RELATIVITÁSELMÉLET

Sailer Kornél

Egyetemi előadás

Elméleti Fizikai Tanszék
Kossuth Lajos Tudományegyetem
Debrecen
1997.

Contents

II. AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁS ELMÉLETE

1 Az ekvivalencia-elv és az általános relativitás elve [2]

1.1 A súlyos és a tehetetlen tömeg

A Newton-i mechanika szerint a gravitációs térben mozgó tömegpont mozgásegyenlete:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{1.1}$$

ahol m a tömegpont tehetetlen tömege, $\vec{a}$ a gyorsulása és $\vec{F}$ a gravitációs tér által a tömegpontra kifejtett erő. Utóbbi pl. a Föld gravitációs terében:

$$F = G\frac{m^*M^*}{r^2}, \tag{1.2}$$

nagyságú, ahol m^*, ill. M^* rendre a tömegpont és a Föld súlyos tömege (vagy más szóhasználattal gravitációs töltése), r a tömegpont és a Föld középpontjának távolsága, G a gravitációs állandó. A Föld felszínén $F = m^*g$, ahol $g = GM^*/R^2$ a nehézségi gyorsulás (R a Föld sugara).

Ezek az összefüggések jól tükrözik, hogy **a tehetetlen tömeg és a súlyos tömeg lényegesen különböző szerepet játszik a természetben. Adott erő hatására egy tömegpont annál kisebb gyorsulást szenved, minél nagyobb a tehetetlen tömege. Ugyanakkor adott gravitációs tér adott pontján a tömegpontra annál nagyobb erő hat, tehát a tömegpont annál nagyobb gyorsulást szenved el, minél nagyobb a súlyos tömege.** A Föld felszínén szabadon eső test gyorsulása

$$a = \frac{m^*}{m}g \tag{1.3}$$

nagyságú.

A gravitációs erőtörvényből még semmi sem következik a súlyos és a tehetetlen tömeg viszonyára. A tapasztalat azonban az, hogy minden test, anyagi minőségétől függetlenül, azonos $g = 9,81m/s^2$ nehézségi gyorsulást szenved. **A nehézségi gyorsulás a tapasztalat szerint univerzális.** Ez már önmagában arra utal, hogy a súlyos és a tehetetlen tömeg arányos.

Ugyanezt erősíti meg **az a tapasztalat, hogy a szabadon eső űrhajóban az űrhajóhoz képest zérus kezdősebességgel elengedett tárgyak „súlytalanul" lebegnek, azaz az űrhajóval együtt szabadon esnek.** Ez csak úgy lehetséges, ha az űrhajó és a benne levő tárgyak mozgásegyenlete azonos, azaz az űrhajóra és a benne levő tárgyakra a súlyos és a tehetetlen tömeg aránya azonos.

1.2 Az Eötvös-kísérlet

Eötvös Loránd az 1890-es években torziós inga segítségével végzett kísérletekben nagy pontossággal igazolta, hogy a súlyos és a tehetetlen tömeg arányos. A kísérletben azt mutatta ki, hogy különböző anyagpárok esetén a súlyos és a tehetetlen tömeg aránya azonos.

A kísérlet lényege a következő. (A kísérlet részletes leírását ld. [2].) Torziós inga végein elhelyezzük az A és a B különböző anyagi minőségű testeket. Megvárjuk az egyensúly beálltát, majd rögzítjük az ingát ebben a helyzetében. Ezután az egész berendezést a torziós szál körül 180 fokkal elforgatjuk. Az ingát újra kioldjuk és megfigyeljük az új egyensúlyi helyzet felvételéhez szükséges szögelfordulást. Ez arányos az A és a B testekre vonatkozó súlyos és tehetetlen tömegek arányának különbségével, az inga úgynevezett

$$\eta = \left|\frac{m_A^*}{m_A} - \frac{m_B^*}{m_B}\right| \tag{1.4}$$

Eötvös-paraméterével. Eötvös különböző anyagpárokat vizsgálva megállapította, hogy $\eta < 10^{-9}$. Mintegy fél évszázaddal később az arányossági tényező univerzalitását $\eta < 10^{-12}$ pontossággal sikerült igazolni.

A súlyos és a tehetetlen tömeg arányossága lehetővé teszi, hogy a súlyos tömeget ugyanolyan egységben mérjük, mint a tehetetlen tömeget. Ekkor a kétféle tömeg számértéke megegyezik.

1.3 Az ekvivalencia-elv

A speciális relativitáselméletben az inerciarendszer fogalma spekulatív:

1. Az inerciarendszert a speciális relativitáselméletben globálisnak tekintjük, azaz olyannak, ami lefedi az egész téridőt. A gyakorlatban véges méretekben megvalósítható vonatkoztatási rendszerek extrapolációja a végtelenbe csak gondolati úton tehető meg.

2. Az inerciarendszereket annak alapján választjuk ki, hogy bennük az izolált testek megtartják egyenesvonalú egyenletes mozgásukat. A kiválasztás ezen kritériuma a gyakorlatban sohasem ellenőrizhető ténylegesen. Pl. az állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszerből nem tudjuk kivenni a Naprendszert, hogy először ellenőrizzük próbatestekkel, csakugyan inerciarendszerről van-e szó.

A tapasztalat ezzel szemben azt mutatja, hogy a szabadon eső (nem forgó) űrhajóban mint vonatkoztatási rendszerben nagy pontossággal teljesül, hogy benne a magukra hagyott testek egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek. Ez azért van így, mert a súlyos és a tehetetlen tömeg arányos, tehát az űrhajónak és az űrhajóban levő valamennyi testnek a mozgásegyenlete azonos, miután abból a tömeg kiesik. Sőt az űrhajóban elvégzett elektrodinamikai kísérletek igazolják, hogy az inerciarendszerekben érvényes alakjukban fennállnak a Maxwell-egyenletek. **A szabadon eső űrhajót tehát inerciarendszernek lehet tekinteni.** Ez azonban **lokális inerciarendszer**, amelyet nem terjesztünk ki az egész téridőre.

Az ekvivalencia-elv kimondja:

1. **Nincsenek globális inerciarendszerek, csak lokális inerciarendszerek vannak (a szabadon eső űrhajók).**
2. **Nincsen gravitációs erő, hanem az anyag (az égitestek) gravitációs hatása a szabadon eső lokális inerciarendszerek pályájáit határozza meg.**

Hallgatólagosan hozzátesszük, hogy a téridő bármely pontjának kicsiny környezetében bevezethető a lokális inerciarendszer. Ez azt jelenti, hogy bármely elemi történés pillanatában és helyén elképzelhetjük az éppen ott és akkor szabadon eső űrhajót. (Az ekvivalencia-elv jobb megértését segítik a [2] tankönyvben található kérdések és a rájuk adott válaszok, amelyek elolvasását feltétlenül ajánlom a tisztelt Hallgatóságnak.)

Az általános relativitáselméletben nem szerepel tehát a gravitációs erő fogalma. Helyette arról kell beszélni, hogy hogyan mozognak a szabadon eső lokális inerciarendszerek. A súlyos tömeg sem szerepel az általános relativitáselméletben, hiszen a súlyos és a tehetetlen tömeg arányossága miatt nincsen szükség a bevezetésére.

1.4 Az ívelemnégyzet és a metrikus tenzor

A lokális inerciarendszer a téridő bármely pontjának környezetében mindazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, amelyekkel a speciális relativitáselmélet szerint az inerciarendszereknek rendelkezniük kell, csak éppen nem terjeszthető ki a teljes téridőre. Lokálisan tehát a téridő bármely pontjának környezetében bevezethetjük a ξ^μ Minkowski-koordinátákat. Ezekben két infinitezimálisan közeli elemi esemény invariáns távolsága

$$ds^2 \;=\; d\xi^\mu d\xi_\mu = g^{(M)}_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu, \qquad (1.5)$$

ahol

$$(g_{\mu\nu}^{(M)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

a Minkowski-tér metrikus tenzora. Ezekután áttérhetünk tetszőleges x^μ koordinátarendszerre az $x^\mu = x^\mu(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ koordinátatranszformációval. A másik vonatkoztatási rendszerre való áttérésnek már a speciális relativitáselméletben is koordinátatranszformáció felelt meg. Most általánosan azt mondjuk, hogy minden koordinátarendszer megfelel egy másik vonatkoztatási rendszernek. Az új koordinátarendszerben az ívelemnégyzet:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \tag{1.7}$$

alakú, ahol maga a $g_{\mu\nu}(x)$ metrikus tenzor is helyfüggő.

A metrikus tenzor mutatja meg, hogy hogyan kell tetszőleges koordinátarendszerben kiszámítani az invariáns ívelemnégyzetet a koordinátadifferenciálokból. A metrikus tenzor ezáltal meghatározza a téridő geometriáját. Az általános relativitáselmélet értelmében a testek gravitáló hatásuknál fogva befolyásolják a metrikus tenzort, azaz a gravitáló testek gravitációs hatásuknál fogva határozzák meg a téridő geometriáját. A gravitációs hatások jelenlétének az a következménye, hogy általában a metrikus tenzor a téridő véges tartományában nem hozható a Minkowski-metrika alakjára. A metrikus tenzor egyszerre hordozza a koordinátarendszer választásától független információt arról a téridő geometriáról, amelyet a gravitáló testek maguk körül kialakítanak, és a koordinátarendszer megválasztásával kapcsolatos információt.

Az ekvivalencia-elv azt a megszorítást jelenti a téridő geometriájára, hogy annak minden pontjában létezik lokális inerciarendszer, azaz bevezethetők lokális Minkowski-koordináták. Ezt matematikailag az biztosítja, **hogy a metrikus tenzor a téridő minden pontjában diagonális alakra transzformálható és 1 pozitív, 3 negatív sajátértéke van, azaz a szignatúrája** $(+,-,-,-)$ és a determinánsa negatív, $g = \det g_{\mu\nu} < 0$.

További megszorítást jelent a metrikus tenzorra nézve az, hogy a sajátidő és a rendszeridő közötti kapcsolatnak értelmesnek kell lennie. Tegyük fel, hogy a tér x^i pontján áthaladó (akármilyen mozgást végző) O óra saját nyugalmi rendszerében $d\tau$ sajátidő telik el az óramutató két infinitezimálisan közeli állása között. Mekkora dx^0 rendszeridő telik el eközben a koordinátarendszer x^i pontjában, amelyre $dx^i = 0$? Miután az O óra két mutatóállásához tartozó ívhossznégyzet

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2, \tag{1.8}$$

a dx^0 rendszeridő-tartam és a $d\tau$ sajátidő-tartam kapcsolata:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0. \tag{1.9}$$

Annak, hogy a fenti összefüggés tetszőleges x^0 rendszeridő esetén értelmes, azaz valós sajátidő-tartamot szolgáltasson, $g_{00} > 0$ a szükséges feltétele.

1.5 Az ívhosszelem mérése

Ha az ívhosszelem $ds^2 > 0$, akkor időszerűen elválasztott két eseményhez tartozik. Ilyenkor mindig létezik olyan szabad mozgást végző részecske, amely mozgása során a téridő ezen két elemi eseménnyel kijelölt pontjain áthalad. Az ezzel a részecskével együtt mozgó óra sajátidejével mérhetjük az időszerű ívhosszelem négyzetét.

Ha az ívhosszelem négyzete két olyan elemi eseményhez tartozik, amelyek helyettesíthetők lennének egy fényjel kibocsátásával és abszorpciójával, akkor $ds^2 = 0$.

Problematikusabb két térszerűen elválasztott elemi eseményhez tartozó, negatív ívhossznégyzet koordinátarendszertől független mérése. Ezt is sajátidő mérésére vezetjük vissza. Legyen P elemi esemény és legyen O olyan óra, amelynek világvonala ennek infinitezimális közelében halad el. Megmutatjuk, hogy az óra világvonalán van olyan Q pont, amelyre ds^2_{QP} adott negatív érték. Az adott ívhossznégyzetből képezzük a $ds^2 = -\frac{1}{4}c^2d\tau^2$ összefüggéssel a $d\tau$ sajátidő-különbséget. Vegyünk olyan fényjelet, amelyet alkalmas τ_1 pillanatban bocsát ki az óra és amely P-ből visszaverődve $\tau_2 = \tau_1 + d\tau$ pillanatban érkezik az órához vissza. Ekkor létezik olyan Q pont az óra világvonalán, hogy P és Q ívelemnégyzete éppen a szóbanforgó ds^2. Az óra világvonala $x^\mu(\tau)$, a P pont pedig az x^μ_P koordinátákkal rendelkezik. Azt a τ_Q sajátidőt, amely a Q pontot az óra világvonalán kijelöli, az alábbi egyenlet megoldása jelenti:

$$g_{\mu\nu}(P)\left(x^\mu(\tau_Q) - x^\mu_P\right)\left(x^\nu(\tau_Q) - x^\nu_P\right) = -\frac{1}{4}c^2d\tau^2. \tag{1.10}$$

Ez az egyenlet tetszőleges koordinátákban érvényes.

1.6 Térbeli távolság

Akkor mondjuk, hogy egy tömegpont adott koordinátarendszerben nyugalomban van, ha a hozzátartozó koordinátaidő állandó, $x^0 =$ áll.

Hogyan mérjük meg adott koordinátarendszerben nyugvó két pont távolságát?

