1 Bevezetés
avagy miért foglalkozunk a húrelmélettel?

Sokáig az volt a fizika egyik alapfeltevése, hogy az anyag szerkezetét olyan részecskék mozgása és kölcsönhatásaként lehet megérteni, amelyek pontszerűnek tekinthetők. Egy pontszerű részecske eseményei a téridő pontjait jelölik ki. A fizika fejlődése során először az anyagi pont mechanikáját dolgozták ki, majd a mechanikát általánosították pontrendszerekre. A mechanika az összes kiterjedt test mozgását pontrendszer mozgásaként írja le.

Az anyagi pont helyzetét az x^μ négyesvektor írja le valamilyen vonatkoztatási rendszerben. A részecske mozgását a téridőben egy világvonal ábrázolja. A részecske helyzetét a világvonalon a τ sajátidővel jellemezhetjük, amely geometriai értelemben az ívhossz-paraméter szerepét játssza, $ds = c\, d\tau$. A sajátidőt mérhetjük például a részecske keletkezésének pillanatától a részecske nyugalmi rendszerében. A világvonal olyan $x^\mu(\tau)$ görbe, amelynek érintővektora időszerű, $\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}_\mu(\tau) > 0$. Az m_0 nyugalmi tömegű részecske Newton második törvénye szerint mozog:

$$m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu. \tag{1.1}$$

Később rájöttünk, hogy a részecskék kvantummechanikai mozgást végeznek, és hogy ennek a klasszikus mechanikai mozgás csak speciális esete. A pontszerű részecske kvantummechanikai viselkedését a $\psi(\vec{x}, t)$ hullámfüggvény írja le, amelynek abszolútérték négyzete, $\mid \psi(\vec{x}, t) \mid^2 d^3x$ megadja annak a valószínűségét, hogy a részecskét az $\vec{x}$ pont körüli d^3x térfogatelemben találjuk a t pillanatban. A teljes találati valószínűség időben állandó, $\int \mid \psi \mid^2 d^3x = 1$. A részecske mozgását a Schrödinger-egyenlet írja le:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{1.2}$$

A részecske hullámfüggvénye ugyan általában egy véges tartományra terjed ki a térben, mégis a részecske megtalálásának eseménye pontszerű: a tér valamely pontjába helyezett infinitezimális detektor vagy megszólal vagy nem, és ha megszólal, akkor az egész részecskét megtaláljuk az adott pontban teljes energiájával és impulzusával. Jegyezzük meg azonban, hogy egy részecske emissziója vagy abszorpciója csak idealizált esetben pontszerű elemi esemény. Valójában a "detektor" a legegyszerűbb esetben egy másik részecske, és az emisszióról (abszorpcióról) csak annyit tudunk, hogy a detektor-részecske által elfoglalt kicsiny térfogatban zajlik le. Időben is csak olyan $\Delta\tau$ pontossággal pillanatszerű, amit a detektor-részecske r sugara a $\Delta\tau = r/c$ összefüggés szerint megszab.

A kiterjedt testek a kvantummechanikában is sokrészecske rendszerekként írhatók le. A sokrészecske rendszer hullámfüggvénye (koordináta-reprezentációban) az egyes részecskék koordinátái által kifeszített téren van értelmezve.

A kvantummechanika relativisztikus általánosítására tett kísérlet meglepő eredményre vezetett. Kiderült, hogy már egyetlen relativisztikusan mozgó részecske kvantummechanikáját sem lehetséges ellentmondásmentesen megfogalmazni. Az energia relativisztikus kifejezésének,

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (\vec{p}c)^2, \tag{1.3}$$

érvényben maradását megkövetelve, az $s = 0$ spinű részecskékre a Klein-Gordon-egyenlet,

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{m_0 c^2}{\hbar} \phi = 0, \tag{1.4}$$

és $s = \frac{1}{2}$ spinű részecskékre pedig a Dirac-egyenlet

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{m_0 c}{\hbar} \psi = 0 \tag{1.5}$$

adódott mozgásegyenletként. Az egyenletek megoldásainak elemzése azonban megmutatta, hogy sem $\phi(x)$, sem pedig $\psi(x)$ nem tekinthetők hullámfüggvényeknek. Az egyenleteknek vannak ugyanis pozitív energiás és negatív energiás megoldásai. Nem tehetjük azonban meg, hogy csak a negatív energiás megoldásokat tekintjük fizikaiaknak. Ha uis. egy hullámcsomagot képezünk csak pozitív energiás megoldásokból, akkor ebben a hullámcsomagban időbeli fejlődése során megjelennek negatív energiás komponensek is. Ezért azokat nem hagyhatjuk figyelmen kívül egy konzisztens elméletben. A Klein-Gordon-egyenlet $\phi(x)$ megoldásáról ráadásul még az is kiderült, hogy nem lehet neki valószínűségi jelentést tulajdonítani.

Az ellentmondások feloldását az elmélet kvantumtérelméletté történő átfogalmazása tette lehetővé. A kvantumtérelméletben arra az álláspontra helyezkedünk, hogy a vákuum nem üres, hanem az a terek alapállapota. A részecskék a terek elemi gerjesztései. Az állapottér az egyrészecskés állapotokon túl tartalmaz két-, három-, stb. részecskés állapotokat, azaz tetszőleges sokrészecskés állapotokat. A tereket téroperátorok $\hat{\phi}(x)$ és $\hat{\psi}(x)$ írják le, amelyek a téridő valamennyi pontjában értelmezve vannak, és az állapottér vektoraira hatnak. A téroperátorok adjungáltja a vákuumból egy részecskét kelt a téridő x pontjában. Olyan tér téroperátora, amelynek elemi gerjesztései zérus ill. $\frac{1}{2}$ spinűek, a Klein-Gordon- ill. a Dirac-egyenletet elégíti ki operátor-egyenlet alakjában. A részecskék száma nem marad meg. Az elméletből meghatározhatók a különböző számú részecskét tartalmazó állapotok közötti átmenetek valószínűségei. A kvantumtérelmélet megtartotta azonban azt a feltevést, hogy a részecskék keltésének és eltüntetésének eseményei pontszerűek.

A térelmélet az anyag szerkezetét a következőképpen magyarázza. A nukleonok, az atommagok, az atomok stb. azért mutatnak geometriai szerkezetet, mert fermionokból épülnek fel. A fermionokra érvényes a Pauli-féle kizárási elv: két azonos fermion nem lehet egy rendszeren belül ugyanabban a kvantumállapotban. Ez viszont azt jelenti, hogy a fermionok egymás után betöltik egy rendszeren belül az alapállapottól kezdődően felfelé haladva a magasabban gerjesztett egyrészecske-állapotokat. Utóbbiak hullámfüggvényei pedig a geometriai formák változatos és gazdag tárházát biztosítják. Végső soron ez magyarázza az anyag változatos geometriai formáit. Mondhatjuk tehát, hogy a fermionok az anyag építőkövei. Az építőköveket összetartó habarcsot a kölcsönhatás jelenti. A pontszerű részecskék térelmélete a kölcsönhatás mélyebb megértéséhez vezetett. Lehetővé tette egy egységes kép kialakítását arra nézve, hogy hogyan valósul meg az elektromágneses, a gyenge és az erős kölcsönhatás. Ennek lényege, hogy a kölcsönhatást bozonterek közvetítik. A fermionok egymással kicserélik a megfelelő bozontér kvantumait: elektromágnesesen kölcsönható elektronok fotonokat, az erősen kölcsönható kvarkok gluonokat, a gyengén kölcsönható kvarkok és leptonok pedig vektorbozonokat cserélnek ki egymással. A teljes kölcsönhatás ilyen elemi folyamatokból épül fel. Az elemi kölcsönhatási folyamatok lokálisak: a téridő valamely pontjában a fermionáram kölcsönhat az ott uralkodó bozontérrel.

A pontszerű részecskék fizikájának hátterében az a feltevés áll, hogy minden test addig darabolható, míg az alkatrészek már pontszerűnek tekinthetők. Ránézésre ez a feltevés jogosnak tűnik. Az atom atommagból és elektronokból, az atommag nukleonokból, a nukleonok pedig kvarkokból épülnek fel. Ahogy azonban így megyünk az egyre kisebb méretek felé minőségi változás következik be. Az elektronokat ki lehet szabadítani az atomból, a nukleonokat is ki lehet szabadítani az atommagból, de a kvarkokat már nem lehet kiszabadítani a nukleonokból. A kvarkok és a leptonok szerkezetéről egyelőre csak annyit tudunk, hogy ezeknek a részecskéknek a kiterjedése annyira kicsi, hogy a jelenlegi kísérletek nem alkalmasak arra, hogy azt meghatározzuk. A kvarkbezárás jelensége azonban azt sugallja, hogy minél mélyebbre megyünk az anyagszerkezetében, az alkotórészek annál inkább elveszítik önálló részecske jellegüket. Sokkal szervesebben kötődnek ahhoz a kiterjedt objektumhoz, amelyet alkotnak. Minthacsak annak egy tulajdonságává válnának. Elképzelhető tehát, hogy vannak az anyagnak olyan kicsiny építőkövei, amelyek lényegüknél fogva kiterjedtek és nem érthetők meg mint pontrészecske rendszerek. Ez lehet érv, hogy kísérletet tegyünk olyan elméletek kidolgozására, amelyekben a részecskék eleve kiterjedtek. Egy másik érv lehet az, hogy bizonyos objektumok, mint pl. a nukleonok, kiterjedtek és kölcsönhatásaik leírása egy effektív elméletben, amely eleve figyelembe veszi kiterjedtségüket, hasznos és esetleg egyszerűbb lehet mint az alapvető kölcsönhatások pontrészecske-térelmélete alapján.

Ebben az irányban a legkézenfekvőbb általánosítás, hogy az elmélet elemi objektumának nem a nulladimenziós pontot, hanem az egydimenziós vonaldarabot, az ún. húrt választjuk. Hasonlóan a pontrészecskék fizikájához, kifejlődött az elmúlt egy-két évtizedben a húrok mechanikája, kvantummechanikája és kvantumtérelmélete, az ún. húrtérelmélet. Napjainkban vannak ugyancsak próbálkozások olyan elméletek kidolgozására, amelyekben az elemi objektum két- vagy többdimenziós. Ezek az ún. membrán elméletek.

