$$

$$\tag{8.19}$$

A $\mathcal{D}_0$ szerinti funkcionál deriválás a diagrammok nyelvén egy részecskevonal felvágását jelenti.

Tanulságos kiszámolni a sajátenergia másodrendű korrekcióját is. Ennek meghatározásához írjuk fel a sajátenergia egyenletét a másodrendű tagokkal bezárólag:

$$
\begin{aligned}
(1+\mathcal{D}_0\Pi_1+\mathcal{D}_0\Pi_2)^{-1} &\approx 1-(\mathcal{D}_0\Pi_1+\mathcal{D}_0\Pi_2)+\mathcal{D}_0\Pi_1\mathcal{D}_0\Pi_1+\mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= 1+2\mathcal{D}_0\left(\frac{\delta \ln Z_1}{\delta\mathcal{D}_0}+\frac{\delta \ln Z_2}{\delta\mathcal{D}_0}\right). \qquad (8.20)
\end{aligned}
$$

Az elsőrendű korrekcióra vonatkozó egyenletet felhasználva ebből a másodrendű korrekcióra az alábbiakat kapjuk:

$$
\Pi_2 = \Pi_1\mathcal{D}_0\Pi_1 - 2\frac{\delta}{\delta\mathcal{D}_0}(36 \qquad\qquad + \ 12 \qquad\qquad). \qquad (8.21)
$$

A deriválás elvégzése után a kerekzárójeles kifejezés:

$$
72 \qquad\quad + \ 72 \qquad\quad + \ 48 \qquad\quad . \qquad (8.22)
$$

A $\Pi_1\mathcal{D}_0\Pi_1$ tagok éppen kiejtik egymást Π_2-ben. Igy végezetül az alábbi eredményt kapjuk:

$$
\Pi_2 \ = \ -144 \qquad\quad - \ 96 \qquad\quad . \qquad (8.23)
$$

Általában is igaz, hogy a sajátenergiában azok a diagrammok, amelyek egy részecskevonal felvágásával szétesővé válnak, zérussá összegződnek. A sajátenergiához tehát csak azok a diagrammok adnak járulékot, amelyek egyetlen részecskevonal felvágásával nem tehetők szétesővé. Az ilyen diagrammokat egyrészecske irreducibiliseknek (1PI) nevezik. Általában a sajátenergia:

$$
\Pi \ = \ -2\left(\frac{\delta}{\delta\mathcal{D}_0}\ln Z_I\right)_{1PI}. \qquad (8.24)
$$

A megfelelő diagrammokat a következő eljárással kapjuk meg:

1. Megszerkesztjük az adott rendben az összes összefüggő diagrammot.
2. Differenciáljuk őket $\mathcal{D}_0$ szerint, vis. egy részecskevonal felvágásával előállítjuk belőlük az összes topológiailag különböző diagrammot.

3. Elhagyjuk a nem egyrészecske irreducibilis diagrammokat.

4. Meghatározzuk a kombinatorikai faktorokat a 7. fejezetben megadott szabályok alapján. (Vigyázat! Az így nyert kombinatorikai faktorok a (**??**) képlet 2-es faktorát már tartalmazzák.)

æ

9 A $\lambda\Phi^4$ elmélet a perturbációszámítás első rendjében

Ebben a fejezetben a perturbációszámítás első rendjében mint példán ismerkedünk meg azokkal a technikai nehézségekkel, amelyekkel lépten-nyomon találkozunk, ha valamit ténylegesen ki akarunk számolni.

A sajátenergia elsőrendű korrekciója, mint azt az előző fejezetben láttuk,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= 12\lambda(\mathcal{F}^{\mathrm{v}} + \mathcal{F}^{\mathrm{m}}) \\ &= -12 \end{aligned} \tag{9.1}$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\mathrm{v}} + \mathcal{F}^{\mathrm{m}} &= T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p}) \\ &= T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Az első technikai nehézség a diszkrét frekvenciákra történő összegzés elvégzése. Erre a komplex függvénytan segítségével kínálkozik lehetőség. Áttérünk a $p_0 = \mathrm{i}\omega_n$ Minkowski-változóra és egy ügyes fogással az összeget a p_0 komplex síkon vett vonalintegrállá írjuk át. Ehhez felhasználjuk, hogy a $\coth(\frac{1}{2}\beta p_0)$ függvénynek a $p_0 = \mathrm{i}2\pi nT$ (n egész) helyeken egyszeres pólusai vannak. Ezért tetszőleges $f(p_0)$ függvény esetén:

$$\begin{aligned} T \quad & \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \quad f(p_0 = \mathrm{i}\omega_n = \mathrm{i}2\pi nT) \\ = \quad & \frac{T}{2\pi\mathrm{i}}\int_C dp_0 f(p_0)\frac{1}{2}\beta\coth\left(\frac{1}{2}\beta p_0\right), \end{aligned} \tag{9.3}$$

ahol az integrálás a p_0 komplex síkon az (a) ábra szerinti C görbére történik, amely körbefutja egyszer az összes pólust.

Ha $f(p_0)$ egy olyan függvény, amelynek nincsenek pólusai a képzetes p_0 tengelyen, akkor a C görbe két, a képzetes tengellyel párhuzamos egyenesbe deformálható át, mint azt a (b) ábra mutatja. Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\coth u &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{e^{2u}-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-1-\frac{2}{e^{-2u}-1}\right), \end{aligned} \tag{9.4}$$

a következőképpen írhatjuk a (??) egyenlőséget:

$$\begin{aligned} T \quad & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \quad f(p_0=\mathrm{i}\omega_n) \\ = \quad & \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty+\epsilon}^{\mathrm{i}\infty+\epsilon} dp_0 f(p_0)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\beta p_0}-1}\right) \\ & +\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{i}\infty-\epsilon}^{-\mathrm{i}\infty-\epsilon} dp_0 f(p_0)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{-\beta p_0}-1}\right) \\ = \quad & \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} dp_0 \frac{1}{2}\left(f(p_0)+f(-p_0)\right) \\ & +\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty+\epsilon}^{\mathrm{i}\infty+\epsilon} dp_0 \left(f(p_0)+f(-p_0)\right)\frac{1}{e^{\beta p_0}-1} \\ = \quad & \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} dp_0 f(p_0) \\ & +\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty+\epsilon}^{\mathrm{i}\infty+\epsilon} dp_0 \left(f(p_0)+f(-p_0)\right)\frac{1}{e^{\beta p_0}-1}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Az utolsó egyenlőség első tagja a vákuum járuléka, míg a második tag az anyagtér járuléka.

A (??) képletet felhasználjuk a sajátenergia első rendű korrekciójának kiszámolására; most $f(p_0) = -(p_0^2-\omega^2)^{-1}$. A sajátenergia elsőrendű korrekciójához a vákuum járuléka:

$$\Pi_1^{\mathrm{V}} \quad = \quad 12\lambda\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} dp_0\frac{1}{2}\frac{-2}{p_0^2-\omega^2}$$

$$= \quad 12\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_4^2 + \omega^2}. \tag{9.6}$$

Itt bevezettük a $p_4 = -\mathrm{i}p_0$ euklideszi impulzus komponenst és az integrált átírtuk négy-dimenziós euklideszi tér feletti integrállá.

Az anyagtér járuléka a sajátenergiához $\mathcal{O}(\lambda)$ rendben:

$$\Pi_1^{\mathrm{m}} \quad = \quad 12\lambda \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_{-\mathrm{i}\infty+\epsilon}^{\mathrm{i}\infty+\epsilon} dp_0 \left[-\frac{2}{p_0^2 - \omega^2} \right] \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1}. \tag{9.7}$$

Az integrálás útját bezárhatjuk a komplex p_0 sík jobboldalán egy végtelen sugarú félkörrel:

Ekkor az integrandusnak a $p_0 = \omega$ helyen lévő egyszerű pólusa ad az integrálhoz járulékot a reziduum-tétel értelmében:

$$\Pi_1^{\mathrm{m}} \quad = \quad 12\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}. \tag{9.8}$$

Ha az $m = 0$ esetet vizsgáljuk, akkor az anyagtér járulékában az integrálás elvégezhető:

$$\mathcal{F}^{\mathrm{m}} \quad = \quad \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp\, p}{e^{\beta p} - 1} = \frac{1}{2\pi^2\beta^2} \Gamma(2)\zeta(2) = \frac{T^2}{12} \tag{9.9}$$

és

$$\Pi_1^{\mathrm{m}} = 12\lambda\mathcal{F}^{\mathrm{m}} = \lambda T^2. \tag{9.10}$$

Nehezebb a helyzet amikor a kölcsönható vákuum járulékát akarjuk meghatározni. Ez uis. nem véges. Regularizáljuk pl. úgy Π_1^{V}-ot, hogy a nagy impulzusokat egy Λ_c értéknél levágjuk. Használjuk fel, hogy az integrandus nem függ a négyes impulzus irányától, s ezért a térszög szerinti integrál az $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ eredményt adja, ahol a dimenzió $d = 4$. Ekkor

$$\mathcal{F}^{\mathrm{V}} \quad = \quad \frac{1}{16\pi^4} \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} \int_0^{\Lambda_c} \frac{p^3 dp}{p^2 + m^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^{\Lambda_c^2} \frac{u\,du}{u+m^2} \\
&= \frac{1}{16\pi^2}\left[\Lambda_c^2 - m^2 \ln\frac{\Lambda_c^2+m^2}{m^2}\right] \\
&\to \frac{1}{16\pi^2}\left[\Lambda_c^2 - m^2 \ln\frac{\Lambda_c^2}{m^2}\right], \qquad \text{ha} \quad (\Lambda_c \to \infty)
\end{aligned} \tag{9.11}
$$

és

$$
\Pi_1^{\mathrm{V}} = 12\lambda\mathcal{F}^{\mathrm{V}} \tag{9.12}
$$

a keresett járulék. Ez pontosan ugyanaz mint a sajátenergia elsőrendű korrekciója a $T=0$ térelméletben.

Az elmélet renormálását a partíciós függvény renormálásával végezzük el. A perturbációszámítás első rendjében:

$$
\ln Z = 3 \qquad , \tag{9.13}
$$

ami az előzőek értelmében nyilvánvalóan nem véges, ha $\Lambda_c \to \infty$. Adjunk hozzá a Lagrange-sűrűséghez egy ún. ellentagot:

$$
\mathcal{L} \to \mathcal{L} - \frac{1}{2}\delta m_1^2 \Phi^2. \tag{9.14}
$$

Ennek δm_1^2 együtthatója megválasztható úgy, hogy a partíciós függvény elsőrendben végesnek adódjon. Az új kölcsönhatásnak egy további vertexet kell bevezetnünk:

$$
\to \delta m_1^2. \tag{9.15}
$$

A partíciós függvényhez további járulékot ad az egy darab ilyen vertexet tartalmazó bozonhurok:

$$
\begin{aligned}
\ln Z_1 &= 3 \qquad - \frac{1}{2} \\
&= -3\lambda\beta V(\mathcal{F}^{\mathrm{V}}+\mathcal{F}^{\mathrm{m}})^2 - \frac{1}{2}\delta m_1^2 \beta V(\mathcal{F}^{\mathrm{V}}+\mathcal{F}^{\mathrm{m}}) \\
&= \beta V\Big\{\left[-3\lambda(\mathcal{F}^{\mathrm{V}})^2 - \frac{1}{2}\delta m_1^2\mathcal{F}^{\mathrm{V}}\right] \\
&\quad + \left[-6\lambda\mathcal{F}^{\mathrm{m}}\mathcal{F}^{\mathrm{V}} - \frac{1}{2}\delta m_1^2\mathcal{F}^{\mathrm{m}}\right] \\
&\quad -3\lambda(\mathcal{F}^{\mathrm{m}})^2\Big\}
\end{aligned} \tag{9.16}
$$

Kíséreljünk meg úgy renormálni, hogy az ellentag ne függjön a hőmérséklettől és a kémiai potenciáltól. Ezt elérjük, ha az utolsó egyenlőség második sorát zérussá tesszük:

$$
-6\lambda\mathcal{F}^{\mathrm{V}} - \frac{1}{2}\delta m_1^2 = 0, \tag{9.17}
$$

azaz

$$\delta m_1^2 \;=\; -12\lambda\mathcal{F}^{\mathrm{v}} \sim \mathcal{O}(\lambda). \tag{9.18}$$

Ekkor a partíciós függvény

$$\ln Z_1 \;=\; \beta V\left\{3\lambda(\mathcal{F}^{\mathrm{v}})^2 - 3\lambda(\mathcal{F}^{\mathrm{m}})^2\right\}. \tag{9.19}$$

Mivel az első tagból az energiához egy T-től és μ-től független járulék adódik, azért ez a tag a $T=0$ vákuum módosulását írja le a kölcsönhatás első rendjében. Mivel a vákuum energiáját már nulladik közelítésben is elhagytuk, ugyanezt tesszük a perturbáció számítás magasabb rendjeiben is.Így a kiszámolt energia, nyomás, stb. mindig a perturbációszámítás adott rendjében a kölcsönható vákuumhoz képesti értékek lesznek. A renormált partíciós függvény elsőrendben tehát:

$$\begin{aligned}\ln Z_1^{\mathrm{R}} &= -3\lambda(\mathcal{F}^{\mathrm{m}})^2\beta V\\ &= -3\lambda\beta V\left(\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{n(\omega)}{\omega}\right)^2,\end{aligned} \tag{9.20}$$

ahol $\omega=\sqrt{m^2+\vec{p}^{\,2}}$ és $n(\omega)=(e^{\beta\omega}-1)^{-1}$ a betöltési szám.

Ugyanehhez az eredményhez úgy is eljuthatunk, ha $\ln Z_2$-ből kivonjuk azt a gráfot, amelyben a sajátenergiás betétrészt $T=0$ ($\beta\to\infty$) és $\mu=0$ mellett számoljuk:

$$\begin{aligned}\ln Z_2 &= 3\,[\qquad -2 \qquad]\\ &= -3\lambda\beta V\Big[(\mathcal{F}^{\mathrm{v}}+\mathcal{F}^{\mathrm{m}})^2\\ &\quad -2T\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathcal{D}_0(\omega_n,\vec{p})\lim_{T,\mu\to 0}T\sum_{n'}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\mathcal{D}_0(\omega_{n'},\vec{p}\,')\Big]\\ &= -3\lambda\beta V\left[(\mathcal{F}^{\mathrm{v}}+\mathcal{F}^{\mathrm{m}})^2-2(\mathcal{F}^{\mathrm{v}}+\mathcal{F}^{\mathrm{m}})\mathcal{F}^{\mathrm{m}}\right]\\ &= -3\lambda\beta V\left[(\mathcal{F}^{\mathrm{v}})^2-(\mathcal{F}^{\mathrm{m}})^2\right].\end{aligned} \tag{9.21}$$

A partíciós függvény elsőrendű korrekciójából deriválással kapjuk meg az energia és a nyomás elsőrendű korrekcióját:

$$\begin{aligned}E_1 &= -\frac{\partial\ln Z_1^{\mathrm{R}}}{\partial\beta}\\ &= 3\lambda V\left(\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{n(\omega)}{\omega}\right)\\ &\quad\cdot\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}n(\omega)\left(\frac{1}{\omega}+2\beta n(\omega)\right),\end{aligned} \tag{9.22}$$

$$P_1 = T\frac{\partial \ln Z_1^{\mathrm{R}}}{\partial V} = -3\lambda\left(\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{n(\omega)}{\omega}\right)^2. \tag{9.23}$$

Ha a részecskék nyugalmi tömege zérus, $m = 0$, akkor az integrálok jól ismertek és az alábbiak adódnak.

$$E_1 = \frac{\lambda}{16}VT^4, \tag{9.24}$$

$$P_1 = -\frac{\lambda}{48}T^4. \tag{9.25}$$

Az energia és a nyomás az elsőrendű korrekcióval bezárólag:

$$E = VT^4\left(\frac{\pi^2}{30} - \frac{\lambda}{16} + \mathcal{O}(?)\right), \tag{9.26}$$

$$P = T^4\left(\frac{\pi^2}{90} - \frac{\lambda}{48} + \mathcal{O}(?)\right). \tag{9.27}$$

A következő korrekciót második rendben várnánk, azonban majd látni fogjuk, hogy ez nem egészen így lesz. Erre utal a kérdőjel.

Eljárásunk természetesen egyúttal az egyrészecske irreducibilis sajátenergiát is renormálta:

$$\begin{aligned}\Pi_1^{\mathrm{R}} &= -12 \qquad\qquad -2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 12\lambda\mathcal{F}^{\mathrm{v}} + \delta m_1^2 + 12\lambda\mathcal{F}^{\mathrm{m}} \\ &= 12\lambda\mathcal{F}^{\mathrm{m}} = \Pi_1^{\mathrm{m}}.\end{aligned} \tag{9.28}$$

Mint az a korábbiakból következik,

$$\Pi_1^{\mathrm{R}} = \lambda T^2, \qquad \text{ha} \quad m = 0. \tag{9.29}$$

Ennek jelentését megkaphatjuk, ha megvizsgáljuk a propagátort:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \mathcal{D}_0\frac{1}{1+\mathcal{D}_0\Pi_1} = \frac{1}{\omega^2+\omega_n^2}\,\frac{1}{1+\Pi_1(\omega^2+\omega_n^2)^{-1}} \\ &= \frac{1}{\omega_n^2+\omega^2+\Pi_1}.\end{aligned} \tag{9.30}$$

Innen látjuk, hogy az $m = 0$ tömegű bozonok a véges hőmérsékletű környezetben

$$m_{\mathrm{eff}}^2 = \Pi_1^{\mathrm{m}} = \lambda T^2 \tag{9.31}$$

effektív tömeget nyernek. Ilyen jelenséggel, a Debye-árnyékolással már találkoztunk az elektrodinamikában. æ

10 Zérus tömegű skalártér és infravörös divergencia

Amíg $m \neq 0$ esetén az elsőrendű korrekciót valóban másodrendű követi, addig $m = 0$ esetén a partíciós függvény a λ csatolási állandóban nem analitikus viselkedést mutat és a soron következő korrekció rendje $\mathcal{O}(\lambda^{3/2})$. Ennek az az oka, hogy bizonyos diagrammokban a részecskéket az $n = 0$ módusban véve az impulzus szerinti integrálok a $p \to 0$ limeszben divergálnak. A 7. fejezet végén megadtuk a partíciós függvény másodrendű korrekcióját, amely két tagot tartalmaz. A második tag integrandusa $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$ esetén

$$\sim \frac{dp_1 p_1^2 dp_2 p_2^2 dp_3 p_3^2}{p_1^2 p_2^2 p_3^2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2} \tag{10.1}$$

ami integrálható a $p_i \to 0$ határon. Ezzel szemben az első tag az $n_1 = n_2$ esetben

$$\sim \beta V \Pi_1^2 T \frac{dp\, p^2}{p^4} \tag{10.2}$$

integrandust tartalmaz, ami nem integrálható $p \to 0$ alsó határral. Ez az ún. infravörös divergencia, amelyet a zérus energiájú módusok létezése okoz. Ne felejtsük el, hogy ilyen módusok $m \neq 0$ esetén nincsenek, mert a legalacsonyabb energiájú módusra $\omega_0 = m \neq 0$.

A partíciós függvény másodrendű korrekciójának első tagját ábrázoló diagrammot átrajzolhatjuk a sajátenergia segítségével ún. gyűrű-diagrammá:

Az összes ehhez hasonló gyűrű-diagramm, amely általában N darab sajátenergiás betétrészt tartalmaz egy gyűrűre felfűzve, divergens a $p \to 0$ határon:

$$(2 \cdot 3!)^N \frac{(N-1)!}{2} \frac{1}{N!} \qquad\qquad \sim \frac{1}{2} \beta V \frac{(-\Pi_1)^N}{N} T dp\, p^{-2(N-1)} \tag{10.3}$$

A feltüntetett faktorok az alábbi megfontolással adódnak: Mind az N vertexnél két láb összekötése 3!-féleképpen lehetséges és mindegyik vertex a szomszédjaival kétféleképp köthető össze. Innen a baloldali első tényező. A második tényező a vertexek lehetséges sorrendjeinek számát adja meg a körön, tekintetbe véve, hogy a balról jobbra és a jobbról balra haladás ekvivalens. Végül az $\ln Z_I$ 6. fejezetben felírt hatványsorának $< S_I >^N / N!$ tagjából származó $1/N!$ tényező szerepel harmadikként. A jobb oldal felírásakor felhasználtuk a (??) összefüggést.

Bár egyenként valamennyi gyűrű-diagramm infravörös divergenciát mutat, a perturbációszámítás összes rendjére felösszegezve őket véges eredményt kapunk:

$$
\begin{aligned}
\ln Z_I^{\mathrm{gy}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \qquad\qquad -\frac{1}{3} \qquad\qquad + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{2}\beta V T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N}\left[-\Pi_1(\omega_n,\vec{p})\mathcal{D}_0(\omega_n,\vec{p})\right]^N \\
&= -\frac{1}{2}\beta V T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\ln(1+\Pi_1\mathcal{D}_0) - \Pi_1\mathcal{D}_0\right]. \qquad (10.4)
\end{aligned}
$$

A renormálás természetesen azt jelenti, hogy itt a sajátenergiás betétrészt a renormált Π_1^{R}-re kell cserélni. További ultraibolya divergencia nem jelenik meg a gyűrű-diagrammokban:

$$
\begin{aligned}
\ln Z_I^{\mathrm{gy}} &= -\frac{1}{2}\beta V T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda T^2}{\omega_n^2+\vec{p}^2}\right) - \frac{\lambda T^2}{\omega_n^2+\vec{p}^2}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\beta V T \frac{T^3\lambda^{3/2}}{2\pi^2}\int \frac{dp\, p^2}{\lambda^{3/2}T^3}\left[\ln\left(1+\frac{1}{p^2/(\lambda T^2)}\right) - \frac{1}{p^2/(\lambda T^2)}\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\beta V T \sum_{n\neq 0} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda T^2}{\omega_n^2+\vec{p}^2}\right) - \frac{\lambda T^2}{\omega_n^2+\vec{p}^2}\right] \\
&= -\frac{\beta V}{4\pi^2} T^4 \lambda^{3/2}\int_0^\infty du\, u^2\left(\ln\left(1+u^{-2}\right) - u^{-2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \frac{\beta V}{12\pi} T^4\lambda^{3/2} + \mathcal{O}(\lambda^2). \qquad (10.5)
\end{aligned}
$$

Itt az infravörösben divergens tagok (az $n = 0$ módusok) adják az $\mathcal{O}(\lambda^{3/2})$ tagot, míg az $n \neq 0$ módusok $\mathcal{O}(\lambda^2)$ és magasabb rendű járulékokat tartalmaznak. (Felhasználtuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{U_c} duu^2[\ln(u^2+1) - \ln u^2 - u^{-2}] = \\
&\qquad \left\{\frac{1}{3}\left[u^3\ln(u^2+1) - \frac{2}{3}u^3 + 2u - 2\arctan u\right]\right. \\
&\qquad \left. -2\left[\frac{u^3}{3}\ln u - \frac{u^3}{9}\right] - u\right\}_0^{U_c} \\
&\rightarrow\ -\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\ln\left(1+U_c^{-2}\right) - \frac{1}{3}U_c \\
&\rightarrow\ -\frac{\pi}{3},
\end{aligned}
$$

ahol $u = p\lambda^{-1/2}T^{-1}$ és $U_c = u(p = \Lambda_c)$.

Az $m=0$ esetben a skalártér energiája és nyomása az infravörös divergenciákat is figyelembe véve:

$$E_{m=0} = VT^4\frac{\pi^2}{30}\left[1-\frac{15}{8}\left(\frac{\lambda}{\pi^2}\right)+\frac{15}{2}\left(\frac{\lambda}{\pi^2}\right)^{3/2}+\dots\right], \qquad (10.6)$$

$$P_{m=0} = T^4\frac{\pi^2}{90}\left[1-\frac{15}{8}\left(\frac{\lambda}{\pi^2}\right)+\frac{15}{2}\left(\frac{\lambda}{\pi^2}\right)^{3/2}+\dots\right]. \qquad (10.7)$$

Az infravörös divergenciák járulékát pontosíthatjuk azáltal, hogy $\ln Z_I^{\mathrm{gy}}$ kifejezésében Π_1 helyett a sajátenergia magasabb rendű korrekciókat is tartalmazó kifejezését használjuk. Pl. a sajátenergia is tartalmaz az infravörös divergenciáktól származó $\mathcal{O}(\lambda^{3/2})$ rendű korrekciót. Ezt a korábbiakhoz hasonlóan határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} -\sum_{N=1}^{\infty}(2\cdot 3!)^N\cdot N\cdot(N-1)! &= 12\lambda T\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{N=1}^{\infty}(-\Pi_1)^{N-1}\mathcal{D}_0^N \\ &= 12\lambda T\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathcal{D}_0}{1+\Pi_1\mathcal{D}_0} \\ &= 12\lambda T\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_n^2+\vec{p}^{\,2}+\Pi_1^{\mathrm{R}}}. \end{aligned} \qquad (10.8)$$

Felhasználva, hogy a renormált sajátenergia első rendben $\Pi_1^{\mathrm{R}}=\lambda T^2$, a fenti kifejezésből az $n=0$ tag a következő eredményt adja a sajátenergia $\mathcal{O}(\lambda^{3/2})$ rendű korrekciójára:

$$\begin{aligned} \Pi_{3/2} &= 12\lambda T\int_0^{\Lambda_c}\frac{dp\,p^2}{2\pi^2}\frac{1}{p^2+\lambda T^2} \\ &= \frac{6}{\pi^2}\lambda^{3/2}T^2\int_0^{U_c}du\frac{u^2}{1+u^2} \\ &= \frac{6}{\pi^2}\lambda^{3/2}T^2(U_c-\arctan U_c) \end{aligned} \qquad (10.9)$$

Mint látjuk, most újabb ultraibolya divergencia lépett fel. Ennek kezelése azonban bonyolultabb, mert a fenti kifejezés renormálásakor a perturbációszámítás különböző rendjeiből származó ellentagok keveredhetnek. æ

11 Yukawa elmélete. A fermionpropagátor és fermion-sajátenergia

Az előző fejezetekben láttuk, hogy milyen tipikus kapcsolat van a bozonterek esetén a partíciós függvény, a sajátenergia és a propagátor között. Most a Yukawa-elmélet példáján megnézzük ugyanezt fermiontér esetén. Egyúttal megtanuljuk, hogyan lehet a frekvencia szerinti összegzést fermionok esetén elvégezni.