Két pont térbeli távolsága mérésének az a módja a speciális relativitáselméletben, hogy azonos rendszeridővel adott pillanatban leolvassuk a méterrúdon a két pont helyzetét. Ez azonban csak akkor járható út a távolságmérésre, ha szinkronizálva vannak a tér különböző pontjaiban elhelyezett órák. Miután most teljesen általános koordinátarendszert használunk a téridőben, ezért ezt nem tételezhetjük fel. A távolság mérésére tehát olyan módszert alkalmazunk, amelyhez nincsen szükség az órák előzetes szinkronizálására.

Keressük az x^i koordinátájú A és az $x^i + dx^i$ koordinátájú B, infinitezimálisan közeli térbeli pontok távolságát az x^0 pillanatban. Bocsássunk ki fényjelet a B pontból, amely az A pontba ér az x^0 pillanatban, majd onnan rögtön visszaverődik a B-be. A fényjel kibocsátása és A-ba való megérkezése ill. az A-ból történő visszaverődése és B-be történő megérkezése

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j + 2g_{0i}dx^0 dx^i + g_{00}(dx^0)^2 = 0 \tag{1.11}$$

ívelemnégyzettel elválasztott események. Ezt az egyenletet megoldva

$$dx^0_\pm = \frac{1}{g_{00}}\left[-g_{0i}dx^i \pm \sqrt{(g_{0i}dx^i)^2 - g_{00}(g_{ij}dx^i dx^j)}\right] \tag{1.12}$$

adódik, ami azt jelenti, hogy az x^0 pillanatban A-ba érkező fényjelet $x^0 + dx^0_-$ pillanatban kellett B-ből kibocsátani és az oda az $x^0 + dx^0_+$ pillanatban ért vissza. Eközben

$$d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c}\left(dx^0_+ - dx^0_-\right) \tag{1.13}$$

sajátidő telt el. A 2 pont távolságát a

$$d\ell = \frac{1}{2}c\,d\tau \tag{1.14}$$

összefüggéssel definiáljuk. A térbeli távolság négyzetére tehát

$$d\ell^2 = \left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\right)dx^i dx^j \equiv \gamma_{ij}dx^i dx^j \tag{1.15}$$

összefüggés adódik. Itt γ_{ij} a téridő g_{ij} metrikus tenzora által a 3-dimenziós térben indukált metrika. Az így kapott távolságfogalom nem azonos azzal, amit az ívelemnégyzetből dx^0 helyettesítéssel kapnánk. Ugyanakkor a γ_{ij} metrika bizonyíthatóan pozitív definit, amit a távolságnégyzettől elvárunk.

1.7 Az általános koordinátatranszformációk. Tenzorok [1]

Az általános relativitáselméletben a téridő a lehetséges elemi események halmaza, amelyben két tetszőleges infinitezimálisan közeli elemi esemény ívelemnégyzetének

(„távolságának”) van invariáns fizikai jelentése, azaz ennek mérésére adható a koordinátarendszer megválasztásától független utasítás. A téridőt tetszőleges x^μ koordinátarendszerrel behálózhatjuk. Az általános $x^\mu \to x'^\mu$ koordinátatranszformáció

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{1.16}$$

alakú. A megfelelő **kontravariáns koordinátadifferenciálok transzformációja**:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \tag{1.17}$$

Skalárnak nevezzük az f mennyiséget, ha általános koordinátatranszformáció során az értéke (a téridő adott pontjában) változatlan marad: $f'(x'(x)) = f(x)$.

Kontravariáns vektornak nevezzük a 4 komponensű A^μ mennyiséget, ha általános koordinátatranszformáció során (a téridő bármely adott pontjában) úgy transzformálódik, mint a kontravariáns koordinátadifferenciálok:

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu. \tag{1.18}$$

Ennek általánosításaként a tenzorkomponensek transzformációja:

$$T'^{\mu\nu\dots} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^{\bar\mu}} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^{\bar\nu}} \cdots T^{\bar\mu\bar\nu\dots}. \tag{1.19}$$

A **skalár deriváltjai** az $f(x) = f'(x'(x))$ összefüggés alapján

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f'}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \tag{1.20}$$

szabály szerint transzformálódnak.

Kovariáns vektornak nevezzük az olyan 4-komponensű A_μ mennyiséget, amelynek komponensei úgy transzformálódnak mint a skalár deriváltjai:

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'_\nu. \tag{1.21}$$

A fenti definíciók mellett tetszőleges A^μ és B^μ vektor skalárszorzata invariáns:

$$\begin{aligned} A^\mu B_\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} A'^\nu B'_\kappa = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x'^\nu} A'^\nu B'_\kappa \\ &= \delta^\kappa_\nu A'^\nu B'_\kappa = A'^\nu B'_\nu. \end{aligned} \tag{1.22}$$

A $g_{\mu\nu}$ metrikus tenzor inverze definíció szerint az

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = \delta^\kappa_\mu \tag{1.23}$$

összefüggéssel definiált $g^{\mu\nu}$ tenzor. Érvényes továbbá, hogy a metrikus tenzorral lehet az indexeket fel- ill. lehúzni:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \qquad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu. \tag{1.24}$$

A skalárszorzat

$$A^\mu B_\mu = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \tag{1.25}$$

alakú.

1.8 Az általános relativitás elve

Az általános relativitás elve azt mondja ki, hogy a természet törvényeinek matematikai alakja az általános koordinátatranszformációk során változatlan marad, azaz kovariáns.

A fizikai rendszereket leíró hatás az általános koordinátatranszformációkkal szemben skalárként kell viselkedjen.

1.9 Kovariáns derivált [1]

Arról már beszéltünk, hogy skalár(mező) deriváltja kovariáns vektor(mező).

Mit mondhatunk a vektormező deriváltjáról? Hogyan tudjuk egyáltalán értelmezni? Arról könnyen meggyőződhetünk, hogy a $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}$ parciális derivált nem transzformálódik tenzorként. Ez azért van így, mert az $A^\mu(x+dx) - A^\mu(x)$ összehasonlítás nem értelmes. A téridő-sokaság minden pontjában tudjuk értelmezni a vektorok terét, de az $x + dx$ pontban értelmezett vektorok tere más, mint az x pontban értelmezett vektorok tere. Ahhoz, hogy két vektort kivonhassunk egymásból, mindkettőnek ugyanazon vektortér elemének kell lennie. Ezt úgy tudjuk elérni, ha az x pontban értelmezett vektorok terét előbb leképezzük az $x + dx$ pontban értelmezett vektorok terére. Ezt nevezzük párhuzamos eltolásnak. Így kapjuk az $A^\mu(x)$ vektorból a $P(x+dx \leftarrow x)A^\mu(x)$ vektort. Természetesen ennek másak a komponensei az $x+dx$ pontban felvett koordinátabázisban, mint az $A^\mu(x)$ vektoréi az x pontban felvett másik bázisban. A vektormező megváltozásán végül az $A^\mu(x+dx) - P(x+dx \leftarrow x)A^\mu(x)$ különbséget értjük. Az $A^\mu(x)$ vektor komponensei a párhuzamos eltolás esetén lineáris transzformációt szenvednek. A megváltozás egyúttal a dx^ν „elmozdulásban" is lineárisnak közelíthető az infinitezimális szakaszon történő párhuzamos eltolás esetén. Írhatjuk tehát, hogy **a párhuzamos eltolás (parallel transzport)** hatása:

$$A^\mu(x) \quad \to \quad P(x + dx \leftarrow x)A^\mu(x) = A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\kappa} A^\nu(x) dx^\kappa, \tag{1.26}$$

ahol a párhuzamos eltolásra a tényleges utasítást a $\Gamma^\mu_{\nu\kappa}$ 3-indexes mennyiség adja meg, amelyet **konnexió**nak nevezünk. **A konnexió nem tenzor.**

Az A^μ vektormezőnek az $x^\mu(s)$ görbe ds ívhosszú infinitezimális szakaszán a megváltozása:

$$\begin{aligned} DA^\mu &= A^\mu(x+dx) - P(x+dx \leftarrow x)A^\mu(x) \\ &= A^\mu(x) + \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds} - \left(A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\kappa}A^\nu(x)\frac{dx^\kappa}{ds}\right) \\ &= \nabla_\nu A^\mu \cdot \frac{dx^\nu}{ds}, \end{aligned} \tag{1.27}$$

ahol bevezettük a **kovariáns derivált**at:

$$\nabla_\nu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu}A^\kappa. \tag{1.28}$$

A kovariáns derivált tenzorként transzformálódik.

A fentiek általánosításaként megadjuk a kovariáns vektormező és a másodrendű kontra- ill. kovariáns tenzorok kovariáns deriváltját:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu A_\mu &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}A_\rho, \\ \nabla_\rho T^{\mu\nu} &= \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\mu_{\kappa\rho}T^{\kappa\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\kappa}T^{\mu\kappa}, \\ \nabla_\rho T_{\mu\nu} &= \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \Gamma^\kappa_{\mu\rho}T_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}T^{\mu\kappa}, \end{aligned} \tag{1.29}$$

A metrikus tenzor párhuzamos eltoláskor nem változik, azaz **kovariáns konstans:**

$$\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0. \tag{1.30}$$

A konnexió (a Christoffel-szimbólumok) kifejezhetők a metrikus tenzor segítségével:

$$\Gamma^\mu_{\kappa\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\lambda}\right). \tag{1.31}$$

1.10 Geodetikusok

A geodetikusok olyan görbék, amelyeknek az érintői egymásból a görbe menti párhuzamos eltolással kaphatók meg. A geodetikusok ezért a Minkowski-tér egyeneseinek az általánosításai.

Definíció szerint, ha $x^\mu(s)$ a geodetikus paraméteres egyenlete, akkor az érintővektorára $u^\mu(s+ds) = P(x(s+ds) \leftarrow x(s))u^\mu(s)$ érvényes, ami azt jelenti, hogy az érintő kovariáns deriváltja zérus. Az érintő tehát kovariáns konstans a geodetikus mentén:

$$\nabla_\nu u^\mu \;=\; 0. \tag{1.32}$$

Ezt részletesen kiírva:

$$\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu} u^\kappa \;=\; 0. \tag{1.33}$$

Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát u^ν-vel, akkor **a geodetikus egyenletét** az alábbi alakban kapjuk:

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu} u^\kappa u^\nu \;=\; 0. \tag{1.34}$$

A szabadon eső tömegpont az

$$S \;=\; -m_0 c \int ds = -m_0 c \int ds \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}} \tag{1.35}$$

hatással adható meg. Ha rögzített végpontok között a világvonalat variáljuk, akkor hasonló mozgásegyenletre jutunk, mint a speciális relativitáselméletben:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \;=\; -\Gamma^\mu_{\nu\kappa} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\kappa}{ds}. \tag{1.36}$$

Ha ezt átrendezzük, olyan geodetikus egyenletét kapjuk, amelynek érintője időszerű. **A részecskék szabad mozgásuk során tehát időszerű geodetikusokat írnak le a téridőben.**

A geodetikusokkal kapcsolatban még megjegyezzük, hogy léteznek fényszerű és térszerű geodetikusok is, azaz olyan geodetikusok, amelyek érintője fényszerű ill. térszerű vektor.

1.11 Lokális inerciarendszer

Az ekvivalencia-elv értelmében a téridő bármely pontjának környezetében létezik lokális inerciarendszer. A lokális inerciarendszert az a szabadon eső űrhajó valósítja meg, amelynek világvonala éppen áthalad a téridő ezen pontján. A lokális inerciarendszerben Minkowski-koordinátákat vezethetünk be. Ezek Lorentz-transzformáció erejéig vannak meghatározva. **A lokális inerciarendszerben a Minkowski-koordináták természetes megválasztása** a párhuzamos eltoláson alapul. Ennek lépései az alábbiak:

1. A szabadon eső űrhajó G világvonala időszerű geodetikus. Válasszuk a világvonal $\tau = 0$ pontjában a világvonal u négyessebességgel adott érintőjét ebben a pontban az időkoordinátához tartozó $e_{(0)}$ bázisvektornak.

2. Vegyünk fel további 3 bázisvektort, amelyek Minkowski-értelemben páronként ortogonálisak. Ezek a térkoordináta-vonalak érintői a $\tau = 0$ pontban.

3. Parallel transzportáljuk a $\tau = 0$ pontban felvett koordináta bázisvektorokat a szabadon eső űrhajó geodetikusa mentén annak tetszőleges τ paraméterű pontjába. Miután geodetikus érintői egymás párhuzamos eltoltjai, az időirányú bázisvektor a párhuzamos eltolás során a G geodetikus érintője, azaz időirányú bázisvektor marad.

A természetes Minkowski-koordinátarendszerrel kapcsolatban jegyezzük meg:

- A lokális inerciarendszerben bevezetett természetes koordinátarendszerben az űrhajó G világvonalán a t koordinátaidő és a τ sajátidő megegyezik. A térbeli koordinátarendszer origója a szabadon eső űrhajóban nyugalomban marad (együttmozgó koordinátarendszer). Pontosan ennek a pontnak a világvonala G.

- Azt mondjuk, hogy **az űrhajó (a lokális inerciarendszer) nem forog**, ha a természetes koordinátarendszer tengelyei az űrhajó falát a mozgása során mindig ugyanott metszik.