Történetileg a kiterjedt részecskék elméletének kidolgozására irányuló törekvések más oldalról kaptak ösztönzést. A hadronokról tudjuk, hogy kiterjedt részecskék. Sugaruk 1 fm nagyságrendű. Ma azt hisszük, hogy a hadronok szerkezetéről és kölcsönhatásairól a kvantumszíndinamika elnevezésű pontrészecske-térelmélet tud számot adni. Ennek semmi ezidáig nem mond ellent, azonban a bizonyosságtól még valószínűleg nagyon távol vagyunk. A kölcsönhatás erőssége miatt ugyanis a hadronikus kölcsönhatás elméleti tárgyalására nem alkalmazhatók a perturbációs módszerek, és ez rendkívüli technikai nehézségeket jelent. Itt megjegyezzük azonban, hogy újabban sikerült a hadronok kölcsönhatási folyamatait perturbatív úton értelmezni. A hadronszerkezet és a kvarkbezárás azonban természetesen nem magyarázható ilyen módon.

Függetlenül attól, hogy meg tudjuk-e a hadronok kölcsönhatását a szerkezetük alapján magyarázni, meg lehet kísérelni olyan elmélet kiépítését, amelynek elemi gerjesztései maguk a hadronok. A megfelelő elméletet megkísérelték a pontrészecskék térelméletének a mintájára megalkotni. Az eredményül kapott elmélet azonban rossz aszimptotikus viselkedést mutat: benne a hadron-hadron kölcsönhatás hatáskeresztmetszete nagy energián végtelenhez tart. Ez azonban ellentmond a tapasztalatnak és elméletileg is helytelen, mert azt jelentené, hogy az S mátrix nem unitér. Venezianonak sikerült a hadronikus kölcsönhatásra egy effektív elméletet, az ún. duális modellt kidolgoznia. Ez a modell az S mátrix tulajdonságaira tesz egészen általános feltevéseket, mint azt, hogy S unitér, analitikus, keresztszimmetriával rendelkezik (crossing symmetry). Az egyetlen feltevés, ami a pontrészecske térelméletekben nem teljesül az, hogy a szórási amplitudó kielégíti az un. dualitási elvet. Erről a következő előadásban részletesen lesz szó. A duális modell a tapasztalattal sok tekintetben jól egyezik és helyes aszimptotikus viselkedést mutat. A mi szempontunkból különösen érdekes, hogy a hadronikus kölcsönhatás amplitudója a duális modellben, az ún. duális amplitudó pontosan megegyezik azzal az amplitudóval, amit a húrelmélet szolgáltat. A duális modell egyúttal a hadronok nyugalmi tömege és spinje között is megad egy összefüggést

$$M^2 = M_0^2 + \frac{1}{\alpha'} J \tag{1.6}$$

alakban. Ez megfelel a tapasztalatnak és ugyancsak megegyezik avval, amit a húrelmélet szolgáltat. Egy relativisztikus húr nyugalmi tömegének négyzete arányos a húr saját impulzusmomentumával. A duális modellben a részecskék tömegállapotainak sűrűsége, az ún. tömegspektrum exponenciálisan nő növekvő nyugalmi tömeggel,

$$\rho(M)dM \propto \exp(bM)dM. \tag{1.7}$$

Ez nem mond ellent a hadronrezonanciák mért állapotsűrűségének, és a húrok tömegspektruma is pontosan ilyen tulajdonságú. Mindezek a tények azt mutatják, hogy a húrok alkalmasak lehetnek a hadronok és kölcsönhatásaik leírására.

Mindjárt itt el kell azonban mondanunk, hogy a duális modell rendelkezik egy alapvető hiányossággal. Nem tud helyesen számot adni olyan folyamatokról, amelyekben a parton szabadsági fokok kiemelkedően fontos szerepet játszanak. Igy a kinematikai változók bizonyos tartományában a duális modell a tapasztalattal nem egyező aszimptotikus viselkedést mutat. Adott irányú szórás hatáskeresztmetszete az energia növekedtével exponenciálisan csökken a modellben, míg a tapasztalat szerint csak hatványfüggvény szerint. Ez volt az egyik fő ok, hogy le kellett mondani arról, hogy a húrelméletet a hadronok kölcsönhatása elméletének tekintsük. Igy a húrelmélet fejlődése különvált attól, amit ma a hadronikus kölcsönhatások húrmodelljének nevezünk. Megkérdezhetnénk még, hogy mi szükségünk van a hadronok húrmodelljére, ha fenomenológikus elméletként használhatjuk a duális modellt. A duális modellnek megfelelő húrok azonban különböznek a hadronok húrmodelljében használatos húroktól. Mig az előbbiek csak transzverzális rezgéseket tudnak végezni, addig az utóbbiak longitudinális rezgésekre is képesek és ennek következtében a hadronok parton szabadsági fokairól is számot tudnak adni. Egy másik lényeges különbség, hogy a húrelmélet végtelen vékony húrokkal foglalkozik, míg számos okunk van azt hinni, hogy a hadronok modellezéséhez véges transzverzális kiterjedésű húrok a megfelelőek (sugaruk kb. 0,5 fm).

A mostani előadássorozatban megismerkedünk majd a húrelmélet elemeivel. Igyekszem majd ennek során megmutatni, hogy a húrmodell mennyiben hasonlít ill. különbözik a húrelmélettől. æ

2 A duális modell

Még mielőtt elkezdenénk a húrelmélet alapjaival való ismerkedést, beszéljünk arról a kísérletről, hogy a hadronok kölcsönhatását pontrészecske-térelmélet segítségével írjuk le. Az alapfeltevés az, hogy létezik egy hadrontér és ennek elemi gerjesztései a hadronrezonanciák, amelyeket kísérletileg megfigyelhetünk. Az alacsony energiás hadronikus folyamatok vizsgálata megmutatta, hogy a kölcsönhatási amplitudó lényeges járuléka olyan elemi folyamatoktól származik, amelyek rezonanciák kicserélését írják le az s-csatornában:

Ugyanakkor a hadronikus folyamatok ún. Regge-elmélete mugmutatta, hogy a kölcsönhatási amplitudó $s \to \infty$ aszimptotikus viselkedése úgy értelmezhető, mint ún. Reggeonok kicserélése a t-csatornában:

Egy pontrészecske-térelméletben az s-csatornás rezonancia-amplitudó

$$A(s,t) = \sum_i \frac{g_i t^{J_i}}{s - M_i^2} \tag{2.8}$$

alakú, ahol g_i csatolási állandók, M_i és J_i a kicserélt rezonanciák nyugalmi tömege és spinje. A t-csatornás amplitudó szerkezete hasonló:

$$A'(s,t) = \sum_i \frac{g_i s^{J_i}}{t - M_i^2}. \tag{2.9}$$

A fenti képletekből látszik, hogy véges sok rezonancia cseréje esetén az amplitudó aszimptotikus viselkedését $s \to \infty$, t =const. esetén a maximális spinű rezonancia szabja meg:

$$A' \sim s^{J_{max}} \qquad\qquad (s \to \infty) \tag{2.10}$$

Ez azt jelentené, hogy a totális hatáskeresztmetszet nagy energián hatványfüggvény szerint divergál. A szórásmátrix unitaritásából ezzel szemben az következik, hogy a totális hatáskeresztmetszet legfeljebb logaritmikusan divergál (Froissart-féle határ): $\sigma_t \propto \ln s$.

A kiutat az jelentheti, legalábbis matemetikai szempontból, hogy a folyamatokban végtelen sok rezonancia kicserélésére van lehetőség. Ilyenkor az amplitudókban végtelen sok pólustagot kell összegezni, és ez biztosíthatja, hogy a sor összege konvergens, bár egyenként minden egyes tag divergál az $s \to \infty$ határesetben.

Másrészről az amplitudónak ki kell elégítenie bizonyos általános kritériumokat mint az unitaritás, az analitikusság és a keresztszimmetria. Az analitikusság követelménye azt sugallja, hogy az alacsony-energiás $A(s,t)$ és a nagy-energiás $A'(s,t)$ amplitudók nem lehetnek teljesen függetlenek egymástól. Az egyiket meg kell tudni kapni a másikból analitikus folytatás révén. A dualitás elve részben erre épít, részben pedig arra a matematikai lehetőségre, hogy $A(s,t)$-ben felléphetnek $A'(s,t)$

t-csatornás pólusai és viszont $A'(s,t)$-ben $A(s,t)$ s-csatornás pólusai, ha az amplitudók végtelen sorok összegei. A dualitás elve kimondja, hogy mind az s- mind a t-csatornában ugyanazon közbenső rezonancia-állapotok játszanak szerepet, és hogy a rezonanciák M_i, J_i spektruma olyan, hogy

$$A(s,t) = A'(s,t) \tag{2.11}$$

áll fenn. Ez azt jelenti, hogy a hadronikus folyamatok amplitudóját vagy s-, vagy t-csatornás pólustagok összegeként állíthatjuk elő:

$$A(s,t) = \sum_i \qquad\qquad = \sum_i \tag{2.12}$$

A pontrészecske-térelméletek amplitudóival ellentétben nem szabad azonban az s- és t-csatornás pólustagokat összeadni.

Venezianonak sikerült a hadronikus kétrészecskés amplitudó analitikus alakját meghatározni:

$$A(s,t) = \frac{\Gamma(\alpha(s))\Gamma(\alpha(t))}{\Gamma(\alpha(s)+\alpha(t))}, \tag{2.13}$$

ahol $\alpha(s) = -\alpha(0) - \alpha' s$, és $\alpha(0)$ meg α' állandók. Ez az ún. duális amplitudó. A duális amplitudó $s \to \infty$, $t =$const. határesetben

$$A(s,t) \propto s^{-\alpha(t)} \tag{2.14}$$

aszimptotikus viselkedést mutat. Az aszimptotikus viselkedés olyan, mintha t-től függő $J = -\alpha(t)$ spinű részecske kicserélésétől származna. Az amplitudónak az $\alpha(t = M_J^2) = -J$ ($J =$0, 1, 2, $\ldots$) helyeken pólusai vannak, ami a rezonanciák nyugalmi tömege és spinje között a

$$J = \alpha(0) + \alpha' M_J^2 \tag{2.15}$$

összefüggést jelenti. A rezonanciák tehát a duális modell szerint egy egyenes mentén helyezkednek el az (M^2, J) diagrammon. Azt mondjuk, hogy a Regge-trajektóriák lineárisak. A duális modell ezen jóslata megegyezik a tapasztalattal.