Yukawa elmélete a nukleonok és a pionok kölcsönhatását írja le. Ha az izospintől eltekintünk, akkor a nukleonokat a $\psi(x)$ Dirac-tér, a pionokat pedig a $\Phi(x)$ skalártér írja le. A kölcsönhatás

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\psi\Phi \tag{11.1}$$

alakú.

Mivel páratlan ℓ esetén S_I^ℓ páratlan számú Φ tényezőt tartalmaz az integrandusában, ezért $< S_I^\ell >= 0$, ha ℓ =páratlan. Következésképpen $\ln Z_I$-hez csak ℓ páros hatványai adnak járulékot a 6. fejezet szerinti perturbációs sorban. $\ln Z_I$ perturbációs sora tehát g^2 hatványai szerint halad.

Határozzuk meg a partíciós függvény korrekcióját a legalacsonyabb el nem tűnő rendben. A hatás $\mathcal{L}_I$-vel definiált S_I kölcsönhatási részébe behelyettesítjük a skalártér (2.12) és a fermiontér (4.15) Fourier-sorát. Az $\mathcal{O}(g^2)$ rendben kapjuk,hogy

$$\begin{aligned}
\ln Z_2 &= \frac{1}{2} < S_I^2 >_0 \\
&= \frac{1}{2} g^2 \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \int d^3x_1 d^3x_2 \sum n_1n_2n_3n_4 \sum_{\ell_1\ell_2} \sum_{p_1p_2p_3p_4} \sum_{q_1q_2} \\
&\cdot \frac{\beta}{V^3} e^{\mathrm{i}(\vec{q}_1+\vec{p}_3-\vec{p}_1)\vec{x}_1+\mathrm{i}(\omega_{\ell_1}+\omega_{n_3}-\omega_{n_4})\tau_1} \\
&\cdot e^{\mathrm{i}(\vec{q}_2+\vec{p}_4-\vec{p}_2)\vec{x}_1+\mathrm{i}(\omega_{\ell_2}+\omega_{n_4}-\omega_{n_2})\tau_2} \\
&\cdot \prod_{\alpha\, np} \prod_{\ell q} \int d\bar{\psi}_{\alpha n}(\vec{p}) d\psi_{\alpha n}(\vec{p}) d\Phi_\ell(\vec{q}) \\
&\cdot \frac{\bar{\psi}_{\rho n_1}(\vec{p}_1)\psi_{\rho n_3}(\vec{p}_3)\Phi_{\ell_1}(\vec{q}_1)\bar{\psi}_{\gamma n_2}(\vec{p}_2)\psi_{\gamma n_4}(\vec{p}_4)\Phi_{\ell_2}(\vec{q}_2)e^{S_0}}{\prod_{\alpha\, np}\prod_{\ell q}\int d\bar{\psi}_{\alpha n}(\vec{p})d\psi_{\alpha n}(\vec{p})d\Phi_\ell(\vec{q})e^{S_0}}.
\end{aligned} \tag{11.2}$$

Itt S_0 a hatás szabad terek esetén:

$$\begin{aligned}
S_0 &= -\frac{1}{2}\beta^2 \sum_n \sum_p \Phi_n(\vec{p}) \mathcal{D}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p}) \Phi_{-n}(-\vec{p}) \\
&\quad + \beta \sum_n \sum_{\vec{p}} \bar{\psi}_{\alpha n}(\vec{p}) (\mathcal{G}_0^{-1})_{\alpha\rho}(\omega_n, \vec{p}) \psi_{\rho n}(\vec{p}),
\end{aligned} \tag{11.3}$$

ahol bevezettük a szabad fermiontér propagátorát:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0^{-1}(\omega_n,\vec{p}) &= \gamma^0(-\mathrm{i}\omega_n+\mu)-\vec{\gamma}\vec{p}-M\\ &= \not{p}-M,\end{aligned} \tag{11.4}$$

ahol $p_0=-\mathrm{i}\omega_n+\mu$ a Minkowski-térben az impulzus nulladik komponense, M pedig a fermion tömeg. Mindjárt itt jegyezzük meg, hogy az egzakt fermion propagátor és a partíciós függvény között hasonló összefüggés van mint a bozonpropagátor és a megfelelő partíciós függvény között:

$$\mathcal{G}(\omega_n,\vec{p}) =<\bar{\psi}\psi>=\frac{1}{\beta}\frac{\delta\ln Z_I}{\delta\mathcal{G}_0^{-1}(\omega_n,\vec{p})}. \tag{11.5}$$

Térjünk most rá $\ln Z_2$ kiértékelésére. Ehhez a következőket kell figyelembe vennünk:

1. A $\int d\tau_1 d\tau_2\int d^3x_1 d^3x_2$ integrálás

   $$\beta^2V^2\delta(\vec{q}_1+\vec{p}_3-\vec{p}_1)\delta(\vec{q}_2+\vec{p}_4-\vec{p}_2)\delta_{\ell_1+n_3-n_1}\delta_{\ell_2+n_4-n_2}$$

   szorzót eredményez.

2. A $d\Phi_\ell$ integrálok eltűnnek kivéve, ha $\ell_1=-\ell_2$ és $\vec{q}_1=-\vec{q}_2$.

3. Figyelembe véve, hogy ψ és $\bar{\psi}$ Grassmann-változók, az alábbiak érvényesek:

   $$\int d\bar{\psi}\int d\psi\ \psi=0;\qquad \int d\bar{\psi}\int d\psi\ \bar{\psi}\psi=1.$$

   Ezek következtében a fermiontér Fourier-komponenseire vett integrálok akkor és csak akkor nem egyenlők nullával, ha

   $$\text{(a)}\qquad n_1=n_3,\quad n_2=n_4,\quad \vec{p}_1=\vec{p}_3,\quad \vec{p}_2=\vec{p}_4; \tag{11.6}$$

   $$\text{(b)}\qquad n_1=n_4,\quad n_2=n_3,\quad \vec{p}_1=\vec{p}_4,\quad \vec{p}_2=\vec{p}_3. \tag{11.7}$$

Az (a) és (b) típusú tagoknak két különböző diagramm feleltethető meg. (Eltekintünk a Yukawa-elmélet Feynman-szabályainak részletes ismertetésétől.) Az (a) típusú tagok járuléka:

$$\begin{aligned}\ln Z_{2(a)} &= \frac{1}{2}g^2\beta^2V^2\frac{\beta}{V^3}\sum_{n_1p_1n_2p_2}<\bar{\psi}_{\rho n_1}(\vec{p}_1)\psi_{\rho n_1}(\vec{p}_1)\Phi_0(0)\bar{\psi}_{\gamma n_2}(\vec{p}_2)\psi_{\gamma n_2}(\vec{p}_2)\Phi_0(0)>_0\\ &= \frac{1}{2}\beta V g^2\frac{1}{m^2}\left[T\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{Tr}\mathcal{G}_0(\omega_n,\vec{p})\right]^2\\ &= \frac{1}{2}\qquad .\end{aligned} \tag{11.8}$$

Itt m a bozontér tömegparamétere. Az átlagolás a szabad tereknek megfelelő e^{S_0} súllyal történik. A (b) típusú tagok járuléka:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{2(b)} &= -\frac{1}{2}g^2\beta V T^2 \sum_{n_1 n_2}\int \frac{d^3p_1\, d^3p_2}{(2\pi)^6} \\
&\cdot \mathrm{Tr}\mathcal{G}_0(\omega_{n_1},\vec{p}_1)\mathcal{D}_0(\omega_{n_2}-\omega_{n_1},\vec{p}_2-\vec{p}_1)\mathcal{G}_0(\omega_{n_2},\vec{p}_2) \\
&= -\frac{1}{2} \qquad .
\end{aligned} \tag{11.9}$$

A negatív előjel annak köszönhető, hogy a fermion amplitúdókat fel kellett cserélni ahhoz, hogy előálljanak a propagátorok kifejezései.

A bozon sajátenergia vátozatlanul úgy van definiálva, mint ahogy skalártér esetén. A legalacsonyabb rendű el nem tűnő járulék hozzá:

$$\Pi_2 = \tag{11.10}$$

A fermion sajátenergiát az

$$\mathcal{G}^{-1}(\omega_n,\vec{p}) = \mathcal{G}_0^{-1}(\omega_n,\vec{p}) + \Sigma(\omega_n,\vec{p}) \tag{11.11}$$

összefüggéssel definiáljuk. Meg lehet mutatni, hogy

$$\Sigma = \left(\frac{\delta \ln Z_I}{\delta \mathcal{G}_0}\right)_{1\mathrm{PI}} \tag{11.12}$$

ahol a fermionvonal szempontjából irreducibilis diagrammokat kell figyelembe venni. Pl. $\mathcal{O}(g^2)$ rendben:

$$\Sigma_2(\omega_n,\vec{p}) = \tag{11.13}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a partíciós függvényhez a bozontér szempontjából nem egyrészecske irreducibilis diagrammok, mint az (a) típusúak is adnak zérustól különböző járulékot. Ez annak a következménye, hogy $<\Phi>$ zérustól különböző a T hőmérsékletű környezetben. (Vigyázat, itt a kölcsönható rendszer egyensúlyi sokasága szerinti várható érték áll, nem pedig $<\dots>_0$.)

Végezetül megadunk még egy fontos összefüggést, amelynek segítségével a fermion-frekvenciák szerinti összegek kiszámolhatók. Ehhez áttérünk a $p_0 = \mathrm{i}\omega_n + \mu$ változóra, ahol $\omega_n = (2n+1)\pi T$. Legyen $f(p_0)$ egy tetszőleges függvény, amelynek nincsenek pólusai a képzetes tengelyen. Ekkor az alábbi azonosság érvényes:

$$\begin{aligned}
T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_0=\mathrm{i}\omega_n+\mu) &= -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty+\mu+\epsilon}^{\mathrm{i}\infty+\mu+\epsilon} dp_0 f(p_0)\frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)}+1} \\
&-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty+\mu-\epsilon}^{\mathrm{i}\infty+\mu-\epsilon} dp_0 f(p_0)\frac{1}{e^{\beta(\mu-p_0)}+1} \\
&+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty+\mu-\epsilon}^{\mathrm{i}\infty+\mu-\epsilon} dp_0 f(p_0).
\end{aligned} \tag{11.14}$$

Az első két tag a részecske- és az antirészecske-járulék, amelyek $T = 0$ esetén eltűnnek. A harmadik tag független a hőmérséklettől és a vákuum valamint a véges sűrűségű, zérus hőmérsékletű anyag járuléka.

æ

III. KVANTUMELEKTRODINAMIKA VÉGES HŐMÉRSÉKLETEN

12 Az elektromágneses tér

Az elektromágneses tér egyenletei, a Maxwell-egyenletek az

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\, \frac{1}{2}(\vec{E}^{\,2} - \vec{B}^{\,2}) \\ &= \int d^4x \left[-\vec{E}(\vec{\nabla}A^0 + \dot{\vec{A}}) - \vec{B}\mathrm{rot}\vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \right]. \end{aligned} \tag{12.1}$$

hatásból $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{A}$ és A^0 szerinti variálással kaphatók meg:

$$\frac{\delta S}{\delta \vec{E}} = -\vec{E} - \vec{\nabla}A^0 - \dot{\vec{A}} = 0, \tag{12.2}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \vec{B}} = \vec{B} - \mathrm{rot}\vec{A} = 0, \tag{12.3}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \vec{A}} + \partial_t \frac{\delta S}{\delta \dot{\vec{A}}} - \vec{\nabla}\frac{\delta S}{\delta(\vec{\nabla}\vec{A})} = \mathrm{rot}\vec{B} - \dot{\vec{E}} = 0, \tag{12.4}$$

$$\frac{\delta S}{\delta A^0} + \partial_t \frac{\delta S}{\delta \dot{A}^0} - \vec{\nabla}\frac{\delta S}{\delta(\vec{\nabla}A^0)} = \vec{\nabla}\vec{E} = 0. \tag{12.5}$$

Az első két egyenletből közvetlenül adódik, hogy

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \tag{12.6}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0. \tag{12.7}$$

A hatásban a $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ összefüggés közvetlenül figyelembe vehető, s akkor megszabadulunk a mágneses indukciótól, mint független dinamikai változótól. Parciális integrálás után kapjuk, hogy

$$S = \int d^4x \left[-\vec{E}\dot{\vec{A}} - \frac{1}{2}\left(\vec{E}^{\,2} + (\mathrm{rot}\vec{A})^2\right) + A^0\vec{\nabla}\vec{E} \right]. \tag{12.8}$$

Látjuk, hogy A^0 nem dinamikai változó, mert a hozzá kanonikusan konjugált impulzus azonosan eltűnik. A^0 Langrange-multiplikátor szerepét játssza, amellyel a hatásban a Gauss-törvény biztosítható. A dinamikai változók $\vec{A}$ és a hozzá kanonikusan konjugált impulzus, az elektromos térerősség:

$$\vec{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{A}}} = -\vec{E}. \tag{12.9}$$

A $T = 0$ tér generáló funkcionálját naívan

$$\int [d\pi^i] \int [dA^i][dA^0] e^{\mathrm{i}S} \tag{12.10}$$

alakban írnánk fel. Ez azonban azért nem helyes, mert a hatásba belefogalmazott kényszer, amely megköveteli, hogy a dinamikai változók elégítsék ki a Gauss-törvényt, még megenged végtelen sok fizikailag ekvivalens térkonfigurációt. A hatás invariáns a lokális U(1) mértéktranszformációkkal szemben:

$$\vec{A}\,' = \vec{A} - \vec{\nabla} f, \qquad A^{0\prime} = A^0 + \partial_t f, \tag{12.11}$$

ahol $f(x)$ tetszőleges függvény. Azt, hogy a fizikailag ekvivalens térkonfigurációkat a generáló funkcionálban csak egyetlen térkonfiguráció reprezentálja, úgy lehet elérni, hogy mértékfeltételt rovunk ki. Ez a vektorpotentiál és deriváltjainak egy függvénye, amelynek megköveteljük az eltűnését:

$$F(A^\mu, \partial_\mu A^\mu) = 0. \tag{12.12}$$

Erre tipikus példa az ún. kovariáns mérték használata:

$$\partial_\mu A^\mu - c(x) = 0, \tag{12.13}$$

ahol $c(x)$ tetszőleges függvény. A mértékfeltételt is figyelembe véve, a generáló funkcionál:

$$\int [d\pi^i] \int [dA^\mu] \delta[F] e^{\mathrm{i}S}. \tag{12.14}$$

A generáló funkcionálban elvégezhetjük a kanonikus impulzusok szerinti integrálást, mert az Gauss-típusú:

$$\begin{aligned} \int [d\pi^i] \exp\left\{ \mathrm{i} \int d^4x \left(-\vec{E}(\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} A^0) - \frac{1}{2}\vec{E}^{\,2} \right) \right\} &= \\ \exp\left\{ -\mathrm{i} \int d^4x \frac{1}{2} (\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} A^0)^2 \right\}. & \end{aligned} \tag{12.15}$$

Ezt felhasználva, a generáló funkcionál az alábbi alakot ölti:

$$\int [dA^\mu] \delta[F] \exp\left\{ -\mathrm{i} \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} A^0)^2 + \frac{1}{2} (\mathrm{rot}\vec{A})^2 \right] \right\}. \tag{12.16}$$

Ebből a kifejezésből fogunk kiindulni, amikor az elektromágneses tér partíciós függvényét definiáljuk. Eljárásunk hasonló lesz mint skalárterek esetén volt. Az eredmény helyességét azzal támasztjuk alá, hogy az a fekete test sugárzását helyesen írja le.

A partíciós függvény definíciójára az alábbi munkahipotézist tesszük:

$$Z' = \int_{\mathrm{per}} [dA_\mu] \delta[F] e^S, \tag{12.17}$$

ahol az euklideszi hatás:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(-\mathrm{i}\partial_\tau \vec{A} + \mathrm{i}\vec{\nabla} A_0 \right)^2 - \frac{1}{2} (\mathrm{rot}\vec{A})^2 \right] \\ &= \int_0^\beta \int d^3x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \tag{12.18}$$

Itt megint áttértünk a négy-dimenziós euklideszi tér vektoraira a $t \to -\mathrm{i}\tau$ és $A_0 \to \mathrm{i}A_0$ változócserével. Kikötjük továbbá, hogy csak olyan A_μ térkonfigurációkra integrálunk, amelyek a τ képzetes időben β szerint periodikusak.

A partíciós függvényt most átalakítjuk olyan módon, hogy az új alak explicit mértékinvariáns legyen. Először vegyük észre, hogy a partíciós függvény a vektorpotenciál periodikussága miatt csak a τ változóban periodikus mértéktranszformációkkal szemben lehet invariáns. Jelölje a továbbiakban az ω index azokat a mennyiségeket, amelyek egy tetszőleges vektorpotenciálból kiindulva az

$$A_i^\omega = A_i - \nabla_i \omega, \qquad A_0^\omega = A_0 - \partial_\tau \omega \tag{12.19}$$

azaz a

$$A_\mu^\omega \;=\; A_\mu - \partial_\mu \omega \tag{12.20}$$

infinitezimális mértéktranszformációval állnak elő. Legyen továbbá a mértéktranszformáció periodikus: $\omega(\tau = 0, \vec{x}) = \omega(\tau = \beta, \vec{x})$. A partíciós függvény mostani alakjában nem mértékinvariáns. Mértékinvariáns azonban a hatás és a használt integrálási mérték, ha az utóbbit mint a vektorpotentiál Fourier-amplitúdói szerinti integrálok szorzatát definiáljuk:

$$S = S^\omega, \qquad [dA_\mu] = [dA_\mu^\omega]. \tag{12.21}$$

A partíciós függvény mértékinvarianciáját a mértékrögzítő delta-funkcionál rontja el. Helyettesítsük ezért Z'-ben a delta-funkcionált az alábbi módon felírt egységnyi szorzóval:

$$1 \;=\; \Delta[A_\mu] \int [d\omega] \delta[F^\omega], \tag{12.22}$$

ahol $[d\omega]$ az U(1) csoport fölött értelmezett invariáns mérték. Ekkor a fenti egyenlet által definiált $\Delta[A_\mu]$ funkcionál mértékinvariáns. Írjunk tehát Z'-ben a delta-funkcionál helyére 1-et a fenti szofisztikált alakban. Ezzel elérjük, hogy a mértékfeltétel továbbra is ki van róva. Egyúttal integrálunk valamennyi olyan térkonfigurációra, amely egy kezdeti, a mértékfeltételnek elegettevő térkonfigurációból mértéktranszformációval nyerhető. Osszuk be ezért a kapott kifejezést a "mértéktranszformációk (az ekvivalens térkonfigurációk) számával", azaz a csoport $\int [d\omega]$ invariáns térfogatával.

Ekkor a következő definíciót nyerjük:

$$Z \;=\; \frac{\int [d\omega] \int_{\mathrm{per}} [dA_\mu] \Delta[A_\mu] \delta[F^\omega] \exp\{S\}}{\int [d\omega]}. \tag{12.23}$$

A mértékinvariancia felhasználásával a számláló:

$$\int [d\omega] \int_{\mathrm{per}} [dA_\mu^\omega] \Delta[A_\mu^\omega] \delta[F^\omega] \exp\{S^\omega\}. \tag{12.24}$$

Itt természetesen átjelölhetjük az integrálási változót A_μ^ω-ról A_μ-re:

$$\left(\int [d\omega]\right) \int_{\mathrm{per}} [dA_\mu] \Delta[A_\mu] \delta[F] \exp\{S\}. \tag{12.25}$$

Ekkor látjuk, hogy a számláló arányos a csoport térfogatával, és ezért az utóbbival lehet Z-ben egyszerűsíteni. Az elektromágneses tér partíciós függvényére így a következő kifejezést nyerjük:

$$Z = \int_{\mathrm{per}} [dA_\mu] \Delta[A_\mu] \delta[F] e^S. \tag{12.26}$$

Az így definiált partíciós függvény valóban mértékinvariáns.

A következő lépés a $\Delta[A_\mu]$ funkcionál meghatározása. Ehhez írjuk át az őt definiáló egyenletet a következő alakba:

$$\Delta^{-1}[A_\mu] = \int [d\omega] \delta\left[F[A_\mu^\omega]\right]. \tag{12.27}$$

Rögzített A_μ esetén F az ω funkcionálja. Térjünk át az ω integrálási változóról az F integrálási változóra. Feltéve, hogy egyetlen olyan $\omega = \omega[F]$ funkcionál létezik, amely adott A_μ esetén megoldja az $F[\omega] = 0$ mértékfeltételt, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[A_\mu] &= \int [dF] \delta[F] \left(\det \frac{\delta F^\omega}{\delta\omega}\right)^{-1} \\ &= \left(\det \frac{\delta F^\omega}{\delta\omega}\right)^{-1} |_{F[A^\omega]=0}. \end{aligned} \tag{12.28}$$

A determináns nem más mint a végrehajtott transzformáció Jacobi-determinánsa. Mielőtt tovább lépnénk, emlékezzünk vissza, hogy a partíciós függvényben a Δ funkcionál meg van szorozva $\delta[F]$-fel. Ez azt jelenti, hogy Δ-t olyan rögzített A_μ mellett kell meghatározni, amelyre $F[A] = 0$. Ha azonban A_μ ilyen, akkor az $F[A_\mu^\omega] = 0$ megoldása $\omega = 0$. Ezért a determinánst az $\omega = 0$ helyen kell kiszámolni, vagyis

$$\Delta[A_\mu] = \det \frac{\delta F^\omega(x)}{\delta\omega(y)} |_{\omega=0}. \tag{12.29}$$

A gyakorlatban elegendő F^ω-t infinitezimális mértéktranszformációk esetére meghatározni. Az F^ω ω szerinti sorfejtésében a lineáris tag együtthatója a keresett funkcionálderivált, amelynek determinánsát kell kiszámolni. Az elektromágneses tér (a tiszta U(1) mértékelmélet) partíciós függvényét így az alábbi alakban állítottuk elő:

$$Z = \int_{\mathrm{per}} [dA_\mu] \delta[F] \det \left(\frac{\delta F^\omega(x)}{\delta\omega(y)}\right) |_{\omega=0}\, e^S. \tag{12.30}$$

Fagyejev és Popov módszerét követve a fentiekben előállt determinánst felfoghatjuk, mint valamilyen Grassmann-értékű $\bar{C}(x)$ és $C(x)$ szellemterek szerinti Gauss-típusú integrált:

$$\det\left(\frac{\delta F^\omega(x)}{\delta\omega(y)}\right) = \int_{\text{per}}[d\bar{C}][dC]\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\int d^3x\bar{C}(x)\frac{\partial F^\omega}{\partial\omega}C(x)\right\}. \quad (12.31)$$

A bevezetett szellemtér nem valódi fizikai szabadsági fokokat képvisel, hanem csak egy technikai segédeszköz, amelynek segítségével a determináns könnyebben kezelhető. Fontos azt is megjegyezni, hogy a megengedett mértéktranszformációk periodikussága miatt a szellemtereket is periodikusaknak kell választani:

$$\bar{C}(0,\vec{x}) = \bar{C}(\beta,\vec{x}), \qquad C(0,\vec{x}) = C(\beta,\vec{x}). \quad (12.32)$$

Ebben is különböznek a valódi fermionterektől, amelyekre antiperiodikus a határfeltétel.