- A szabadon eső űrhajó G geodetikusán a konnexió zérus, azaz a metrikus tenzor első (parciális) deriváltjai eltűnnek.

Arra nézve, hogy a lokális Minkowski-koordináták a szabadon eső űrhajó G geodetikusának milyen méretű környezetében jelentenek jó közelítést az úgynevezett **geodetikus deviáció** ad felvilágosítást. Hasonlítsuk össze az űrhajóban a $\tau = 0$ sajátidő-pillanatban az $\eta^i(\tau = 0)$ térbeli ponton átmenő G' geodetikust a térbeli origón átmenő G geodetikussal. Az $\eta^\mu(t)$ alakban parametrizált G' geodetikus egyenlete:

$$\frac{d^2\eta^i(t)}{dt^2} = -\Gamma^i_{\mu\nu}(\eta)u^\mu u^\nu. \tag{1.37}$$

Itt a konnexió η szerinti sorfejtése lineáris taggal kezdődik:

$$\Gamma^i_{\mu\nu}(\eta) = \Gamma^i_{\mu\nu}(G) + \frac{\partial\Gamma^i_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}(G)\eta^\kappa = \frac{\partial\Gamma^i_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}(G)\eta^\kappa, \tag{1.38}$$

ezért a G' érintőjét legalacsonyabb rendben közelíthetjük G érintőjével, $u^\mu = c\delta^\mu_0$. Ekkor a geodetikus deviáció egyenlete:

$$\frac{d^2\eta^i}{dt^2} = -c^2\frac{\partial\Gamma^i_{00}}{\partial x^\nu}(G)\eta^\nu. \tag{1.39}$$

A lokális inerciarendszer természetes Minkowski-koordinátáiban felírt egyenlet mutatja, hogy nem szabad mozgásnak látjuk a G-hez infinitezimálisan közeli G' geodetikuson a mozgást, hanem azt az egyenlet jobb oldalán álló úgynevezett árapályerő, mint tehetlenségi erő befolyásolja. Abból, hogy ez az erő mekkora, arra lehet következtetni, hogy mennyire jó közelítés a G környezetében a Minkowski-koordináták használata. Másképpen, a geodetikus deviáció muatja meg, hogy milyen méretű tartományra lehet a lokális inerciarendszert jó közelítéssel kiterjeszteni.

1.12 Integrálás

Az általános $x^\mu \to x'^\mu(x)$ koordinátatranszformáció során az infiniteximális $d\Omega$ négyes-térfogatelem a transzformáció Jacobi-determinánsával szorzódik meg:

$$d\Omega = |J| d\Omega', \qquad J = \det \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right). \tag{1.40}$$

Miután a metrikus tenzor transzformációja:

$$g_{\kappa\lambda}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} g_{\mu\nu}(x), \tag{1.41}$$

a metrikus tenzor determinánsa, $g = \det g_{\mu\nu}$ és a változó-transzformáció Jacobi-determinánsa közötti kapcsolat: $g' = |J|^2 g$. Következésképpen **a $\sqrt{-g}d\Omega$ mennyiség invariáns skalár.**

Az m súlyú tenzorsűrűségen olyan mezőt értünk, amely általános koordinátatranszformáció során a

$$(\bar{T}')^{\mu\nu\ldots} = |J|^m \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda}\cdots \bar{T}^{\kappa\lambda\ldots} \tag{1.42}$$

szabály szerint transzformálódik. Ezen definíció értelmében:

1. A $g^{\mu\nu}$ metrikus tenzor 2 súlyú sűrűség.
2. A metrikus tenzor determinánsának négyzetgyöke, $\sqrt{-g}$ 1 súlyú skalársűrűség.
3. Ha $s(x)$ skalármező, akkor $s(x)\sqrt{-g}$ 1 súlyú sűrűség.

A térfogatelem és a tenzorsűrűségek transzformációját egybevetve:

- Ha $\bar{s}(x)$ 1 súlyú skalársűrűség, akkor $\int_{\Omega'} d\Omega' \bar{s}'(x') = \int_\Omega d\Omega \bar{s}(x)$ invariáns. Ennek következtében

$$\int_\Omega s(x)\sqrt{-g}d\Omega = \text{inv.}\ , \tag{1.43}$$

ha $s(x)$ skalár.

Végül megadjuk az m súlyú tenzorsűrűség deriváltjának kiszámolására vonatkozó összefüggést:

$$\begin{aligned}\nabla_\rho \bar{T} &= \partial_\rho \bar{T} + \sum_{\pm} \Gamma \cdot \bar{T} + \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})^{-m}}{\partial x^\rho} \bar{T} \\ &= \partial_\rho \bar{T} + \sum_{\pm} \Gamma \cdot \bar{T} - m \Gamma^\kappa_{\kappa\rho} \bar{T}. \qquad (1.44)\end{aligned}$$

1.13 A görbület

Matematikai szempontból nézve a téridő egy négy-dimenziós sokaság. A sokaságoknak van egy nagyon fontos jellemzője, amelyről még nem beszéltünk. Ez a görbületük. Mindenki számára ismerős, hogy a sokaság „görbültsége" megváltoztatja a sokaság geometriáját. Pl. a gömb felületén a háromszög szögeinek összege nem π, nem úgy mint a síkban, stb. Ezt a különbséget a hajózásban és a térképészetben már nagyon régóta figyelembe is veszik.

Síkgörbe adott pontjában a görbületet a görbületi sugár reciprokával szokás jellemezni. A görbületi sugár a síkgörbét az adott pontban érintő kör sugara. Hasonlóan a 2-dimenziós felületek görbületét az adott pontjukhoz tartozó két főgörbületi sugárral lehet jellemezni. Az adott pontban normálist állítunk a felületre. Majd felveszünk egy síkot, amely a normálist tartalmazza és azt a normális körül körbeforgatjuk. A sík minden helyzetében kapunk egy síkgörbét a felület és a sík metszésvonalaként. Ezek görbületi sugarai közül a maximális és a minimális jelentik az R_1 és az R_2 főgörbületi sugarakat.

A görbület fenti jellemzése nem általánosítható a téridőre, ugyanis a téridőt nem tudjuk kívülről, egy nagyobb dimenziós beágyazó térből szemlélni. A görbület olyan definíciójára van tehát szükségünk, amely a sokaságon belüli méréseken alapul. Ilyen definíciót először Gauss talált a 2-dimenziós felületek görbületére. A híres **„Theorema Egregium"**-ban bebizonyította, hogy a főgörbületi sugarakból képezett $K = 1/(R_1 R_2)$ **Gauss-görbület az egyedüli olyan, a felületen értelmezhető görbület, amelynek értéke a felületen végzett mérésekkel is megállapítható.**

A téridő csakis belülről vizsgálható. **Olyan görbület-fogalomra van tehát az általános relativitáselméletben szükségünk, amely a téridőn „belül" elvégzett mérésekre van alapozva.** A vektorok párhuzamos eltolása segítségével sikerült a görbület ilyen fogalmát bevezetni a sokaságok elméletében.

Mielőtt a görbület mérésére megadnánk az utasítást, tanulságos arra gondolni, hogy pl. ha a gömb valamely szélességi köre mentén, a kör valamely P pontjában vett érintővektort önmagával párhuzamosan körbevisszük, akkor eredményül nem az eredeti vektort kapjuk. (Ez nyilvánvaló, ha figyelembe vesszük, hogy a szélességi körre emelt érintőkúp a síkba kiteríthető, azaz a csúcsa kivételével mindenütt euklideszi geometriájú, s ezért a vektor párhuzamos eltolása benne ugyanúgy szemléltethető, mint a síkon.) Ez a példa illusztrálja, hogy általában a sokaság görbültsége azt jelenti, hogy a párhuzamos eltolás egy zárt görbe mentén nem triviális eredményre vezet. Másképpen, görbült sokaságon annak az eredménye, hogy a V vektort a P pontból az 1-es ill. a 2-es úton toljuk el párhuzamosan a Q pontba, általában különböző. Megfordítva, **a sokaság nem görbült, ha a párhuzamos eltolás eredménye független az úttól.**

Ha a sokaság nem görbült, akkor létezik olyan V^μ vektormező, amely a sokaságon mindenütt önmagával párhuzamos, azaz amely kovariáns konstans:

$$\nabla_\nu V^\mu \quad = \quad 0. \tag{1.45}$$

Ez részletesen kiírva azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \quad = \quad -\Gamma^\mu_{\kappa\nu} V^\kappa. \tag{1.46}$$

Miután a kétszeres parciális deriválás sorrendje felcserélhető, azaz

$$\frac{\partial^2 V^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \quad = \quad \frac{\partial^2 V^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho}, \tag{1.47}$$

integrálhatósági feltételt kapunk a V^μ vektormezőt meghatározó egyenlethez:

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\Gamma^\mu_{\kappa\nu} V^\kappa\right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\Gamma^\mu_{\kappa\rho} V^\kappa\right) \quad = \quad 0. \tag{1.48}$$

Ez az alábbi alakba írható:

$$R^\mu_{\ \kappa\rho\nu} V^\kappa \quad \equiv \quad \left(\frac{\partial \Gamma^\mu_{\kappa\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\kappa\rho}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho}\Gamma^\lambda_{\kappa\nu} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\rho}\right) V^\kappa = 0. \tag{1.49}$$

Ha ez az összefüggés a sokaság valamely pontján tetszőleges V^μ vektorra fennáll, azaz **ha $R^\mu_{\ \kappa\rho\nu} = 0$, akkor abban a pontban a sokaság nem görbült.**

Az $R^\mu_{\ \nu\kappa\lambda}$ mennyiség tenzor. Ez jól látszik a behelyettesítéssel igazolható

$$R^\mu_{\ \nu\kappa\lambda} V^\nu \quad = \quad \left(\nabla_\kappa \nabla_\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\kappa\right) V^\mu \tag{1.50}$$

azonosságból. Az utóbbi azonosság alapján **a téridő görbültségét az alábbiak szerint „mérjük”:** a tetszőleges V^μ vektort először λ majd κ irányba, ill. először κ majd λ irányba toljuk el egy a (κ, λ) síkban fekvő infinitezimális parallelogramma mentén, és az így kapott két eltolt vektor különbségét vesszük; a „mérést” minden orientációjú parallelogrammára elvégezzük. Az $R^\mu_{\ \nu\kappa\lambda}$ **Riemann-tenzor, vagy más néven görbületi tenzor** tehát a sokaság görbületi viszonyait méri (lokálisan). A

Riemann-tenzor komponenseinek 2 utolsó indexe azzal kapcsolatos, hogy mely infinitezimális parallelogramma mentén történik a vektor párhuzamos eltolása, az első 2 index pedig azzal, hogy a vektor a koordinátabázisban a parallel transzport során hogyan fordul el.

A Riemann-tenzor ill. a belőle képezett $R_{\mu\nu\kappa\lambda} = g_{\mu\rho}R^{\rho}{}_{\nu\kappa\lambda}$ tenzor az indexek felcserélése szempontjából az alábbi szimmetriákkal rendelkezik:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\kappa\lambda} &= R_{\kappa\lambda\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu\kappa\lambda} = -R_{\nu\mu\kappa\lambda} &= -R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\nu\mu\lambda\kappa}, \\ R_{\mu\nu\kappa\lambda} + R_{\mu\kappa\lambda\nu} &+ R_{\mu\lambda\nu\kappa} = 0. \end{aligned} \tag{1.51}$$

A Riemann tenzorból kontrakcióval áll elő **a Ricci-tenzor:**

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \tag{1.52}$$

és további kontrakcióval **a Ricci-skalár, az úgynevezett Riemann-görbület:**

$$R = R^{\rho}{}_{\rho}. \tag{1.53}$$

A 2-dimenziós felületek esetében a Gauss-görbület a Riemann-görbülettel arányos: $K = \frac{1}{2}R$**.** Ez mutatja, hogy a Gauss-görbület valóban belső, csak a felületen végzett mérések alapján is meghatározható. Általában a Riemann-görbület tetszőleges dimenzióban, így a 4-dimenziós téridőben is a metrikus tenzorral és annak deriváltjaival van kifejezve, azaz a téridő belső jellemzőivel. Meghatározásához így nem kell semmilyen beágyazó térre hivatkozni.

A görbületi tenzor kielégíti az úgynevezett Bianchi-azonosságot,

$$\nabla_{\rho}R_{\mu\nu\kappa\lambda} + \nabla_{\kappa}R_{\mu\nu\lambda\rho} + \nabla_{\lambda}R_{\mu\nu\rho\kappa} \equiv 0, \tag{1.54}$$

amelyből kontrakcióval az alábbi azonosság következik:

$$\nabla_{\nu}\left(R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}{}_{\mu}R\right) \equiv 0. \tag{1.55}$$

2 A centrálszimmetrikus téridő [2]

Az alábbiakban **az ekvivalencia-elv sztatikus centrálszimmetrikus téridőben érvényes következményei**ről lesz szó. Olyan következményekről, amelyek függetlenek attól, hogy milyen dinamikai egyenletek alapján határozzák meg a gravitáló tömegek a téridő strukturáját.