A Veneziano-féle modell továbbfejlesztésével olyan duális modellek születtek, amelyek alapján a mezonok és a barionok kölcsönhatásaira vonatkozó számos fontos kísérleti tapasztalat egységes keretbe foglalható. A duális modellek legfontosabb hiányosságáról az előző előadásban már szóltam, így arra most nem térek mégegyszer ki.

3 Az anyagi pont

Nem zérus tömegű részecske világvonalát az $x^\mu = x^\mu(\tau)$ görbe írja le, ahol τ a sajátidő. A hatás az anyagi pont által befutott világvonaldarab ívhossza:

$$S[x^\mu] = -mc\int_1^2 ds = -mc^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau. \tag{3.16}$$

Az ívhosszelem négyzete:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{3.17}$$

ahol $\gamma_{\mu\nu}$ a téridő metrikája. A mozgásegyenleteket a legkisebb hatás elve alapján nyerjük:

$$\delta S = 0, \tag{3.18}$$

ahol δS a hatás megváltozása a világvonal $x^\mu(\tau) \to x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$ variációja esetén, miközben megköveteljük, hogy $\delta x^\mu(\tau_1) = \delta x^\mu(\tau_2) = 0$ legyen. A $d\tau$ sajátidő-intervallum variációját az ívelem négyzetének variációjából határozzuk meg:

$$\begin{aligned}
\delta(ds^2) &= c^2\delta(d\tau^2) = 2c^2 d\tau\delta d\tau \\
&= \left(\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha dx^\mu dx^\nu + 2\gamma_{\mu\nu}dx^\mu\delta dx^\nu\right) \\
&= \left(\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2\gamma_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\delta \dot{x}^\nu\right)(d\tau)^2,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

azaz

$$\delta d\tau = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2\gamma_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\delta \dot{x}^\nu\right) d\tau. \tag{3.20}$$

Ennek segítségével a hatás variációja:

$$\begin{aligned}
\delta S = -mc^2\int_{\tau_1}^{\tau_2}\delta d\tau = -\frac{m}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2\gamma_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\delta \dot{x}^\nu\right) \\
= -\frac{m}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\alpha - 2\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\mu \dot{x}^\alpha + \gamma_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\ddot{x}^\mu\right)\right)\delta x^\nu - m\gamma_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\delta x^\nu \,\Big|_{\tau_1}^{\tau_2},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

ahol az utolsó egyenlőséget parciális integrálással kaptuk. Mivel a világvonalat a kezdő- és a végpontban nem variáljuk, az utolsó tag zérus. Az első tag eltűnését követelve tetszőleges variáció esetén a

$$\gamma_{\mu\nu}\ddot{x}^\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\alpha - \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\mu - \frac{\partial\gamma_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\alpha\right) = 0 \tag{3.22}$$

mozgásegyenletet nyerjük. Szorozzuk az egyenletet $\gamma^{\lambda\nu}$-vel és vezessük be a

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\alpha \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\nu}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial\gamma_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}}\right) \tag{3.23}$$

Christoffel-szimbólumokat. Ekkor a mozgásegyenlet

$$\ddot{x}^{\lambda} + \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\alpha \end{array} \right\} \dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\alpha} = 0 \tag{3.24}$$

alakra hozható, ami egy geodetikus egyenlete. A szabad részecske világvonala tehát geodetikus.

Eddig nem tettünk megszorítást a téridő metrikájára nézve. A továbbiakban fel fogjuk tenni, hogy a téridő Minkowski metrikájú, $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (+---)$ szignatúrával, vis.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Vegyük észre, hogy a hatás invariáns a világvonal tetszőleges $\tau \to \tau'(\tau)$ átparaméterezésével szemben, ahol csak a $d\tau'/d\tau$ megszorítást tesszük:

$$\begin{aligned} S &= -mc\int_1^2 ds = -mc\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\sqrt{\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx_{\mu}}{d\tau}} \\ &= -mc\int_{\tau'(\tau_1)}^{\tau'(\tau_2)} d\tau'\frac{d\tau}{d\tau'}\sqrt{\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx_{\mu}}{d\tau}\left(\frac{d\tau'}{d\tau}\right)^2} \\ &= -mc\int_{\tau'_1)}^{\tau'_2)} d\tau'\sqrt{\frac{dx^{\mu}}{d\tau'}\frac{dx_{\mu}}{d\tau'}} = S'. \end{aligned} \tag{3.26}$$

A hatás fenti alakja a kvantálás szempontjából kényelmetlen. Kvantálni uis. a pályaintegrálok módszerével akarunk. Ismeretes azonban, hogy csak kvadratikus kifejezések pályaintegráljait tudjuk könnyen kezelni. Ezt tartva szem előtt, átírjuk a hatást kvadratikus alakba. Ehhez bevezetünk egy $e(\tau)$ külső teret, amely azonban nem képvisel valódi dinamikai szabadsági fokot, hanem a világvonalon értelmezett metrika szerepét játssza. Mint látni fogjuk, $e(\tau)$ algebrai egyenlet segítségével kiküszöbölhető a mozgásegyenletekből. A hatást most

$$S = -\frac{1}{2}c\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\left(m^2 e(\theta) + \frac{1}{e(\theta)}\frac{dx^{\mu}}{d\theta}\frac{dx_{\mu}}{d\theta}\right) \tag{3.27}$$

alakban vesszük fel, ahol θ a világvonal tetszőleges paramétere. Megmutatjuk, hogy ez a hatás $m \neq 0$ nyugalmi tömegű részecske esetén ekvivalens az (3.16) hatással. Variáljuk a hatást függetlenül $e(\theta)$ és $x^\mu(\theta)$ szerint. Ekkor az

$$m^2 - \frac{1}{e^2}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = 0, \qquad \frac{\ddot{x}^\nu}{e} - \frac{\dot{x}^\nu}{e^2}\dot{e} = 0 \tag{3.28}$$

egyenleteket kapjuk.

Ha $\underline{m \neq 0}$, akkor

$$e^2 = \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{m^2}. \tag{3.29}$$

Ezt behelyettesítve a hatásba, visszakapjuk az eredeti (3.16) kifejezést. Küszöböljük ki $e(\theta)$-t a mozgásegyenletekből:

$$\ddot{x}^\nu - \frac{1}{2}\dot{x}^\nu \frac{d}{d\theta} \ln \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{m^2} = 0. \tag{3.30}$$

Rendezés után az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\ddot{x}^\kappa \left(\delta^\nu_\kappa - \frac{\dot{x}^\nu \dot{x}_\kappa}{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \right) = 0. \tag{3.31}$$

Az egyenlet megoldása:

$$\ddot{x}^\kappa = 0 \rightarrow x^\kappa \theta + a^\kappa, \tag{3.32}$$

ahol n^κ, a^κ =áll. négyesvektorok.

Vegyük észre, hogy az ívelem négyzete, ami egy Lorentz-invariáns mennyiség, az alábbi alakra hozható:

$$ds^2 = n^\kappa n_\kappa d\theta^2 = m^2 e^2(\theta) d\theta^2. \tag{3.33}$$

Ebből rögtön adódik, hogy a világvonal átparaméterezése az $e(\theta)$ függvény megváltoztatását is kell jelentse. Válasszuk θ-t a τ sajátidőnek. Ekkor

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \rightarrow n^\kappa n_\kappa = c^2, \tag{3.34}$$

úgyhogy

$$e^2(\tau) = m^{-2} n^\kappa n_\kappa = m^{-2} c^2 \tag{3.35}$$

adódik. A világvonal paraméterének megválasztása tehát egyúttal az e metrika rögzítését is jelenti., avagy fordítva az e függvény tetszőleges megválasztása rögzíti a θ paramétert. A nem dinamikai változó szerepét játszó, tetszőlegesen választható

$e(\theta)$ függvény szerepeltetése a hatásban azt az ún. mértékszabadságot fejezi ki, hogy a θ paramétert tetszőlegesen választhatjuk. A hatás invariáns a világvonal átparaméterezésével szemben.

Ha $\underline{m=0}$ tömegű részecske mozgását akarjuk vizsgálni, akkor erre csak a hatás (3.27) alakja alkalmas, az (3.16) alak nem. Ez esetben a mozgásegyenletek az alábbi alakot öltik:

$$\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = 0, \qquad \ddot{x}^\mu = \frac{1}{2}\dot{x}^\mu \frac{d}{d\theta} \ln e^2(\theta). \tag{3.36}$$

Az első egyenlet azt fejezi ki, hogy a négyessebesség fényszerű. A második egyenletből a négyessebesség valamennyi összetevőjére

$$\frac{d}{d\theta} \ln(\dot{x}^\mu)^2 = \frac{d}{d\theta} \ln e^2(\theta), \tag{3.37}$$

azaz

$$(\dot{x}^\mu)^2 = k^{(\mu)} e^2(\theta) \tag{3.38}$$

adódik, ahol $k^{(\mu)}$ =áll. tetszőleges. Másrészt

$$0 = \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = [(k^{(0)})^2 - (k^{(1)})^2 - (k^{(2)})^2 - (k^{(3)})^2] e^2(\theta) \tag{3.39}$$

miatt mondhatjuk, hogy $k^{(\mu)}$ állandó fényszerű négyesvektor. A részecske világvonala tehát egyenes a fénykúpon. æ

4 A húr klasszikus mechanikája és a legkisebb hatás elve

A pontrészecskére vonatkozó hatáselv a világvonal Lorentz-invariáns ívhosszának szélsőértékét követeli. Ennek általánosítása a klasszikus húrra vonatkozó hatáselv, amely a húr által besöpört felület Lorentz-invariáns területének szélsőértékét követeli meg.