Barátkozás céljából írjuk ki a szellemtagot kovariáns mérték használata esetén:

$$F = \partial_\mu A_\mu - c(x) = 0. \quad (12.33)$$

Ekkor a mértékfeltétel infinitezimális mértéktranszformáció után:

$$\begin{aligned} F^\omega &= \partial_\mu A_\mu^\omega - c(x) \\ &= \partial_\mu A_\mu - c(x) - \partial_\mu\partial_\mu\omega, \end{aligned} \quad (12.34)$$

amiből funkcionálderiválással

$$\frac{\delta F^\omega(x)}{\delta\omega(y)} = -\partial_\mu\partial_\mu\delta(x-y) \quad (12.35)$$

adódik. A hatást tehát az

$$-\int_0^\beta d\tau\int d^3x\bar{C}\partial_\mu\partial_\mu C = \int_0^\beta d\tau\int d^3x(\partial_\mu\bar{C})(\partial_\mu C) \quad (12.36)$$

alakú szellemtaggal kell kiegészíteni. A továbbiakban kovariáns mértéket fogunk használni.

Mivel a partíciós függvény által leírt fizikai tartalom független a $c(x)$ függvény önkényes megválasztásától, szabad a

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\rho}\int_0^\beta d\tau\int d^3x c^2(x)\right\} \quad (12.37)$$

tényezővel szorozni és az összes periodikus $c(x)$ függvényre integrálni. (Itt $0<\rho\le 1$ valós állandó. Különböző értékei a kovariáns mérték különböző eseteinek felelnek meg.) Ez eltünteti a Dirac-delta funkcionált a partíciós függvényből, azonban megjelenik az exponensben egy további tag:

$$\int [dc] \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \int d^3x c^2\right\} \delta[\partial_\mu A_\mu - c] = \tag{12.38}$$

$$\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{2\rho}(\partial_\mu A_\mu)^2\right\}. \tag{12.39}$$

Mindezeket összefoglalva, a partíciós függvény az

$$Z = \int_{\text{per}} [d\bar{C}][dC] \int_{\text{per}} [dA_\mu] \exp(S_{\text{eff}}) \tag{12.40}$$

alakba írható, ahol bevezettük az S_{eff} effektív hatást:

$$S_{\text{eff}} = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\rho}(\partial_\mu A_\mu)^2 + (\partial_\mu \bar{C})(\partial_\mu C)\right]. \tag{12.41}$$

A $\rho = 1$ választást Feynman-mértéknek nevezik. æ

13 A feketetest sugárzás

Megmutatjuk, hogy az elektromágneses térnek az előző fejezetben bevezetett partíciós függvénye helyesen írja le a feketetest sugárzást. Annak illusztrálására, hogy Z és a fizikai következtetések invariánsak a mérték rögzítésének módjával szemben, a feketetest sugárzás képleteit levezetjük **A**) axiális és **B**) Feynman-féle mértékben.

A) Axiális mértékről akkor beszélünk, ha az $A_3 = 0$ mértékfeltételt használjuk. Ekkor a partíciós függvény:

$$\begin{aligned} Z &= \int_{\text{per}} [dA_\mu]\delta[A_3]\det\left(\frac{\delta A_3^\omega(x)}{\delta\omega(y)}\right)|_{\omega=0} e^S \\ &= \int_{\text{per}} [dA_0][dA_1][dA_2]\det(-\partial_3)e^S, \end{aligned} \tag{13.1}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$A_3^\omega = A_3 - \partial_3\omega, \tag{13.2}$$

és ebből következően

$$\frac{\delta A_3^\omega(x)}{\delta\omega(y)} = -\partial_3\delta(x-y). \tag{13.3}$$

A hatás axiális mértékben:

$$
\begin{aligned}
S_0 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}|_{A_3=0} \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_1 A_0 - \partial_\tau A_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_2 A_0 - \partial_\tau A_2)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3 A_0)^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}(\partial_3 A_2)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3 A_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)^2 \\
&= \frac{1}{2}(A_0, A_1, A_2)\beta^{-2} D \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{13.4}
$$

ahol bevezettük a

$$
D = \beta^2 \begin{pmatrix} \nabla^2 & -\partial_1\partial_2 & -\partial_2\partial_\tau \\ -\partial_1\partial_\tau & \partial_2^2 + \partial_3^2 + \partial_\tau^2 & -\partial_1\partial_2 \\ -\partial_2\partial_\tau & -\partial_1\partial_2 & \partial_1^2 + \partial_3^2 + \partial_\tau^2 \end{pmatrix}
\tag{13.5}
$$

mátrixot.

A vektorpotenciált Fourier-sor alakjában állítjuk elő:

$$
A_\mu = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{1/2} \sum_{np} A_{n\mu}(\vec{p}) \exp\{\mathrm{i}(\vec{p}\vec{x} + \omega_n \tau)\}.
\tag{13.6}
$$

A partíciós függvényben fellépő determinánst most is szellemterek Gauss-integráljaként fejezzük ki. A szellemtereket is Fourier-sorral állítjuk elő:

$$
C = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{1/2} \sum_{mq} C_m(\vec{q}) \exp\{\mathrm{i}(\vec{q}\vec{x} + \omega_m \tau)\}.
\tag{13.7}
$$

A vektorpotenciál és a szellemterek Fourier-frekvenciái $\omega_n = 2\pi n T$ és $\omega_m = 2\pi m T$, ahol n és m tetszőleges egész. Helyettesítsük be a Fourier-sorokat a partíciós függvény képletébe:

$$
\begin{aligned}
Z &= \int \prod_{np} dA_{0n}(\vec{p}) dA_{1n}(\vec{p}) dA_{2n}(\vec{p}) \prod_{mq} d\bar{C}_m(\vec{q}) dC_m(\vec{q}) \\
&\quad \cdot \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{np} (A_{0n}(\vec{p}), A_{1n}(\vec{p}), A_{2n}(\vec{p})) D(\omega_n, \vec{p}) \begin{pmatrix} A_{0n}(\vec{p}) \\ A_{1n}(\vec{p}) \\ A_{2n}(\vec{p}) \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{mq} \bar{C}_m(\vec{q}) \beta q_3 C_m(\vec{q}) \right\} \\
&= [\det D(\omega_n, \vec{p})]^{-1/2} \det(-\beta q_3).
\end{aligned}
\tag{13.8}
$$

Képezzük a partíciós függvény logaritmusát:

$$\begin{aligned}\ln Z &= \ln\det(\beta q_3) - \frac{1}{2}\ln\det D(\omega_n,\vec{p})\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_q \ln(\beta q_3)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_p \ln(\det{}_4 D(\omega_n,\vec{p})). \qquad (13.9)\end{aligned}$$

Elemi algebrai átalakítással adódik, hogy

$$\det{}_4 D(\omega_n,\vec{p}) = \qquad (13.10)$$

$$\begin{aligned}&\det\left\{\beta^2\begin{pmatrix}\vec{p}^{\,2} & -p_1\omega_n & -p_2\omega_n\\ -p_1\omega_n & p_2^2+p_3^2+\omega_n^2 & -p_1p_2\\ -p_2\omega_n & -p_1p_2 & p_1^2+p_3^2+\omega_n^2\end{pmatrix}\right\}\\ &= \beta^6 p_3^2(\omega_n^2+\vec{p}^{\,2})^2. \qquad (13.11)\end{aligned}$$

Ezt felhasználva,

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_p \ln\det{}_4 D(\omega_n,\vec{p}) = \ln\left(\prod_{np}\beta^{-3}p_3^{-1}(\omega_n^2+\vec{p}^{\,2})^{-1}\right), \qquad (13.12)$$

és a partíciós függvény logaritmusára a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned}\ln Z &= \ln\prod_{np}\frac{\beta p_3}{\beta^3 p_3(\omega_n^2+\vec{p}^{\,2})}\\ &= \ln\prod_{np}\left(\beta^{-2}(\omega_n^2+\vec{p}^{\,2})^{-1}\right)\\ &= 2V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[-\frac{1}{2}\beta\omega - \ln\left(1-e^{-\beta\omega}\right)\right] + \text{const.}, \qquad (13.13)\end{aligned}$$

ahol $\omega = |\vec{p}|$, mert a fotonok nyugalmi tömege zérus. A harmadik egyenlőség felírásakor felhasználtuk a (**??**) és a (**??**) képleteket.

B) Most megmutatjuk, hogy ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a Feynman-mértéket használjuk, amely a kovariáns mérték $\rho = 1$ esete. Az effektív Lagrange-sűrűség kovariáns mértékben:

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} &= \frac{1}{2}A_i\partial_\tau^2 A_i + \frac{1}{2\rho}A_0\partial_\tau^2 A_0 + \frac{1}{2}A_\mu\nabla^2 A_\mu\\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\left[A_0\partial_\tau\vec{\nabla}\vec{A} + \vec{A}\partial_\tau\vec{\nabla}A_0 + (\vec{A}\vec{\nabla})(\vec{\nabla}\vec{A})\right]\\ &\quad +\bar{C}(\partial_\tau^2+\nabla^2)C \qquad (13.14)\end{aligned}$$

Az effektív hatás a térmennyiségek Fourier-sorának behelyettesítése után:

$$S_{\mathrm{eff}} = \int_0^\beta d\tau\int d^3x\,\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}$$

$$
\begin{aligned}
= & \ \beta^2 \sum_{np} \Big\{ -\frac{1}{2} A_{in}(\vec{p}) \omega_n^2 A_{in}(\vec{p}) - \frac{1}{2\rho} A_{0n}(\vec{p}) \omega_n^2 A_{0n}(\vec{p}) - \frac{1}{2\rho} A_{\mu n}(\vec{p}) \vec{p}^{\,2} A_{\mu n}(\vec{p}) \\
& - \frac{1-\rho}{\rho} A_{0n}(\vec{p}) \omega_n p_i A_{in}(\vec{p}) - \frac{1-\rho}{2\rho} A_{in}(\vec{p}) p_i p_j A_{jn}(\vec{p}) \\
& + \bar{C}_{np} (\omega_n^2 + p^2) C_{np} \Big\} \qquad (13.15)
\end{aligned}
$$

Ez a Feynman-mértékben

$$
S_{\text{eff}} = \sum_{np} \left\{ -\frac{1}{2} \beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2) A_{\mu n}^2(\vec{p}) + \beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2) \bar{C}_n(\vec{p}) C_n(\vec{p}) \right\} \qquad (13.16)
$$

alakot ölt. A partíciós függvény így Feynman-mértékben:

$$
\begin{aligned}
Z = & \prod_{np\mu} \int dA_{n\mu}(\vec{p}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2) A_{n\mu}^2(\vec{p}) \right\} \\
& \cdot \prod_{np} \int d\bar{C}_n(\vec{p}) dC_n(\vec{p}) \exp \left\{ \beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2) \bar{C}_n(\vec{p}) C_n(\vec{p}) \right\}. \qquad (13.17)
\end{aligned}
$$

A 2. és az 5. fejezet eredményeit felhasználva kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\ln Z & = 4 \sum_{np} \ln \left[\beta^2 (\omega_n^2 + \vec{p}^{\,2}) \right]^{-1/2} + 2 \sum_{np} \ln \left[\beta^2 (\omega_n^2 + \vec{p}^{\,2}) \right]^{1/2} \\
& = - \sum_{np} \ln \left[\beta^2 (\omega_n^2 + \vec{p}^{\,2}) \right]. \qquad (13.18)
\end{aligned}
$$

Ez ugyanaz az eredmény, mint amit axiális mértékben kaptunk. Most jól látszik a szellemterek szerepe. Azok éppen kiejtik a vektorpotenciáltér két szabadsági fokát a partíciós függvényben. Ez megfelel annak, hogy az elektromágneses tér transzverzális. Abból, hogy a foton (renormálatlan) nyugalmi tömege zérus, következik, hogy a hatás mértékinvariáns és ebből, hogy csak a transzverzális szabadsági fokok fizikaiak. Mértéktranszformáció során $A_{n\mu}(\vec{k}) \to A_{n\mu}(\vec{k} + k_\mu f_n(\vec{k})$, s így csak a vektorpotenciál transzverzális ($\vec{k}$-ra merőleges komponensei maradnak változatlanok, vis. csak ezek fizikaiak. Másrészt a szellemterek is a mértékinvariancia miatt vezethetők be, és – mint látjuk – szerepük éppen az, hogy a partíciós függvényből kiejtsék a nem fizikai szabadsági fokok járulékát. A második fejezet eredményeit felhasználva rögtön írhatjuk, hogy

$$
\ln Z = 2V\beta \frac{\pi^2}{90} T^4, \qquad (13.19)
$$

ahonnan deriválással kapjuk a sugárzási tér energiáját

$$
E = V \frac{\pi^2}{15} T^4 \qquad (13.20)
$$

és nyomását

$$P = \frac{\pi^2}{45}T^4. \tag{13.21}$$

Ezek az elektromágneses sugárzási tér kvantummechanikából és statisztikus fizikából jól ismert képletei. A bevezetett partíciós függvény tehát a kölcsönhatás mentes elektromágneses teret helyesen írja le. Ezért azt fogjuk tovább általánosítani a kvantumelektrodinamika és a nem-ábeli mértékelméletek esetére. æ

14 Kvantumelektrodinamika

A kvantumelektrodinamika partíciós függvényéhez úgy jutunk, hogy az elektromágneses teret leíró hatást kiegészítjük a szabad elektronteret és az elektromágneses tér és az elektrontér közötti kölcsönhatást leíró hatástagokkal:

$$S = S_0 + S_I, \tag{14.1}$$

ahol

$$S_0 = S_{\text{eff}} + \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi}(-\gamma^0\partial_\tau + \mathrm{i}\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m + \mu\gamma^0)\psi, \tag{14.2}$$

a hatás szabad terektől származó tagja és

$$S_I = \int_0^\beta d\tau \int d^3x(-e\bar{\psi}\not{A}\psi) \tag{14.3}$$

írja le a kölcsönhatást;

$$\not{A} = \gamma^0 \mathrm{i} A_0 - \vec{\gamma}\vec{A}. \tag{14.4}$$

A hatásba behelyettesítjük a térmennyiségek Fourier-sorát. Ekkor kovariáns mértéket használva a következő eredményre jutunk:

$$\begin{aligned} S_0 = & -\mathrm{i}\beta\sum_{mk}\mathrm{i}\bar{\psi}_{\alpha,m}(\vec{k})(\mathcal{G}_0^{-1}(\omega_m,\vec{k}))_{\alpha\rho}\psi_{\rho,m}(\vec{k}) \\ & -\frac{1}{2}\beta^2\sum_{np}(\mathcal{D}_0^{-1})_{\mu\nu}(\omega_n,\vec{p})A_{\mu n}(\vec{p})A^*_{\nu n}(\vec{p}) \\ & +\beta^2\sum_{nq}\mathcal{C}_0^{-1}(\omega_n,\vec{q})\bar{C}_n(\vec{q})C_n(\vec{q}), \end{aligned} \tag{14.5}$$

ahol bevezettük a szabad elektrontér

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0^{-1} &= \gamma^0(-\mathrm{i}\omega_m + \mu) - \vec{\gamma}\vec{k} - m \\ &= \not{k} - m, \qquad (k_0 = -\mathrm{i}\omega_m + \mu) \end{aligned} \tag{14.6}$$

a szabad elektromágneses tér

$$(\mathcal{D}_0^{-1})_{\mu\nu} = p^2\left(g_{\mu\nu} - \frac{1-\rho}{\rho}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right), \tag{14.7}$$

és a szellemtér

$$\mathcal{C}_0^{-1} = \omega_n^2 + \vec{q}^{\,2} \tag{14.8}$$

inverz propagátorát. A fentiekben $\omega_m = (2m+1)\pi T$ és $\omega_n = 2n\pi T$, $p_0 = i\omega_n$ és $-p^2 = \omega_n^2 + \vec{p}^{\,2}$, és μ jelöli a megmaradó elektromos töltéssel kapcsolatos kémiai potenciált. A hatás kölcsönhatási tagja:

$$S_I = -e\beta^{3/2}\sum_{np}\sum_{mk}\gamma^\mu A_{\mu n}(\vec{p})\bar{\psi}_m(\vec{k})\psi_{m+n}(\vec{p}+\vec{k}). \tag{14.9}$$

Az $\ln Z_I$ perturbációs sorának Feynman-diagrammokat feleltethetünk meg:

1. Belső fotonvonal:

$$\to T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathcal{D}_{0\,\mu\nu}. \tag{14.10}$$

2. Belső elektronvonal:

$$\to T\sum_m \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathcal{G}_{0\,\alpha\rho}. \tag{14.11}$$

3. Vertex:

$$\to -e\gamma^\mu. \tag{14.12}$$

4. Zárt fermionhurok mentén a spinorindexekre a haladás sorrendjében spurképzés van.

5. A vertex és a befutó fotonpropagátor egyik Lorentz-indexét kontraháljuk.

6. Minden diagrammnak megfelelő képletben fellép egy βV tényező.

7. Minden zárt fermionhurok egy (-1) tényezőt hoz be.

8. Az egyes diagrammokhoz tartozó kombinatorikai faktorok azon $1/2$ szorzókból adódnak ki, amelyek minden olyan esetben fellépnek, ha két rögzített vertex között legalább két fermionvonal teremt összeköttetést (lehet még egy harmadik fotonvonal is). Ugyancsak $1/2$ faktor jelenik meg minden egy adott vertexből kiinduló és oda visszatérő fermionvonallal kapcsolatban. Az elmondottakban csak olyan eseteket kell nézni, amikor a fermionvonalak mentén nincsenek az említetteken kívül más vertexek.

A partíciós függvény legalacsonyabb rendű el nem tűnő járuléka:

$$\ln Z_2 \;=\; -\frac{1}{2} \qquad\qquad + \frac{1}{4} \qquad\qquad . \tag{14.13}$$

A következő járulék negyedrendű:

$$\begin{aligned}\ln Z_4 \;=\; & - \qquad\qquad - \qquad\qquad + \frac{1}{4} \\ & + \frac{1}{2} \qquad\qquad - \frac{1}{8} \qquad\qquad .\end{aligned} \tag{14.14}$$

Könnyen beláthatjuk Furry tételét, hogy a "békalencsét" tartalmazó diagrammok járuléka zérus:

$$= \; 0. \tag{14.15}$$

A spúrképzés során csak a gamma-mátrixokban kvadratikus tag nem tűnik el. Ez azonban az impulzusban lineáris, s így az impulzustérre történő integráláskor ad zérust. A tétel valójában általánosabban is igaz: minden olyan zárt fermionhurok járuléka zérus, amely mentén páratlan számú vertex helyezkedik el. Furry tétele miatt $\ln Z_2$-höz csak az első diagramm, $\ln Z_4$-hez csak az első három diagramm ad zérustól különböző járulékot. æ

15 A fotonpropagátor és a polarizációs tenzor

A szabad fotonpropagátor inverzét a

$$\mathcal{D}_0^{-1}{}_{\mu\nu} \;=\; -p^2\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\rho}{\rho}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \tag{15.1}$$

összefüggéssel definiáltuk euklideszi változókban: $p^2 = p_4^2 + \vec{p}^{\,2}$, $p_4 = \omega_n = 2\pi n T$. A fotonpropagátort ezek után

$$\mathcal{D}_{0\,\mu\nu} \;=\; A\left(\delta_{\mu\nu} + B\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \tag{15.2}$$

alakban keressük. Felhasználva, hogy tetszőleges p_μ euklideszi impulzus esetén:

$$\mathcal{D}_0^{-1}{}_{\mu\nu}\mathcal{D}_{0\,\nu\kappa} = \delta_{\mu\kappa}, \tag{15.3}$$

adódik,hogy $A = -1/p^2$, $B = -(1-\rho)$ és

$$\mathcal{D}_{0\,\mu\nu} \;=\; -\frac{1}{p^2}\left(\delta_{\mu\nu} - (1-\rho)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right). \tag{15.4}$$

Minkowski-vátozókban a megfelelő összefüggést a $p_0 = \mathrm{i}\omega_n$ bevezetésével kapjuk:

$$\mathcal{D}_{0\,\mu\nu} \;=\; \frac{1}{p^2}\left(g_{\mu\nu} + (1-\rho)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right), \tag{15.5}$$

ahol most $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^{\,2} = -(\omega_n^2 + \vec{p}^{\,2})$.

A teljes fotonpropagátort a következőképpen definiáljuk:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(\vec{x}_1, \tau_1; \vec{x}_2, \tau_2) \;=\; < A_\mu(\vec{x}_1, \tau_1) A_\nu(\vec{x}_2, \tau_2) >, \tag{15.6}$$

ahol az átlagot a kölcsönható rendszer makrokanonikus sokasága szerint képezzük. Ennek Fourier-transzformáltja

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(\omega_n, \vec{p}) \;=\; \beta^2 < A_{\mu n}(\vec{p}) A_{\nu\,-n}(-\vec{p}) >, \tag{15.7}$$

ahol felhasználtuk, hogy a fotonpropagátor csak $\tau_1 - \tau_2$ és $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ függvénye (eltolási invariancia), valamint behelyettesítettük a vektorpotenciál Fourier-sorát.

Hasonló kapcsolat áll fenn a fotonpropagátor és a kvantumelektrodinamika partíciós függvénye között, mint skalártér esetén a propagátor és a partíciós függvény között. Ezt megkaphatjuk, ha észrevesszük, hogy a partíciós függvénynek a szabad fotonpropagátort tartalmazó részében az exponens (ld. 14. fejezet)

$$-\frac{1}{2}\beta^2 \sum_{np} (\mathcal{D}_0^{-1})_{\mu\nu}(\omega_n, \vec{p}) A_{\mu n}(\vec{p}) A^*_{\nu n}(\vec{p}). \tag{15.8}$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}^{-1}_{0\,\mu\nu}} &= -\frac{1}{2Z}\beta^2 \int [dA] A_{\mu n}(\vec{p}) A^*_{\nu n}(\vec{p}) e^S \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{D}_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{15.9}$$

A szabad propagátor és az inverze közötti kapcsolatot variálva

$$\delta \mathcal{D}_{0\,\mu\kappa} (\mathcal{D}_0^{-1})_{\kappa\nu} \;=\; -\mathcal{D}_{0\,\mu\kappa} \delta (\mathcal{D}_0^{-1})_{\kappa\nu} \tag{15.10}$$

adódik, ahonnan

$$\delta(\mathcal{D}_0^{-1})_{\lambda\nu} \;=\; -(\mathcal{D}_0^{-1})_{\lambda\mu} \delta \mathcal{D}_{0\,\mu\kappa} (\mathcal{D}_0^{-1})_{\kappa\nu}. \tag{15.11}$$

Ezt felhasználva,

$$\delta \ln Z \;=\; \frac{1}{2} \sum_{np} (\mathcal{D}_0^{-1})_{\lambda\mu} \delta \mathcal{D}_{0\,\mu\kappa} (\mathcal{D}_0^{-1})_{\kappa\nu} \mathcal{D}_{\lambda\nu}, \tag{15.12}$$

és a teljes fotonpropagátor:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mu\nu} &= 2\frac{\delta \ln Z}{\delta(\mathcal{D}_0^{-1})_{\mu\nu}} \\
&= 2\mathcal{D}_{0\,\mu\lambda}\frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_{0\,\lambda\kappa}}\mathcal{D}_{0\,\kappa\nu}.
\end{aligned}
\tag{15.13}
$$

Ez a 8.fejezetben skalártérre levezetett összefüggés analogonja.