Megfontolásaink során az alábbiakat vesszük alapul:

1. Gömbszimmetrikus csillag környezetében a téridő centrálszimmetrikus. Feltesszük egyúttal, hogy a csillag tulajdonságai annyira lassan változnak, hogy az időbeli változástól teljesen el lehet tekinteni, azaz úgynevezett sztatikus centrálszimmetrikus téridőt vizsgálunk.
2. Nem használjuk fel a téridő strukturáját, azaz a metrikus tenzort meghatározó dinamikai egyenleteket.
3. Mint tapasztalati tényt használjuk fel Newton gravitációs törvényét.

2.1 A metrika a csillag környezetében [1]

A csillag környezetében mozgó, nem relativisztikus pontrészecske (bolygó) mozgását az

$$S \;=\; \int dt \left(\frac{1}{2}m_0 v^2 - m_0 c^2 - m_0\phi\right) \tag{2.1}$$

hatás írja le a csillag ϕ gravitációs potenciálterében, ha a speciális relativitáselmélet és a Newton-i gravitációs törvény talaján maradunk. Ennek összhangban kell lenni az általános relativitáselmélet azon szemléletével, hogy a bolygó az

$$S \;=\; -\int m_0 c ds \tag{2.2}$$

hatás által adott módon szabadon esik a csillag gravitációs hatása által létrehozott, $g_{\mu\nu}$ metrikus tenzorú téridőben. Kérdés, milyen alakú metrika esetén van meg az összhang a kétféle szemlélet között? A hatás kétféle alakjának összehasonlításából:

$$ds \;\approx\; \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c}\right) dt. \tag{2.3}$$

Négyzetreemelés után a $c \to \infty$ határesetben:

$$ds^2 \;\approx\; (c^2 + 2\phi)dt^2 - (d\vec{r}\,)^2 \tag{2.4}$$

ahonnan leolvashatjuk, hogy **a csillag közelében a metrikus tenzor a Minkowski-téridő metrikus tenzorától csak a g_{00} komponensében tér el:**

$$g_{00} \;=\; 1+\frac{2\phi}{c^2}. \tag{2.5}$$

Gömbi polárkoordinátákban a gravitációs potenciál

$$\phi \;=\; -G\frac{M}{r}, \tag{2.6}$$

ahol M a csillag tömege. Ekkor az ívelemnégyzet

$$ds^2 \;=\; \left(1-\frac{r_g}{r}\right)(dx^0)^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + d\varphi^2\sin^2\theta\right), \tag{2.7}$$

ahol $r_g = 2GM/c^2$. Ennek a koordinátarendszernek az $r=0$ origójában nyugszik a csillag és az $x^0 = ct$ =áll. 3-dimenziós térben gömbi polárkoordinátákat lehet felvenni, azaz ez a tér euklideszi.

A metrika fenti közelítő alakja nyilván nem érvényes $r < r_g$ radiális koordináták esetén. A Newton-i gravitációs elmélettel a megfeleltetést ezért csak $r\to\infty$ esetén szabad megkövetelni. Ugyanakkor a bolygópályák átlagsugara, a, sőt a Nap sugara, R_N is nagyobb mint a Nap tömegéből származtatott r_g gravitációs sugár.

A konnexió el nem tűnő komponensei:

$$\Gamma^0_{0r} = \Gamma^r_{00} = \frac{1}{c^2}\frac{d\phi}{dr} = -\frac{r_g}{2r^2}. \tag{2.8}$$

A görbületi tenzor el nem tűnő komponensei pedig

$$R^0{}_{r0r} = \frac{r_g}{r^3}, \qquad R^0{}_{\theta 0\theta} = -\frac{r_g}{2r}, \qquad R^0{}_{\varphi 0\varphi} = -\frac{r_g}{2r}\sin^2\theta. \tag{2.9}$$

Ez azt jelenti, hogy a csillag környezetében a téridő görbült. Ugyanakkor valamennyi $R^i{}_{jkl}$ komponens zérus, ami azt jelenti, hogy a $t=0$ hipersík, a 3-dimenziós tér, amelyben a csillag nyugszik, nem görbült.

A geodetikusok egyenletét felírva majd behelyettesítve a konnexió fenti kifejezését az alábbi észrevételeket lehet tenni **a $c\to\infty$ határesetben:**

1. **A geodetikusokon a τ sajátidő azonos a $t = x^0/c$ koordinátaidővel.**
2. **A geodetikusok egyenletei a** ϕ centrálszimmetrikus gravitációs potenciáltérben **Kepler-pályán mozgó tömegpont egyenletei.**

A görbületi tenzor elemei a bolygópályák átlagos a sugarának megfelelő távolságon nagyon kicsik, mert $r_g \ll a$. **A bolygók tehát a téridőben majdnem egyenes világvonalon mozognak.** Valójában csavarvonal a világvonal, amelynek sugara a Föld esetén kb. 9 fényperc, míg a menetemelkedése kb. 1 fényév. Ennek a csavarvonalnak a $x^0 = ct$ =áll. hipersíkra eső vetülete a Kepler-pálya.

2.2 Napdagály [2]

A napdagály jelensége a Földön félnapos periódussal jelentkezik. **A tengerek a Föld középpontját és a Napot összekötő egyenes mentén a Nap felőli oldalon kidudorodnak.**

Ez a jelenség a geodetikus deviáció alapján magyarázható. A Föld a G geodetikuson szabadon esik. Helyezzünk egy próbarészecskét a dudor tetejére. Az is szabadon esik a G' geodetikuson. A Földdel együttmozgó lokális inerciarendszerből nézve azonban a próbarészecske mozgása nem szabad mozgásnak látszik. A lokális inerciarendszerben a geodetikus deviációnak megfelelően a dudor tetejére tett próbarészecskére tehetetlenségi erő hat, amely igyekszik azt a Föld középpontjától távolítani. A molekuláris erők tartanak ezzel a tehetetlenségi erővel egyensúlyt. Ez határozza meg a dudor méretét.

A napdagály tehát értelmezhető az ekvivalencia-elv alapján.

2.3 A centrálszimmetrikus téridőről általában

Csillag környezetében a téridő centrálszimmetrikus kell legyen. Most a sztatikus centrálszimmetrikus téridőről mondjuk el mindazt, ami az ekvivalencia-elvből következik. Sztatikus a téridő, ha a metrikus tenzora nem függ a koordinátaidőtől. Közelítőleg sztatikus, centrálszimmetrikus téridő olyan gömbszimmetrikus csillag környezetében alakulhat ki, amelynek tulajdonságai időben nagyon lassan változnak.

Kezdjük a gondolatmenetünket azzal, hogy a csillagtól végtelen távol az ekvivalencia-elv és a Newton-i gravitációval való megfeleltetés értelmében a metrika a Minkowski-metrikába megy át:

$$ds^2 = c^2dt^2 - (d\vec{r})^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{2.10}$$

A Minkowski-metrikában az ívelemnégyzet invariáns az $x \to x + a_x$, $y \to y + a_y$, $z \to z + a_z$ eltolásokkal és a térbeli elforgatásokkal szemben. Írjuk át az ívelemnégyzetet gömbi polárkoordinátákba:

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{2.11}$$

Centrálszimmetrikus téridőben csak a forgásszimmetriát akarjuk megőrizni. Ezért az ívhosszelem négyzetének általános alakja:

$$ds^2 = P(r)c^2dt^2 - Q(r)dr^2 - R(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{2.12}$$

ahol $P(r)$, $Q(r)$ és $R(r)$ tetszőleges, csak a radiális koordinátától függő függvények. A metrikus tenzor el nem tűnő komponensei:

$$g_{00} = P(r), g_{rr} = -Q(r), g_{\theta\theta} = -R(r), g_{\varphi\varphi} = -R(r)\sin^2\theta. \tag{2.13}$$

A metrikus tenzor az $x^0 = ct$ koordinátaidőtől is független, ami a téridő sztatikus jellegét fejezi ki.

Meg lehet mutatni, hogy az r radiális koordináta mindig megválasztható úgy, hogy $R(r)$ helyén r^2 álljon. Ilyenkor az r =áll. körök kerülete $2r\pi$ és az ívhosszelem négyzete

$$ds^2 = A(r)c^2dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{2.14}$$

Azokat a koordinátákat, amelyben az ívelemnégyzet a fenti alakú **Schwarzschild-koordinátáknak** nevezzük. A csillagtól végtelen távol, $r \to \infty$, az együttható-függvények

$$A(r) \to 1, \qquad B(r) \to 1 \tag{2.15}$$

aszimptotikus viselkedést kell mutassanak. Ez biztosítja, hogy a csillagtól nagyon távol, ahol a gravitációs hatás elhanyagolható, a téridő Minkowski-geometriájú.

Az A és a B együtthatók dimenziótlanok. Ezért csak a radiális távolság és egy másik távolság hányadosától függhetnek. Az elméletben a csillag sugara nem szerepel. Az egyetlen távolság jellegű mennyiség az r_g gravitációs sugár, amelyet a csillag tömegéből kell univerzális állandók segítségével képezni, $r_g = 2MG/c^2$. Az együtthatók tehát r/r_g függvényei. Miután r_g kicsi, azért a csillagtól nagy távolságban az együtthatók sorbafejthetők az r_g/r kicsiny paraméter szerint:

$$\begin{aligned} A(r) &\approx 1 - \alpha\frac{r_g}{r} + \beta\left(\frac{r_g}{r}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{r_g}{r}\right)^3, \\ B(r) &\approx 1 + \gamma\frac{r_g}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{r_g}{r}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Itt az α, β és a γ paraméterekkel adott paraméteres alak független azoktól a dinamikai egyenletektől, amelyek megmondják, hogy a gravitáló anyag milyen módon határozza meg a metrikát. Az Einstein-féle általános relativitáselméletben a megfelelő dinamikai egyenletekből, az Einstein-egyenletekből $\alpha = \gamma = 1$ és $\beta = 0$ adódik a centrálszimmetrikus megoldásra.

2.4 A vöröseltolódás [2, 4]

Tegyük fel, hogy a Napban lévő A atom ω_A frekvenciájú, azaz $\Delta\tau_A = 2\pi/\omega_A$ periódusidejű fényjelet bocsát ki, amelyet a Földön álló B megfigyelő a saját nyugvó órájának sajátidejében mérve $\Delta\tau_B$ periódusidejűnek, azaz $\omega_B = 2\pi/\Delta\tau_B$ frekvenciájúnak detektál. A vöröseltolódás azt jelenti, hogy az észlelt ω_B frekvencia kisebb mint a kibocsátott ω_A frekvencia.

Sztatikus téridőben a koordinátaidH o-tartam és a sajátidő-tartam kapcsolata csak helyfüggő:

$$\frac{\Delta\tau}{\sqrt{g_{00}(x^i)}} \;=\; \Delta t. \tag{2.17}$$

Ezt a kapcsolatot használhatjuk fel a vöröseltolódás jelenségének értelmezésére.

A helyfüggetlen Δt koordinátaidőre:

$$\Delta t \;=\; \frac{\Delta\tau_A}{\sqrt{g_{00}(A)}} = \frac{\Delta\tau_B}{\sqrt{g_{00}(B)}}. \tag{2.18}$$

Az észlelt frekvencia tehát

$$\omega_B \;=\; \sqrt{\frac{g_{00}(A)}{g_{00}(B)}}\omega_A, \tag{2.19}$$

ahol

$$g_{00}(A) \approx 1 + \frac{2\phi(A)}{c^2} = 1 - \frac{r_g}{R_N}, \qquad g_{00}(B) \approx 1 + \frac{2\phi(B)}{c^2} = 1 - \frac{r_g}{a}. \tag{2.20}$$

A Föld átlagos a pályasugara sokkal nagyobb mint a Nap R_N sugara, ezért

$$\frac{\omega_A - \omega_B}{\omega_A} \;\approx\; \frac{1}{c^2}\left(\phi(B) - \phi(A)\right) = \frac{r_g}{2c^2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{R_N}\right) > 0. \tag{2.21}$$

A Napból kisugárzott fényjel frekvenciáját kisebbnek észleljük a Földön, mint amekkora az a sugárzó atom nyugalmi rendszerében. Az atomi színképvonal tehát a vörös (az alacsonyabb frekvenciák) felé tolódik el. Az eltolódás azonban olyan kicsi, hogy a Napból érkező sugárzás vonalszélessége annál sokkal nagyobb. Ezért a vöröseltolódás ilyen módon nem mérhető.

A vöröseltolódást végül Föld-i körülmények között sikerült megmérni az 1960-as években a Mössbauer-effektus segítségével. A kísérlet lényege, hogy egy kb. h = 10m magas torony aljáról bocsátottak ki elektromágneses hullámot, amelyet a torony tetején észleltek. Az elektromágneses hullám a ^{57}Fe radioaktív izotóp által kibocsátott $6 \cdot 10^{-13}$ relatív szélességű gamma-sugárzás volt, amelyet ugyanilyen izotóp rezonancia-abszorpcióval detektált. A rezonancia-abszorpció megszűnik, ha a sugárzás frekvenciája eltolódik. A gravitációs frekvenciaeltolódás

$$\frac{\omega_A - \omega_B}{\omega_A} \approx \frac{1}{c^2}\left(\phi(B) - \phi(A)\right) \approx \frac{gh}{c^2} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-15} \tag{2.22}$$

értékű volt, amelyet 1 %-os pontossággal sikerült meghatározni.