A húr mozgása során a d-dimenziós téridőben egy két-dimenziós időszerű felületet söpör be. A felületen értelmezhető két lineárisan független érintővektor mező, amelyek közül az egyik időszerű vagy fényszerű, a másik pedig térszerű. A téridőben mozgó húr egy $X^A = X^A(x^\alpha)$ $(A = 0, 1, \ldots, d-1)$ két-dimenziós világlepedőt definiál, amelyen két paraméter, x^α $(\alpha = 0, 1)$, egy időszerű, $x^0 = \tau$, és egy térszerű, $x^1 = \sigma$ használható koordinátaként.

A továbbiakban a beágyazó tér metrikáját $(+--\ldots-)$ szignaturájú Minkowski-metrikának tekintjük. A paramétereket úgy választjuk, hogy $\partial_\tau X^A$ időszerű vagy fényszerű,

$$\eta_{AB}\partial_\tau X^A \partial_\tau X^B \geq 0 \tag{4.40}$$

és $\partial_\sigma X^A$ térszerű,

$$\eta_{AB}\partial_\sigma X^A \partial_\sigma X^B < 0 \tag{4.41}$$

legyen.

Az X^A beágyazás a világlepedőn egy

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{AB}\partial_\alpha X^A \partial_\beta X^B \tag{4.42}$$

metrikát indukál. Ennek segítségével a húr által besöpört invariáns felület

$$A[X^A(x^\alpha)] = \int d^2x\sqrt{-g}, \tag{4.43}$$

ahol

$$g = det(g_{\alpha\beta}). \tag{4.44}$$

A mínusz előjelre azért van szükség, mert $g_{\alpha\beta}$ szignaturája $(+-)$ és így $g < 0$.

A hatást a besöpört felülettel arányosnak választjuk:

$$S[X^A(x^\alpha)] = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi(2\pi)} d\sigma\sqrt{-g}. \tag{4.45}$$

Nyílt húr esetén a húr végeihez a $\sigma = 0, \pi$ értékeket rendeljük. Zárt húr esetén a $\sigma \in [0, 2\pi]$ választással élünk és természetesen kikötjük, hogy

$$X^A(\tau, \sigma = 0) = X^A(\tau, \sigma = 2\pi) \tag{4.46}$$

legyen.

A $\kappa = (2\pi\alpha')^{-1}$ tényezőt szokás húrfeszültségnek nevezni. Hadronikus húrok esetén $\alpha'^{1/2} \sim 1$ GeV, míg az alapvető kölcsönhatások egyesítésére irányuló húrelméletben $\alpha'^{1/2} \sim 10^{19}$ GeV, az ún. Planck-tömeg.

A mozgásegyenleteket a legkisebb hatás elvéből kapjuk. A hatás megváltozását a világlepedő olyan $X^A(x^\alpha) \to X^A(x^\alpha) + \delta X^A(x^\alpha)$ variációja esetén keressük, amelyre

$$\delta X^A\,|_{x^0=\tau_1} = \delta X^A\,|_{x^0=\tau_2} = 0. \tag{4.47}$$

Felhasználjuk, hogy a metrika determinánsának variációja

$$\delta g = g g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \tag{4.48}$$

Igy

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\delta X^A\partial_\beta X_A + \partial_\alpha X^A\partial_\beta\delta X_A) \tag{4.49}$$

és a hatás variációja

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\kappa\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi(2\pi)} d\sigma \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \delta X^A \partial_\beta X_A + \partial_\alpha X^A \partial_\beta \delta X_A) \\
&= -\kappa\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi(2\pi)} d\sigma \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha \delta X^A \partial_\beta X_A \\
&= -\kappa\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi(2\pi)} d\sigma \left[\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta X^A \partial_\beta X_A\right)\right. \\
&\quad \left. - \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^B\right)\delta X^A\right] = 0. \qquad (4.50)
\end{aligned}$$

Az első tagot átírhatjuk a besöpört felület ∂A határára vonatkozó integrállá:

$$I_{\partial A} = \int_{\partial A} dn^\beta \sqrt{-g}\partial_\beta X_A \delta X^A. \qquad (4.51)$$

A hatás variációjának eltűnéséhez külön-külön zérussá kell válni az A és ∂A fölötti integráloknak. Mivel az $x^0 = \tau_1, \tau_2$ határokon a világlepedőt nem variáljuk, ezeken a határokon az $I_{\partial A}$ integrál eltűnik. Zárt húr esetén a világlepedőnek nincs is más határa, úgyhogy ekkor $I_{\partial A} = 0$ triviálisan teljesül. Nyílt húr esetén a világlepedő további határait a húr $\sigma = 0, \pi$ végpontjai által befutott világvonaldarabok jelentik. A határokon vett

$$I_{\partial A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{-g}\partial_\sigma X_A \delta X^A \,|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \qquad (4.52)$$

integrál csak akkor tünik el tetszőleges δX^A variáció esetén, ha

$$\partial_\sigma X^A \,|_{\sigma=0} = \partial_\sigma X^A \,|_{\sigma=\pi} = 0. \qquad (4.53)$$

Ezek a nyílt húrra vonatkozó határfeltételek.

A világlepedő fölötti integrál eltűnéséből kapjuk a mozgásegyenleteket:

$$\partial_\alpha(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^A) = 0. \qquad (4.54)$$

5 A hatás kvadratikus alakja

A hatást úgy írhatjuk át a kvantálás céljára alkalmas kvadratikus alakba, hogy bevezetjük a világlepedőn értelmezett $\gamma^{\alpha\beta}$ metrikát, mint változót:

$$\begin{aligned}
S[X^A, \gamma_{\alpha\beta}] &= -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2x \sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^A \partial_\beta X_A \\
&\quad +\mu\int d^2x R\sqrt{-\gamma} + \lambda\int d^2x\sqrt{-\gamma}. \qquad (5.55)
\end{aligned}$$

A teljesség kedvéért a hatást kiegészítettük az általános relativitáselmélet mintájára a világlepedő "gravitációs" terét leíró görbületi taggal és egy kozmológiai taggal. A világlepedő azonban két-dimenziós, ezért a görbületi tagban $R\sqrt{-\gamma}$ teljes divergencia. Másképpen, ha csak anyagmentes "gravitációs" mező lenne jelen a világlepedőn, akkor a görbületi tag szolgáltatná a szabad "gravitációstér Einstein-egyenleteit egy két-dimenziós világban:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}R = 0. \tag{5.56}$$

Két-dimenziós világban ez az egyenlet trivialitás, mert a baloldal azonosan eltűnik. A görbületi tenzornak és a Ricci- tenzornak uis. csak egy független komponense van két dimenzióban. Az R invariáns görbület a Ricci-tenzort jellemző adat, s nincs más tőle független ilyen adat. Ugyanakkor $R^{\alpha\beta}$ másodrendű tenzor. Az egyetlen olyan másodrendű tenzor, amely mindezen feltételeket kielégíti,

$$R^{\alpha\beta} = const. R\gamma^{\alpha\beta} \tag{5.57}$$

alakú. Képezzük belőle az invariáns görbületet:

$$R = \gamma_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} = const.2\ R, \tag{5.58}$$

ahonnan $const. = \frac{1}{2}$ adódik, úgyhogy a Ricci-tenzor két-dimenziós térben:

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}R. \tag{5.59}$$

Ez azt jelenti, hogy két-dimenziós világban az Einstein-egyenletek triviálisan teljesülnek, vagyis két-dimenziós világban nincsen gravitációs tér. (Ne felejtsük el, hogy ez a megállapításunk csak a klasszikus, azaz nem kvantált gravitációs térre vonatkozik.) Ez másképpen abban jut kifejeződésre, hogy két-dimenziós tér metrikája mindíg megkapható a $\eta^{\alpha\beta}$ Minkowski-metrikából nyújtással, azaz

$$\eta^{\alpha\beta} \to \gamma^{\alpha\beta} = \Phi^2(x)\eta^{\alpha\beta} \tag{5.60}$$

ún. Weyl-transzformációval, ahol $\Phi(x)$ tetszőleges függvény. Az elmondottak miatt a hatásból elhagyhatjuk a görbületi tagot.

Most még megmutatjuk, hogy a kozmológiai tag együtthatója zérus. A hatást a $\gamma^{\alpha\beta}$ metrika szerint variálva a

$$\frac{\delta S}{\delta\gamma^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}T_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.61}$$

egyenletet nyerjük,ahol

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\left[-\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\delta\epsilon}\partial_\delta X^A\partial_\epsilon X_A + \partial_\alpha X^A\partial_\beta X_A\right]. \tag{5.62}$$

Könnyen beláthatjuk azonban, hogy

$$T^{\alpha}_{\alpha} = 0. \tag{5.63}$$

Kontraháljuk az (5.61) egyenlet mindkét oldalát a metrikus tenzorral:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}(T^{\alpha}_{\alpha} - \lambda\gamma^{\alpha}_{\alpha}) = 0, \tag{5.64}$$

ahonnan az (5.63) egyenlet felhasználásával $\lambda = 0$ adódik, amit bizonyítani akartunk. A hatásból tehát a kozmológiai tagot is elhagyhatjuk az általánosság csorbítása nélkül.

A fentiek értelmében a hatás legáltalánosabb alakja tehát:

$$S[X^A, \gamma_{\alpha\beta}] = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2x\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^A \partial_\beta X_A. \tag{5.65}$$

A metrikát a

$$T_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.66}$$

alakba írható (5.61) egyenletek határozzák meg. Ezek a metrikára nézve nem differenciál-egyenletek, ami mutatja, hogy a metrika nem dinamikai változó. Az (5.66) egyenletek két független egyenletet jelentenek, mert $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$ és $T^{\alpha}_{\alpha} = 0$. Az (5.66) egyenletek megoldása

$$\gamma_{\alpha\beta} = B(x)\partial_\alpha X^A \partial_\beta X_A \tag{5.67}$$

alakú, ahol $B(x)$ tetszőleges függvény. Mivel a hatás invariáns a

$$\gamma_{\alpha\beta} \to \Phi^2(x)\gamma_{\alpha\beta}, \qquad X^A \to X^A \tag{5.68}$$

Weyl-transzformációkkal szemben, azért $B(x)$ az általánosság csorbítása nélkül $B(x) = 1$ állandónak választható. A hatás Weyl-invariáns, mert

$$\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta} \to \Phi^2\sqrt{-\gamma}\Phi^{-2}\gamma^{\alpha\beta} = \sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta} \tag{5.69}$$

invariáns. A $B(x) = 1$ választás esetén a világlepedő metrikája megegyezik a beágyazás által indukált $g_{\alpha\beta}$ metrikával. A Weyl-szimmetria azt jelenti, hogy az indukált metrikából Weyl-transzformációval kapott valamennyi metrika, vis. az (5.66) egyenletek összes megoldása, fizikailag egyenértékű a $g_{\alpha\beta}$ indukált metrikával. A Weyl-transzformáció a világfelület olyan lokális nyújtásának vagy zsugoritásának felel meg, amikor az érintővektorok szögei és a szomszédos pontok invariáns távolságainak aránya nem változik. A felület geometriájának ilyen változtatása közben azonban megtartjuk az eredeti koordinátarendszert. Ugy képzelhetjük el a dolgot, hogy a beágyazó térben egy két-dimenziós vázat készítünk két egymásra ortogonális görbeseregből és erre a vázra ráfektetünk egy rugalmas hártyát. az utóbbit aztán helyről helyre másképpen nyújtunk ill. zsugorítunk.