Ugyancsak a skalártér esetéhez analóg módon a fotonsajátenergiát az

$$
\Pi_{\mu\nu} = (\mathcal{D}^{-1})_{\mu\nu} - (\mathcal{D}_0^{-1})_{\mu\nu}
\tag{15.14}
$$

összefüggéssel definiáljuk. Ezt szokás polarizációnak is nevezni tekintve, hogy a vákuumpolarizációval kapcsolatos. (Elektron-pozitron pár virtuális keletkezését és szétsugárzását írja le. A lényeges különbség a skalártér sajátenergiájával szemben az, hogy a foton sajátenergiája Lorentz-tenzor. Ráadásul nem is mértékinvariáns. Tekintve, hogy a partíciós függvény perturbációs sora e^2 szerint halad, a polarizáció is e^2 szerinti perturbációs sorral állítható elő:

$$
\Pi = \sum_{\ell} \Pi_{\ell}.
\tag{15.15}
$$

(Elhagytuk a tenzorindexeket.) Így a kölcsönhatásban negyedrendű tagokkal bezárólag:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \left(\mathcal{D}_0^{-1} + \Pi\right)^{-1} \\
&= (1 + \mathcal{D}_0\Pi)^{-1}\,\mathcal{D}_0 \\
&= \mathcal{D}_0 - \mathcal{D}_0\Pi_2\mathcal{D}_0 - \mathcal{D}_0\Pi_4\mathcal{D}_0 - \ldots + 2\mathcal{D}_0\Pi_2\mathcal{D}_0\Pi_2\mathcal{D}_0 + \ldots
\end{aligned}
\tag{15.16}
$$

Másrészt a partíciós függvény segítségével írhatjuk, hogy

$$
\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + 2\mathcal{D}_0\sum_{\ell}\frac{\delta \ln Z_\ell}{\delta \mathcal{D}_0}\mathcal{D}_0
\tag{15.17}
$$

Ezt összehasonlítva az előző sorral, kapjuk a polarizáció különböző rendű tagjait:

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= -2\frac{\delta \ln Z_2}{\delta \mathcal{D}_0} \\
&= +\frac{1}{2} \qquad\qquad ,
\end{aligned}
\tag{15.18}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_4 &= -2\frac{\delta \ln Z_4}{\delta \mathcal{D}_0} + 2\Pi_2\mathcal{D}_0\Pi_2 \\
&= +2 \qquad\qquad + 2 \qquad\qquad - 2\cdot\frac{1}{4} \\
&\quad +2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \qquad\qquad .
\end{aligned}
\tag{15.19}
$$

Itt felhasználtuk, hogy a funkcionálderivált kétszerese a zárt diagramm egy fotonvonalának megszakításával ábrázolható (hasonlóan mint skalártér esetén) és az utolsó egyenlőségben a 2-es faktorok azért lépnek fel, mert két fotonvonal is megszakítható. Látjuk, hogy a nem egy foton irreducibilis diagrammok Π_4-ben kiejtik egymást. Ez hasonlóan megtörténik a magasabb rendekben is. Végül tehát a polarizációs tenzor és a partíciós függvény közötti összefüggés:

$$\Pi_{\mu\nu} = -\left(2\frac{\delta \ln Z_I}{\delta \mathcal{D}_{0\,\mu\nu}}\right)_{1\mathrm{PI}}. \qquad (15.20)$$

æ

16 A Ward-Takahashi azonosság

A fotonpropagátor tulajdonságait fogjuk először vizsgálni. A szabad fotonpropagátor kielégíti az alábbi azonosságot, ami a definíció alapján közvetlenül belátható:

$$k_\mu \mathcal{D}_{0\,\mu\nu}(\omega_n, \vec{k}) = \rho k_\nu / k^2. \qquad (16.1)$$

A teljes fotonpropagátor is kielégíti ezt az azonosságot, ami az alábbi Ward-Takahashi azonosság következménye:

$$k_\mu \mathcal{D}_{0\,\mu\nu}(\omega_n, \vec{k}) = k_\mu \mathcal{D}_{\mu\nu}(\omega_n, \vec{k}). \qquad (16.2)$$

Ez az azonosság a következőképpen látható be. Egészítsük ki a partíciós függvényben szereplő hatást külső forrástagokkal:

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = \int [d\bar{\psi}][d\psi][dA][d\bar{C}][dC] \exp\left\{S + \int_0^\beta d\tau \int d^3x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A_\mu)\right\} \qquad (16.3)$$

Tekintsünk egy $\omega(x)$ paraméterű infinitezimális mértéktranszformációt:

$$\psi \to \psi e^{\mathrm{i}\omega}, \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi} e^{-\mathrm{i}\omega},$$
$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \omega, \qquad C \to C, \qquad \bar{C} \to \bar{C}. \qquad (16.4)$$

Az útintegrálban használt integrálási mérték mértékinvariáns. Ezért a partíciós függvény megváltozása infinitezimális mértéktranszformáció során a hatás

$$\begin{aligned}
\int_0^\beta d\tau \int d^3x & \left[\frac{1}{2\rho}\delta(\partial_\mu A_\mu)^2 + \bar{\eta}\,\delta\psi + \delta\bar{\psi}\,\eta + J_\mu \delta A_\mu\right] \\
&= \int_0^\beta \int d^3x \left[\frac{1}{\rho}(\partial_\mu A_\mu)(\partial_\nu\partial_\nu\omega) + \mathrm{i}\omega\bar{\eta}\psi - \mathrm{i}\omega\bar{\psi}\eta + J_\mu \partial_\mu \omega\right] \\
&= \int_0^\beta \int d^3x \left[-\frac{1}{\rho}(\partial_\nu\partial_\nu)(\partial_\mu A_\mu) + \mathrm{i}\bar{\eta}\psi - \mathrm{i}\bar{\psi}\eta + \partial_\mu J_\mu\right]\omega \qquad (16.5)
\end{aligned}$$

megváltozásából származik. Másrészt viszont a partíciós függvény mértékinvariáns, úgyhogy

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \frac{\delta Z}{\delta\omega(x)} = \int [d\bar{\psi}][d\psi][dA][d\bar{C}][dC] \\
& \exp\left\{ S + \int_0^\beta d\tau \int d^3x(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A_\mu) \right\} \\
& \left[-\frac{1}{\rho}(\partial_\nu\partial_\nu)(\partial_\mu A_\mu) + \mathrm{i}\bar{\eta}\psi - \mathrm{i}\bar{\psi}\eta + \partial_\mu J_\mu \right]. \qquad (16.6)
\end{aligned}
$$

Ez az egyenlőség generálja a Ward-Takahashi-azonosságokat. Utóbbiak közül csak egyet fogunk most belátni, amelyet a fejezet elején emlegettünk. Ebből a célból deriváljuk a generáló azonosságot $J_\kappa(y)$ szerint, majd tegyük zérussá a külső forrásokat:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \int [d\bar{\psi}][d\psi][dA][d\bar{C}][dC] \\
& \exp\{S\} \left[-\frac{1}{\rho}(\partial_\nu\partial_\nu)_x(\partial_\mu A_\mu(x))A_\kappa(y) - (\partial_\kappa)_x\delta(x-y) \right]. \qquad (16.7)
\end{aligned}
$$

Innen

$$0 \;=\; (\partial_\nu\partial_\nu)_x(\partial_\mu)_x < A_\mu(x)A_\kappa(y) > +\rho(\partial_\kappa)_x\delta(x-y) \qquad (16.8)$$

adódik, amit Fourier-transzformálva kapjuk a kívánt azonosságot:

$$-k^2 k_\mu \mathcal{D}_{\mu\kappa}(\omega_n, \vec{k}) + \rho p_\kappa = 0, \qquad (16.9)$$

azaz

$$k_\mu \mathcal{D}_{\mu\kappa}(\omega_n, \vec{k}) \;=\; \frac{\rho k_\kappa}{k^2} = k_\mu \mathcal{D}_{0\;\mu\kappa}. \qquad (16.10)$$

Csak megjegyezzük, hogy magasabb rendű parciális deriváltakat képezve, valamint a fermionterek forrásai szerint deriválva a generáló azonosságot, további azonosságokat nyerhetünk a Green-függvényekre.

A fenti azonosság következménye, hogy

$$k_\mu k_\nu \mathcal{D}_{\mu\nu} \;=\; \rho. \qquad (16.11)$$

A fentieket felhasználva belátjuk, hogy a polarizáció transzverzális:

$$k_\mu \Pi_{\mu\nu} \;=\; 0. \qquad (16.12)$$

Tekintsük a fotonpropagátorra vonatkozó

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \;=\; \mathcal{D}_{0\;\mu\nu} + \mathcal{D}_{0\;\mu\kappa}\Pi_{\kappa\lambda}\mathcal{D}_{\lambda\nu} \qquad (16.13)$$

egyenletet és szorozzuk meg k_μ-vel. A Ward-Takahashi azonnosságot figyelembe véve

$$k_\mu \mathcal{D}_{0\,\mu\kappa} \Pi_{\kappa\lambda} \mathcal{D}_{\lambda\nu} \;=\; 0, \tag{16.14}$$

azaz

$$\rho \frac{k_\kappa}{k^2} \Pi_{\kappa\lambda} \mathcal{D}_{\lambda\nu} \;=\; 0, \tag{16.15}$$

adódik, ahonnan kapjuk a bizonyítani kívánt azonosságot.

A továbbiakban meghatározzuk a propagátor és a polarizáció tenzorszerkezetét. Vezessük be a k_μ-re négydimenziós értelemben ortogonális altér

$$\delta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \tag{16.16}$$

projektorát, valamint ebben a háromdimenziós altérben a $\vec{k}$-ra merőleges altér $P_{T\,\mu\nu}$ projektorát és a $\vec{k}$ irányú egy-dimenziós altér $P_{L\,\mu\nu}$ projektorát:

$$P_{T\,44} = P_{T\,4i} = P_{T\,i4} = 0, \qquad P_{T\,ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^{\,2}}, \tag{16.17}$$

$$P_{L\,\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - P_{T\,\mu\nu}. \tag{16.18}$$

Elemi számolással láthatók be a következő tulajdonságok:

$$P_{L\,\mu\kappa} P_{L\,\kappa\nu} = P_{L\,\mu\nu}, \qquad P_{T\,\mu\kappa} P_{T\,\kappa\nu} = P_{T\,\mu\nu}, \tag{16.19}$$

$$P_{T\,ik} P_{T\,kj} = P_{T\,ij}, \qquad P_{L\,\mu\nu} P_{T\,\mu\nu} = 0, \tag{16.20}$$

$$k_\mu P_{T\,\mu\nu} = k_\mu P_{L\,\mu\nu} = 0, \qquad k_i P_{T\,ij} = 0, \tag{16.21}$$

$$P_{T\,\mu\mu} = P_{T\,ii} = 3 - 1 = 2 \qquad P_{L\,\mu\mu} = 4 - 1 - P_{T\,\mu\mu} = 1. \tag{16.22}$$

Mivel $\Pi_{\mu\nu}$ ortogonális a k_μ euklideszi vektorra, azért teljesen általánosan

$$\Pi_{\mu\nu} \;=\; G P_{T\,\mu\nu} + F P_{L\,\mu\nu} \tag{16.23}$$

írható. A $T = 0$ hőmérsékletű vákuum esetén a rendszer Lorentz-invariáns, azaz

$$\Pi_{\mu\nu} \;\sim\; \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tag{16.24}$$

ami azt jelenti, hogy ekkor $F(k^2) = G(k^2)$. Véges hőmérsékletű és kémiai potenciálú közegben a Lorentz-invariancia megsérül. Ha $u = (1, 0, 0, 0)$ jelöli a közeg négyessebességét a közeg nyugalmi rendszerében, akkor a nyugalmi rendszerben F

és G függhet $ku = k_4$-től és $|\vec{k}|$-tól és két független függvény. Megmutatjuk, hogy ilyenkor a polarizációnak két független komponense van, Π_{44} és Π_{ii}. Egyrészt

$$\Pi_{44} = GP_{T\,44} + P_{L\,44} = F\frac{\vec{k}^{\,2}}{k^2}, \tag{16.25}$$

ahonnan

$$F = \frac{k^2}{\vec{k}^{\,2}}\Pi_{44}, \tag{16.26}$$

másrészt

$$\Pi_{ii} = GP_{T\,ii} + FP_{L\,ii} = 2G + \frac{\omega_n^2}{\vec{k}^{\,2}}\Pi_{44}, \tag{16.27}$$

ahonnan

$$G = \frac{1}{2}\left(\Pi_{ii} - \frac{\omega_n^2}{\vec{k}^{\,2}}\Pi_{44}\right). \tag{16.28}$$

Végezetül kifejezzük a fotonpropagátort a transzverzális és longitudinális projekció tenzoraival:

$$(\mathcal{D}^{-1})_{\mu\nu} = AP_{T\,\mu\nu} + BP_{L\,\mu\nu} + C\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \tag{16.29}$$

A szabad fotonpropagátort az

$$A = B = -k^2, \qquad C = \frac{-k^2}{\rho} \tag{16.30}$$

választással kapjuk. A polarizációs tenzor definícióját és tenzorszerkezetét felhasználva a

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}^{-1})_{\mu\nu} - (\mathcal{D}_0^{-1})_{\mu\nu} &= (A + k^2)P_{T\,\mu\nu} + (B + k^2)P_{L\,\mu\nu} + \left(C + \frac{k^2}{\rho}\right)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \\ &= GP_{T\,\mu\nu} + FP_{L\,\mu\nu}\end{aligned} \tag{16.31}$$

azonosságra jutunk. Innen:

$$A = G - k^2, \qquad B = F - k^2, \qquad C = \frac{k^2}{\rho}. \tag{16.32}$$

A fotonpropagátor inverze tehát:

$$(\mathcal{D}^{-1})_{\mu\nu} = (G - k^2)P_{T\,\mu\nu} + (F - k^2)P_{L\,\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\rho}, \tag{16.33}$$

amelyet invertálva megkapjuk a fotonpropagátort:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = \frac{1}{G - k^2}P_{T\,\mu\nu} + \frac{1}{F - k^2}P_{L\,\mu\nu} - \frac{\rho}{k^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \tag{16.34}$$

(A fenti eredmények egyensúlyi rendszerre vonatkoznak. Ha nincsen egyensúly a rendszerben és emiatt konvektív részecskeáramlás van, akkor a tenzorszerkezetben az anyag lokális nyugalmi rendszerének négyes-sebessége is fellép.) æ

17 A kvantumelektrodinamika partíciós függvényének kicserélődési korrekciója

A kvantumelektrodinamikában a partíciós függvény legalacsonyabb, másodrendű korrekciója:

$$\begin{aligned}
\ln Z_2 &= -\frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\beta V e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q}-\vec{k}) \\
&\cdot T^3 \sum_{n_p n_q n_k} \beta\delta_{n_p,n_q+n_k}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}\frac{1}{k^2}g_{\mu\nu}\gamma^\nu\frac{\not{q}+m}{q^2-m^2}\right]. \qquad (17.1)
\end{aligned}$$

Itt Feynman-mértéket ($\rho = 1$) és Minkowski-változókat használtunk: $p_0 = \mathrm{i}(2n_p + 1)\pi T + \mu$, $q_0 = \mathrm{i}(2n_q + 1)\pi T + \mu$ és $k_0 = \mathrm{i}2n_k\pi T$. Az (**??**) kifejezést szokás kicserélődési korrekciónak nevezni, mert $T = 0$ esetén abból származik, hogy két, Fermi-tengerben levő részecske impulzust cserél.

A fenti korrekció kiszámításának főbb lépései a következők:

1. A spúr kiszámítása.
2. A Kronecker-deltát átírjuk integrálalakba és az integrálást elvégezve exponenciális függvényekkel fejezzük ki.
3. Egymástól függetlenül elvégezzük a frekvenciák szerinti összegzéseket a korábban megismert vonalintegrálok módszerével.
4. A kapott eredményben különválasztjuk a betöltési számokban kvadratikus, lineáris és az azoktól független tagokat.

Mint majd látni fogjuk, az eredmény ultraibolya divergenciákat tartalmaz. A renormálást most is annak mintájára végezzük, ahogy a $\lambda\Phi^4$ elméletben tettük. Egyrészt a (**??**) kifejezésből elhagyjuk azokat a tagokat, amelyek a rendszer energiájához T-től és μ-től független járulékot adnak, mert ezek a vákuum energiáját módosítják. Másrészt kivonjuk a kicserélődési diagrammból azokat a diagrammokat, amelyeket úgy kapunk belőle, hogy az egyes részecskevonalakon megjelenő sajátenergiás betétrészeket a $T \to 0$, $\mu \to 0$ limeszben vesszük:

$$\begin{aligned}
\ln Z_2^{\mathrm{R}} &= -\frac{1}{2}\left(\qquad\quad - 2 \qquad\quad - \qquad\quad \right) \\
&= \ln Z_2 + \ln Z_{2b} + \ln Z_{2c}. \qquad (17.2)
\end{aligned}$$

Lássunk hát neki a fent leírt módon $\ln Z_2$ kiszámolásának.

1. Az

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\gamma^\mu\gamma^\nu &= 4g^{\mu\nu} &(17.3)\\
\mathrm{Tr}\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma &= 4(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\rho\nu}-g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}). &(17.4)
\end{aligned}
$$

azonosságokat felhasználva kapjuk, hogy

$$
\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(\not{p}+m)\gamma^\nu(\not{q}+m)\right] = 8(2m^2-p\cdot q). \tag{17.5}
$$

A $\vec{k}$ szerinti integrálás könnyen elvégezhető a hármas-impulzusokra vonatkozó delta-függvénynek köszönhetően:

$$
\begin{aligned}
\ln Z_2 &= -\frac{1}{2}\beta V e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\\
&\quad\cdot T^3 \sum_{n_p n_q n_k} \beta\delta_{n_p,n_q+n_k}\frac{8(2m^2-p\cdot q)}{k^2(p^2-m^2)(q^2-m^2)},
\end{aligned} \tag{17.6}
$$

ahol $k^2 = k_0^2-(\vec{p}-\vec{q})^2$.

2. Figyelembe véve, hogy p^0, q^0 és k^0 diszkrét frekvenciák, s így

$$
-\exp\{\beta(k^0+q^0-\mu)\} = 1, \tag{17.7}
$$

a következő azonos átalakítást végezhetjük:

$$
\begin{aligned}
\beta\delta_{n_p,n_q+n_k} &= -\exp\{\beta(k^0+q^0-\mu)\}\int_0^\beta d\theta\exp\{\theta(p^0-q^0-k^0)\}\\
&= \frac{\exp\{\beta(k^0+q^0-\mu)\}-\exp\{\beta(p^0-\mu)\}}{p^0-q^0-k^0}.
\end{aligned} \tag{17.8}
$$

Vezessük be az

$$
I(p^0,q^0,k^0) = \frac{2m^2-p\cdot q}{p^0-q^0-k^0}\left[\exp\{\beta(k^0+q^0-\mu)\}-\exp\{\beta(p^0-\mu)\}\right] \tag{17.9}
$$

jelölést. Segítségével $\ln Z_2$ az alábbi alakba írható:

$$
\begin{aligned}
\ln Z_2 &= -\frac{1}{2}\beta V e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\\
&\quad\cdot(8\,T^3)\sum_{n_p n_q n_k}\frac{I(p^0,q^0,k^0)}{k^2(p^2-m^2)(q^2-m^2)}.
\end{aligned} \tag{17.10}
$$

3. A frekvenciákra történő kontúrintegrálos összegzés előnye, hogy az egyes összegek egymástól függetlenül elvégezhetők. Kezdjük az n_p szerinti összeggel. A (??) szabályt alkalmazzuk az

$$f(p^0) \to I(p^0)(p^2 - m^2)^{-1} \tag{17.11}$$

helyettesítéssel (egyszerűség kedvéért I-ben csak az összegzés szempontjából érdekes változót tüntettük fel):

$$\begin{aligned}
T\sum_{n_p} \frac{I(p^0)}{p^2-m^2} = \\
& -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\mathrm{i}\infty+\mu+\epsilon}^{\mathrm{i}\infty+\mu+\epsilon} dp^0 \frac{I(p^0)}{p^2-m^2} \frac{1}{\exp\{\beta(p^0-\mu)\}+1} \\
& -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\mathrm{i}\infty+\mu-\epsilon}^{\mathrm{i}\infty+\mu-\epsilon} dp^0 \frac{I(p^0)}{p^2-m^2} \frac{1}{\exp\{\beta(\mu-p^0)\}+1} \\
& +\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\mathrm{i}\infty+\mu-\epsilon}^{\mathrm{i}\infty+\mu-\epsilon} dp^0 \frac{I(p^0)}{p^2-m^2}.
\end{aligned} \tag{17.12}$$

Az első tagban az integrálás útját bezárhatjuk a jobboldali félsíkon futó végtelen sugarú körívvel, míg a második és a harmadik tagban ugyanezt a bal oldalon tehetjük meg. Ezután a reziduum-tételt alkalmazzuk figyelembe véve, hogy $f(p^0)$-nak egyszerű pólusai vannak a $p^0 = \pm E_p = \pm\sqrt{m^2+\vec{p}^{\,2}}$ helyeken. Ügyeljünk rá, hogy $0 \le \mu < E_p$ és $E_p < \mu$ egyaránt előfordulhat.

$$\begin{aligned}
T\sum_{n_p} \frac{I(p^0)}{p^2-m^2} = \\
& -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}(-2\pi\mathrm{i})\frac{I(E_p)}{2E_p} \frac{1}{\exp\{\beta(E_p-\mu)\}+1}\Theta(E_p-\mu) \\
& -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}(2\pi\mathrm{i})\left[\frac{I(-E_p)}{-2E_p} \frac{1}{\exp\{\beta(\mu+E_p)\}+1}\right. \\
& \left. +\frac{I(E_p)}{2E_p} \frac{1}{\exp\{\beta(\mu-E_p)\}+1}\Theta(\mu-E_p)\right] \\
& +\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}(2\pi\mathrm{i})\left[\frac{I(-E_p)}{-2E_p} + \frac{I(E_p)}{2E_p}\Theta(\mu-E_p)\right] \\
= & \ \frac{I(E_p)}{2E_p} n^-(p) + \frac{I(-E_p)}{-2E_p}\left[n^+(p)-1\right].
\end{aligned} \tag{17.13}$$

Itt bevezettük az elektron és pozitron betöltési számokat:

$$n^\pm(p) = \frac{1}{\exp\{\beta(E_p \pm \mu)\}+1}. \tag{17.14}$$

Természetesen az n_q-ra való összegzés teljesen hasonlóan végezhető el:

$$\begin{aligned} T\sum_{n_q}\frac{I(q^0)}{q^2-m^2} &= \\ &= \frac{I(E_q)}{2E_q}n^-(q)+\frac{I(-E_q)}{-2E_q}\left[n^+(q)-1\right], \end{aligned} \tag{17.15}$$

ahol $E_q=\sqrt{m^2+\vec{q}^{\,2}}$.

A fotonfrekvenciákra a (??) szabály segítségével összegezhetünk az $f(k^0)\to I(k^0)/k^2$ helyettesítést használva:

$$\begin{aligned} T\sum_{n_k}\frac{I(k^0)}{k^2} &= \\ &\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}dk^0\frac{I(k^0)}{k^2} \\ &+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty+\epsilon}^{\mathrm{i}\infty+\epsilon}dk^0\frac{I(k^0)+I(-k^0)}{k^2}\frac{1}{\exp(\beta k^0)-1}. \end{aligned} \tag{17.16}$$

Az első tagban az integrálási kontúrt a komplex sík bal oldalán végtelen sugarú félkörrel zárjuk, a második tagban ugyanezt a jobb oldalon tesszük. A reziduum-tétel felhasználása után az alábbi eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} T\sum_{n_k}\frac{I(k^0)}{k^2} &= \\ &-\frac{I(\omega)}{2\omega}N(\omega)-\frac{I(-\omega)}{2\omega}\left[N(\omega)+1\right], \end{aligned} \tag{17.17}$$

ahol $\omega=|\vec{k}|=|\vec{p}-\vec{q}|$, és $N(\omega)$ a fotonokra a betöltési szám.

A (??), (??) és (??) eredmények segítségével a partíciós függvényben szereplő összeg a

$$\begin{aligned} {}'\Sigma' &= -8T^3\sum_{n_pn_qn_k}\frac{I(p^0,q^0,k^0)}{k^2(p^2-m^2)(q^2-m^2)} \\ &= \frac{1}{E_pE_q\omega}\sum_{\pm\pm\pm}\left\{\begin{array}{l} n^-(p) \\ n^+(p)-1\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} n^-(q) \\ n^+(q)-1\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} N(\omega) \\ N(\omega)+1\end{array}\right. I(\pm E_p,\pm E_q,\pm\omega) \end{aligned} \tag{17.18}$$

alakot ölti.