2.5 Fénygörbülés [2]

Az ekvivalencia-elv további kísérleti bizonyítéka a gravitációs fénygörbülés. A jelenség abban áll, hogy **a Földön vízszintes irányban kibocsátott fénysugár lefelé görbül.** Egyszerű érvelés alapján beláthatjuk, hogy ilyen effektusnak fel kell lépni. A Föld felszínén a lokális inerciarendszer a szabadoneső rendszer. A fény ebben terjed egyenes mentén. A Föld felszínén nyugvó rendszer nem inerciarendszer, mert a Föld megakadályozza a szabadesésben, azaz a szabadon eső inerciarendszerhez képest felfelé gyorsul. Akkor a fénysugárnak ebben a rendszerben tényleg lefelé kell görbülnie, ,,mintha a Föld gravitáló hatásánál fogva vonzaná". **A fénygörbülés mértéke a Földön mérhetetlenül kicsi.**

Hasonló jelenség azonban bekövetkezik az állócsillagokból kibocsátott fénnyel, amely a Nap közelében elhalad. Olyan esetben, ha az állócsillag a napkorong közelében látszik, úgyhogy az az állócsillagot teljes napfogyatkozáskor eltakarná, ha a fénysugár egyenes mentén terjedne, akkor esetleg mégis látjuk az állócsillagot, mert az abból érkező fénysugár a Nap gravitációs hatására meggörbül és eljut a Földre. Szemléletes az a mechanikai analógia alapján végzett becslés (Soldner, 1801), amely a fényt m tömegű részecskék potenciálszórásának tekinti a Napon. A részecskék ütközési paramétere a $\rho = R_N$ Napsugár, a gravitációs potenciál $U/m = -MG/r$, a részecskék sebessége a végtelenben $v_\infty = c$. Ekkor a szögeltérülés $0,82''$. A sztatikus centrálszimmetrikus metrikán alapuló számolásból a fény által befutott geodetikus szögeltérülésére a tapasztalattal egyező $1,75''$ adódik.

2.6 A perihélium-vándorlás [2]

A bolygópályák nagytengelye a tapasztalat szerint forog az állócsillagokhoz képest. Ennek következtében a bolygópályának a Naphoz legközelebb eső pontja, a perihélium is elfordul. Az elfordulás annál nagyobb, minél nagyobb a bolygópálya excentricitása, így a Merkúr esetén a legnagyobb. A Newton-i gravitációs elmélet alapján a perihélium-vándorlás a többi bolygó perturbáló hatásának a következménye. Ez a perturbáció nagyon pontosan számolható volt már a század elején. Az egyes bolygók járulékai a perihélium-vándorláshoz:

Vénusz	277,8"/évszázad
Föld	90,0"/évszázad
Mars	2,5"/évszázad
Jupiter	153,6"/évszázad
Szaturnusz	7,3"/évszázad
többi bolygó	0,2"/évszázad

A megfigyelt érték ezen járulékok összegénél azonban 42,7"/évszázad értékkel nagyobb. **A Newton-i gravitációs elmélet tehát nem tudta megmagyarázni a Merkúr perihélium-vándorlását.**

Az ekvivalencia-elv alapján a magyarázat egyszerű. A Kepler-pálya a bolygó geodetikusának $c \to \infty$ határesete. A geodetikus (vetülete) azonban véges c esetén eltér a Kepler-pályától. Az eltérés alapján

$$\Delta\varphi \;=\; \pi\left[2\alpha - \frac{2\beta-\gamma}{\alpha}\right]\frac{r_g}{a} \tag{2.23}$$

járulék adódik a perihélium-vándorláshoz, amelynek értéke Einstein általános relativitáselméletében ($\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0$): $\Delta\varphi = 42{,}95$"/évszázad. **Az általános relativitáselmélet magyarázatot ad tehát a Merkúr perihélium-vándorlására.**

3 Az Einstein-egyenletek és a Schwarzschild-megoldás [2, 1, 4]

3.1 Az Einstein-egyenletek

Az általános relativitás elmélete azáltal válik zárt elméletté, hogy **az ekvivalencia-elvet kiegészítjük azokkal a dinamikai egyenletekkel, amelyek meghatározzák, hogy hogyan alakítja ki a gravitáló anyag maga körül a téridő geometriáját.**

A geometriát végső soron a metrikus tenzor mondja meg. **A metrikus tenzor** (szimmetrikus, másodrendű tenzor) **10 komponensében** azonban **kétféle információ keveredik:**

- a téridő geometriai szerkezetére vonatkozó,
- és a koordinátarendszer önkényes megválasztására vonatkozó.

Az általános koordinátatranszformációt 4 tetszőleges függvény adja meg. A dinamikai egyenletek tehát csak ezen általános koordinátatranszformáció erejéig határozhatják meg a metrikus tenzort. Ez azt jelenti, hogy **a metrikus tenzornak csak 6 független komponense van.** Másképpen, ha 10 egyenletet írunk fel a metrikus tenzor 10 komponensének meghatározására, akkor 4 további ,,kényszeregyenletnek" is fenn kell állnia.

A téridő geometriai szerkezetét az ekvivalencia-elv értelmében a gravitáló anyag határozza meg. A súlyos és a tehetetlen tömeg arányossága miatt, minden tehetetlen tömeg egyúttal gravitáló tömeg is. A gravitációs hatást azonban nem lehet egyszerűen a nyugalmi tömegeknek tulajdonítani. A speciális relativitáselmélet elvezetett ahhoz a jelentős felismeréshez, hogy minden energia egyúttal tehetetlen tömeget képvisel. Az energiát az energiaimpulzus-tenzor T^{00} komponenséből kell kiszámítani. Ennek alapján arra a következtetésre jutunk, hogy **a téridő geometriáját az energiaimpulzus-tenzornak kell meghatároznia.**

Az egyenletnek, amely a metrikus tenzor és az energiaimpulzus-tenzor kapcsolatát megadja, általánosan kovariánsnak kell lennie. Honnan vezethetünk le ilyen kapcsolatot?

Erre kétféle megközelítés ismeretes, amelyek ugyanarra az eredményre vezetnek.

1. **Az energiaimpulzus-tenzort a metrikát meghatározó egyenletek forrástagjának tekintjük.** [2] Ezért az egyenleteket

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

alakban keressük, ahol $G_{\mu\nu}$ **a metrikus tenzorból és deriváltjaiból felépített szimmetrikus tenzor** kell legyen. A κ paraméter univerzális állandó. Azt hihetnénk, hogy ekkor szinte korlátlanul sokféle lehetőség kínálkozik arra, hogy az egyenlet bal oldalán álló $G_{\mu\nu}$ tenzort megválasszuk. A helyzet ennél lényegesen jobb:

- Emlékezzünk előszöris arra, hogy az energiaimpulzus-tenzor divergenciája zérus kell legyen, mert ez fejezi ki az energia és az impulzus lokális megmaradását. Ennek a fenti egyenlet esetében integrálhatósági feltételként ugyancsak teljesülnie kell. A $G_{\mu\nu}$ tenzornak tehát **divergenciamentesnek** kell lennie.
- További megszorítást jelent, hogy a $c \to \infty$ határesetben, gömbszimmetrikus téridőben szeretnénk visszakapni Newton gravitációs elméletét. Miután a pontrészecske által keltett gravitációs potenciál, a ponttöltés által keltett elektrosztatikus potenciál analogonja, Newton elméletében is Poisson-egyenlet adja meg a sztatikus gravitációs potenciált. A Poisson-egyenletben a potenciál második deriváltjai lineárisan szerepelnek. Azt is tudjuk, hogy **az általános relativitáselmélet és a Newton-i gravitációs törvény közötti megfeleltetés alapján** a potenciál második deriváltjának a metrikus tenzor (g_{00} komponensének) második deriváltja felel meg. A megfeleltetés érvényessége várhatóan akkor fog fennállni, ha $G_{\mu\nu}$**-ben a metrikus tenzor második deriváltjainál magasabb deriváltak nem lépnek fel és ha a metrikus tenzor második deriváltjai lineárisan szerepelnek** benne.

Cartan megmutatta, hogy **egyetlen olyan tenzor létezik, amely az összes fenti elvárásnak eleget tesz:**

$$G_{\mu\nu} \;=\; R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \tag{3.2}$$

A téridő struktúráját meghatározó **Einstein-egyenletek** tehát:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \;=\; \kappa T_{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

Az egyenlet bal oldalának kovariáns divergenciája a Bianchi-azonosság következtében zérus. Ezért az energiaimpulzus-tenzor kovariáns divergenciájának is el kell tűnnie. Az energiaimpulzus-tenzor (kovariáns) divergenciamentessége az Einstein-egyenletek integrálhatósági feltétele.

2. **A legkisebb hatás elve alapján is eljuthatunk az Einstein-egyenletekhez.** [1, 4] A teljes S hatás a gravitáló anyag S_m hatásjárulékának és a ,,gravitációs mező”, azaz az adott geometriájú ,,üres” téridő S_g hatásjárulékának az összege.

A „gravitációs mező” hatásjáruléka (az elektromágneses mezőéhez hasonlóan) az egyes invariáns $\sqrt{-g}d\Omega$ térfogatelemek független járulékainak az összege. A lokális járulék skalár kell legyen. A Riemann-görbület a metrikus-tenzorból felépített legegyszerűbb skalár. Ezért a „gravitációs mező”, azaz az adott görbületű téridő hatásjáruléka:

$$S_g = -\frac{1}{2\kappa c}\int_\Omega R\sqrt{-g}d\Omega. \tag{3.4}$$

A κ univerzális állandót később rögzítjük úgy, hogy Newton gravitációs törvényével meglegyen az elmélet összhangja.

Az anyagterek, mint pl. az elektromágneses mező hatásjáruléka

$$S_m = \frac{1}{c}\int_\Omega \mathcal{L}\sqrt{-g}d\Omega \tag{3.5}$$

alakú, ahol $\mathcal{L}$ az anyagtér Lagrange-sűrűsége. **Ha ismerjük az anyagtér Lagrange-sűrűségét a speciális relativitáselméletben, akkor helyettesíthetjük a téridő-koordináták szerinti parciális deriváltakat a megfelelő kovariáns deriváltakkal és a térfogatelemet a $\sqrt{-g}d\Omega$ szorzattal.** Így olyan hatáshoz jutunk, amely eleget tesz az ekvivalencia-elvnek. A lokális inerciarendszerekben ugyanis a konnexió zérussá válik és a kovariáns deriváltak átmennek a parciális deriváltakba. Lokális inerciarendszerben visszakapjuk tehát a Lagrange-sűrűségnek a speciális relativitáselméletből ismert alakját. (Megjegyzem, hogy ez a recept a hatás alakjának a megkeresésére csak olyankor működik, ha a hatásban az anyagtér téridő-koordináták szerinti parciális deriváltjai közül csak az első parciális deriváltak szerepelnek. Az elektromágnesesen, a gyengén és az erősen kölcsönható anyag esetében, az alapvető elméletek szintjén ez igaznak is bizonyul.) Az anyagteret leíró Lagrange-sűrűségben a metrikus tenzor tehát a kovariáns deriváltakon keresztül fordul elő. Ezért **nem kell az anyagterek és a gravitációs mező között valamilyen „kiagyalt” kölcsönhatást feltételezni, mert az ekvivalencia-elv értelmében az a fenti „receptnek” megfelelően automatikusan benne van az S_m hatásban.**

Képezzük most a hatás δS variációját a téridő geometriájának tetszőleges elképzelt megváltozása, azaz a metrikus tenzor tetszőleges infinitezimális

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x) \tag{3.6}$$

megváltozása esetén, amelyről feltesszük, hogy az Ω téridő-tartomány $\partial\Omega$ határain eltűnik, $\delta g_{\mu\nu}(x)|_{\partial\Omega} = 0$.

- Kissé hosszadalmas, de elemi számolás eredményeként

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\kappa c}\int_\Omega G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d\Omega, \tag{3.7}$$

  ahol $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ az Einstein-tenzor.

- Az anyagtér hatásfunkcionáljának megváltozása **az energiaimpulzus-tenzor definíciója szerint** [1]:

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int_\Omega T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d\Omega. \qquad (3.8)$$

  Ezt higgyük el egyelőre. Kicsit később meg fogom mutatni, hogy az a $T_{\mu\nu}$ tenzor, amelyet a fenti definícióval vezetünk be, valóban az energiaimpulzus-tenzor. Fontos azt megérteni, hogy ez valóban definíció, azaz az $\mathcal{L}$ Lagrange-sűrűség konkrét alakját felhasználva a hatás δS_m variációja, mint a térmennyiségek és a metrikus tenzor funkcionálja, kiszámolható és a jobb oldalon álló alakba írható. Ezután le lehet olvasni az energiaimpulzus-tenzornak a térmennyiségekkel és a metrikus tenzorral kifejezett konkrét alakját.