Ha a beágyazás által indukált metrikát behelyettesítjük a hatás (5.55) kvadratikus alakjába, akkor visszakapjuk a hatás eredeti (az előző előadáson tárgyalt) Nambu-Hara-Gotō-féle alakját:

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2x\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2x\sqrt{-g}. \tag{5.70}$$

A hatás (5.55) kvadratikus alakja tehát ekvivalens az eredeti Nambu-Hara-Gotō-féle alakkal.

Variáljuk az (5.55) hatást az $X^A(x)$ terek szerint:

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2x\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\delta(\partial_\alpha X^A\partial_\beta X_A) \\
&= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2x\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\delta X^A)\partial_\beta X_A \\
&= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2x\Big[\partial_\alpha(\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta X_A\delta X^A) \\
&\quad - \delta X^A\partial_\alpha(\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta X_A)\Big] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Az első integrál átírható a világlepedő határán vett integrállá:

$$-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_{\partial A} d\sigma_\alpha\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta X_A\delta X^A. \tag{5.72}$$

A hatás variációjának eltűnése így a

$$\partial_\alpha(\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta X_A) = 0 \tag{5.73}$$

mozgásegyenletekre és nyílt húr esetén a

$$n_\alpha\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta X_A\,|_{x^1=0,\pi} = 0 \tag{5.74}$$

határfeltételi egyenletekre vezet, ahol n_α a besöpört világfelület határának a világlepedőhöz képest érintőleges, kifelé mutató normálisa. Zárt húr esetén a húr zártságát jelentő

$$X^A\,|_{x^1=0} = X^A\,|_{x^1=\pi} \tag{5.75}$$

határfeltételek érvényesek. A mozgás- és határfeltételi egyenleteket a metrikát definiáló (5.66) kényszerfeltételek mellett kell megoldani.

æ

6 A hatás szimmetriatulajdonságai

A húrt leíró $X^A(x^\alpha)$ mennyiségek tekinthetők úgy mint az $x^\alpha = (\tau, \sigma)$ koordináták két-dimenziós terének a d-dimenziós Minkowski-térbe való leképezései. X^A egyrészt a d-dimenziós Minkowski-tér Lorentz-vektora, másrészt pedig az x^α koordináták két-dimenziós terén értelmezett d darab skalártér. Ha az utóbbi álláspontra helyezkedünk, akkor a húrok klasszikus mechanikája olyan térelmélet, amelyben d darab, két-dimenziós "téridőben" értelmezett skalártér szerepel.

6.1 Mértékszimmetria

A hatás invariáns a világlepedő koordinátáinak

$$x^\alpha \to x^\alpha + \delta\xi^\alpha(x) \tag{6.76}$$

átparaméterezésével szemben, ahol

$$\delta\xi^\alpha(x) \mid_{\partial A} = 0, \tag{6.77}$$

ha azt a térmennyiségek és a metrika

$$\begin{aligned} \delta X^A &= \delta\xi^\alpha \partial_\alpha X^A, && (6.78) \\ \delta\gamma^{\alpha\beta} &= \delta\xi^\delta \partial_\delta \gamma^{\alpha\beta} - \gamma^{\delta\beta}\partial_\delta \delta\xi^\alpha - \gamma^{\alpha\delta}\partial_\delta\delta\xi^\beta, && (6.79) \end{aligned}$$

transzformációja kíséri. A metrika megváltozása az ívelemnégyzet állandóságából adódik. A hatás megváltozása ekkor:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{\kappa}{2}\int d^2x \Big[\delta\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^A \partial_\beta X_A + \sqrt{-\gamma}\delta\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^A\partial_\beta X_A \\ &\quad + \sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\delta(\partial_\alpha X^A \partial_\beta X_A)\Big]. \end{aligned} \tag{6.80}$$

A metrika determinánsának négyzetgyöke az alábbiak szerint változik meg:

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-\gamma} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma_{\alpha\beta}\delta\gamma^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta}\delta\xi^\delta\partial_\delta\gamma^{\alpha\beta} - \delta^\delta_\alpha\partial_\delta\delta\xi^\alpha - \delta^\delta_\beta\partial_\delta\delta\xi^\beta) \\ &= -\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta}\delta\xi^\delta\partial_\delta\gamma^{\alpha\beta} - 2\partial_\alpha\delta\xi^\alpha) \\ &= \delta\xi^\alpha\partial_\alpha\sqrt{-\gamma} + \sqrt{-\gamma}\partial_\alpha\delta\xi^\alpha \\ &= \partial_\alpha(\sqrt{-\gamma}\delta\xi^\alpha). \end{aligned} \tag{6.81}$$

A hatás megváltozása tehát:

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{\kappa}{2}\int d^2x\,\Big[\delta\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^A\partial_\beta X_A \\ &\quad +\sqrt{-\gamma}(\partial_\delta\gamma^{\alpha\beta}\delta\xi^\delta - 2\gamma^{\delta\beta}\partial_\delta\delta\xi^\alpha)\partial_\alpha X^A\partial_\beta X_A \\ &\quad + 2\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\delta\xi^\delta\partial_\delta X^A)\partial_\beta X_A)\Big] \\ &= -\frac{\kappa}{2}\int d^2x\,\Big[\partial_\delta(\sqrt{-\gamma}\delta\xi^\delta)\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^A\partial_\beta X_A + \sqrt{-\gamma}\partial_\delta\gamma^{\alpha\beta}\delta\xi^\delta\partial_\alpha X^A\partial_\beta X_A \\ &\quad +2\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\delta\xi^\delta\partial_\delta\partial_\alpha X^A\partial_\beta X_A \\ &\quad + 2\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\delta\xi^\delta\partial_\delta X^A\partial_\beta X_A - 2\sqrt{-\gamma}\gamma^{\delta\beta}\partial_\delta\delta\xi^\alpha\partial_\alpha X^A\partial_\beta X_A\Big]. \end{aligned} \tag{6.82}$$

Itt az utolsó két tag összege zérus, úgyhogy a hatás megváltozása:

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{\kappa}{2}\int d^2x\partial_\delta(\sqrt{-\gamma}\delta\xi^\delta\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^A\partial_\beta X_A) \\ &= -\frac{\kappa}{2}\int_{\partial A} d\sigma_\delta\sqrt{-\gamma}\delta\xi^\delta\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^A\partial_\beta X_A \\ &= 0, \end{aligned} \tag{6.83}$$

uis. a világlepedő határain a paraméterek nem változnak. Ezzel beláttuk, hogy a hatás invariáns a világlepedő átparaméterezésével szemben.

6.2 Poincaré-szimmetria

Ha azt a nézőpontot fogadjuk el, hogy a húr Lagrange- sűrűsége d darab, az x^α két-dimenziós világban értelmezett $X^A(x^\alpha)$ skalárteret ír le, akkor az átparaméterezési szimmetriák a két-dimenziós világ szimmetriái. Ugyanakkor a húr a d-dimenziós téridőben mozog. Ennek Poincaré-szimmetriái az elmélet belső szimmetriái. Ezek a szimmetriák globális transzformációk:

$$\delta X^A = a^A + \Lambda^A{}_B X^B, \tag{6.84}$$

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = 0. \tag{6.85}$$

Noether tétele értelmében a tetszőleges

$$x^\alpha \to x^\alpha + \delta x^\alpha, \qquad \delta x^\alpha = \sum_n \xi^\alpha_{(n)}\delta\omega_n, \tag{6.86}$$

$$X^A \to X^A + \delta X^A, \qquad \delta X^A = \sum_n \Psi^A_{(n)}\delta\omega_n, \tag{6.87}$$

n darab infinitezimális $\delta\omega_n$ paramétert tartalmazó szimmetriatranszformációhoz n darab megmaradó áram tartozik, melyek sűrűsége

$$j^\alpha_{(n)}(x) = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\alpha X^A}(\Psi^A_{(n)} - \partial_\alpha X^A\xi^\alpha_{(n)}) + \mathcal{L}(x)\xi^\alpha_{(n)}. \tag{6.88}$$

A megfelelő kontinuitási egyenletek az alábbiak:

$$\partial_\alpha j^\alpha_{(n)}(x) = 0. \tag{6.89}$$

Alkalmazzuk a Noether-tételt először a téridő infinitezimális eltolásaira. Ehhez a következő megfeleltetéseket kell tenni:

$$\begin{aligned} \delta\omega_n &\longleftrightarrow a^A \\ \xi^\alpha_n &\longleftrightarrow 0 \\ \delta x^\alpha_n &\longleftrightarrow 0 \\ \Psi^A_{(n)} &\longleftrightarrow \delta^A_B \\ \delta X^A &\longleftrightarrow a^A \end{aligned} \tag{6.90}$$

A megmaradó áram az energia-impulzus sűrűsége:

$$\begin{aligned} j^\alpha_A &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\alpha X^B}\Psi^B_{(A)} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\alpha X^B}\delta^B_A = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\alpha X^A} \\ &= \kappa\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta X_A = \kappa\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X_A. \end{aligned} \tag{6.91}$$