4. Most már "csak" az van hátra, hogy a kapott eredményt egyszerűbb alakra hozzuk. Ehhez sorra vesszük $'\Sigma'$ egyes tagjait:

$\sim n^-(p)n^-(q)$ tag:

$$N(\omega)I(E_p,E_q,\omega)+(N(\omega)+1)I(E_p,E_q,-\omega)=$$
$$\frac{2m^2-E_pE_q+\vec{p}\vec{q}}{E_p-E_q-\omega}\left\{e^{\beta(\omega+E_q-\mu)}-e^{\beta(E_p-\mu)}\right\}\frac{1}{e^{\beta\omega}-1}$$
$$+\frac{2m^2-E_pE_q+\vec{p}\vec{q}}{E_p-E_q+\omega}\left\{e^{\beta(-\omega+E_q-\mu)}-e^{\beta(E_p-\mu)}\right\}\frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega}-1}. \quad (17.19)$$

Arra fogunk törekedni, hogy a jobboldalt kifejezzük $1/n^-(p)$ és $1/n^-(q)$ segítségével. Hozzunk közös nevezőre. Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned}2m^2-E_pE_q+\vec{p}\vec{q} &= 2m^2-E_pE_q-\frac{1}{2}(\vec{p}-\vec{q})^2+\frac{1}{2}\vec{p}^{\,2}+\frac{1}{2}\vec{q}^{\,2}\\ &= 2m^2-E_pE_q-\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{2}E_p^2+\frac{1}{2}E_q^2-m^2\\ &= m^2+\frac{1}{2}(E_p-E_q)^2-\frac{1}{2}\omega^2, \end{aligned} \quad (17.20)$$

kiemelhetjük a

$$\frac{2m^2-E_pE_q+\vec{p}\vec{q}}{(E_p-E_q)^2-\omega^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2m^2}{(E_p-E_q)^2-\omega^2}+1\right] \quad (17.21)$$

tényezőt. A másik tényező számlálójában különválasztjuk az (E_p-E_q)-val és az ω-val arányos tagokat és úgy egészítjük ki őket, hogy a számlálóban E_p és E_q csak az $\exp\{\beta(E-\mu)\}+1=1/n^-$ alakú kifejezésekben forduljon elő. Ekkor kapjuk, hogy:

$$N(\omega)I(E_p,E_q,\omega)+(N(\omega)+1)I(E_p,E_q,-\omega)=$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{2m^2}{(E_p-E_q)^2-\omega^2}+1\right]\left\{(E_p-E_q)\frac{e^{\beta\omega}+1}{e^{\beta\omega}-1}\left(\frac{1}{n^-(q)}-\frac{1}{n^-(p)}\right)\right.$$
$$\left.+\omega\left(\frac{1}{n^-(q)}+\frac{1}{n^-(p)}-2\right)\right\}. \quad (17.22)$$

Ennek a tagnak a járuléka tehát $'\Sigma'$-hoz:

$$\left[\frac{2m^2}{(E_p-E_q)^2-\omega^2}+1\right]\left\{n^-(p)n^-(q)\frac{1}{E_pE_q}\right.$$
$$-n^-(p)\frac{1}{2E_pE_q\omega}\left[\omega+(E_p-E_q)\frac{e^{\beta\omega}+1}{e^{\beta\omega}-1}\right]$$
$$\left.-n^-(q)\frac{1}{2E_pE_q\omega}\left[\omega-(E_p-E_q)\frac{e^{\beta\omega}+1}{e^{\beta\omega}-1}\right]\right\}. \quad (17.23)$$

Hasonlóan járunk el a többi tag esetében is. Az $(n^+(p)-1)(n^+(q)-1)$-gyel arányos tag együtthatóját kifejezzük $(n^+(p)-1)^{-1}$ és $(n^+(q)-1)^{-1}$ segítségével, az $(n^+(p)-1)n^-(q)$-val arányos tagét $(n^+(p)-1)^{-1}$-vel és $1/n^-(q)$-val, stb. Az egyes tagok járuléka $'\Sigma'$-hoz:

$\sim (n^+(p)-1)(n^+(q)-1)$ tag:

$$\left[\frac{2m^2}{(E_p-E_q)^2-\omega^2}+1\right]\left\{n^+(p)n^+(q)\frac{1}{E_pE_q}\right.$$
$$-n^+(p)\frac{1}{2E_pE_q\omega}\left[\omega+(E_p-E_q)\frac{e^{\beta\omega}+1}{e^{\beta\omega}-1}\right]$$
$$\left.-n^+(q)\frac{1}{2E_pE_q\omega}\left[\omega-(E_p-E_q)\frac{e^{\beta\omega}+1}{e^{\beta\omega}-1}\right]\right\}. \tag{17.24}$$

$\sim (n^+(p)-1)n^-(q)$ tag:

$$\left[\frac{2m^2}{(E_p+E_q)^2-\omega^2}+1\right]\left\{-n^+(p)n^-(q)\frac{1}{E_pE_q}\right.$$
$$-n^+(p)\frac{1}{2E_pE_q\omega}\left[-\omega+(E_p+E_q)\frac{e^{\beta\omega}+1}{e^{\beta\omega}-1}\right]$$
$$-n^-(q)\frac{1}{2E_pE_q\omega}\left[-\omega-(E_p+E_q)\frac{e^{\beta\omega}+1}{e^{\beta\omega}-1}\right]$$
$$\left.+\frac{1}{2E_pE_q\omega}\left[-\omega+(E_p+E_q)\frac{e^{\beta\omega}+1}{e^{\beta\omega}-1}\right]\right\}. \tag{17.25}$$

$\sim (n^-(p)-1)n^+(q)$ tag: az előzőből p és q felcserélése révén kapható meg.

Amikor a fenti járulékokat összeadjuk és $\vec{p}$ szerint integrálunk, akkor lesznek olyan tagok, amelyek

$$f(E_p,E_q,\omega)\delta(\vec{p}-\vec{q}-\vec{k})\left[\frac{E_p+E_q}{(E_p+E_q)^2-\omega^2}-\frac{E_p-E_q}{(E_p-E_q)^2-\omega^2}\right] \tag{17.26}$$

alakú integrandust eredményeznek. Ez az integrandus $\vec{p}$ páratlan függvénye, s így integrálja zérus. Ennek belátásához tegyük a következőket. Hozzunk közös nevezőre a szögletes zárójelen belül. Mivel

$$E_q^2=m^2+\vec{q}^{\,2}=m^2+(\vec{p}-\vec{k})^2=E_p^2+\omega^2-2\vec{p}\vec{k}, \tag{17.27}$$

a közös nevező:

$$\begin{aligned}(E_p^2+E_q^2-\omega^2+2E_pE_q)&(E_p^2+E_q^2-\omega^2-2E_pE_q)=\\ &= (2E_p^2-2\vec{p}\vec{k}+2E_pE_q)(2E_p^2-2\vec{p}\vec{k}-2E_pE_q)\\ &= 4E_p^4+4(\vec{p}\vec{k})^2-8E_p^2\vec{p}\vec{k}-4E_p^2(E_p^2+\omega^2-2\vec{p}\vec{k})\\ &= -4E_p^2\omega^2+4(\vec{p}\vec{k})^2.\end{aligned} \tag{17.28}$$

A szögletes zárójelen belüli kifejezés számlálója elemi számolás után $-4E_q\vec{p}\vec{k}$, ahonnan látszik, amit bizonyítani akartunk.

Végül az integrálás után zérust adó tagokat elhagyva a (??), (??) és (??) járulékok összege:

$$
\begin{aligned}
{}'\Sigma' \;=\; & \frac{1}{E_pE_q}\left[\frac{2m^2}{(E_p-E_q)^2-\omega^2}+1\right](n^+(p)n^+(q)+n^-(p)n^-(q)) \\
& +\frac{1}{E_pE_q}\left[\frac{2m^2}{(E_p+E_q)^2-\omega^2}+1\right](n^+(p)n^-(q)+n^-(p)n^+(q)) \\
& +\frac{2n(p)}{E_p}\left[-\frac{1}{E_q}+\frac{1}{\omega}+\frac{2m^2}{E_q\omega}\frac{E_q+\omega}{(E_q+\omega)^2-E_p^2}\right] \\
& +\frac{4n(p)N(\omega)}{E_p\omega} \\
& -\frac{4N(\omega)}{E_p\omega}\left[\frac{2m^2}{(E_p+E_q)^2-\omega^2}+1\right] \\
& +\{\beta\text{-tól független áll. }\}. \qquad (17.29)
\end{aligned}
$$

(Az utolsó előtti sorban kihasználtuk, hogy a kifejezés $\vec{p}$-ben és $\vec{q}$-ban szimmetrikus. A partíciós függvény ezekszerint:

$$
\ln Z_2 \;=\; \frac{1}{2}\beta V e^2\int\frac{d^3p\,d^3q}{(2\pi)^6}\cdot {}'\Sigma'. \qquad (17.30)
$$

Az így kapott kifejezés még ultraibolya divergenciákat tartalmaz. Az elmélet renormálása ugyanúgy történik, mint az önkölcsönható skalártér példáján láttuk. Kivonjuk az összes olyan diagrammot, amelyet az eredetiből úgy kapunk, hogy a foton és az elektron sajátenergiás betétrészeket az összes lehetséges módon kiválasztva a $T\to 0$, $\mu\to 0$ határértékükkel helyettesítjük:

$$
\begin{aligned}
\ln Z_2^{\mathrm{R}} &= -\frac{1}{2}\left(\qquad -2 \qquad - \qquad \right) \\
&= \ln Z_2+\ln Z_{2b}+\ln Z_{2c}. \qquad (17.31)
\end{aligned}
$$

A (b) és (c) diagrammok járulékának kiszámolása ugyanúgy történik, mint ahogy az előzőekben jártunk el.

A (b) diagramm:

$$
\begin{aligned}
\ln Z_{2b} \;=\; & e^2\beta VT\sum_{n_p}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\lim_{\beta\to\infty,\,\mu\to 0}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}T\sum_{n_q}T\sum_{n_k} \\
& \cdot(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q}-\vec{k})\frac{1}{(p^2-m^2)(q^2-m^2)k^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\frac{\exp\{\beta(k^0+q^0-\mu)\}-\exp\{\beta(p^0-\mu)\}}{p^0-q^0-k^0}\\
= \;& e^2\beta V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}T\sum_{n_p}\lim_{\beta\to\infty,\,\mu\to 0}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}T\sum_{n_q}T\sum_{n_k}\\
&\cdot(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q}-\vec{k})\frac{1}{p^2-m^2}\\
&\frac{-2}{E_q\omega}\sum_{\pm}\sum_{\pm}\left\{\begin{array}{l} n^-(q)\\ n^+(q)-1\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} N(\omega)\\ N(\omega)+1\end{array}\right. I(p^0,\pm E_q,\pm\omega),
\end{aligned}
\tag{17.32}
$$

ahol

$$
\begin{aligned}
I(p^0,q^0,k^0) &= -\frac{1}{8}\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu(\not{p}+m)\gamma^\mu(\not{p}+m)\}\\
&\quad\cdot\frac{\exp\{\beta(k^0+q^0-\mu)\}-\exp\{\beta(p^0-\mu)\}}{p^0-q^0-k^0}\\
&= -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\{(2m-\not{q})(\not{p}+m)\}\\
&\quad\cdot\frac{\exp\{\beta(k^0+q^0-\mu)\}-\exp\{\beta(p^0-\mu)\}}{p^0-q^0-k^0}.
\end{aligned}
\tag{17.33}
$$

A fenti kifejezés a következő határértéket tartalmazza:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\beta\to\infty,\,\mu\to 0}\mathrm{Tr}\{\ldots\}(\not{p}+m) =\\
&\quad\lim\mathrm{Tr}\Bigg\{(2m-\not{q})_{E_q}n^-(q)\Bigg[n(\omega)\frac{\exp\{\beta(\omega+E_q-\mu)\}-\exp\{\beta(p^0-\mu)\}}{p^0-E_q-\omega}+\\
&\qquad(n(\omega)+1)\,\frac{\exp\{\beta(-\omega+E_q-\mu)\}-\exp\{\beta(p^0-\mu)\}}{p^0-E_q+\omega}\Bigg]\\
&\quad+(2m-\not{q})_{-E_q}\Big(n^+(q)-1\Big)\Bigg[n(\omega)\frac{\exp\{\beta(\omega-E_q-\mu)\}-\exp\{\beta(p^0-\mu)\}}{p^0+E_q-\omega}+\\
&\qquad(n(\omega)+1)\,\frac{\exp\{\beta(-\omega-E_q-\mu)\}-\exp\{\beta(p^0-\mu)\}}{p^0+E_q+\omega}\Bigg]\Bigg\}(\not{p}+m).
\end{aligned}
\tag{17.34}
$$

A határérték könnyen képezhető, ha figyelembe vesszük, hogy az n_p-re még nem történt összegzés, így $p^0=\mathrm{i}(2n_p+1)\pi$ és ezért $\exp\{\beta(p^0-\mu)\}=\exp\{\mathrm{i}(2n_p+1)\pi\}=$ const.:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\beta\to\infty,\,\mu\to 0}\mathrm{Tr}\{\ldots\}(\not{p}+m) =\\
&\quad\mathrm{Tr}\Bigg\{(2m-\not{q})_{E_q}(\not{p}+m)\frac{1}{p^0-E_q-\omega}
\end{aligned}
$$

$$+(2m-\not{q})_{-E_q}(\not{p}+m)\frac{\exp\{\beta(p^0-\mu)\}}{p^0-E_q-\omega}\Bigg\}. \qquad (17.35)$$

Felhasználjuk, hogy

$$\mathrm{Tr}(2m-\not{q})(\not{p}+m)=4(2m^2-p\cdot q). \qquad (17.36)$$

A (**??**) egyenlőség segítségével n_p-re az összegzést elvégezhetjük:

$$\begin{aligned}
&T\sum_{n_p}\lim \mathrm{Tr}\{\ldots\}\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}= \\
&\frac{2}{E_p}\Bigg\{\Bigg[(2m^2-p\cdot q)_{E_p,E_q}\frac{1}{E_p-E_q-\omega} \\
&+(2m^2-p\cdot q)_{E_p,-E_q}\frac{\exp\{\beta(E_p-\mu)\}}{E_p+E_q+\omega}\Bigg]\frac{1}{\exp\{\beta(E_p-\mu)\}+1} \\
&+\Bigg[(2m^2-p\cdot q)_{-E_p,E_q}\frac{1}{-E_p-E_q-\omega} \\
&+(2m^2-p\cdot q)_{-E_p,-E_q}\frac{\exp\{-\beta(E_p+\mu)\}}{-E_p+E_q+\omega}\Bigg]\frac{-1}{\exp\{-\beta(E_p+\mu)\}+1}\Bigg\}.
\end{aligned} \qquad (17.37)$$

Innen azonos átalakítással kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
&T\sum_{n_p}\lim \mathrm{Tr}\{\ldots\}\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}= \\
&\frac{2}{E_p}\left[\frac{2m^2-E_pE_q+\vec{p}\vec{q}}{E_p-E-q-\omega}-\frac{2m^2+E_pE_q+\vec{p}\vec{q}}{E_p+E_q+\omega}\right]\left[2\left(n^-(p)+n^+(p)\right)-2\right]
\end{aligned} \qquad (17.38)$$

Az első szögletes zárójel a

$$\begin{aligned}
\vec{p}\vec{q} &= -\frac{1}{2}(\vec{p}-\vec{q})^2+\frac{1}{2}\vec{p}^{\,2}+\frac{1}{2}\vec{q}^{\,2} \\
&= -\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{2}E_p^2+\frac{1}{2}E_q^2-m^2
\end{aligned} \qquad (17.39)$$

azonosság segítségével tovább alakítható:

$$\frac{-2m^2(E_q+\omega)}{(E_q+\omega)^2-E_p^2}-E_q+\omega. \qquad (17.40)$$

Így végezetül:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{2b} &= \frac{1}{2}e^2\beta V\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{2}{E_p}\left(n(p)-1\right) \\
&\cdot\left[\frac{1}{\omega}-\frac{1}{E_q}\frac{2m^2(E_q+\omega)}{\left[(E_q+\omega)^2-E_p^2\right]E_q\omega}\right]
\end{aligned} \qquad (17.41)$$

Ha most is elhagyjuk az integrálból a T-től független állandót, akkor a maradék éppen kiejti $\ln Z_2$-ben a (**??**) harmadik sorában álló tagokat.

(c) diagramm:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{2c} &= \frac{1}{2}e^2\beta VT\sum_{n_k}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q}-\vec{k})\frac{1}{k^2}\\
&\cdot\lim_{\beta\to\infty,\,\mu\to 0}T\sum_{n_p}T\sum_{n_q}\frac{8I(p^0,q^0,k^0)}{(p^2-m^2)(q^2-m^2)}\\
&= \frac{1}{2}e^2\beta VT\sum_{n_k}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q}-\vec{k})\frac{1}{k^2}\\
&\cdot\lim_{\beta\to\infty,\,\mu\to 0}\frac{8}{4E_pE_q}\sum_{\pm}\sum_{\pm}\left\{\begin{array}{l}n^-(q)\\ n^+(q)-1\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l}n^-(p)\\ n^+(p)-1\end{array}\right. I(\pm E_p,\pm E_q,k^0),
\end{aligned} \tag{17.42}$$

ahol

$$\begin{aligned}
I(p^0,q^0,k^0) &= \frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left\{\gamma^\mu(\not q+m)\gamma_\mu(\not p+m)\right\}\\
&\cdot\frac{\exp\{\beta(k^0+q^0-\mu)\}-\exp\{\beta(p^0-\mu)\}}{p^0-q^0-k^0}.
\end{aligned} \tag{17.43}$$

Most a határértékképzés során $\exp\{\beta k^0\}$ =const., amit figyelembe véve, majd a fotonfrekvenciákra összegezve:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{2c} &= \frac{1}{2}e^2\beta VT\sum_{n_k}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q}-\vec{k})\frac{1}{k^2}\\
&\cdot\frac{2}{E_pE_q}\left\{\frac{2m^2+E_pE_q+\vec{p}\vec{q}}{E_p+E_q-k^0}-\frac{2m^2+E_pE_q+\vec{p}\vec{q}}{-E_p-E_q-k^0}e^{\beta k^0}\right\}\\
&= -\frac{1}{2}e^2\beta V\int\frac{d^3kd^3pd^3q}{(2\pi)^9}(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q}-\vec{k})\frac{1}{k^2}\\
&\cdot\frac{2m^2+E_pE_q+\vec{p}\vec{q}}{E_pE_q\omega}\left\{\left[\frac{1}{E_p+E_q-\omega}+\frac{1}{E_p+E_q+\omega}e^{\beta\omega}\right]N(\omega)\right.\\
&\left.+\left[\frac{1}{+E_p+E_q+\omega}+\frac{1}{+E_p+E_q-\omega}e^{-\beta\omega}\right](N(\omega)+1)\right\}\\
&= -\frac{1}{2}e^2\beta V\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\,2\,\frac{2m^2+E_pE_q+\vec{p}\vec{q}}{E_pE_q\omega}\\
&\cdot\left[\frac{N(\omega)}{E_p+E_q-\omega}+\frac{N(\omega)+1}{E_p+E_q+\omega}\right]\\
&= -\frac{1}{2}e^2\beta V\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\,2\,\frac{2m^2+E_pE_q+\vec{p}\vec{q}}{E_pE_q\omega}
\end{aligned}$$

$$
\cdot\left[\frac{1}{E_p+E_q+\omega}+\frac{2(E_pE_q)}{(E_p+E_q)^2-\omega^2}N(\omega)\right]
$$

$$
= -\frac{1}{2}e^2\beta V\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{4N(\omega)}{E_p\omega}\left[\frac{2m^2}{(E_p+E_q)^2-\omega^2}+1\right]. \tag{17.44}
$$

Itt $\omega=|\vec{p}-\vec{q}|$ és felhasználtuk az utolsó egyenlőség felírásához a (**??**) azonosságot ($E_q\to -E_q$ helyettes´és után). Elhagytuk továbbá megint azt a tagot, amely a termodinamikai potenciálhoz const. járulékot ad. A (c) diagramm tehát kiejti $\ln Z_2$-ben a (**??**) összeg ötödik sorában álló tagot.

Végül tehát a renormált, ún. kicserélődési korrekció csak a betöltési számokban kvadratikus tagokat tartalmaz. A renormálás az összes, a betöltési számokban lineáris tagot eltávolította a partíciós függvényből:

$$
\begin{aligned}
\ln Z_2^{\mathrm{R}} = \\
&-\frac{1}{2}\beta Ve^2\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\left\{\frac{1}{E_pE_q}\left[\frac{2m^2}{(E_p-E_q)^2-\omega^2}+1\right]\Big(n^+(p)n^+(q)+n^-(p)n^-(q)\Big)\right.\\
&+\frac{1}{E_pE_q}\left[\frac{2m^2}{(E_p+E_q)^2-\omega^2}+1\right]\Big(n^+(p)n^-(q)+n^-(p)n^+(q)\Big)\\
&\left.+\frac{4n(p)}{E_p}\frac{N(\omega)}{\omega}\right\},
\end{aligned} \tag{17.45}
$$

ahol az utolsó tagban az integrálást elvégezhetjük és írhatjuk, hogy

$$
-\frac{1}{6}\beta Ve^2T^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{n(p)}{E_p}. \tag{17.46}
$$

A fejezet befejezéseként álljon itt a partíciós függvény kicserélődési tagja $m=0$ esetén:

$$
\begin{aligned}
\frac{\ln Z\mathrm{ex}}{\beta V} &= -\frac{1}{6}e^2T^2\zeta-\frac{1}{2}e^2\zeta^2\\
&= -\frac{e^2}{288}\left[5T^4+\frac{18\mu^2T^2}{\pi^2}+\frac{9\mu^4}{\pi^4}\right],
\end{aligned} \tag{17.47}
$$

ahol

$$
\zeta = \zeta_+ + \zeta_-, \tag{17.48}
$$

és

$$
\begin{aligned}
\zeta_- &= \int_0^\infty\frac{dp}{2\pi^2}\,p\,\frac{1}{\exp\{\beta(p-\mu)\}+1}\\
&= \frac{T^2}{2\pi^2}\int_{-\beta\mu}^\infty\frac{dx\,(x+\beta\mu)}{e^x+1},
\end{aligned} \tag{17.49}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta_+ &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi^2}\, p\, \frac{1}{\exp\{\beta(p+\mu)\}+1} \\
&= \frac{T^2}{2\pi^2}\int_{\beta\mu}^\infty \frac{dx\,(x-\beta\mu)}{e^x+1} \\
&= \frac{T^2}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{dx\,(x-\beta\mu)}{e^x+1} - \frac{T^2}{2\pi^2}\int_0^{\beta\mu} \frac{dx\,(x-\beta\mu)}{e^x+1} \\
&= \frac{T^2}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{dx\,(x-\beta\mu)}{e^x+1} + \frac{T^2}{2\pi^2}\int_{-\beta\mu}^0 dx\,(x+\beta\mu)\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right),
\end{aligned}
\tag{17.50}
$$

úgyhogy

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \zeta_- + \zeta_+ \\
&= \frac{T^2}{2\pi^2}\left(\int_0^\infty \frac{dx\,2x}{e^x+1} + \int_{-\beta\mu}^0 dx\,(x+\beta\mu)\right) \\
&= \frac{T^2}{12} + \frac{\mu^2}{4\pi^2}.
\end{aligned}
\tag{17.51}
$$

æ

18 Infravörös divergencia a kvantumelektrodinamikában

Naivan azt várnánk, hogy a csatolási állandóban kvadratikus kicserélődési járulékot követően a termodinamikai potenciál perturbációs sorában az $\mathcal{O}(e^4)$ tagok következnek. Mivel azonban a foton csupasz nyugalmi tömege nulla, ezért a következő járulék $T > 0$ esetén $\mathcal{O}(e^3)$ rendű, $T = 0, \mu \neq 0$ esetén pedig $\mathcal{O}(e^4 \ln e^2)$ rendű. A helyzet és az ok hasonló mint az önkölcsönható skalártér esetén láttuk.

Tekintsük a gyűrűdiagrammok járulékát a termodinamikai potenciál térfogati sűrűségéhez:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\ln Z_{\text{gy}}}{\beta V} &= \qquad + \qquad + \dots \\
&= \frac{1}{2} T \sum_{n_k} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \ln\left[1 + \mathcal{D}_{0\,\mu\nu}(k)\Pi_{\nu\mu}(k)\right] - \mathcal{D}_{0\,\mu\nu}(k)\Pi_{\nu\mu}(k) \right\}.
\end{aligned}
\tag{18.1}
$$

Használjuk fel a 16. fejezet eredményeit a fotonpropagátor és a polarizációs tenzor szerkezetére vonatkozóan, ekkor:

$$
\mathcal{D}_{0\,\mu\nu}(k)\Pi_{\nu\mu}(k) = \frac{1}{k^2}(GP^{\mu}_{T\mu} + FP_{L\mu}\mu) = \frac{-1}{k^2}(2G + F). \tag{18.2}
$$

Itt $k^2 = -(2\pi T n_k)^2 - \omega^2$ és $\omega = |\vec{k}|$. A gyűrűdiagrammok járulékát (a perturbációszámítás adott rendjéig véve figyelembe a polarizációt) a következőképpen írhatjuk:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\ln Z_{\mathrm{gy}}}{\beta V} &= \\
&= \frac{1}{2} T \sum_{n_k} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ 2 \left[\ln\left(1 - \frac{G(n,\omega)}{k^2}\right) + \frac{G(n,\omega)}{k^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \ln\left(1 - \frac{F(n,\omega)}{k^2}\right) + \frac{F(n,\omega)}{k^2} \right\}. \qquad (18.3)
\end{aligned}
$$

A legfontosabb, amit észrevehetünk, hogy ez a járulék mértékinvariáns, mert $\mathcal{D}_0\Pi$ is az.