A legkisebb hatás elve értelmében a valóságos téridő azzal a metrikával jellemzett geometriai struktúrát veszi fel, amely a hatás szélsőértékéhez tartozik, azaz amely körüli tetszőleges infinitezimális $\delta g_{\mu\nu}$ variációk esetén a hatás megváltozása zérus:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta S_g + \delta S_m \\ &= \frac{1}{2\kappa c}\int \left(\kappa T_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d\Omega. \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \qquad (3.10)$$

Látjuk, hogy mindkét megfontolás azonos eredményre vezetett, az Einstein-egyenletekre. A metrikus tenzor 10 komponensére így kaptunk 10 egyenletet. A 10 egyenlet azonban nem független egymástól, mert az energiaimpulzus-tenzor kovariáns divergenciájának el kell tűnnie. Ez 4 integrálhatósági feltétel, úgyhogy a független egyenletek száma $10 - 4 = 6$. **Az Einstein-egyenletek** tehát valóban **csak tetszőleges általános koordinátatranszformáció erejéig határozzák meg a metrikus tenzort.**

Az Einstein-egyenletek és a $\partial^\nu F_{\mu\nu} = j_\mu$ Maxwell-egyenletek között párhuzamot vonhatunk. Az egyenletek jobb oldalán mindkét esetben forrástag áll, amelyre kontinuitási egyenlet érvényes. A kontinuitási egyenlet mindkét esetben integrálhatósági feltétel szerepét játssza. A nagyon lényeges különbség az, hogy **a Maxwell-egyenletek** a vektorpotenciálban **lineárisak, az Einstein-egyenletek** pedig a metrikus tenzorban **nem lineárisak. Az elektromágneses mezőre érvényes a lineáris szuperpozíció elve,** azaz két töltés által keltett elektromágneses tér az egyes töltések által keltett terek lineáris szuperpozíciója. **A gravitációs mezőre nem igaz a lineáris szuperpozíció elve.** Két gravitáló test jelenlétében a téridő metrikus tenzora nem azon metrikus tenzorok lineáris szuperpozíciója, amelyet az egyes testek önmagukban hoznának létre. Az elektrodinamikában is ismeretesek nem lineáris jelenségek, de ezek csak akkor lépnek fel, ha speciális közeg van jelen, amelynek elektromágneses tulajdonságai a térerősség nagyságától is függnek. A gravitációs hatásokban a nem lineáris jelenségeknek eredendően jelen kell lenniük, mert a dinamikai egyenletek nem lineárisak.

3.2 Az energiaimpulzus-tenzor [1, 4]

Az előbb megelőlegeztem **az energiaimpulzus-tenzor definícióját:**

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int_\Omega T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d\Omega, \tag{3.11}$$

ahol $\delta g^{\mu\nu}(x)$ a metrikus tenzor tetszőleges infinitezimális megváltozása. Most azt mutatom meg, hogy **az így definiált szimmetrikus $T_{\mu\nu}$ tenzor valóban az energiaimpulzus-tenzor.**

Induljunk ki ehhez abból, hogy az anyagtér S_m hatásfunkcionálja skalár, azaz invariáns az ívhossznégyzetet változatlanul hagyó bármilyen infinitezimális lokális koordinátatranszformációval szemben. A hatás lokális Poincaré-szimmetriával rendelkezik. A hatás ennek következtében invariáns az infinitezimális lokális eltolásokkal szemben is:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x). \tag{3.12}$$

A hatás megváltozása tehát infinitezimális eltolások esetén $\delta S_m = 0$.

A (3.11) definícióban a metrikus tenzor tetszőleges $\delta g^{\mu\nu}$ megváltozása szerepel. Ennek speciális esete az, amikor $\delta g^{\mu\nu}$ lokális eltolás következménye. Ekkor a lokális Poincaré-szimmetria miatt $\delta S_m = 0$. Mi ekkor a metrikus tenzor megváltozása? A metrikus tenzor transzformációja:

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}(x') &= g^{\rho\kappa}(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\kappa} \\ &= g^{\rho\kappa}(x)\left(\delta^\mu_\rho + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho}\right)\left(\delta^\nu_\kappa + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\kappa}\right) \\ &\approx g^{\mu\nu}(x) + g^{\rho\nu}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} + g^{\mu\kappa}\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\kappa}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

ahonnan a bal oldalt

$$g'^{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\rho}\xi^\rho \tag{3.14}$$

alakban sorbafejtve a metrikus tenzornak az infinitezimális $\xi^\mu(x)$ lokális eltolás során bekövetkező megváltozására

$$\delta g^{\mu\nu} = g'^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x) = \nabla^\nu \xi^\mu + \nabla^\mu \xi^\nu \tag{3.15}$$

adódik. Ha ezt beírjuk a $T^{\mu\nu}$ szimmetrikus tenzort definiáló (3.11) egyenletbe, akkor az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S_m &= \frac{1}{c}\int T_{\mu\nu}(\nabla^\nu \xi^\mu)\sqrt{-g}d\Omega \\ &= -\frac{1}{c}\int (\nabla^\nu T_{\mu\nu})\xi^\mu \sqrt{-g}d\Omega + \text{ felületi integrál }, \end{aligned} \tag{3.16}$$

ahol a felületi integrál eltűnik, ha a lokális koordinátatranszformáció ott eltűnik. A térfogati integrál akkor és csak akkor zérus, ha fennáll a

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0 \tag{3.17}$$

általánosan kovariáns kontinuitási egyenlet. Meg lehet mutatni, hogy ez ekvivalens a

$$\partial^\nu\left(\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\right) = 0 \tag{3.18}$$

kontinuitási egyenlettel. **A $T^{\mu\nu}$ tenzort joggal tekintjük tehát az energiaimpulzus-tenzornak, mert a $\sqrt{-g}T^{\mu\nu}$ tenzorsűrűség az a mennyiség, amelyre azért áll fenn lokális megmaradási törvény, mert a hatás a téridőbeli lokális eltolásokkal szemben invariáns.**

3.3 A Schwarzschild-megoldás [2]

Schwarzschild megtalálta az Einstein-egyenleteknek a pontszerű csillag által létrehozott téridő esetére vonatkozó megoldását. Pontszerű csillag centrálszimmetrikus téridőt hoz létre. Ebben a metrika a (2.14) alakú az ekvivalenciaelv következtében. Az Einstein-egyenletekből az $A(r)$ és a $B(r)$ együtthatókat kell meghatározni.

A csillag helyét kivéve az energiaimpulzus-tenzor mindenütt zérus: $T_{\mu\nu} = 0$. Ez azt jelenti, hogy a homogén Einstein-egyenleteket kell megoldani:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \tag{3.19}$$

Azt, hogy a téridőt a pontszerű csillag alakítja ki, határfeltételekkel kell figyelembe venni. (A helyzet ebből a szempontból hasonló, mint amikor ponttöltés elektrosztatikus terét számoljuk. A homogén Poisson-egyenletet oldjuk meg, és azt, hogy a teret ponttöltés kelti, határfeltétellel vesszük figyelembe.)

Képezzük az (3.19) egyenlet mindkét oldalának kontrakcióját, akkor $R = 0$ adódik a téridő Riemann-görbületére. Az Einstein-egyenletek tehát a pontszerű csillagot körülvevő téridőben az

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{3.20}$$

alakra egyszerűsödnek. Felhasználva a görbületi tenzor definícióját, ezek az egyenletek átírhatók az $A(r)$ és $B(r)$ függvényekre vonatkozó közönséges differenciálegyenletekké. Vegyük ezekhez az

$$A(r) = g_{00} \to 1 - \frac{r_g}{r} \tag{3.21}$$

határfeltételt, ha $r \to \infty$. Ez azt fejezi ki, hogy a végtelenben a téridő metrikája összhangban van Newton gravitációs törvényével. A határfeltétel teszi egyúttal lehetővé a κ univerzális állandónak a rögzítését is: $\kappa = 8\pi G/c^4$. A feladatot Schwarzschild oldotta meg és azt találta, hogy az ívelem négyzete

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right) \tag{3.22}$$

alakúnak adódik.

Az ennek megfelelő metrikából meghatározott görbületi tenzor komponensei nem nullák annak dacára sem, hogy a Ricci-tenzor eltűnik. **A csillag tehát görbült téridőt hoz létre.**

3.4 A fekete lyuk [2]

A Schwarzschild-megoldásnak nagyon érdekes tulajdonságai vannak. Az $(x^0 = ct, r)$ koordináták jelentése az r_g gravitációs sugáron kívül és belül különböző. Mint az az ívelem négyzetéből látszik, a metrikus tenzor g_{00} és g_{rr} komponense az $r = r_g$ helyen előjelet vált. A $\{J : r > r_g\}$ tartományban az $x^0 = ct$ koordináta időszerű és az r koordináta térszerű, de az $\{F : r < r_g\}$ tartományban a helyzet megfordul, az r koordináta az időszerű és az $x^0 = ct$ koordináta a térszerű. Eközben a másik két térszerű koordináta, θ és φ jelentése nem változik.

A metrikus tenzornak **szingularitás**a van az $r = r_g$ hiperfelületen és $r = 0$-ban is. A kérdés az, hogy ezek fizikai szingularitások-e, avagy csak a koordinátarendszer ügyetlen megválasztásának a következményei?

1. A naív megfontolások azt sejtetik, hogy az $r = r_g$ hiperfelületen a szingularitás csak a koordinátarendszer „ügyetlen” megválasztásának a következménye, ugyanakkor $r = 0$-ban valódi szingularitás van.

- Végezzük el az
$$r \quad \to \quad r' = \frac{1}{2}\sqrt{r(r-r_g)} + \frac{1}{2}r - \frac{1}{4}r_g \tag{3.23}$$
koordinátatranszformációt. Az új radiális koordinátával az ívelem négyzete:
$$ds^2 \;=\; \left(\frac{1-\frac{r_g}{4r}}{1+\frac{r_g}{4r}}\right)^2 c^2dt^2 - \left(1+\frac{r_g}{4r}\right)^4 \left(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\; d\varphi^2\right). \tag{3.24}$$
Látjuk, hogy ilyen koordinátaválasztás esetén eltűnik az $r = r_g$-nél a szingularitás.
- A görbületi tenzor $r = 0$-ban szinguláris, de $r = r_g$-ben nem. A görbületi tenzorból képezhető kvadratikus és harmadfokú invariáns az $r = 0$-ban szinguláris, de $r = r_g$-nél nem.

2. **A szingularitások** tehát **lehetnek** általában **a koordinátarendszer választásából következő koordinátaszingularitások és valódi szingularitások, amelyek megjelenése független a koordináták választásától. Valódi szingularitásról akkor beszélünk, ha a téridő valamely pontjába befutó geodetikusok nem folytathatók egyértelműen.** Ez azért jelent fizikai szingularitást, mert az időszerű és a fényszerű geodetikusokon részecskék ill. fény terjedhet, és a valódi szingularitást elérve nem egyértelmű, hogy merre terjed tovább az anyag ill. a fény.

   Valamely sokaságon a geodetikusok az ívhosszparaméterük véges értékénél kétféleképpen érhetnek véget: vagy befutnak egy valódi szingularitásba, vagy elérik a sokaság határát. A sokaságot **geodetikusan teljes**nek nevezzük, ha az nem fordulhat elő, hogy geodetikus az ívhosszparaméterének véges értékénél éri el a sokaság határát.

   A fizikai (valóságos) téridőtől megköveteljük, hogy az időszerű és a fényszerű geodetikusokra nézve geodetikusan teljes legyen, azaz (egyszerűbben fogalmazva) hogy a részecskék és a fény végtelen ideig tudjon szabadon terjedni, „ne ütközzön a téridő határába”. Valódi téridőben az időszerű és a fényszerű geodetikusok így csak valódi szingularitásban érhetnek az ívhosszparaméter (sajátidő) véges értéke mellett véget.

   Ha ezen általánosabb fogalmak segítségével vizsgáljuk meg a Schwarzschild-megoldást, akkor is azt találjuk, hogy $r = r_g$-nél csak koordináta-szingularitás, $r = 0$-ban viszont valódi szingularitás van.

A Schwarzschild-megoldás ívelemét át lehet írni olyan (cT, R, θ, φ) koordinátákra, amelyekben az ívelem négyzete:
$$ds^2 \;=\; \frac{r_g}{r}e^{-r/r_g}\left(c^2dT^2 - dR^2\right) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\; d\varphi^2\right), \tag{3.25}$$

ahol r-et az

$$R^2 - c^2T^2 = 4r_g^2 \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{-r/r_g} \tag{3.26}$$

egyenlet adja meg implicit módon. A fenti koordinátákban az Einstein-egyenletek pontszerű csillag téridejére vonatkozó megoldásáról az alábbiakat lehet elmondani:

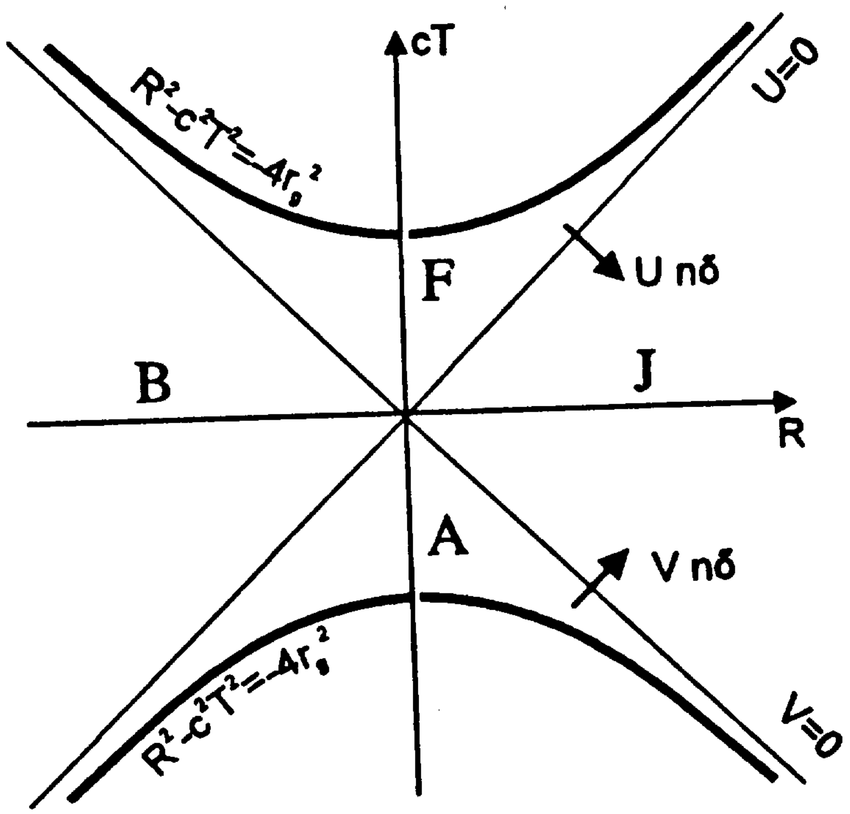

Figure 1: A Kruskal-Szekeres-féle téridő (cT, R) térképe.