A téregyenletek megoldását jelentő $\gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$ helyettesítéssel kaptuk az utolsó egyenlőséget. A téridőbeli eltolással szemben mutatott invariancia következtében megmaradó töltések az energia-impulzus d-vektor komponensei:

$$Q_A = \int_0^{\pi\ (2\pi)} d\sigma j^0_A = \text{const.} \tag{6.92}$$

Alkalmazzuk most a Noether-tételt a téridőbeli "forgatásokra". A szükséges megfeleltetések:

$$\begin{aligned} \delta\omega_n &\longleftrightarrow \Lambda^A_{\ B}, \\ \xi^\alpha_{(n)} &\longleftrightarrow 0, \\ \delta x^\alpha &\longleftrightarrow 0, \\ \Psi^A_{(n)} &\longleftrightarrow \delta^A_{[C}X_{B]}, \\ \delta X^A &\longleftrightarrow \Lambda^A_{\ B}X^B. \end{aligned} \tag{6.93}$$

A megmaradó áram sűrűsége:

$$\begin{aligned} j^\alpha_{AB}(x) &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\alpha X^C}(\delta^C_{[A}X_{B]}) \\ &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\alpha X^{[A}}X_{B]} \\ &= \kappa\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X_{[A}\,X_{B]} \\ &= \kappa\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}(X_B\partial_\beta X_A - X_A\partial_\beta X_B). \end{aligned} \tag{6.94}$$

Ez az impulzusmomentum sűrűsége. A téridő izotrópiája következtében megmaradó töltések az impulzusmomentum-tenzor komponensei:

$$Q_{AB} = \int_0^{\pi\ (2\pi)} d\sigma j^0_{AB} = \text{const.} \tag{6.95}$$

A két térszerű indexet hordozó komponensek időbeli állandósága a húr impulzusmomentumának megmaradását, az egy térszerű és egy időszerű indexet hordozó komponensek állandósága a húr tömegközéppontjának egyenesvonalú egyenletes mozgását fejezi ki.

A fentiek fényében a nyílt húrra kapott határfeltételek

$$j^\alpha_A n_\alpha \,|_{x^1=0,\pi} = 0 \tag{6.96}$$

alakba írhatók. A határfeltételek így azt fejezik ki, hogy a nyílt húr végein nincsen energia- és impulzuskiáramlás.

6.3 Konform (Weyl-)szimmetria

A konform szimmetria azt jelenti, hogy a hatás invariáns a két-dimenziós világlepedő konform leképezéseivel szemben. A konform leképezések invariánsan hagyják az érintővektorok egymással bezárt szögeit és (legalább infinitezimálisan) két pontnak valamely harmadik ponttól mért távolságai arányát. Ez azt jelenti, hogy infinitezimális háromszög konform képe az eredetihez hasonló háromszög.

A konform transzformációk

$$\gamma_{\lambda\mu}(x) \to \gamma'_{\lambda\mu}(x) = \Lambda^2(x)\gamma_{\lambda\mu}(x) \tag{6.97}$$

alakúak. Ezek a transzformációk tetszőleges, az x pontban felvett érintősíkban fekvő vektorok szögét (a szög koszinuszát),

$$\frac{\gamma'_{\mu\nu} a^\mu b^\nu}{(\gamma'_{\mu\nu} a^\mu a^\nu)^{1/2} (\gamma'_{\lambda\rho} b^\mu b^\nu)^{1/2}} = \frac{\gamma_{\mu\nu} a^\mu b^\nu}{(\gamma_{\mu\nu} a^\mu a^\nu)^{1/2} (\gamma_{\lambda\rho} b^\mu b^\nu)^{1/2}} \tag{6.98}$$

és az irányukban felvett infinitezimális ívhosszelemek arányait,

$$\frac{\gamma'_{\mu\nu} da^\mu da^\nu}{\gamma'_{\lambda\rho} db^\lambda db^\rho} = \frac{\gamma_{\mu\nu} da^\mu da^\nu}{\gamma_{\lambda\rho} db^\lambda db^\rho} \tag{6.99}$$

változatlanul hagyják.

Ha egy térmennyiség

$$\phi(x) \to \Lambda^D(x)\phi(x) \tag{6.100}$$

módon transzformálódik konform transzformáció során, akkor azt mondjuk, hogy D a $\phi(x)$ térmennyiség konform dimenziója.

A húrelméletben a hatás invariáns a

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta}(x) &\to {\gamma'}_{\alpha\beta}(x) = \Lambda^2(x)\gamma_{\alpha\beta}(x),\\ X^A(x) &\to X^A(x)\end{aligned} \tag{6.101}$$

transzformációkkal szemben, ahol $\Lambda(x)$ tetszőleges függvény. A húrt meghatározó $X^A(x)$ terek $D = 0$ konform dimenziójúak.

Mivel az elmélet konform invariáns és a világlepedő átparaméterezéseivel szemben is invariáns, azért megtehetjük, hogy olyan koordinátarendszert választunk, amelyben az összefüggések leegyszerűsödnek.

Mint az differenciálgeometriából ismeretes, két-dimenziós térben mindíg létezik olyen koordinátarendszer, amelyben a $\gamma^{\alpha\beta}$ metrika éppen arányos a két-dimenziós Minkowski-metrikával:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \Phi^2(x)\eta_{\alpha\beta}. \tag{6.102}$$

Ezt a feltételt, amely a koordinátarendszer választására nézve jelent megszorítást, mértékrögzítő feltételnek nevezzük. Azt mondjuk, hogy konform mértéket választunk. Ha konform mértékben vagyunk, akkor a mértékfeltétel determinánsát képezve

$$\Phi^2(x) = \sqrt{-\gamma} \tag{6.103}$$

adódik. A mérték ilyen rögzítése még nem teszi egyértelművé a koordinátarendszer megválasztását. Ha találtunk egy koordinátarendszert, amelyben a fenti mértékfeltétel teljesül, akkor a koordináták minden olyan megváltoztatása megengedett, amelynek során a metrika megváltozása arányos a Minkowski-metrikával, azaz

$$\delta\gamma^{\alpha\beta} = \delta\xi^\delta\partial_\delta\Phi^2\eta^{\alpha\beta} - \Phi^2(\eta^{\delta\beta}\partial_\delta\delta\xi^\alpha + \eta^{\alpha\delta}\partial_\delta\delta\xi^\beta) \propto \eta^{\alpha\beta} \tag{6.104}$$

A megengedett infinitezimális koordinátatranszformációknak tehát az

$$\partial_\beta\delta\xi^\alpha + \partial_\alpha\delta\xi^\beta = C\eta^{\alpha\beta} \tag{6.105}$$

egyenleteket kell kielégíteniük. A C állandó értékét $\eta^{\alpha\beta}$-val való kontrakció útján kapjuk:

$$C = \frac{2}{d}(\partial_\delta\delta\xi^\delta), \tag{6.106}$$

ahol d a tér dimenziója, amelynek metrikája $\eta^{\alpha\beta}$ (esetünkben $d = 2$). A megengedett konform koordináta-transzformációkat tehát az

$$\partial_\beta\delta\xi^\alpha + \partial_\alpha\delta\xi^\beta = \frac{2}{d}(\partial_\delta\delta\xi^\delta)\eta^{\alpha\beta} \tag{6.107}$$

egyenlet megoldásaiként nyerjük. Ha $d > 2$, akkor az egyedüli nem triviális megoldások:

$$\begin{aligned}
\delta\xi^\alpha &= a^\alpha \qquad \text{téridő-eltolás} \\
\delta\xi^\alpha &= a^{\alpha\beta}x_\beta \quad (a^{\alpha\beta} = -a^{\beta\alpha}) \qquad \text{Lorentz-transzformáció} \\
\delta\xi^\alpha &= \lambda x^\alpha \qquad \text{nyújtás (dilatáció)} \\
\delta\xi^\alpha &= a^\alpha(x_\beta x^\beta) - 2x^\alpha(a_\beta x^\beta) \qquad \text{speciális konform transzformáció}
\end{aligned} \tag{6.108}$$

Itt a^α, $a^{\alpha\beta}$, λ infinitezimális állandók.

Ha $d = 2$, akkor a megengedett transzformációk köre sokkal bővebb mint a $d > 2$ esetben. Ekkor uis. az alábbi egyenleteket kapjuk, ha a (6.107) egyenletet komponensenként kiirjuk:

$$\partial_0\delta\xi^0 = \partial_1\delta\xi^1, \tag{6.109}$$

$$\partial_1\delta\xi^0 = \partial_0\delta\xi^1. \tag{6.110}$$

Ez azt jelenti, hogy az $x'^\alpha(x^\beta)$ új koordináták mint a régi koordináták függvényei szabad hullámegyenletet elégítenek ki:

$$\partial_1\partial_0\delta\xi^0 = \partial_1^2\delta\xi^1 = \partial_0^2\delta\xi^1, \tag{6.111}$$

$$\partial_1\partial_0\delta\xi^1 = \partial_1^2\delta\xi^0 = \partial_0^2\delta\xi^0. \tag{6.112}$$

Összefoglalva, a konform mértéken belül megengedett koordinátatranszformációk a két-dimenziós

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2)x'^\alpha(x) = 0 \tag{6.113}$$

hullámegyenletet elégítik ki.

Mivel a húrok világlepedője két-dimenziós, minket pontosan a két-dimenziós eset érdekel.

Vezessük be a két-dimenziós $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ fénykúp-koordinátákat és a $\delta\xi^\pm = \delta\xi^0 \pm \delta\xi^1$ függvényeket. Ekkor $\partial_\tau = \partial_+ + \partial_-$ és $\partial_\sigma = \partial_+ - \partial_-$, úgyhogy a (6.107) egyenlet fénykúp-komponensekben

$$(\partial_+ + \partial_-)\delta\xi^+ = (\partial_+ - \partial_-)\delta\xi^+ \quad \rightarrow \quad \partial_-\delta\xi^+ = 0, \tag{6.114}$$

$$(\partial_+ + \partial_-)\delta\xi^- = -(\partial_+ - \partial_-)\delta\xi^- \quad \rightarrow \quad \partial_+\delta\xi^- = 0 \tag{6.115}$$

alakot ölt. Innen látjuk, hogy $\delta\xi^+$ csak σ^+-tól, $\delta\xi^-$ csak σ^--tól függ.