Az infravörös divergenciák elkülönítése $T > 0$ és $T = 0$, $\mu \neq 0$ esetén másképpen történhet. Vizsgáljuk először a $T > 0$ esetet. Különválasztjuk az $n_k \neq 0$ tagokat, valamint az $n_k = 0$ tagokból levonjuk $\omega \to 0$ értéküket majd ugyanezt hozzájuk is adjuk. Az utóbbi tagok kivételével F^2, G^2 rendig sorbafejtünk. Ha F és G e^2 renddel bezárólag pontos, akkor a sorfejtésünk e^4 rendig veszi figyelembe a tagokat:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\ln Z_{\mathrm{gy}}}{\beta V} &= \\
&= -T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \sum_{n_k \neq 0} \left[\frac{G}{k^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{G}{k^2}\right)^2 - \frac{G}{k^2} + \mathcal{O}(e^6) \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{F}{k^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{F}{k^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{F}{k^2} + \mathcal{O}(e^6) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{G(0,\omega)}{\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{G(0,0)}{\omega^2}\right)^2 \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}\left(\frac{F(0,\omega)}{\omega^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{F(0,0)}{\omega^2}\right)^2 + \mathcal{O}(e^6) \right\} \\
&\quad + T\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[2\ln\left(1 + \frac{G(0,0)}{\omega^2}\right) - \frac{2G(0,0)}{\omega^2} \right. \\
&\quad \left. + \ln\left(1 + \frac{F(0,0)}{\omega^2}\right) - \frac{F(0,0)}{\omega^2} \right]. \qquad (18.4)
\end{aligned}
$$

A polarizációs tenzor kiszámolásával meghatározható F és G konkrét alakja. Ezt mi most nem fogjuk megtenni. A továbbiakban csak annyira lesz szükségünk, hogy hogyan viselkedik F és G az $\omega \to 0$ határesetben:

$$
\begin{aligned}
F(0, \omega \to 0) &= \frac{e^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp}{E_p}(p^2 + E_p^2)\left(n^+(p) + n^-(p)\right) \\
&\to_{m\to 0} e^2 \left(\frac{T^2}{3} + \mu^2\pi^2\right), \qquad (18.5)
\end{aligned}
$$

$$G(0,\omega\to 0) \;=\; 0. \tag{18.6}$$

Ha tehát a polarizáció első el nem tűnő rendű tagjait vesszük csak figyelembe, akkor a gyűrűdiagrammok egy $\mathcal{O}(e^4)$ rendű járulékot és egy infravörös divergenciákat felösszegző járulékot tartalmaznak, amely a következő alakú:

$$-\frac{\ln Z_{\mathrm{IR}}}{\beta V} \;=\; \frac{1}{2}T\int_0^\infty \frac{dk\,k^2}{2\pi^2}\left[\ln\left(1+\frac{\omega^2}{F(0,0)}\right)\right.$$
$$\left.-\ln\left(\frac{\omega^2}{F(0,0)}\right)-\frac{F(0,0)}{\omega^2}\right]. \tag{18.7}$$

Ha bevezetjük az $uF^{-1/2}$ változót, akkor ugyanazt az integrált kapjuk eredményül, mint amellyel már az önkölcsönható skalártér infravörös divergenciáinak vizsgálatakor dolgunk volt. Az ottani eredményt felhasználva:

$$-\frac{\ln Z_{\mathrm{IR}}}{\beta V} \;=\; -\frac{TF(0,0)^{3/2}}{12\pi}. \tag{18.8}$$

A $T=0$ esetben az infravörös divergenciák járulékát másképp kell leválasztani, mert az ω_n fotonfrekvencia $T=0$-n folytonossá válik. Hosszadalmas matematikai elemzés után a korrekció $\mathcal{O}(e^4\ln e^2)$ rendűnek adódik. Ha $m=0$ (az ún. ultrarelativisztikus határesetben), akkor:

$$-\lim_{\beta\to\infty}\frac{\ln Z_{\mathrm{IR}}}{\beta V}=\frac{e^4\ln e^2}{128\pi^6}\mu^4. \tag{18.9}$$

æ

19 Általános megjegyzések a renormálásról

1. Könnyen plauzibilissé tehetjük, hogy a véges hőmérséklet és kémiai potenciál nem eredményez újabb ultraibolya divergenciákat a térelméletben. Ezért a térelméletet $T=0$ hőmérséklet és $\mu=0$ kémiai potenciál mellett kell renormálni, s akkor az tetszőleges hőmérséklet és kémiai potenciál esetén renormált lesz. Az egyik lehetséges argumentáció a következő. Képzeljük el, hogy sikerült a renormált $T=0$, $\mu=0$ elméletben a zárt rendszer összes stacionárius állapotának E_i energiáját meghatározni. Akkor az állapotösszeg a Boltzmann-faktorok

$$Z \;=\; \sum_i \exp\{-\beta E_i\} \tag{19.1}$$

összege. Az összegzés során természetesen semmiféle ultraibolya divergencia nem léphet fel. Azok az energiasajátértékek kiszámolásakor léptek fel és lettek eltávolítva a $T = 0$ elmélet renormálásakor.

Nézzünk most egy másik lehetséges érvelést. A véges hőmérsékletű terek elméletében a partíciós függvényhez járulékot adó diagrammok a diszkrét bozon- és fermion-frekvenciákra összegzést tartalmaznak. Ezek az összegek a kontúrintegrálok módszerével egymástól függetlenül kiszámolhatók. Az összegzés eredménye - mint az a (??) és (??) összefüggésekből jól látható - tartalmaz egy vákuumjárulékot, amely független a hőmérséklettől és a kémiai potenciáltól. Az összeg ugyanakkor tartalmaz olyan tagokat, amelyeknek integrandusa a betöltési számokkal arányos, az ún. közegtagokat. Az ultraibolya divergenciák a vákuumjárulékok impulzus szerinti integrálásakor lépnek fel. A közegtagok impulzus szerinti integrálása nem eredményez sohasem újabb ultraibolya divergenciákat, mert a betöltési számok nagy impulzusoknál mindig exponenciálisan lecsökkennek.

2. Az előző megjegyzés értelmében az elméletet $T = 0$-n kell renormálnunk. Mivel azonban az állapotegyenletet keressük, ezért az energiát (termodinamikai potenciált) a vákuuméhoz viszonyítjuk, nem lesz szükség rá, hogy az ellentagokat ténylegesen bevezessük. Elegendő lesz, ha a már eddig is alkalmazott eljárást követjük és kivonjuk a sajátenergiás betétrészekből azok $T \to 0$, $\mu \to 0$ limeszben felvett értékét. A diagrammok kiszámításakor tehát a

$$\Sigma \to \Sigma - \lim \Sigma, \qquad \Pi \to \Pi - \lim \Pi \tag{19.2}$$

helyettesítésekkel élünk, és az eredményből elhagyjuk azokat a tagokat, amelyek egy állandóval járulnának hozzá a termodinamikai potenciálhoz.

3. A termodinamikai potenciált a korábbiakban megismert perturbatív módszerrel a csatolási állandó szerinti sorfejtésének véges sok tagjával tudjuk mindig közelíteni. Nem egyértelműen tisztázott azonban, hogy ténylegesen a csatolási állandó helyére milyen számot kell írni valamely konkrét közelítő számolás során.

A probléma gyökere ott van, hogy a renormálást végtelen sok, egymással egyenértékű séma szerint hajthatjuk végre. Amikor ugyanis a Green-függvényekből eltávolítjuk (pl. a Λ_c levágás bevezetése után) a ($\Lambda_c \to \infty$ limeszben) végtelen tagokat, akkor még tetszőleges véges értékű tagot is kivonhatunk. Legyen pl. egy Green-függvény értéke $G(p, \Lambda_c) = A(p, \Lambda_c) + B(p, \Lambda_c)$, ahol $B(p, \Lambda_c) \to \infty$ és $A(p, \Lambda_c) \to A(p, \infty)$=véges a $\Lambda_c \to \infty$ határesetben. Ekkor a renormált Green-függvényt definiálhatom mint

$$G_{\mathrm{R}}(p) = \lim_{\Lambda_c \to \infty} \left[G(p, \Lambda_c) - B(p, \Lambda_c) - b \right], \tag{19.3}$$

ahol b tetszőleges véges állandó. Ennek értékét azáltal rögzíthetjük, hogy a Green-függvény értékét egy tetszőleges $p^2 = M^2$ esetén rögzítjük (valamely mérés eredményével azonosítjuk): $G_{\rm R}(p^2 = M^2) = G_*$, ekkor

$$A(p,\infty) - b = G_*, \qquad \text{azaz} \qquad b = A(p,\infty) - G_*. \tag{19.4}$$

Úgy tűnhet tehát, hogy az elmélet fizikai tartalma, azaz a Green-függvények függhetnek attól, hogyan választjuk meg az M tömegparamétert. Hogy ne ez legyen a helyzet megköveteljük az ellenkezőjét, vagyis hogy a Green-függvények ne függjenek az M paramétertől:

$$M\frac{d}{dM}\Gamma^{(n)} \;=\; 0, \tag{19.5}$$

ahol $\Gamma^{(n)}$ tetszőleges, n kifutó lábat tartalmazó ún. n-pont Green-függvény inverze. Ez az egyenlet az ún. renormálási csoport egyenlet. Azt fejezi ki, hogy az M különböző megválasztásával kapott különböző renormálási sémák egyenértékűek egymással, mert azonos Green-függvényekre vezetnek. Az egyenlet így felírva trivialitás. Ha azonban kifejezzük a baloldalon álló Green-függvényt a megfelelő renormált Green-függvénnyel, akkor már egyáltalán nem az.

Hogyan lehetséges ez? Az egyszerűség kedvéért az önkölcsönható skalártér $m = 0$ esetéről beszélünk, de ennek ismeretében azok az állítások is könnyen érthetőek lesznek, amelyek a kvantumelektrodinamikára és a kvantumszíndinamikára vonatkoznak, ha az elektron ill. a kvarkok tömegét zérusnak vesszük. Az (**??**) egyenlet bal oldalán a deriválást a λ csupasz csatolási állandó és Λ_c rögzített értéke mellett kell végezni. A renormált Green-függvény a $\lambda_{\rm R}$ renormált csatolási állandón keresztül függ a csupasz csatolási állandótól. A renormálás programmjának végrehajtása után

$$\Phi = \mathcal{Z}_3^{1/2}\Phi_{\rm R}, \qquad \lambda = \mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_3^{-2}\lambda_{\rm R} \tag{19.6}$$

kapcsolatot találunk a renormálatlan és a renormált térmennyiségek és csatolási állandók között. A hullámfüggvényt és a csatolási állandót renormáló tényezők kifejezhetők mint a renormált csatolási állandó hatványsorai, amelyekben az együtthatók függnek a Λ_c ultraibolya levágástól. Ha $\Gamma^{(n)}$ tetszőleges 1PI Green-függvény inverze, akkor

$$\Gamma_{\rm R}^{(n)}(p,\lambda_{\rm R},M) \;=\; \mathcal{Z}_3^{n/2}(\lambda,\Lambda_c/M)\Gamma^{(n)}(p,\lambda,\Lambda_c) \tag{19.7}$$

kapcsolat áll fenn. Itt p az n-pont Green-függvényben szereplő n darab impulzust jelöli. Felhasználtuk, hogy $\mathcal{Z}_3$ dimenziótlan és hogy ezért csak a dimenziótlan Λ_c/M hányadostól függhet. Képezzük ennek az összefüggésnek a felhasználásával a renormálási csoport egyenletét M szerinti deriválás útján:

$$M\left(\frac{\partial\Gamma_{\mathrm{R}}^{(n)}}{\partial M}\right)_{\lambda_R}+\frac{\partial\Gamma_{\mathrm{R}}^{(n)}}{\partial\lambda_{\mathrm{R}}}M\left(\frac{\partial\lambda_{\mathrm{R}}}{\partial M}\right)_{\lambda,\Lambda_c}-M\left(\frac{\partial\mathcal{Z}_3^{n/2}}{\partial M}\right)_{\lambda,\Lambda_c}\Gamma^{(n)}=0. \tag{19.8}$$

Definiáljuk a

$$\beta_\lambda = M\left(\frac{\partial\lambda_{\mathrm{R}}}{\partial M}\right)_{\lambda,\Lambda_c}, \tag{19.9}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{(n)} &= -\mathcal{Z}_3^{-n/2}M\left(\frac{\partial\mathcal{Z}_3^{n/2}}{\partial M}\right)_{\lambda,\Lambda_c}\\ &= \mathcal{Z}_3^{-n/2}\Lambda_c\left(\frac{\partial\mathcal{Z}_3^{n/2}}{\partial\Lambda_c}\right)_{\lambda,M}\\ &= \frac{n}{2}\Lambda_c\mathcal{Z}_3^{-1}\left(\frac{\partial\mathcal{Z}_3}{\partial\Lambda_c}\right)_{\lambda,M}\end{aligned} \tag{19.10}$$

függvényeket. Megjegyezzük, hogy azért szoroztuk M-mel a (**??**) egyenlet bal oldalát, hogy a β_λ és $\gamma_{(n)}$ függvények dimenziótlanok legyenek. Emlékezzünk rá, hogy $\mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{Z}_3$ a renormálás programmjának végrehajtásakor tetszőleges rendben kiszámolható, s ennek következtében a β_λ és az ún. $\gamma_{(n)}$ anomális dimenzió is. A renormálási csoport egyenlet tehát az alábbi alakot ölti:

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda_{\mathrm{R}}}+\gamma_{(n)}\right]\Gamma_{\mathrm{R}}^{(n)}(p,\lambda_{\mathrm{R}},M)=0. \tag{19.11}$$

Skálázzuk most át ebben az egyenletben az összes impulzust felhasználva, hogy a Green-függvények legáltalánosabb alakja $\Gamma_{\mathrm{R}}^{(n)}(p,\lambda_R,p^2/M^2)$. Ha az impulzusokat α-val szorozzuk, akkor

$$\Gamma_{\mathrm{R}}^{(n)}(\alpha p,\lambda_R,\alpha^2p^2/M^2) = \alpha^D\tilde{\Gamma}_{\mathrm{R}}^{(n)}(p,\lambda_R,\alpha^2p^2/M^2), \tag{19.12}$$

ahol D azt jelenti, hogy a vizsgált Green-függvény dimenziója [tömeg]^D, továbbá $\tilde{\Gamma}_{\mathrm{R}}^{(n)}$ dimenziótlan. Írjuk ezt be az (**??**) renormálási csoport egyenletbe. Miután α^D-vel egyszerűsítünk, az M szerinti deriválást α szerintire cseréljük:

$$\left[-\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\beta_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda_{\mathrm{R}}}+\gamma_{(n)}\right]\tilde{\Gamma}_{\mathrm{R}}^{(n)}(p,\lambda_{\mathrm{R}},\alpha^2p^2/M^2)=0. \tag{19.13}$$

Nem nehéz behelyettesítéssel ellenőrizni, hogy ennek az egyenletnek a megoldása

$$\bar{\Gamma}_{\mathrm{R}}^{(n)}(p,\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}(\alpha p^2))\exp\left\{\int_M^{\alpha|p|}\frac{dM'}{M'}\gamma_{(n)}(M')\right\} \tag{19.14}$$

alakú függvény, ahol a $\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}(M')$ ún. futó csatolási állandó a

$$
\begin{aligned}
M'\frac{\partial\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}(M')}{\partial M'} &= \beta_\lambda(\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}(M')), && (19.15)\\
\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}(M'=M) &= \lambda_R && (19.16)
\end{aligned}
$$

kezdetiérték-feladat megoldása. A renormált Green-függvény M-függése teljesen belefoglalható a futó csatolási állandóba, hiszen a (??) egyenlet most felírt megoldását használva:

$$
\Gamma_{\mathrm{R}}^{(n)}(p',\lambda_{\mathrm{R}},p'^{\,2}/M^2) = \bar{\Gamma}_{\mathrm{R}}^{(n)}\left(p',\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}(p'^{\,2})\right)\exp\left\{\int_M^{|p'|}\frac{dM'}{M'}\gamma_{(n)}(M')\right\}, \tag{19.17}
$$

ahol $p'=\alpha p$, de erről most már el is felejtkezhetünk és írhatunk helyette p-t. Oldjuk meg a futó csatolási állandóra vonatkozó (??) feladatot. Semleges skalártér esetén a perturbáció számítás második rendjében:

$$
\beta_\lambda(\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}) = \frac{9}{2\pi^2}\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}^2. \tag{19.18}
$$

Ezt behelyettesítve, elemi integrálás után kapjuk a futó csatolási állandót:

$$
\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}(M') = \frac{\lambda_{\mathrm{R}}}{1-\frac{9}{2\pi^2}\lambda_{\mathrm{R}}\ln(M'/M)} \tag{19.19}
$$

Első ránézésre a futó csatolási állandó bevezetésével nem sokat nyertünk, hiszen az függ az önkényesen választott M renormálási ponttól és a csatolási állandó ott felvett értékétől. Kétségtelen tény azonban, hogy a futó csatolási állandó M'-nek olyan függvénye, hogy a Green-függvények M megváltoztatásakor változatlanok maradnak. A figyelmes vizsgálat azonban még ennél is többet mond. A futó csatolási állandót megadó (??) egyenletet rendezzük át:

$$
\frac{1}{\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}(M')}+\frac{9}{2\pi^2}\ln M' = \frac{1}{\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}(M)}+\frac{9}{2\pi^2}\ln M \tag{19.20}
$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a bal oldalon álló kifejezés az elméletben állandó M' tetszőleges értéke esetén. Másképpen fogalmazva, az elmélet fizikai tartalma akkor lesz invariáns a renormálási pont tetszőleges megváltoztatásával szemben, ha ennek során a csatolási állandót úgy változtatjuk meg, hogy a fenti kifejezés értéke állandó maradjon. Jelöljük ezt az állandót $9/(2\pi^2)\ln\Lambda$-val. Ekkor a futó csatolási állandó

$$
\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}(M) = \frac{2\pi^2}{9\ln(\Lambda/M)} \tag{19.21}
$$

alakot ölt.

A semleges önkölcsönható skalártér elméletében tehát nem létezik egy igazi, az elméletből következően állandó csatolási állandó. Helyette az elmélet egy belső energiaskálával rendelkezik, amelyet a Λ állandó definiál. Megjegyezzük még, hogy ebben az elméletben $\bar{\lambda}_{\mathrm{R}} \to 0$, ha $M/\Lambda \to 0$, amely tulajdonságot úgy szokás nevezni, hogy infravörös szabadság. Ha a futó csatolási állandónak a Green-függvényekben játszott szerepére gondolunk, akkor ez azt jelenti, hogy a kis impulzusátadással járó folyamatokban a tér úgy viselkedik, mintha nem lenne önkölcsönható.

4. Milyen következményei vannak az előző pontban elmondottaknak a véges hőmérsékletű rendszerek térelméletében? A partíciós függvény logaritmusa, $\ln Z_I$ pályaintegrálos definíciójánál fogva (ld. (**??**)) olyan, mint egy 0-pont Green-függvény. Az anomális dimenziója így zérus és a renormálási csoport egyenlet (**??**) megoldása értelmében ezért λ_{R}-et a futó $\bar{\lambda}_{\mathrm{R}}$ csatolási állandóval kell $\ln Z_I$-ben helyettesíteni. Az M renormálási pont megválasztása önkényes, és mint tudjuk, attól nem függ a partíciós függvény. Ez azonban csak akkor van így, ha az egzakt partíciós függvényről van szó. A gyakorlatban azonban mindig a perturbációs sor véges sok tagjával dolgozunk. Ilyenkor élve M megválasztásának szabadságával, azt úgy érdemes választani, hogy a magasabb rendű tagok járulékát minimálissá tegyük. Erre azonban nincsen megnyugtató általános érvényű eljárás. Pl. az önkölcsönható $m = 0$ tömegű skalártér esetén $M = cT$ plauzibilis választás, mert T az egyetlen fizikai energiaskála. A várakozás az, hogy $c \sim \mathcal{O}(1)$. Ennek eldöntéséhez ki kellene számolni a partíciós függvényt λ^2 renddel bezárólag és vizsgálni kellene, meg lehet-e c-t úgy választani, hogy a másodrendű és az elsőrendű korrekció hányadosa minimális legyen.

   Ha a nyomás 10. fejezetben kapott képletébe behelyettesítjük a futó csatolási állandót az $M = cT$ választással, akkor az nem triviálisan fog függni a hőmérséklettől:

$$\begin{aligned} P_{m=0} &= T^4\frac{\pi^2}{90}\left[1-\frac{15}{8}\,\frac{2}{9\ln(\Lambda/cT)}\right. \\ &\qquad \left.+\frac{15}{2}\left(\frac{2}{9\ln(\Lambda/cT)}\right)^{3/2}+\ldots\right]. \end{aligned} \tag{19.22}$$

   Amíg $T/\Lambda \to 0$ esetén a perturbatív közelítés használható (gyenge csatolás határesete), addig $T/\Lambda \to 1$ esetén a perturbációs sor konvergenciája elromlik, mert a rendszer erősen csatolttá válik. Jelenleg nem tudjuk, hogyan is viselkedik ez a rendszer $T \sim \Lambda$ és magasabb hőmérsékleteken.

5. A kvantumelektrodinamikában a csatolási állandó szerepét $\alpha = e^2/4\pi$ játssza.

A futó csatolási állandó az

$$M\frac{d\bar{\alpha}}{dM} = \beta_\alpha(\bar{\alpha}), \qquad \bar{\alpha}(M_0) = \alpha_0 \tag{19.23}$$

kezdetiérték feladat megoldása $m = 0$ elektrontömeg esetén. Legalacsonyabb rendben

$$\beta_\alpha = \frac{2\pi}{3}\,\alpha^2, \tag{19.24}$$

úgyhogy ezt behelyettesítve, a futó csatolási állandóra

$$\bar{\alpha}(M) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{2}{3\pi}\alpha_0 \ln(M/M_0)} \tag{19.25}$$

adódik. A kvantumelektrodinamikában is létezik egy belső energiaskála. Jelöljük ezt Λ-val. Ekkor a futó csatolási állandó:

$$\bar{\alpha}(M) = \frac{3\pi}{2\ln(\Lambda/M)}. \tag{19.26}$$

Véges hőmérsékletű elektrongáz esetén a futó csatolási állandót feltehetően M olyan értékénél érdemes a közelítés javítása érdekében használni, amely T és μ nagyságrendjébe esik, pl. $M = c_1 T + c_2\mu$, ahol az együtthatók $\mathcal{O}(1)$ nagyságrendűek.

æ

IV. KVANTUMSZÍNDINAMIKA VÉGES HŐMÉRSÉKLETEN

20 Kvantumszíndinamika

A kvarkok és gluonok közötti erős kölcsönhatás elmélete a kvantumszíndinamika. Ez az elmélet magyarázza meg a hadronok szerkezetét, ahogy a kvantumelektrodinamika magyarázatot ad az atomok szerkezetéről. Az atommagokban az anyag hadronok (nukleonok) alakjában, az ún. hadronikus fázisban van jelen. Ezt az jellemzi, hogy a színtöltést hordozó kvarkok színszinglett nukleonokba vannak bezárva. A rácson végzett kvantumszíndinamikai számolások egyik jóslata azonban az, hogy akár a hőmérséklet, akár a barion kémiai potenciál, vagy mindkettő növelésével a kvarkokat bezáró színszinglett zsákok felszakadhatnak. Ezáltal a kvarkok szabaddá válhatnak az anyag egész térfogatában. Az anyagnak ezt a feltételezett fázisát kvarkgluon-plazmának nevezik. A kvarkgluon-plazma tehát egy sok kvarkból és gluonból álló rendszer, amely kvarkok és gluonok a plazma teljes térfogatát bejárhatják. Több jel arra mutat, hogy nagyenergiás nehézion-reakciókban létrehozható kísérletileg olyan hőmérsékletű (100 - 200 MeV) és sűrűségű (a normál maganyag sűrűségének néhányszorosával bíró) maganyag, amelyben a kvarkgluon-plazmává történő fázisátalakulás végbemehet. Ez a lehetőség teszi különösen érdekessé a kvantumszíndinamika tanulmányozását véges hőmérsékleten.

Tegyük fel, hogy a gluontér SU(N) lokális mértékszimmetriával rendelkezik. (A valóságban $N = 3$.) A gluontér a mértékcsoport adjungált ábrázolását valósítja meg: A^a_μ, ahol $a = 1, 2, \ldots, N^2 - 1$. Ugyanakkor a ψ kvarktér a mértékcsoport alapábrázolása szerint transzformálódik. Az SU(N) csoport G^a generátorai a

$$[G^a, G^b] \;=\; \mathrm{i} f^{abc} G^c \tag{20.1}$$

kommutátorrelációkat elégítik ki. Alapábrázolásban a generátorokat a λ^a Gell-Mann-mátrixok ábrázolják: $G^a \to \lambda^a/2$. Az $\omega^a(x)$ infinitezimális paraméterekkel adott lokális mértéktranszformáció

$$\psi \;\to\; \exp\{\mathrm{i}\frac{\lambda^a}{2}\omega^a(x)\}\psi, \tag{20.2}$$

$$A^a_\mu \;\to\; A^a_\mu - \partial_\mu \omega^a + g f^{abc} A^b_\mu \omega^c \tag{20.3}$$

alakú.

Minkowski-térben a kvantumszíndinamika Lagrange-sűrűsége:

$$\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}(\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/ - m - g\, A\!\!\!/^a \frac{\lambda^a}{2})\psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F^a_{\mu\nu} \tag{20.4}$$

Ennek megfelelően az euklideszi hatás:

$$S \;=\; \int_0^\beta \int d^3x \left[\bar{\psi}\left(-\gamma^0 \partial_\tau + \mathrm{i}\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m \right.\right.$$
$$\left.\left. -g\frac{\lambda^a}{2}(\gamma^0 \mathrm{i} A^a_0 - \vec{\gamma}\vec{A}^a)\right)\psi - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}\right], \tag{20.5}$$

ahol a térerősség tenzora:

$$F^a_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{20.6}$$

a $\partial_0 \to -\mathrm{i}\partial_\tau$, $A_0 \to \mathrm{i}A_0$ helyettesítéssel.