1. A téridő a 1. ábrán látható (cT, R) koordinátatérképen (rögzített θ és φ esetén) az

$$R^2 - c^2T^2 = -4r_g^2 \tag{3.27}$$

hiperbola két ága közé eső tartomány, amelyek $r = 0$-nak felelnek meg.

2. Az $R = \pm cT$ egyenesek $r = r_g$-nek felelnek meg. Ezeken az egyeneseken nincsen semmilyen szingularitás. A bevezetett koordinátákban a metrikus tenzor mentes a koordinátaszingularitásoktól.

3. A Schwarzschild-megoldás $r > r_g$ tartománya a 1. ábrán a jobb oldali J tartomány. Ebben az $r =$const. koordinátavonalak az R-tengelyre szimmetrikus helyzetű parabolák. A Schwarzschild-megoldás $r < r_g$ tartománya a 1. ábrán az F tartomány.

4. Az új koordinátákban a megoldás tartalmazza a B és az A tartományokat is. Ezekkel együtt a két $r = 0$ hiperbolaág közötti tartomány, azaz a téridő geodetikusan teljes. **A Schwarzschild-megoldásnak ezt a kiterjesztését nevezik Kruskal-Szekeres-kiterjesztésnek.**

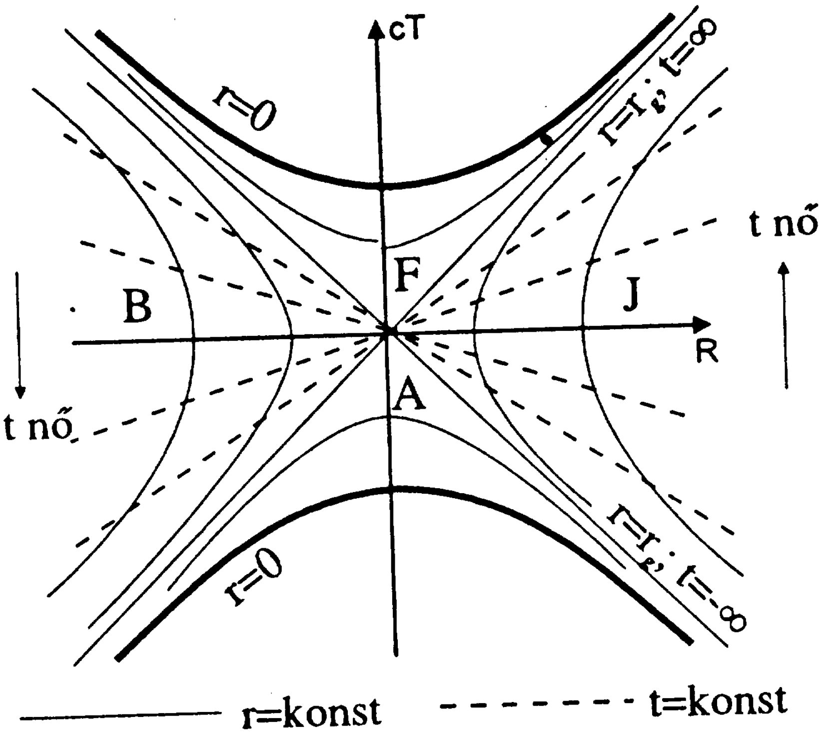

Figure 2: Az $r =$áll. és a $t =$áll. vonalak a Kruskal-Szekeres-féle téridő (cT, R) térképén.

5. A Kruskal-Szekeres-koordinátákban a metrikus tenzor függ a T időtől. A $t =$áll. felületek a (cT, R) térképen az origón áthaladó egyenesek. $cT = -R$ felel meg a $t \to -\infty$, $cT = R$ pedig a $t \to \infty$ határesetnek (2. ábra). A J

szektorban T a t Schwarzschild-idővel monoton nő. A Schwarzschild-idő felel meg a csillagot végtelen távolról néző megfigyelő óráján mért sajátidőnek. Ez az idő azonban nem alkalmas az $r < r_g$ tartományon belüli események időbeli rendezésére. Az F tartományban r játssza az idő szerepét. A Kruskal-Szekeres-koordináták között T a téridő valamennyi szektorában az idő szerepét játssza. Az időszerű geodetikusokon a sajátidő

$$d\tau \;=\; \sqrt{r_g/r}\,e^{-r/2r_g}\,dT. \tag{3.28}$$

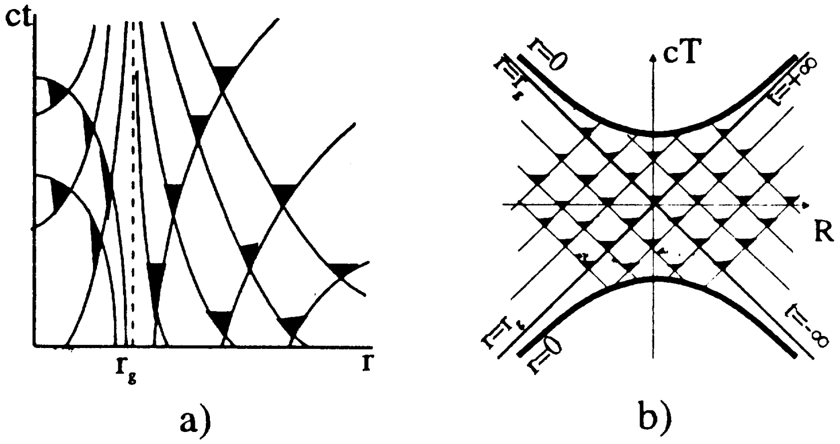

Figure 3: A fényszerű geodetikusok és a jövőbeli fénykúpok a téridő (ct, r) és a Kruskal-Szekeres-féle (cT, R) térképén.

Vizsgáljuk meg közelebbről az $\{F : r < r_g\}$ tartomány fizikai tulajdonságait.

1. Az időszerű és a fényszerű világvonalak minden pontjukban a jövőbeli fénykúpuk belsejében haladnak. A csillagtól végtelen távoli megfigyelő szerint minden űrhajó, amelyik az $r = r_g$ határfelület felé utazik, azt csak végtelen t idő esetén éri el. A geodetikusok azonban az $r = r_g$ felületnél a $t = \infty$-en keresztül egyértelműen folytathatók, miután itt nincs fizikai szingularitása a téridőnek. A Kruskal-Szekeres-féle T időben mért véges időtartam alatt éri el a J tartomány tetszőleges pontjából indított űrhajó az $r = r_g$ gömbfelületet és azon zavartalanul áthalad, minthogy ott nincsen fizikai szingularitás. Az űrhajó sajátideje a T idővel arányos és nem a végtelnben nyugvó órákon mért t Schwarzschild-idővel, így az űrhajósok véges sajátidő alatt léphetik át az $r = r_g$ felületet.

2. Ezzel szemben bármely űrhajó és fényjel, amely az F tartomány belsejéből indul, véges sajátidő alatt beleszalad az $r = 0$ szingularitásba. Ez azt jelenti, hogy sem részecskék, sem fényjelek nem léphetnek ki az F tartományból.

Az F tartomány a csillagot körülvevő r_g sugarú gömb, amelynek határa csak egy irányban átjárható, kívülről befelé. Az F tartomány tehát minden a felületére érkező részecskét elnyel, és ugyanakkor semmiféle jelet sem képes kibocsátani. Ezért ezt a tartományt fekete lyuknak nevezzük.

A fekete lyuk jelenlétéről tehát csak egy dolog ad információt, az hogy milyen körülötte a téridő struktúrája. Általában, ha a csillag véges sugara nagyobb, mint a gravitációs sugara, ahogy ez pl. a Nap esetében is fennáll ($r_g \sim$ 10km), akkor nem jelenik meg a fekete lyuk. Ha azonban egy csillag kellően nagy tömegű és nukleárisan kiég, akkor a visszamaradó anyag a gravitációs vonzó hatás következtében összezuhanhat a csillag gravitációs sugaránál kisebb méretre. Ezt nevezzük **gravitációs kollapszus**nak. A gravitációs kollapszust követően megjelenik a fekete lyuk. A fekete lyuk valószínűleg a csillag fejlődésének legutolsó állomása, amely csak bizonyos típusú csillagok esetében jelentkezik.

A csillagászok megfigyeltek kvazárokat, amelyek pontszerűek, de olyan intenzíven sugároznak mint egy galaxis. Az a sejtés fogalmazódott meg, hogy az Univerzum eme ,,világítótornyai" a középpontjukban elhelyezkedő fekete lyuknak köszönhetik rendkívüli ,,világító képességüket" [5].

4 A kozmológia alapjai

Az általános relativitáselmélet elméleti keretet szolgáltat a Világegyetem fejlődési modelljeihez. **A Világegyetem legegyszerűbb modelljei azon a feltevésen alapulnak, hogy az anyag egyenletesen tölti ki a Világegyetemet és nem tüntet ki semmilyen irányt. Az anyag homogén és izotróp módon oszlik el.** Ez nyilván közelítés, hiszen mai ismereteink szerint a látható világban az anyag kb. olyasmi szerkezetet mutat, mint a hab. A galaktikákban tömörült anyag a „hab" buborékainak felületét képező falak mentén helyezkedik el. Ha elegendően nagy méretű térfogatokra átlagolunk, akkor mégis átlagosan homogén és izotróp kitöltöttséget tapasztalunk.

4.1 Görbült 3-dimenziós tér

A homogén és izotróp 3-dimenziós tér $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ görbületi tenzora:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda \left(\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\gamma\delta} - \gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}\right) \tag{4.1}$$

alakú és az egyetlen λ állandóval jellemezhető, amely a tér P Riemann-görbületét adja meg: $\lambda = \frac{1}{6}P$. Ha $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$), akkor a 3-dimenziós tér görbülete pozitív (negatív), ha $\lambda = 0$, akkor a tér görbülete nulla, azaz a tér euklideszi.

A pozitív görbületű teret úgy lehet kényelmesen „szemléltetni", hogy elképzelünk egy 4-dimenziós euklideszi téret és ebben tekintjük az a sugarú hipergömb 3-dimenziós felületét. A hipergömb

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2 \tag{4.2}$$

egyenlettel adott felületén két infinitezimálisan közeli pont távolsága:

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \\ &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{\left(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3\right)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Itt (x_1, x_2, x_3, x_4) Descartes-koordináták a beágyazó négy-dimenziós euklideszi térben. Innen kiolvashatjuk a 3-dimenziós tér $\gamma_{\alpha\beta}$ metrikus tenzorának a komponenseit. Miután meghatároztuk a $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ görbületi tenzor elemeit, leolvashatjuk, hogy $\lambda = 1/a^2 > 0$. Ha bevezetjük az (x_1, x_2, x_3) Descartes-koordináták helyett az (r, θ, φ) gömbi polárkoordinátákat, akkor a 3-dimenziós térben az elemi távolság négyzete

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 \left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right) . \tag{4.4}$$

A gömbi polárkoordinátákban a kör kerülete $2r\pi$, a gömb felülete $4r^2\pi$, de a gömb sugara

$$\rho \;=\; \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-(\frac{r'}{a})^2}} = a \text{ arc } \sin\,(r/a) > r. \tag{4.5}$$

A görbült 3-dimenziós térben az elemi távolság négyzetét ki lehet a beágyazó 4-dimenziós térben bevezetett $(a, \chi, \theta, \varphi)$ gömbi polárkoordinátákkal is fejezni:

$$x_1 = a \sin\chi \sin\theta \cos\varphi, \qquad x_2 = a \sin\chi \sin\theta \sin\varphi, \tag{4.6}$$

$$x_3 = a \sin\chi \cos\theta, \qquad x_4 = a\cos\chi, \tag{4.7}$$

ahol $\chi \in [0, \pi]$. Ekkor $r = a\sin\chi$ és az elemi távolság négyzete:

$$d\ell^2 \;=\; a^2 \left[d\chi^2 + \sin^2\chi \left(\sin^2\theta \; d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right]. \tag{4.8}$$

A pozitív görbületű 3-dimenziós térben a $\rho = a$ arc $\sin(r/a) = a\chi$ sugár és a hozzátartozó gömb $f = 4\pi a^2 \sin^2\chi$ felületének a χ koordinátától való függését a 4. ábra mutatja.