æ

7 A mozgásegyenletek megoldása konform mértékben

Induljunk ki a hatás Nambu-Hara-Gotō-féle alakjából. Konform mérték választása azt jelenti, hogy olyan koordinátarendszert választunk, amelyben a világlepedőt leíró $X^A(x^\alpha)$ skalárterek kielégítik a

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^A \partial_\beta X_A = \sqrt{-g}\eta_{\alpha\beta} \tag{7.116}$$

kényszerfeltételi egyenleteket. Vezessük be az

$$\begin{aligned} x^0 &= \tau, & x^1 &= \sigma, \\ \partial_0 &= \partial_\tau = \dot{} & \partial_1 &= \partial_\sigma = {}' \end{aligned} \tag{7.117}$$

jelöléseket. A kényszerfeltételek ekkor az alábbi alakot öltik:

$$g_{01} = g_{10} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{X}_A X'^A = 0, \tag{7.118}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{1} g_{\alpha\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{X}_A \dot{X}^A + X'_A X'^A = 0. \tag{7.119}$$

Ezeket a kényszereket természetesen közvetlenül is megkaphatjuk a $T_{\alpha\beta} = 0$ feltételekből a $\gamma_{\alpha\beta} = \sqrt{-\gamma}\eta_{\alpha\beta}$ helyettesitéssel:

$$0 = T_{\alpha\beta} = -\kappa[-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial_\delta X^A \partial^\delta X_A + \partial_\alpha X^A \partial_\beta X_A], \tag{7.120}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} 0 = T_{00} &= -\frac{\kappa}{2}\partial_\alpha X^A \partial^\alpha X_A = -T_{11}, \\ 0 = T_{01} &= T_{10} = -\kappa \partial_0 X^A \partial_1 X_A. \end{aligned} \tag{7.121}$$

Deriválás révén közvetlenül meggyőződhetünk arról is, hogy az energia-impulzus tenzorra kontinuitási egyenlet érvényes:

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0. \tag{7.122}$$

Konform mértékben a hatás

$$S = -\kappa \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi(2\pi)} d\sigma \mathcal{D}, \tag{7.123}$$

ahol

$$\mathcal{D} = \left[(\dot{X}_A X'^A)^2 - (\dot{X}_A \dot{X}^A)(X'_B X'^B) \right]^{1/2} \tag{7.124}$$

alakú.

A hatás variálásával nyert mozgásegyenletek az energia-impulzusáram kontinuitását kifejező

$$\partial_\tau \mathcal{P}^A + \partial_\sigma \mathcal{Q}^A = 0 \tag{7.125}$$

alakba irhatók, ha bevezetjük a

$$\mathcal{P}^A = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}_A} = -\kappa \frac{X'^A(\dot{X}^B X'_B) - \dot{X}^A X'^B X'_B}{\mathcal{D}}, \tag{7.126}$$

$$\mathcal{Q}^A = \frac{\delta S}{\delta X'_A} = -\kappa \frac{\dot{X}^A(\dot{X}^B X'_B) - X'^A \dot{X}^B \dot{X}_B}{\mathcal{D}} \tag{7.127}$$

jelöléseket. A kényszereket felhasználva, a mozgásegyenletek két-dimenziós szabad hullámegyenletek alakját öltik:

$$\ddot{X}^A - X''^A = 0. \tag{7.128}$$

A mozgásegyenletek általános megoldása balra és jobbra futó hullámok összege:

$$X^A(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}\left(Y^A(\tau+\sigma) + Z^A(\tau-\sigma)\right). \tag{7.129}$$

A kényszerfeltételek az $Y^A(u)$ és $Z^A(v)$ $(u = \tau+\sigma, v = \tau-\sigma)$ függvényekre nézve megszorításokat jelentenek:

$$\dot{X}^A X'_A = 0 \;\; \rightarrow \;\; \frac{d}{du}Y^A \frac{d}{du}Y_A = \frac{d}{dv}Z^A \frac{d}{dv}Z_A \tag{7.130}$$

$$\dot{X}^A \dot{X}_A + X'^A X'_A = 0 \;\; \rightarrow \;\; \frac{d}{du}Y^A \frac{d}{du}Y_A + \frac{d}{dv}Z^A \frac{d}{dv}Z_A = 0. \tag{7.131}$$

Ezekből következik ($\sigma = 0$ helyettesítéssel), hogy

$$\dot{Y}^A \dot{Y}_A = \dot{Z}^A \dot{Z}_A = 0. \tag{7.132}$$

A megoldásnak még a határfeltételi egyenleteket is ki kell elégítenie:

$$Y^A(\tau) + Z^A(\tau) = Y^A(\tau+2\pi) + Z^A(\tau-2\pi) \qquad \text{zárt húr;} \tag{7.133}$$

$$\dot{Y}^A(\tau) = \dot{Z}^A(\tau), \qquad \dot{Y}^A(\tau+\pi) = \dot{Z}^A(\tau-\pi) \qquad \text{nyílt húr.} \tag{7.134}$$

Vizsgáljuk külön a nyílt és a zárt húr esetét.

A. Nyílt húr esetén a határfeltételekből

$$Z^A(\tau) = Y^A(\tau) + a^A, \tag{7.135}$$

ahol a^A állandó vektor, továbbá

$$\dot{Z}^A(\tau - \pi) = \dot{Y}^A(\tau - \pi) = \dot{Y}^A(\tau + \pi), \tag{7.136}$$

úgyhogy

$$Y^A(\tau + 2\pi) = Y^A(\tau) + b^A, \tag{7.137}$$

ahol b^A is egy állandó vektor. A b^A vektornak közvetlen fizikai jelentése van, a húr energia-impulzus vektorával arányos:

$$\begin{aligned}
Q^A &= \int_0^\pi d\sigma j^{A0} = \kappa \int_0^\pi d\sigma \partial_0 X^A \\
&= \kappa \int_0^\pi d\sigma \frac{1}{2}\left(\frac{d}{du}Y^A + \frac{d}{dv}Z^A\right) = \frac{\kappa}{2}\int_0^\pi d\sigma \left(\partial_\sigma Y^A(u) - \partial_\sigma Z^A(v)\right) \\
&= \frac{\kappa}{2}\left[Y^A(\tau+\pi) - Y^A(\tau) - Z^A(\tau-\pi) + Z^A(\tau)\right] \\
&= \frac{\kappa}{2}\left[Y^A(\tau+\pi) - Y^A(\tau) - Y^A(\tau-\pi) - a^A + Y^A(\tau) + a^A\right] \\
&= \frac{\kappa}{2}\left[Y^A(\tau+\pi) - Y^A(\tau-\pi)\right] = \frac{\kappa}{2}b^A,
\end{aligned} \tag{7.138}$$

azaz

$$b^A = 2Q^A/\kappa. \tag{7.139}$$

Az a^A állandó vektort tetszőlegesen választhatjuk. Célszerű azonban az $a^A = 0$ választás, mert ekkor $Y^A(\tau)$ a húr $\sigma = 0$ végpontjának világvonalával azonos:

$$X^A(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}\left[Y^A(\tau+\sigma) + Y^A(\tau-\sigma)\right], \tag{7.140}$$

ahonnan

$$X^A(\tau, 0) = Y^A(\tau). \tag{7.141}$$

Megjegyezzük még, hogy a nyílt húr $\sigma = 0$ végpontja és tetszőleges σ koordinátájú pontja közötti darabjának energia-impulzus vektora

$$\begin{aligned}
\Pi^A(\tau, \sigma) &= \frac{\kappa}{2}\int_0^\sigma d\sigma'(\partial_{\sigma'}Y^A - \partial_{\sigma'}Z^A) \\
&= \frac{\kappa}{2}\left[Y^A(\tau+\sigma) - Y^A(\tau-\sigma)\right].
\end{aligned} \tag{7.142}$$

Nyílt húr mozgását tehát teljesen meghatározza egy τ pillanatban a húr $\sigma = 0$ végpontja világvonalának $[\tau - \pi, \tau + \pi]$ intervallumhoz tartozó darabja. A húr kezdőpontjának világvonalát direktrixnek nevezzük. A fentiek értelmében a direktrix olyan periódikus görbe, amelynek érintővektora fényszerű és periódusát a húr Q^A energia-impulzusvektora határozza meg.

A nyílt húr $\sigma = \pi$ végpontjának $y^A(\tau)$ világvonalát szokás antidirektrixnek nevezni. Ez ugyancsak 2π periodusú görbe, hiszen

$$y^A(\tau) = \frac{1}{2}[Y^A(\tau+\pi) + Y^A(\tau-\pi)] = Y^A(\tau-\pi) + \frac{Q^A}{\kappa}. \tag{7.143}$$

Az antidirektrix természetesen ugyancsak teljesen meghatározza a húr állapotát.

Sokszor célszerű a húrt úgy megadni, hogy a direktrix $[\tau-\sigma, \tau+\sigma]$ darabját és az antidirektrix $[\tau-(\pi-\sigma), \tau+(\pi-\sigma)]$ darabját adjuk meg. Mig az előbbi a húr $[0,\sigma]$, az utóbbi a húr $[\sigma,\pi]$ darabját határozza meg.

B. A zárt húrra vonatkozó (7.133) határfeltételi egyenletek két periodikus görbével kielégíthetők, amelyek a következő tulajdonságúak:

$$Y^A(\tau+2\pi) = Y^A(\tau) + a^A, \qquad Z^A(\tau+2\pi) = Z^A(\tau) + b^A, \tag{7.144}$$

ahol $b^A = a^A$ állandó vektorok. A mozgásegyenletek általános megoldásában ez a két világvonal szerepel az általános (7.129) képletnek megfelelően. Az a^A állandó a zárt húr energia-impulzus vektorával arányos:

$$\begin{aligned}
Q^A &= \kappa \int_0^{2\pi} d\sigma \dot{X}^A \\
&= \frac{\kappa}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma [\partial_\sigma Y^A(\tau+\sigma) - \partial_\sigma Z^A(\tau-\sigma)] \\
&= \frac{\kappa}{2}[Y^A(\tau+2\pi) - Y^A(\tau) - Z^A(\tau-2\pi) + Z^A(\tau)] \\
&= \frac{\kappa}{2}(a^A + a^A) = \kappa a^A,
\end{aligned} \tag{7.145}$$

azaz

$$a^A = Q^A/\kappa. \tag{7.146}$$

A (7.132) kényszerfeltételekből következően az $Y^A(\tau)$ és $Z^A(\tau)$ világvonalak fényszerűek. Ezek a világvonalak azonban általában nem esnek egybe a húr semelyik pontjának világvonalával sem.