A mértékinvariáns partíciós függvényt hasonlóan definiáljuk, mint a kvantumelektrodinamikában. Írjuk elő az

$$F^a[A^a_\mu, \partial_\mu A^a_\mu] = \partial_\mu A^a_\mu - c^a(c) = 0 \tag{20.7}$$

kovariáns mértékfeltételt a gluontérre, ahol $c^a(x)$ tetszőleges, a τ változóban periodikus függvények. Ekkor a partíciós függvény:

$$Z \;=\; \int_{\mathrm{per.}} [dA^a_\mu][d\bar{\psi}][d\psi]\Delta[A^a_\mu]\delta[F^a]e^S. \tag{20.8}$$

Itt a Δ funkcionált az

$$1 \;=\; \Delta[A^a_\mu]\int[d\omega^a]\delta[(F^\omega)^a] \tag{20.9}$$

egyenlet definiálja, ahol $[d\omega^a]$ az SU(N) csoport feletti invariáns integrálási mérték. Hasonlóan, mint a kvantumelektrodinamikában, a Δ funkcionál egy determinánssal egyenlő:

$$\Delta[A^a_\mu] \;=\; \det\frac{\delta(F^\omega(x))^a}{\delta\omega^b(y)}|_{\omega=0}. \tag{20.10}$$

Infinitezimális mértéktranszformáció során a mértékfeltétel

$$F^a \;\to\; (F^\omega)^a = F^a + \partial_\mu(-\partial_\mu\omega^a + g f^{abc} A^b_\mu \omega^c) \tag{20.11}$$

módon transzformálódik, ezért:

$$\frac{\partial(F^\omega)^a}{\partial\omega^b} \;=\; -\partial_\mu\partial_\mu\delta ab + g f^{acb}\partial_\mu A^c_\mu. \tag{20.12}$$

A determináns most is kifejezhető szellemterek szerinti útintegrál alakjában. A gluontér valamennyi $a = 1, 2, \ldots, N_g$ színkomponensének megfelelően be kell vezetni a Grassmann-értékű C^a, $\bar{C}^a$ tereket. Ezek kompenzálják a gluontér valamennyi színkomponensében a nem fizikai, nem transzverzális szabadsági fokokat. A Δ funkcionál a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}
&\Delta[A^a_\mu] \\
&= \int_{\mathrm{per.}} [d\bar{C}^a][dC^a]\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{C}^a(x)\frac{\partial(F^\omega)^a}{\partial\omega^b}C^b(x)\right\} \\
&= \int_{\mathrm{per.}} [d\bar{C}^a][dC^a]\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[-\bar{C}^a\partial_\mu\partial_\mu C^a + \bar{C}^a g f^{abc}(\partial_\mu A^b_\mu)C^c\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{20.13}$$

Ha ezt behelyettesítjük a partíciós függvénybe, akkor látjuk, hogy a szellemterek a gluontérrel kölcsönhatnak. Ez lényeges változás a kvantumelektrodinamikához képest, amikor a szellemterek a kölcsönhatást nem befolyásolták, hanem csak a vákuum tulajdonságait. A különbség oka, hogy a gluontér nem ábeli mértéktér.

Miután a Δ funkcionált behelyettesítettük a partíciós függvénybe, a Dirac-delta funkcionáloktól is megszabadulhatunk, ha szorozzuk a partíciós függvényt az

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\rho}\int_0^\beta d\tau\int d^3x c^a(x)c^a(x)\right\} \tag{20.14}$$

faktorral és integrálunk az összes lehetséges $c^a(x)$ függvényre. Az eredmény az, hogy az euklideszi hatásban megjelenik a $-(\partial_\mu A_\mu^a)^2/(2\rho)$ tag. Itt a $0 \le \rho \le 1$ mérték paraméter tetszőleges, csakúgy mint a kvantumelektrodinamikában.

Mindezek után a kvantumszíndinamika partíciós függvénye:

$$Z = \int [dA_\mu^a][d\bar{\psi}][d\psi][d\bar{C}^a][dC^a]\exp\{S_{QCD}\}, \tag{20.15}$$

ahol az effektív hatás:

$$\begin{aligned} S_{QCD} = {} & S + \int_0^\beta\int d^3x\left[-\frac{1}{2\rho}(\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \bar{\psi}\mu\gamma^0\psi\right. \\ & \left. + gf^{abc}\bar{C}^a(\partial_\mu A_\mu^b)C^c + (\partial_\mu\bar{C}^a)(\partial_\mu C^a)\right]. \end{aligned} \tag{20.16}$$

Az effektív hatást felírhatjuk a szabad terek S_0 hatása és a kölcsönhatást leíró S_I hatás összegeként:

$$S_{QCD} = S_0 + S_I, \tag{20.17}$$

ahol

$$\begin{aligned} S_0 = {} & \int_0^\beta d\tau\int d^3x\left[\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m + \mu\gamma^0)\right. \\ & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\rho}(\partial_\mu A_\mu^a)^2 \\ & \left. +(\partial_\mu\bar{C}^a)(\partial_\mu C^a)\right], \end{aligned} \tag{20.18}$$

és

$$\begin{aligned} S_I = {} & \int_0^\beta d\tau\int d^3x\left[-g\bar{\psi}\frac{\lambda^a}{2}\gamma^\mu A_\mu^a\psi\right. \\ & -gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c\partial_\mu A_\nu^a - \frac{1}{4}g^2 f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e \\ & \left. +gf^{abc}\bar{C}^a(\partial_\mu A_\mu^b)C^c\right], \end{aligned} \tag{20.19}$$

ahol mindig el kell végezni a $\partial_0 \to -\mathrm{i}\partial_\tau$ és $A_0^a \to \mathrm{i}A_0^a$ helyettesítéseket.

A partíciós függvény ismeretében megkaphatjuk a Feynman-szabályokat, hasonlóan mint a kvantumelektrodinamika esetén. Célszerű formálisan áttérni megint Minkowski-változókra a négyes-impulzus nulladik komponensének alábbi megválasztásával:

$$p_0 = \mathrm{i}\omega_n = \mathrm{i}2\pi nT \qquad \text{gluonokra,} \tag{20.20}$$

$$q_0 = \mathrm{i}\omega_n = \mathrm{i}2\pi nT \qquad \text{szellemtérre,} \tag{20.21}$$

$$k_0 = \mathrm{i}\omega_m + \mu = \mathrm{i}(2m+1)\pi T + \mu \qquad \text{kvarkokra.} \tag{20.22}$$

A Feynman-szabályokat a mellékelt táblázat foglalja össze. További szabály, hogy minden zárt fermion-hurok és szellem-hurok egy (-1) faktort eredményez. Ezen kívül kombinatorikai faktorok lépnek fel:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{24}, \\ \frac{1}{8}. \end{gathered} \tag{20.23}$$

Most is érvényes Furry tétele, hogy a kvarktér és a szellemtér által képezett 'békalencse' eltűnik:

$$= 0, \qquad\qquad = 0. \tag{20.24}$$

æ

21 Az aszimptotikus szabadság

A kvarkok és a gluonok közötti erős kölcsönhatás egyik jellegzetes vonása, hogy a futó csatolási állandó nagy impulzusátadással járó folyamatokban kicsivé válik. Mivel nagy hőmérsékletű kvarkgluon-plazmában a részecskék átlagos impulzusa várhatóan nagy, ezért remélhetjük, hogy az aszimptotikus szabadság miatt kis effektív csatolási állandóval kell számolnunk. Így a forró kvarkgluon-plazma állapotegyenlete tárgyalható a perturbációszámítás módszerével. A magas hőmérséklet azt jelenti, hogy $T \gg \Lambda_{QCD}$, ahol Λ_{QCD} a kvantumszíndinamika belső energiaskáláját megadó paraméter. Értéke a kísérletek analízise alapján $\Lambda_{QCD} \sim 100$ - 200 MeV. A nem perturbatív, rácstérelméleti jóslatok szerint kb. $T \approx \Lambda_{QCD}$ hőmérsékleten megy végbe a barionritka hadronikus anyag fázisátalakulása kvarkgluon-plazmává. A nehézion-reakciókban is kb. ilyen hőmérséklet érhető el a legnehezebb atommagok centrális ütközése és 0.1 - 1 TeV nukleononkénti bombázó energia esetén. Ez azt jelenti, hogy a hadronikus anyag fázisátalakulása kvarkgluon-plazmává nem tanulmányozható az itt leírt perturbatív módszerrel.

A kvantumszíndinamikában a csonkított Green-függvényekre hasonló renormálási csoport egyenlet érvényes mint a kvantumelektrodinamikában vagy az önkölcsönható skalártér esetében. Legyen $\Gamma^{n,n'}$ egy n darab gluonlábbal és n' kvarklábbal rendelkező csonkított Green-függvény. Renormálás után ez függ általában a g renormált csatolási állandótól, az M renormálási pont választásától, és a ρ mértékparamétertől. Tegyük fel, hogy a kvarktömeg valamennyi N_f íz esetén $m_f = 0$. A renormálási csoport egyenlet:

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(g,\rho)\frac{\partial}{\partial g} + \delta(g,\rho)\frac{\partial}{\partial \rho} \\ +n\gamma_A(g,\rho) + n'\gamma_\psi(g,\rho)\Big]\,\Gamma^{n,n'}_{\mathrm{R}}(p_1,\ldots,p_{n+n'};g,\rho,M) = 0. \tag{21.1}$$

A mértékparamétertől való függést megadó $\delta(g,\rho)$ függvény a

$$\delta(g,\rho) \;=\; 2\rho\gamma_A(g,\rho) \tag{21.2}$$

összefüggésnek tesz eleget a Ward-Takahashi-azonosságok következményeként. Ez azt jelenti, hogy a $\rho = 0$ Landau-mértékben $\delta(g,0) = 0$ marad, akárhogy kell változnia a csatolási állandónak a renormálási pont megváltoztatásakor. Ha Landau-mértéket választottunk, akkor a renormálási csoport transzformációi során nem kell még mértéktranszformációt is végrehajtanunk. Ha azonban bármilyen más mértéket választunk, akkor a renormálási csoport transzformációi kivezetnek ebből a mértékből és így egy mértéktranszformáció végrehajtása is szükséges, hogy az eredeti mértékben maradjunk.

A renormálási csoport egyenletben szereplő függvényeket legalacsonyabb el nem tűnő rendben az alábbi kifejezések adják meg:

$$\gamma_A \;=\; \frac{g^2}{16\pi^2}\left[\left(\frac{13}{6} - \frac{1}{2}\rho\right)N - \frac{2}{3}N_f\right] \tag{21.3}$$

$$\gamma_\psi \;=\; -\frac{g^2}{16\pi^2}\rho N, \tag{21.4}$$

$$\beta \;=\; -\frac{g^3}{48\pi^2}(11N - 2N_f). \tag{21.5}$$

A fenti egy-hurok közelítésben β független a ρ mértékparamétertől. Ezért ilyen közelítésben a futó csatolási állandó sem függ ρ-tól. A futó csatolási állandót a

$$M\frac{\partial\bar{g}}{\partial M} = \beta(\bar{g}) \tag{21.6}$$

egyenlet megoldásaként kapjuk meg. A megoldás:

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{g}^2}{4\pi} = \frac{12\pi}{(11N - 2N_f)\ln(M^2/\Lambda_{QCD}^2)}. \tag{21.7}$$

Most is be lehetett vezetni egy belső energiaskálát definiáló Λ_{QCD} energiaparamétert, mint ahogy a kvantumelektrodinamikában vagy az önkölcsönható skalártér esetén.

A futó csatolási állandó zérushoz tart, ha $M/\Lambda_{QCD} \to \infty$. Ezt a tulajdonságot nevezzük aszimptotikus szabadságnak. Az aszimptotikus szabadság a nem ábeli mértékelméletek tulajdonsága. A kvantumelektrodinamikában más a helyzet. Ott $M/\Lambda \to 1$ esetén a futó csatolási állandó minden határon túl nő (legalább is egy-hurok közelítésben), és $M/\Lambda \to 0$ esetén vesz fel kis értékeket.

Általában magasabb rendben $\beta(g,\rho)$ függ ténylegesen a ρ mértékparamétertől. A fizikai mennyiségek, mint pl. a termodinamikai potenciál, azonban nem függhetnek tőle. Ez úgy lehetséges, hogy a futó csatolási állandó megfelelő módon függ ρ-tól, ami biztosítja az alábbi egyenlet teljesülését:

$$0 = \frac{d}{d\rho}\Omega(\bar{g}(\rho),\rho) = \left(\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\bar{g}}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\bar{g}}\right)\Omega(\bar{g}(\rho),\rho). \tag{21.8}$$

æ

22 A kvarkgluon-plazma állapotegyenlete

Magas hőmérsékleten és nagy sűrűségen az aszimptotikus szabadság következtében remélhetjük, hogy a kvarkgluon-plazma állapotegyenlete jól közelíthető perturbatív módszerrel. Nulladik közelítésben N_g fajta gluon és N fajta (színű) kvark ideális gázával van dolgunk. Az 5. fejezet és a 13. fejezet eredményeit felhasználva a kvarkgluon-plazma nyomása ideális gáz közelítésben:

$$P_0 = \frac{\pi^2}{45}N_g T^4 + N\sum_f \frac{1}{3\pi^2}\int_0^\infty \frac{dp\, p^4}{(m_f^2+p^2)^{1/2}}n(p), \tag{22.1}$$

ahol a második tagban az összegzés az ízekre történik, és m_f az f-edik ízű kvark nyugalmi tömege. Ha feltesszük, hogy valamennyi ízre $m_f = 0$, akkor a nyomás fermionikus járuléka kiintegrálható azzal a módszerrel, amelyet a 17. fejezet végén ζ kiszámolására használtunk:

$$P_{0F}(m_f = 0) \quad = \quad N \sum_f \left(\frac{7\pi^2 T^4}{180} + \frac{\mu_f^2 T^2}{6} + \frac{\mu_f^4}{12\pi^2} \right). \qquad (22.2)$$

A g^2-rendű kicserélődési korrekció a partíciós függvény logaritmusához az alábbi diagrammokból adódik:

$$\begin{aligned} \ln Z_I^{(2)} \quad = \quad & -\frac{1}{2} \qquad\qquad -\frac{1}{2} \\ & +\frac{1}{12} \qquad\qquad +\frac{1}{8} \qquad\qquad . \end{aligned} \qquad (22.3)$$

A diagrammok kiszámolása során a renormálás ugyanúgy történik, mint a kvantumelektrodinamikában:

$$\begin{aligned} \ln Z_{I\mathrm{R}}^{(2)} \quad = \quad & -\frac{1}{2}[\qquad -2 \qquad - \qquad] \\ & -\frac{1}{2}[\qquad -2 \qquad - \qquad] \\ & +\frac{1}{12}[\qquad -3 \qquad] \\ & +\frac{1}{8}[\qquad -2 \qquad]. \end{aligned} \qquad (22.4)$$

Az első sorban szereplő járulék a kvantumelektrodinamikában is fellépett. Csak annyi a különbség, hogy most az $e^2 \to g^2 \mathrm{Tr}(\lambda^a/2)^2 = N_g g^2/2$ helyettesítéssel kell élni a (**??**) képletben. A többi diagramm járuléka a nyomáshoz:

$$P_2^{gl} \quad = \quad -\frac{g^2}{144} N N_g T^4. \qquad (22.5)$$

Mivel a gluonok nyugalmi tömege zérus az eredeti (renormálatlan) Lagrange-sűrűségben, a következő korrekció nem g^4-rendű, hanem $T = 0$ esetén $g^4 \ln g^2$-rendű, $T > 0$ esetén g^3- és $g^4 \ln g^2$-rendű. Ezek a járulékok az infravörös divergenciák felösszegzésével adódnak. A megfelelő gyűrűdiagrammok:

$$\ln Z_I^{\mathrm{gy}} \quad = \quad \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{3} \qquad + \ldots \right], \qquad (22.6)$$

ahol a gluonsajátenergiát egy-hurok közelítésben számoljuk:

$$= \qquad + \qquad -\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2} \qquad . \qquad (22.7)$$

A nyomás g^3-rendű korrekciója:

$$P^{(1)}_{\mathrm{gy}} = \frac{N_g}{12\pi} T m_{el}^3, \tag{22.8}$$

ahol az elektromos 'tömeget'

$$\begin{aligned} m_{el}^2 &= F(n=0, \vec{k} \to 0) \\ &= g^2 \left(\frac{1}{3} N T^2 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_f \int_0^\infty \frac{dp}{E_p} (p^2 + E_p^2) n(p) \right) \end{aligned} \tag{22.9}$$

összefüggés adja meg. Ennek és az F függvénynek a jelentésére és a polarizációval való kapcsolatára még visszatérünk. Ha valamennyi kvark tömege zérus, akkor

$$m_{el}^2 = g^2 \left[\left(\frac{1}{3} N + \frac{1}{6} N_f \right) T^2 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_f \mu_f^2 \right]. \tag{22.10}$$

Ha az F függvény impulzus szerinti sorfejtésében a lineáris tagot is figyelembe vesszük, akkor még egy olyan $(g^4 \ln g^2)$-rendű korrekciót is kapunk, amelyhez hasonló a kvantumelektrodinamikában nem lép fel. A további korrekciók számolása komoly technikai nehézséget jelent.

Az állapotegyenlet jobb közelítése érdekében a fenti képletekben a csatolási állandót a futó csatolási állandóval érdemes helyettesíteni. A futó csatolási állandót kézenfekvő olyan tömegértéknél (M) venni, amely megfelel az átlagos átadott impulzusnak. Ha pl. egy tiszta gluongázt tekintünk, akkor használhatjuk a

$$M^2 \approx \langle p^2 \rangle = (3.2T)^2 \tag{22.11}$$

becslést, ahol az átlagolást az ideális gluongáz Bose-Einstein-eloszlása szerint végeztük.
æ

V. DEBYE-ÁRNYÉKOLÁS. PLAZMAHULLÁMOK

23 Egyensúlyi állapotukból gyengén kitérített rendszerek

Az eddigiekben az egyensúlyi rendszerek állapotegyenletének meghatározásával foglalkoztunk. Most azt fogjuk vizsgálni, mi történik egy rendszerben, ha egyensúlyi állapotából egy gyenge külső perturbáció kitéríti. A statisztikus fizika elemeiből tudjuk, hogy a rendszerben a fizikai mennyiségek időbeli változását ilyenkor az egyensúlyi rendszer korrelációs függvényei szabják meg. Ha a fizikai rendszert kvantált terekkel írjuk le, akkor lényegében ugyanez a helyzet. A korrelációkról a valós idejű Green-függvények adnak számot.

Tegyük fel, hogy a rendszer Hamilton-operátora eredetileg $\hat{H}$. Legyen $\hat{H}_k(t)$ az időfüggő perturbáció Hamilton-operátora. Akkor a rendszer teljes Hamilton-operátora $\hat{H}'(t) = \hat{H} + \hat{H}_k(t)$. Tegyük fel, hogy a külső perturbációt $t = t_0$ pillanatban kapcsoljuk be, azaz $\hat{H}_k(t) = 0$ ha $t < t_0$. Vizsgáljuk az $\hat{Y}(\vec{x}, t)$ fizikai mennyiség időbeli változását. Heisenberg-képben a mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial \hat{Y}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \mathrm{i}[\hat{H}'(t), \hat{Y}(\vec{x}, t)]. \tag{23.1}$$

Legyen [$|j\rangle$] a perturbálatlan $\hat{H}$ Hamilton-operátor sajátvektorainak egy ortonormált teljes rendszere. Képezzük a mozgásegyenlet mindkét oldalának várható értékét a $|j\rangle$ állapotban:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle j|\hat{Y}(\vec{x}, t)|j\rangle}{\partial t} &= \mathrm{i}\langle j|[\hat{H}'(t), \hat{Y}(\vec{x}, t)]|j\rangle \\ &= \mathrm{i}\langle j|[\hat{H}_k(t), \hat{Y}(\vec{x}, t)]|j\rangle. \end{aligned} \tag{23.2}$$

Ezt felhasználva, gyenge perturbáció esetén az $\hat{Y}$ mennyiség megváltozása a perturbáció bekapcsolásának pillanatától számítva:

$$\begin{aligned} \delta\langle j|\hat{Y}(\vec{x}, t)|j\rangle &= \langle j|\hat{Y}(\vec{x}, t)|j\rangle - \langle j|\hat{Y}(\vec{x}, t_0)|j\rangle \\ &= \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} dt' \langle j|[\hat{H}_k(t'), \hat{Y}(\vec{x}, t')]|j\rangle \\ &\approx \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} dt' \langle j|[\hat{H}_k(t'), \hat{Y}(\vec{x}, t)]|j\rangle. \end{aligned} \tag{23.3}$$

Itt csak a külső perturbációban lineáris tagot tartottuk meg. Ezért ezt a közelítést a lineáris válasz 'elméletének' nevezik. Képezzük végül a

$$\hat{\rho} = e^{-\beta\hat{K}} = e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} \tag{23.4}$$

sűrűségoperátor segítségével az $\hat{Y}$ mennyiség megváltozásának makrokanonikus várható értékét:

$$\delta\langle \hat{Y}(\vec{x}, t)\rangle = \frac{\sum_j e^{-\beta K_j} \delta\langle j|\hat{Y}(\vec{x}, t)|j\rangle}{\sum_j e^{-\beta K_j}}$$

$$= \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} dt' \,\mathrm{Tr}\left\{\hat\rho[\hat H_k(t'), \hat Y(\vec x, t)]\right\}. \tag{23.5}$$

Vegyük a külső forráshoz csatolt skalártér példáját:

$$\hat H_k(t) = \int d^3x J(\vec x, t)\hat\Phi(\vec x, t), \tag{23.6}$$

ahol a $J(\vec x, t) = 0$, ha $t < t_0$. Vizsgáljuk magának a térmennyiségnek a megváltozását a külső forrás bekapcsolásának hatására:

$$\begin{aligned}\delta\langle\Phi(\vec x, t)\rangle &= -\mathrm{i}\int_{t_0}^{t} dt' \int d^3x' \mathrm{Tr}\left\{\hat\rho[\hat\Phi(\vec x, t), \hat\Phi(\vec x\,', t')]\right\} J(\vec x\,', t')\\ &\quad -\mathrm{i}\int_{t_0}^{\infty} dt' \int d^3x' \mathrm{Tr}\left\{\hat\rho[\hat\Phi(\vec x, t), \hat\Phi(\vec x\,', t')]\right\} J(\vec x\,', t')\Theta(t-t').\end{aligned} \tag{23.7}$$

Most célszerű bevezetni a valós idejű Green-függvényt,

$$iD(\vec x, t; \vec x\,', t') = \mathrm{Tr}\left\{\hat\rho T_t\hat\Phi(\vec x, t), \hat\Phi(\vec x\,', t')\right\} \tag{23.8}$$

a retardált Green-függvényt,

$$iD^R(\vec x, t; \vec x\,', t') = \mathrm{Tr}\left\{\hat\rho[\hat\Phi(\vec x, t), \hat\Phi(\vec x\,', t')]\right\}\Theta(t-t'), \tag{23.9}$$

és az avanzsált Green-függvényt,

$$iD^A(\vec x, t; \vec x\,', t') = -\mathrm{Tr}\left\{\hat\rho[\hat\Phi(\vec x, t), \hat\Phi(\vec x\,', t')]\right\}\Theta(t'-t). \tag{23.10}$$

Példánkban a skalártér megváltozása kifejezhető a retardált Green-függvény segítségével:

$$\delta\langle\hat\Phi(\vec x, t)\rangle = \int_{t_0}^{\infty}\int d^3x D^R(\vec x, t; \vec x\,', t')J(\vec x\,', t'). \tag{23.11}$$

Tekintve, hogy az egyensúlyi rendszer eltolás invariáns, a Green-függvényt és a forrást is Fourier-integrál alakjába írhatjuk az alábbi módon:

$$\begin{aligned}D^R(\vec x - \vec x\,', t-t') &= \int \frac{d^3q d\omega}{(2\pi)^4} e^{\mathrm{i}\vec q(\vec x - \vec x\,') + \mathrm{i}\omega(t-t')}\tilde D^R(\omega, \vec q), & (23.12)\\ J(\vec x, t) &= \int \frac{d^3p d\alpha}{(2\pi)^4} e^{\mathrm{i}(\vec p\vec x - \alpha t)}\tilde J(\alpha, \vec p). & (23.13)\end{aligned}$$

A skalártér megváltozása így

$$\delta\langle\tilde\Phi(\omega, \vec q)\rangle = \tilde J(\omega, \vec q)\tilde D^R(\omega, \vec q) \tag{23.14}$$

alakban is kifejezhető.