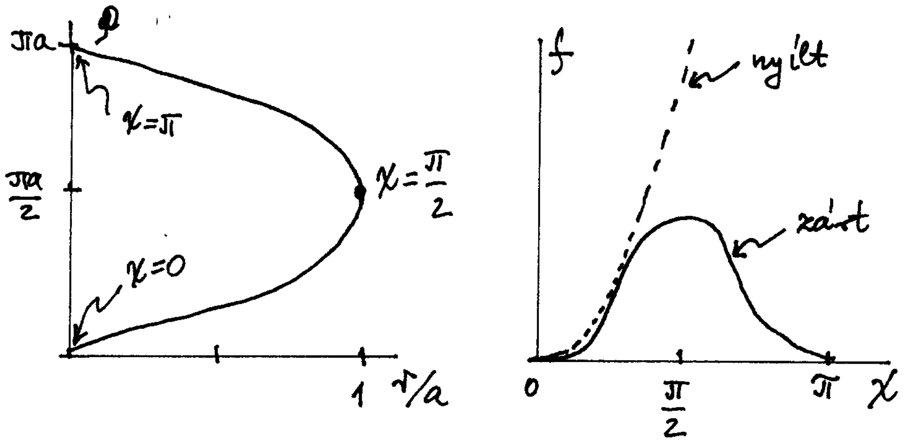

Figure 4: A sugár és az adott sugarú gömbfelület a χ koordináta függvényében a pozitív görbületű térben (folytonos vonal). A gömb felületének χ-függését a negatív görbületű térben szaggatott vonal mutatja.

A pozitív görbületű tér térfogata, $V = 2\pi^2 a^3$ **véges,** mert az origóból „kifelé" haladva a gömbök sugara először nő, majd pedig csökkenni kezd. Azokat a kozmológiai modelleket, amelyek az Einstein-egyenletek pozitív térgörbülettel rendelkező megoldásai, **zárt modell**eknek szokás nevezni. A zárt elnevezés a tér véges térfogatára utal.

A negatív görbületű 3-dimenziós tér esetére vonatkozó képleteket megkapjuk a fentiekből az $a \to ia$ helyettesítéssel. A távolság négyzete $\lambda = -1/a^2$ görbületű térben:

$$d\ell^2 \;=\; a^2 \left[d\chi^2 + \sinh^2 \chi \left(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right] \tag{4.9}$$

ahol most $\chi \in [0, \infty)$. Növekvő χ koordináta esetén az $\rho = a\chi$ sugár is és a hozzátartozó gömb $f = 4\pi a^2 \sinh^2 \chi$ felszíne is monoton növekszik, úgyhogy **a negatív görbületű tér térfogata végtelen,** $V \to \infty$. Azokat a kozmológiai modelleket, amelyekben a 3-dimenziós tér negatív görbületű, **nyílt modell**eknek nevezzük.

4.2 A Világegyetem zárt és nyílt izotróp modellje

A kozmológiai modelleken az Einstein-egyenleteknek a Világegyetem egészére vonatkozó megoldásait nevezzük. Ezekben a modellekben azt kérdezzük, hogy milyen a Világegyetem története.

Ha homogén és izotróp anyageloszlást tételezünk fel a Világegyetemben, akkor az ívelem négyzete

$$ds^2 \;=\; c^2 dt^2 - d\ell^2 \tag{4.10}$$

alakú. Aszerint, hogy a térbeli távolság négyzetét, $d\ell^2$-et a pozitív görbületű ill. a negatív görbületű térben érvényes (4.8) ill. (4.9) kifejezés adja meg, rendre zárt ill. nyílt izotróp kozmológiai modellről beszélünk. Kereshetjük az Einstein-egyenletek ilyen alakú megoldásait. Ezekben a megoldásokban egyetlen paraméter szerepel, a 3-dimenziós tér görbületét megadó a paraméter. Ez függhet a t időtől a Világegyetem fejlődése során. Homogén modell esetén helyfüggése nem lehet.

A t idő-koordináta helyett szokás az η koordinátát bevezetni a $cdt = ad\eta$ definícióval. Ekkor a függvénye az η változónak. Jelölje vessző az η szerinti deriválást. Zárt izotróp modellben az Einstein-egyenletekből az

$$\frac{3}{a^4}\left(a^2 + a'^2\right) \;=\; \frac{8\pi\kappa}{c^4}\epsilon \tag{4.11}$$

egyenletet kapjuk az $a(\eta)$ függvényre. Itt ϵ a gravitáló anyag energiasűrűsége a Világegyetemben. Elfogadva, hogy a Világegyetem entrópiája állandó, a Világegyetemben található anyag $\mathcal{E}$ energiájának megváltozása a V térfogat dV megváltozása és p nyomás esetén

$$d\mathcal{E} = -pdV, \tag{4.12}$$

ahonnan

$$d\epsilon = -(\epsilon + p)\frac{dV}{V} \tag{4.13}$$

adódik a gravitáló anyag állapotegyenletére. Zárt izotróp modellben $V \sim a^3$, úgyhogy az állapotegyenlet:

$$d\epsilon = -(\epsilon + p)\frac{3da}{a}. \tag{4.14}$$

Porszerű anyagot tételezve fel a nyomás zérus, $p = 0$. Felhasználva, hogy az energiasűrűség a μ tömegsűrűséggel arányos, $\epsilon = \mu c^2$, az állapotegyenletből

$$d\mu = -\mu\frac{3da}{a}, \tag{4.15}$$

azaz

$$\mu a^3 = \text{áll.} = \frac{M}{2\pi^2 a^3}a^3 \tag{4.16}$$

adódik, ahol M a Világegyetemben található gravitáló anyag tömege. Az energiasűrűség tehát

$$\epsilon = \mu c^2 = \frac{Mc^2}{2\pi^2 a^3} \tag{4.17}$$

A zárt stacionárius modellnek megfelelő megoldás ezek után

$$a = a_0(1 - \cos\eta), \qquad t = \frac{a_0}{c}(\eta - \sin\eta), \tag{4.18}$$

ahol $a_0 = 2\kappa M/3\pi c^2$.

A zárt izotróp modellnek megfelelő megoldásnak két valódi szingularitása van, $\eta \to 0$ ($t \to 0$) és $\eta \to \pi$ ($t \to a_0\pi/c$) esetén, amikor $a \to 0$ és a tér térfogata nullára zsugorodik.

Hasonlóan lehet megtalálni az Einstein-egyenletek olyan megoldását, amely a nyílt izotróp modellnek felel meg. Ennek a megoldásnak csak egyetlen szingularitása van $\eta \to 0$-ban ($t \to 0$).

A Világegyetem története ezen egyszerű modellek szerint pontszerű szingularitással indult, majd a Világegyetem tágult. Kezdetben az anyag sűrűségének szingularitása volt. Ez a kezdeti szingularitás az Ősrobbanás. A zárt izotróp modell szerint a Világegyetem visszatér fejlődése újra összezsugorodik egyetlen szinguláris ponttá. A nyílt izotróp modell szerint a tágulás örökké tart.

4.3 Vöröseltolódás

A zárt izotróp modell azt jósolja, hogy az Univerzum fejlődésének kezdeti szakaszában tágul. Bármely két térbeli pont távolsága kezdetben monoton nő, mert az $a(\eta)$ függvény monoton növekvő. Hasonló ahelyzet a ny´ ilt izotróp modellben is. A különbség az, hogy nyílt izotróp modellben a Világegyetem tágulása „örökké" tart, míg a zárt modellben a Világegyetem a kezdeti tágulási szakaszból átkerül az összehúzódás állapotába, amikor $a(\eta)$ növekvő η-val monoton csökken.

Felmerül a kérdés, hogy el lehet-e csillagászati megfigyelések útján dönteni, hogy tágul avagy összehúzódik-e a Világegyetem (legalábbis annak látható része) és hogy a zárt vagy a nyílt modellt lehet-e rá alkalmazni. **A csillagászati megfigyelések azt támasztják alá, hogy a galaxisok közötti távolságok növekednek, azaz hogy a Világegyetem tágul. Azt azonban nem lehet eldönteni, hogy a Világegyetem zárt-e avagy nyílt.**

Honnan tudjuk, hogy a Világegyetem tágul? Onnan, hogy a távoli galaxisokból érkező fényben a spektrumvonalak eltolódnak a vörös felé. Ennek oka a galaxisok távolodási sebességéből adódó Doppler-effektus.

Tegyük fel, hogy a tér $(\chi_1, \theta_1, \varphi_1)$ pontján egymást követően történik két esemény az η_1 és az $\eta_1 + d\eta_1$ „időben". Például egy atom által kibocsátott elektromágneses hullám két egymást követő maximumát jelenti a két esemény. A két esemény közötti időkülönbség $dt_1 = \frac{1}{c} a(\eta_1) d\eta_1$. A megfigyelő ugyanezen fényjel két egymást követő maximumát a $(\chi_2, \theta_2, \varphi_2)$ helyen az η_2 és az $\eta_2 + d\eta_2$ „pillanatokban" $dt_2 = \frac{1}{c} a(\eta_2) d\eta_2$ időkülönbséggel észleli.

A tér izotrópiája következtében a fénysugarak (a fényszerű geodetikusok) sugárirányúak, azaz a fénysugarak mentén $d\theta = d\varphi = 0$. Ezért $\theta_2 = \theta_1$ és $\varphi_2 = \varphi_1$, és a fénysugár mentén:

$$0 = ds^2 = a^2 d\eta^2 - a^2 d\chi^2 \tag{4.19}$$

ahonnan $\chi = \pm\eta +$áll. érvényes a fénysugár terjedésére.

Az események és megfigyelésük helyének különbségei alapján akkor

$$\eta_2 - \eta_1 = \chi_2 - \chi_1, \qquad \eta_2 + d\eta_2 - (\eta_1 + d\eta_1) = \chi_2 - \chi_1 \tag{4.20}$$

úgyhogy $d\eta_2 = d\eta_1$. Ebből az időtartamokra a

$$dt_2 = dt_1 \frac{a(\eta_2)}{a(\eta_1)} = dt_1 \frac{a(\eta_1 + \chi_2 - \chi_1)}{a(\eta_1)} \tag{4.21}$$

összefüggés adódik. „Kis" $\chi_2 - \chi_1 = \Delta\chi$ „távolságot" tételezve fel, sorba fejthetjük $a(\eta_1 + \Delta\chi)$-t:

$$dt_2 \quad \approx \quad dt_1 \left[1 + \Delta\chi \frac{a'(\eta_1)}{a(\eta_1)} \right]. \tag{4.22}$$

Az események helye és a megfigyelésük helye közötti térbeli $\Delta\ell$ távolságot ,,kis" $\Delta\chi$ esetén $\Delta\ell \approx a(\eta_1)\Delta\chi$ kifejezéssel közelíthetjük, ekkor:

$$dt_2 \approx dt_1 \left[1 + \Delta\ell \frac{a'(\eta_1)}{a^2(\eta_1)}\right]. \tag{4.23}$$

Figyelembe véve, hogy a kibocsátott fényjel frekvenciája $\omega_1 \sim 1/dt_1$, míg a megfigyelő $\omega_2 \sim 1/dt_2$ frekvenciát észlel, a fényjel frekvenciájának relatív eltolódására

$$\zeta \equiv \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1} = \frac{\Delta\ell}{c} H \tag{4.24}$$

adódik, ahol

$$H = c\frac{a'(\eta_1)}{a^2(\eta_1)} \tag{4.25}$$

az események és a megfigyelő távolságától független állandó, az úgynevezett Hubble-állandó. Az eredmény azt jelenti, hogy a galaxisokból jövő színképvonalak a galakszisoknak a Földtől mért távolságával arányos mértékben eltolódnak az alacsonyabb frekvenciák, azaz a vörös felé. Ez a vöröseltolódás csillagászatilag megfigyelt tény. Ha a galaxisok távolságát független mérésekből vesszük, akkor a vöröseltolódás mértékéből meghatározhatjuk a Hubble-állandót, amelyre $H \sim 10^{-10}$ év nagyságrendű érték adódik.

Ha meghatározzuk a galaxis $v = d\Delta\ell/dt_1$ sebességét, akkor arra $v = H\Delta\ell$ adódik. Ez egyrészt azt jelenti, hogy a relatív frekvenciaeltolódás mértéke $\zeta = v/c$, ez pedig a relativisztikus Doppler-effektusnak megfelelő frekvencia-eltolódás. Másrészt a Hubble állandó ismeretében meghatározhatjuk azt a sebességet, amellyel a galaxisok távolodnak az Univerzum tágulása következtében: kb. 50 - 75 km/s Megaparsecenként.

References

[1] L.D. Landau, E.M. Lifsic, *Elméleti fizika II.*, *Klasszikus erőterek.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976)

[2] Hraskó P., *Bevezetés az általános relativitáselméletbe* (BME Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1997)

[3] Dede M., Demény A., *Kísérleti fizika II.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1979)

[4] Novobátzky K., *A relativitás elmélete* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1963)

[5] R.H. Price, K.S. Thorne, *A fekete lyukak membránelmélete* (Tudomány, 1988 június, 25. old.)