Be lehet bizonyítani, hogy a valós idejű Green-függvények és a hőmérsékleti Green-függvények között szoros kapcsolat van:

$$\tilde{D}^R(\omega,\vec{q}) = \mathcal{D}(\mathrm{i}\omega_n \to \omega + \mathrm{i}\epsilon, \vec{q}), \tag{23.15}$$

$$\tilde{D}^A(\omega,\vec{q}) = \mathcal{D}(\mathrm{i}\omega_n \to \omega - \mathrm{i}\epsilon, \vec{q}), \tag{23.16}$$

$$\tilde{D}(\omega,\vec{q}) = \frac{\tilde{D}^R(\omega,\vec{q})}{1 \mp e^{-\beta\omega}} + \frac{\tilde{D}^A(\omega,\vec{q})}{1 \mp e^{\beta\omega}}, \tag{23.17}$$

ahol az utolsó sorban a + előjel fermionokra, a - előjel bozonokra vonatkozik. æ

24 Elektron-pozitron plazma külső térben

Tegyük fel, hogy a rendszerben eredetileg jelen van egy $\vec{E}$ elektromos és $\vec{B}$ mágneses tér, majd $t \to -\infty$ pillanatban bekapcsoljuk a klasszikus külső $\vec{E}^{(k)}$ teret, amely sztatikus. A teljes Hamilton-sűrűség (a fermionok nélkül):

$$\hat{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2}(\hat{\vec{E}} + \vec{E}^{(k)})^2 + \frac{1}{2}\hat{\vec{B}}^2, \tag{24.1}$$

a perturbálatlan Hamilton-sűrűség:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\hat{\vec{E}}^2 + \frac{1}{2}\hat{\vec{B}}^2, \tag{24.2}$$

és a perturbáció:

$$\hat{\mathcal{H}}_k = \hat{\vec{E}} \cdot \vec{E}^{(k)} + \frac{1}{2}\vec{E}^{(k)\,2}. \tag{24.3}$$

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy hogyan változik az elektromos térerősség értéke, ha az egész rendszer egy T hőmérsékletű, μ kémiai potenciálú környezettel egyensúlyban van, amikor a helyfüggő sztatikus külső $\vec{E}_k(\vec{x})$ teret bekapcsoljuk. Az előző fejezet eredményét felhasználva, a térerősség makrokanonikus várható értékének megváltozása:

$$\begin{aligned}\delta\langle\hat{E}_i(\vec{x},t)\rangle = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' E_j^{(k)}(\vec{x}\,')\mathrm{Tr}\Big\{\hat{\rho}\Big[\hat{E}_i(\vec{x}\,',t), \hat{E}_j(\vec{x}\,',t') \\ + \frac{1}{2}E_j^{(k)}(\vec{x}\,')\Big]\Big\}\Theta(t-t'). \end{aligned} \tag{24.4}$$

A jobb oldalt kifejezhetjük a retardált

$$D^R_{\mu\nu}(\vec{x}-\vec{x}\,', t-t') = \mathrm{iTr}\Big\{\hat{\rho}\Big[\hat{A}_\mu(\vec{x},t), \hat{A}_\nu(\vec{x}\,',t')\Big]\Big\}\Theta(t-t') \tag{24.5}$$

Green-függvény segítségével, ha felhasználjuk a térerősség-operátorok felcserélési szabályát:

$$\begin{aligned}
&\langle\left[\hat{E}_i(\vec{x},t),\hat{E}_j(\vec{x}\,',t')\right]\rangle\Theta(t-t') \\
&= \partial_i\partial_j{}'\left\{\langle[\hat{A}_0(\vec{x},t),\hat{A}_0(\vec{x}\,',t')]\rangle\Theta(t-t')\right\} \\
&\quad -\partial_i\partial_0{}'\left\{\langle[\hat{A}_0(\vec{x},t),\hat{A}_j(\vec{x}\,',t')]\rangle\Theta(t-t')\right\} \\
&\quad -\partial_0\partial_j{}'\left\{\langle[\hat{A}_i(\vec{x},t),\hat{A}_0(\vec{x}\,',t')]\rangle\Theta(t-t')\right\} \\
&\quad +\partial_0\partial_0{}'\left\{\langle[\hat{A}_i(\vec{x},t),\hat{A}_j(\vec{x}\,',t')]\rangle\Theta(t-t')\right\} \\
&\quad -\mathrm{i}\delta_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{x}\,'\delta(t-t').
\end{aligned} \tag{24.6}$$

A teljes térerősség:

$$\begin{aligned}
E_i^{(t)} &= E_i^{(k)}(\vec{x})+\delta\langle\hat{E}_i(\vec{x},t)\rangle \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int d^3x' E_j^{(k)}(\vec{x}\,')\left(\partial_i\partial_j{}'D^R_{00}-\partial_i\partial_0{}'D^R_{0j}-\right. \\
&\qquad\qquad \left.\partial_0\partial_j{}'D^R_{i0}+\partial_0\partial_0{}'D^R_{ij}\right).
\end{aligned} \tag{24.7}$$

Itt a Green-függvények argumentuma $(\vec{x}-\vec{x}\,',t-t')$. Vezessük be a klasszikus térerősség és a retardált Green-függvények Fourier-transzformáltjait:

$$\vec{E}^{\,(k)}(\vec{x}) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{\mathrm{i}\vec{p}\vec{x}}\tilde{\vec{E}}^{\,(k)}(\vec{p}), \tag{24.8}$$

$$D^R_{\mu\nu}(\vec{x}-\vec{x}\,',t-t') = \int\frac{d^3q\,d\omega}{(2\pi)^4}e^{\mathrm{i}\vec{q}(\vec{x}-\vec{x}\,')-\mathrm{i}\omega(t-t')}\tilde{D}^R_{\mu\nu}(\omega,\vec{q}). \tag{24.9}$$

Ekkor a teljes térerősség

$$\begin{aligned}
E_i^t(\vec{x}) &= -\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{\mathrm{i}\vec{q}\vec{x}}\tilde{E}_j^{(k)}(\vec{q})\left[q_iq_j\tilde{D}^R_{00}(\omega,\vec{q})+\omega q_i\tilde{D}^R_{i0}(\omega,\vec{q})\right. \\
&\qquad \left.+\omega q_j\tilde{D}^R_{i0}(\omega,\vec{q})+\omega^2\tilde{D}^R_{ij}(\omega,\vec{q}))\right]|_{\omega=0}.
\end{aligned} \tag{24.10}$$

Innen leolvashatjuk, hogy a teljes térerősség Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_i^t(\omega,\vec{q}) &= \tilde{E}_j^{(k)}(\vec{q})\left[q_iq_j\tilde{D}^R_{00}(\omega,\vec{q})+\omega q_i\tilde{D}^R_{i0}(\omega,\vec{q}))\right. \\
&\qquad \left.+\omega q_j\tilde{D}^R_{i0}(\omega,\vec{q})+\omega^2\tilde{D}^R_{ij}(\omega,\vec{q}))\right]|_{\omega=0}.
\end{aligned} \tag{24.11}$$

Használjuk fel a fotonpropagátor (**??**) alakját, valamint a hőmérsékleti és a valós idejű Green-függvények (**??**) kapcsolatát. Beláthatjuk, hogy a három utolsó tag a teljes térerősség Fourier-transzformáltjában zérus és

$$\tilde{E}_i^t(\vec{q}) = \frac{q_iq_j\tilde{E}_j^{(k)}(\vec{q})}{\vec{q}^{\,2}+F(\omega=0,\vec{q})}. \tag{24.12}$$

Az egyensúlyi rendszer forgásszimmetriája miatt:

$$\tilde{E}_j^{(k)}(\vec{q}) = \frac{q_j}{|\vec{q}|}|\vec{\tilde{E}}^{(k)}(\vec{q})|. \tag{24.13}$$

Ezt behelyettesítve a teljes térerősség kifejezésébe

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i^t(\vec{q}) &= \frac{\vec{q}^{\,2}}{\vec{q}^{\,2}+F(0,\vec{q})}\frac{q_i|\vec{\tilde{E}}^{(k)}(\vec{q})|}{|\vec{q}|} \\ &= \frac{\vec{q}^{\,2}}{\vec{q}^{\,2}+F(0,\vec{q})}\tilde{E}_i^{(k)}(\vec{q}) \\ &= \frac{\tilde{E}_i^{(k)}(\vec{q})}{\epsilon(\vec{q})} \end{aligned} \tag{24.14}$$

adódik, ahol bevezettük az $\epsilon(\vec{q})$ dielektromos állandót:

$$\epsilon(\vec{q}) = 1 + \frac{F(0,\vec{q})}{\vec{q}^{\,2}}. \tag{24.15}$$

Látjuk tehát, hogy a polarizációs tenzor Π_{00} komponense az $\omega \longrightarrow 0$ esetben a rendszer dielektromos állandóját határozza meg.

Általában az F függvény egy vákuum tag és egy közegtag összege: $F = F^{(v)} + F^{(k)}$. Olyan távolságokon, amelyek a részecskék közötti átlagos távolsághoz képest kicsinyek, a vákuumpolarizációtól származó járulék lényeges és a közegtag elhanyagolható. Ugyanakkor a részecskék közti átlagos távolsághoz képest nagy távolságokon a közegtag dominál és a vákuumtag elhanyagolható. A közegtag sztatikus határesetét szokás elektromos tömegnek nevezni: $m_{el}^2 = F^{(k)}(0,\vec{q})$. Ennek a jelentése valóban olyan, mintha a fotonok tömeget nyernének az elektromos Coulomb-kölcsönhatás szempontjából és ennek megfelelően a Coulomb-potenciál leárnyékolódik valamely próbatöltéstől nagy távolságban.

Az árnyékolást az alábbi példa kapcsán vizsgálhatjuk. Vegyünk egy Q_1 és egy Q_2 töltést az $\vec{x}_1$ ill. az $\vec{x}_2$ pontban, egymástól a részecskék közti átlagos távolsághoz képest nagy távolságban. Kérdezzük, hogy mennyi ezen rögzített töltések potenciális energiája, ha a környezetben jelen van a plazma. Gauss törvénye értelmében:

$$\mathrm{div}\vec{E}_1^{(k)}(\vec{x}) = Q_1\delta(\vec{x}-\vec{x}_1), \tag{24.16}$$

ahonnan Fourier-transzformáció után:

$$\vec{\tilde{E}}_1^{(k)} = -\mathrm{i}\frac{\vec{q}}{\vec{q}^{\,2}}e^{-\mathrm{i}\vec{q}\vec{x}_1}Q_1. \tag{24.17}$$

Természetesen hasonló összefüggés érvényes a Q_2 töltés által keltett külső térre is. A kölcsönhatás potenciális energiája:

$$V(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \frac{1}{2}\int d^3x\left[\vec{E}_1^{(k)}(\vec{x})\cdot\vec{E}_2^t(\vec{x}) + \vec{E}_2^{(k)}(\vec{x})\cdot\vec{E}_1^t(\vec{x})\right], \tag{24.18}$$

ahol $\vec{E}_a^{\,t}$ Fourier-transzformáltja $\tilde{\vec{E}}_a^{\,t}(\vec{q}) = \tilde{\vec{E}}_a^{\,(k)}(\vec{q})/\epsilon(\vec{q})$. Behelyettesítve a terek Fourier-integrál kifejtését a potenciális energia kifejezésébe,

$$
\begin{aligned}
V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\left[\tilde{\vec{E}}_1^{\,(k)}(\vec{q})\tilde{\vec{E}}_2^{\,t}(-\vec{q}) + \tilde{\vec{E}}_2^{\,(k)}(\vec{q})\tilde{\vec{E}}_1^{\,t}(-\vec{q})\right] \\
&= Q_1 Q_2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{\mathrm{i}\vec{q}\vec{R}} \frac{1}{\vec{q}^{\,2} + m_{el}^2} \\
&= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi} \frac{e^{-m_{el}R}}{R}, \qquad (24.19)
\end{aligned}
$$

ahol $\vec{R} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$. A plazma jelenlétében tehát a Coulomb-kölcsönhatás módosul: a közeg polarizációja az $R \gg 1/m_{el}$ távolságokon a sztatikus próbatöltések terét leárnyékolja. Az eredmény egy Yukawa-típusú kölcsönhatás. Ez annak felel meg, mintha a kölcsönhatást közvetítő longotudinális fotonok m_{el} nyugalmi tömeggel rendelkeznének.

Itt nem részletezem csak megemlítem, hogy a polarizációs tenzorra vonatkozó Dyson-egyenlet és a Ward-azonosságok felhasználásával a fotonok elektromos tömege és a plazma állapotegyenlete között közvetlen kapcsolat található:

$$
m_{el}^2 = -\Pi_{00}(k_0 = 0, \vec{k} = 0) = e^2 \frac{\partial^2 P(\mu, T)}{\partial \mu^2}. \qquad (24.20)
$$

Ez a perturbációszámítás tetszőleges rendjében érvényes, azaz egzakt összefüggés, amely lehetővé teszi a plazma sztatikus árnyékolási tulajdonságainak vizsgálatát az állapotegyenlet ismeretében. Legalacsonyabb el nem tűnő rendben:

$$
m_{el}^2 = \left(\frac{1}{3}e^2 + \mathcal{O}(e^4)\right) T^2 \qquad (24.21)
$$

A longitudinális fotonok tehát a T hőmérséklettel arányos elektromos tömegre tesznek szert az elektron-pozitron plazmában. æ

25 Plazmahullámok

Az előző fejezetben azt vizsgáltuk, mi történik a plazmában, ha sztatikus külső elektromos teret kapcsolunk be. Most időfüggő külső perturbáció hatását vizsgáljuk. Elegendő egyetlen Fourier-komponenst nézni, mert a válasz gyenge perturbáció esetén a perturbáló tér lineáris funkcionálja. Megmutatjuk, hogy ha a retardált Green-függvény a valós tengely közelében, az ω komplex változó szerinti alsó félsíkon pólussal rendelkezik, akkor ez gyengén csillapodó hullámok terjedését jelenti a plazmában.

Térjünk először vissza a skalártérhez. Tegyük fel, hogy a külső forrás, amit bekapcsolunk,

$$J(\vec{x},t) = J_0(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}}\delta(t), \qquad \tilde{J}(\omega,\vec{q}) = (2\pi)^3 J_0(\vec{k})\delta(\vec{q}-\vec{k}). \tag{25.1}$$

Az (??) egyenlet Fourier-transzformáltja adja a térmennyiség megváltozását:

$$\delta\langle\Phi(\vec{x},t)\rangle = J_0(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}D^R(\omega,\vec{k}). \tag{25.2}$$

Az retardált Green-függvény definíciójából következően a felső ω félsíkon analitikus. Tegyük fel most, hogy az alsó ω félsíkon, az $\omega_R = \omega(\vec{k}) - i\gamma(\vec{k})$ helyen a retardált Green-függvény egyszerű pólussal rendelkezik, $\gamma(\vec{k}) \geq 0$. Ekkor e pólus közelében:

$$D^R(\omega,\vec{k}) = \frac{R(\vec{k})}{\omega - \omega(\vec{k}) + i\gamma(\vec{k})}. \tag{25.3}$$

A térmennyiség megváltozását alapvetően ez a szingularitás határozza meg, így:

$$\delta\langle\Phi(\vec{x},t)\rangle = -iJ_0(\vec{k})R(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega(\vec{k})t)}e^{-\gamma(\vec{k})t}. \tag{25.4}$$

A $\vec{k}$ hullámszámú zavaró hullám tehát egy a közegre jellemző $\omega(\vec{k})$ frekvenciájú hullámzást kelt a közegben. A keltett hullám amplitúdója arányos a zavar amplitúdójával és a Green-függvény pólusának reziduumával. Szabad, m tömegű skalártér esetén létezik a retardált Green-függvénynek a fenti tulajdonsgokkal rendelkező pólusa és $\omega(\vec{k}) = \sqrt{m^2+\vec{k}^{\,2}}$, $\gamma(\vec{k}) = 0$, és $R(\vec{k}) = \omega(\vec{k})/2$.

Térjünk most vissza az elekron-pozitron plazma vizsgálatához. A plazmahullámok frekvenciáját a hullámhossz függvényében a retardált Green-függvény pólusaiból kell kiolvasnunk. Feynman-mértékben a transzverzális hullámokra a

$$k_0^2 = \vec{k}^{\,2} + G(k_0,\vec{k}) \tag{25.5}$$

diszperziós relációt kapjuk a fotonpropagátor (??) alakjából. A $k_0 = \omega - i\gamma$ alakot használva, a transzverzális plazmahullámok diszperziós relációja és csillapodása az alábbi alakban adódik, ha a csillapodás gyenge ($\gamma \ll \omega$):

$$\omega_\perp(\vec{k})^2 = \vec{k}^{\,2} + \Re G(\omega,\vec{k}), \tag{25.6}$$

$$\gamma_\perp(\vec{k}) = -\frac{1}{2\omega}\Im G(\omega,\vec{k}). \tag{25.7}$$

F és G hasonló módszerrel kiszámolható, mint ahogy az állapotösszeg. Ezt mi nem tesszük meg, hanem továbbra is csak e számítások végeredményeiből közöljük a legfontosabbakat. A transzverzális plazmahullámok terjedésére egyszerű képleteket lehet levezetni rövid hullámhosszak, $\omega \approx |\vec{k}| \gg T,\ \mu$ esetén és hosszú hullámok, $|\vec{k}| \ll \omega T,\ \mu$ esetén. Rövid hullámok esetén

$$G(\omega = |\vec{k}|) \;=\; \frac{1}{2}e^2\left(\frac{1}{3}T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}\right) = m_P^2, \tag{25.8}$$

és a diszperziós reláció,

$$\omega_\perp^2(\vec{k}) \;=\; \vec{k}^{\,2} + m_P^2 \tag{25.9}$$

alig különbözik a szabad fotonétól, hiszen $m_P \ll T,\ \mu$, míg $k \gg T,\ \mu$. Ez érthető is, mert rövid, a részecskék átlagos távolságához képest kicsi távolságokon a közeg nem tudja befolyásolni a hullámok terjedését. A rövid hullámok csillapodás nélkül terjednek a plazmában. Hosszú hullámok esetén

$$\Re G(|\vec{k}| \ll \omega < T,\ \mu) \;=\; \omega_P^2\left(1 + \frac{1}{5}\frac{\vec{k}^{\,2}}{\omega^2} + \ldots\right), \tag{25.10}$$

úgyhogy a transzverzális hullámok diszperziós relációja ebben a hullámhossz tartományban:

$$\omega_\perp^2(\vec{k}) \;=\; \omega_P^2 + \frac{6}{5}\vec{k}^{\,2}, \tag{25.11}$$

ahol $\omega_P = \frac{2}{3}m_P^2$ az ún. plazmafrekvencia. A plazmában ezek a módusok még zérus hullámszám esetén is csak véges energiabefektetés árán gerjeszthetők. A hosszú transzverzális hullámok csillapodása:

$$\gamma_\perp = \frac{e^2}{24\pi}\omega_P\, n(\omega_P/2), \tag{25.12}$$

ahol $n(\omega)$ a fermionokra a betöltési szám. A csillapodás fizikai oka, hogy a $\vec{k} = 0$ módus elbomlik egy elektron-pozitron párra. Ez az ún. Landau-féle csillapodás.

A longitudinális hullámok terjedése a fotonpropagátor longitudinális részének pólusszerkezete alapján vizsgálható. Tekintve, hogy vákuumban nincsenek longitudinális elektromágneses hullámok, ezért azt várjuk, hogy a plazmában sem terjedhetnek rövid hullámok. Ez valóban így is van. Terjedhetnek benne azonban longitudinális, hosszú hullámok. Ezek diszperziós relációja

$$\omega_{||}^2(\vec{k}) \;=\; \omega_P^2 + \frac{3}{5}\vec{k}^{\,2}, \tag{25.13}$$

csillapodása pedig

$$\gamma_{||} = \gamma_\perp. \tag{25.14}$$

A fotonpropagátor utolsó tagja Landau-mértékben eltűnik, ezért a benne megjelenő pólusnak nincsen fizikai jelentése. Nem beszéltünk arról, hogy a fotonpropagátor mértékfüggése miatt milyen nehézségek adódnak, amikor a mérték választásától független fizikai következtetéseket akarunk kiolvasni belőle. Az érdeklődő olvasót itt az irodalomra utaljuk. æ

26 Kvarkgluon-plazma

A kvarkgluon-plazma árnyékolási tulajdonságai és a plazmahullámok terjedési tulajdonságai ugyanazokkal a módszerekkel vizsgálhatók, mint az elektron-pozitron plazma esetén.

A kvarkgluon-plazma sztatikus teret módosító hatását a

$$F(0, q \to 0) = \frac{1}{3}g^2NT^2 - \frac{1}{4}g^2NTq + \ldots, \tag{26.1}$$

$$G(0, q \to 0) = -\frac{3}{16}g^2NTq + \ldots \tag{26.2}$$

mennyiségek határozzák meg. (A kifejezések Feynman-mértékben vannak felírva.) F a g^2 rendben mértékinvariáns, G azonban nem. Az F mértékinvariáns határértékéből azt olvassuk ki, hogy véges hőmérsékletű kvarkgluon-plazmában is fellép sztatikus árnyékolás a színtöltések között. Az árnyékolási hossz most is fordítva arányos a T hőmérséklettel.

A gluonpropagátor mértékfüggését figyelembe vevő gondos elemzés arra az eredményre vezet, hogy a kvarkgluon-plazmában is terjedhetnek hosszúhullámú longitudinális és transzverzális gluonhullámok. A megfelelő diszperziós relációk:

$$\omega_\perp^2(\vec{k}) = \omega_P^2 + \frac{6}{5}\vec{k}^{\,2} + \ldots, \tag{26.3}$$

$$\omega_{||}^2(\vec{k}) = \omega_P^2 + \frac{3}{5}\vec{k}^{\,2} + \ldots. \tag{26.4}$$

A plazmafrekvencia most $\omega_P^2 = \frac{1}{9}g^2NT^2$. A hosszúhullámú plazmarezgések tehát még $\vec{k} = 0$ hullámszám esetén is csak a T hőmérséklettel arányos véges energia befektetésével nyerhetők. A csillapodási tényező szintén arányos a hőmérséklettel:

$$\gamma_\perp = \gamma_{||} = \frac{g^2}{24\pi}NT. \tag{26.5}$$

A rövid hullámhosszú longitudinális plazmahullámok a kvarkgluon-plazmában sem tudnak terjedni. A rövid hullámú transzverzális gluonhullámok nem csillapodnak és diszperziós relációjuk:

$$\omega_\perp = k^2 + \frac{3}{2}\omega_P^2 + \ldots. \tag{26.6}$$

Ez a 'szabad' gluonoknak megfelelő diszperziós relációtól csak kicsit tér el.

æ

A. Függelék: A csonkított Green-függvények

A $\Gamma^{(n)}$ csonkított Green-függvényt az alábbiak szerint szokás definiálni. Induljunk ki a $G_c^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ összefüggő Green-függvényből, amely definícióját tekintve n darab térmennyiség szorzatának várható értéke. Így a dimenziója $[\text{tömeg}]^{\tilde{D}}$, ahol $\tilde{D} = \sum_i n_i d_i$, az összegzés a különböző típusú terekre történik, amelyek a szorzatban fellépnek, n_i az azonos típusú tényezők száma, $\sum_i n_i = n$ a Green-függvény lábainak száma és d_i az i-edik típusú térmennyiség dimenziója. Képezzük az összefüggő Green-függvény Fourier-transzformáltját. Az energia és az impulzus megmaradását explicit módon figyelembe vesszük egy megfelelő Dirac-delta leválasztásával:

$$\tilde{G}_c^{(n)}(p_1, \ldots, p_n)\delta^{(d)}(p_1 + \ldots + p_n) = \int d^d x_1 \ldots d^d x_n G_c^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) e^{\mathrm{i}(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)}, \tag{A.1}$$

ahol d a téridő dimenziója. A fenti definíció értelmében:

$$\dim \tilde{G}_c^{(n)} = -nd + \tilde{D} + d. \tag{A.2}$$

A $\Gamma^{(n)}$ csonkított Green-függvényt a lábak leválasztásával képezzük:

$$\Gamma^{(n)}(p_1, \ldots, p_n)\tilde{G}_{ci_1}^{(2)} \ldots \tilde{G}_{ci_n}^{(2)} = \tilde{G}_c^{(n)}(p_1, \ldots, p_n). \tag{A.3}$$

Itt az i_j index a kétpont Green-függvényekben azt jelöli, hogy azok milyen típusú térre vonatkoznak. Természetesen az i-edik típusnak megfelelő kétpont Green-függvények n_i-szer lépnek fel a szorzatban. A definícióból következően a csonkított Green-függvények dimenziója:

$$\begin{aligned} D = \dim\Gamma^{(n)} &= -nd + \sum_i n_i d_i + d \\ &\quad - \sum_i (-2d + 2d_i + d) n_i \\ &= -nd + \tilde{D} + d + 2nd - 2\tilde{D} - nd \\ &= d - \tilde{D}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

æ

IRODALOM

1. J.I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory* ???????

2. J.I. Kapusta, *Nucl. Phys.* **B148** (1979) 461

3. T. Toimela, *Int. J. Theor, Phys.* **24** (1985) 901

æ

TARTALOMJEGYZÉK