A fentiekből láthatóan a zárt húr abban különbözik lényegesen a nyílt húrtól, hogy a húron "balra" és "jobbra" futó hullámok a zárt húron függetlenek egymástól. A nyílt húron ezek nem lehetnek függetlenek, mert a húr végein a határfeltétel kapcsolatot teremt közöttük. A végeken történő visszaverődéskor "balra" futó hullámból "jobbra" futó lesz és viszont, és a visszaverődésnek úgy kell történnie, hogy a végeken ne áramoljon ki energia és impulzus.

8 Nyílt húr mozgásának nem kovariáns leírása

8.1 Az η-mérték

Láttuk, hogy konform mérték használata esetén a kényszerek ortonormáltsági feltételek alakját öltik, és ezáltal az egyenletek általában leegyszerűsödnek. Az ún. η-mérték a koordináták olyan speciális választását jelenti, amellyel az ortonormáltsági relációk kielégülnek.

Valamely $x = (\tau, \sigma)$ konform koordinátákról térjünk át új $\tilde{x} = (\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})$ koordinátákra a

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= C_1^{-1} \eta^A X_A, \\ \tilde{\sigma} &= C_2 \int_0^\sigma d\sigma' \eta^A \dot{X}_A(\tau, \sigma') \end{aligned} \tag{8.147}$$

definicióval, ahol η^A állandó időszerű vagy fényszerű vektor.

Ez a konform mértéken belül egy megengedett transzformáció, hiszen a húr mozgásegyenletéből következően:

$$\begin{aligned} \Box_x \tilde{\tau} &= \Box_x (\eta^A X_A) = 0, \\ \Box_x \tilde{\sigma} &= C_2 (\eta^A \dot{X}'_A - \int_0^\sigma d\sigma' \eta^A \partial_\tau^3 X_A) \\ &= C_2 (\eta^A \dot{X}'_A - \int_0^\sigma d\sigma' \eta^A \dot{X}''_A) = 0. \end{aligned} \tag{8.148}$$

Az állandókat megkapjuk egyrészt abból a feltételből, hogy $\tilde{\sigma}(\tau, 0) = 0$ és $\tilde{\sigma}(\tau, \pi\delta) = \pi\delta$;

$$\pi\delta = C_2 \int_0^{\pi\delta} d\sigma' \eta^A \dot{X}_A = C_2 \eta^A Q_A / \kappa, \tag{8.149}$$

valamint abból, hogy a húr energia-impulzusvektorának η^A irányú vetülete független a koordinátaválasztástól;

$$\int_0^{\pi\delta} d\tilde{\sigma} \eta^A \kappa \dot{\tilde{X}}_A(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) = \int_0^{\pi\delta} d\sigma \eta^A \kappa \dot{X}_A(\tau, \sigma) = \eta^A Q_A. \tag{8.150}$$

Ezekből a feltételekből

$$C_1 = C_2 = \frac{\eta^A Q_A}{\kappa \pi \delta} = C \tag{8.151}$$

adódik.

Most megmutatjuk a nyilt húr példáján, hogy a fenti módon definiált $(\tilde{\tau},\tilde{\sigma})$ koordinátarendszerben kielégülnek az ortonormáltsági feltételek. Az új koordinátákban

$$\eta^A\tilde{\mathcal{P}}^A=\kappa\partial_{\tilde{\tau}}(\tilde{X}^A\eta_A)=\kappa/C=\text{áll.},\tag{8.152}$$

ezért a mozgásegyenletekből

$$\partial_{\tilde{\sigma}}(\eta_A\tilde{\mathcal{Q}}^A)=0.\tag{8.153}$$

Nyilt húr esetén viszont $\tilde{\mathcal{Q}}^A=0$ a végeken, úgyhogy $\eta^A\tilde{\mathcal{Q}}_A=0$ a végeken és így mindenütt. Használjuk most fel $\tilde{\mathcal{P}}^A$ és $\tilde{\mathcal{Q}}^A$ definicióját, valamint azt, hogy $\eta^A\tilde{X}'_A=0$:

$$0=\eta_A\tilde{\mathcal{Q}}^A \;=\; \kappa(\eta_A\dot{\tilde{X}}^A)(\dot{\tilde{X}}^B\tilde{X}'_B)/\tilde{\mathcal{D}} \quad\rightarrow\quad \dot{\tilde{X}}^B\tilde{X}'_B=0,\tag{8.154}$$

és

$$\eta_A\tilde{\mathcal{P}}^A \;=\; \kappa/C=-\kappa(\eta_A\dot{\tilde{X}}^A)(\tilde{X}'^B\tilde{X}'_B)/\tilde{\mathcal{D}}\tag{8.155}$$

azaz

$$\begin{aligned}\kappa-\dot{\tilde{X}}^2\tilde{X}'^2 \;&=\; -\kappa\tilde{X}'^2\\ &\rightarrow\; \dot{\tilde{X}}^2+\tilde{X}'^2=0.\end{aligned}\tag{8.156}$$

Az η-mérték két speciális esetét fogjuk használni:

- $\eta^A=(1,0,\ldots,0) \quad\Rightarrow\quad \tilde{\tau}\propto X^0$ (időmérték),
- $\eta^A=(1,0,\ldots,-1)/\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad \tilde{\tau}\propto X^+$ (fénykúp-mérték).

8.2 Az időmérték

A hadronikus húrok tárgyalásához megismerkedünk a húrmegoldások nem kovariáns leírásával konform mértékben, a

$$\tilde{\tau}=X^0(\tau,\sigma)=t;\qquad \tilde{\sigma}=C\sigma\tag{8.157}$$

(C =const.) feltételek segítségével rögzített koordinátarendszerben. A koordinátarendszer ilyen választása nem mond ellent a konform mértéket rögzítő feltételeknek, mert az új $(\tilde{\tau},\tilde{\sigma})$ koordináták a régi (τ,σ) koordinátáknak a két-dimenziós hullámegyenletet kielégítő függvényei:

$$\ddot{\tilde{\tau}}-\tilde{\tau}''=\ddot{X}^0-X^{0\prime\prime}=0,\tag{8.158}$$

$$\ddot{\tilde{\sigma}}-\tilde{\sigma}''=0.\tag{8.159}$$

A fenti koordinátarendszerben az alábbiakat mondhatjuk:

(i) A direktrix időszerű komponense azonos a t idővel:

$$Y^0(\tau) = X^0(\tau, 0) = \tilde{\tau} = t. \tag{8.160}$$

(ii) A húr $[0, \tilde{\sigma}]$ darabjának energiája:

$$\begin{aligned} \Pi^0(t, \tilde{\sigma}) &= \frac{\kappa}{2}\left[Y^0(t+\tilde{\sigma}) - Y^0(t-\tilde{\sigma})\right] \\ &= \frac{\kappa}{2}[t+\tilde{\sigma} - (t-\tilde{\sigma})] \\ &= \kappa\tilde{\sigma} = \kappa C\sigma. \end{aligned} \tag{8.161}$$

A húr tetszőleges $\mathcal{P}$ pontjához tartozó $\tilde{\sigma}$ paraméter értéke úgy van választva, hogy arányos legyen a húr kezdőpontja és $\mathcal{P}$ pontja közötti darabjának az energiájával. Mivel a húr energiája $\epsilon = \kappa C\pi$, a C állandó értéke $C = \epsilon/(\kappa\pi)$. Egyúttal látjuk, hogy a $\tilde{\sigma}$ paraméter a $[0, \epsilon/\kappa]$ intervallumon veszi fel értékeit.

(iii) A direktrix térszerű komponensei, $Y^i(t)$, a húr $\tilde{\sigma} = 0$ kezdőpontjának pályáját írják le. A húr végpontja ezen a pályán fénysebességgel mozog:

$$\dot{Y}^A\dot{Y}_A = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - [\dot{\vec{Y}}]^2 = 0. \tag{8.162}$$

Ezekszerint $\dot{\vec{Y}}(t)$ a pályagörbe egységnyi hosszúságú érintővektora és t a pályagörbe ívhosszparamétere.

A végpont pályája periódikus. A direktrix egy periódusát a tetszőleges $[t - \epsilon/\kappa, t + \epsilon/\kappa]$ időintervallumhoz tartozó szakaszai jelentik. Mivel t egyúttal ívhossz-paraméter is, a pályagörbe egy periódusnyi darabjának hossza $2\epsilon/\kappa$. A periódusok egymáshoz képest $2\vec{P}/\kappa$ vektorral vannak eltolva,

$$\vec{Y}(t + 2\epsilon/\kappa) = \vec{Y}(t) + 2\vec{P}/\kappa, \tag{8.163}$$

ahol $\vec{P}$ a húr impulzusa.

(iv) A direktrix ismeretében a húr és $[0, \tilde{\sigma}]$ darabjainak impulzusa az $\vec{Y}(t+\tilde{\sigma})$ és $\vec{Y}(t-\tilde{\sigma})$ ($\tilde{\sigma} \in [0, 2\epsilon/\kappa]$) vektorok összeadása és kivonása révén szerkeszthető meg:

$$\vec{X}(t, \tilde{\sigma}) = \frac{1}{2}\left[\vec{Y}(t+\tilde{\sigma}) + \vec{Y}(t-\tilde{\sigma})\right], \tag{8.164}$$

$$\vec{\Pi}(t, \tilde{\sigma}) = \frac{\kappa}{2}\left[\vec{Y}(t+\tilde{\sigma}) - \vec{Y}(t-\tilde{\sigma})\right]. \tag{8.165}$$

Az ábra a húr $\mathcal{P}$ pontjának és $\mathcal{OP}$ szakasza $\vec{\Pi}(\mathcal{OP})$ impulzusának szerkesztését mutatja.

(v) A mértékfeltételekből kiolvashatjuk, hogy a húr valamely pontjában vagy $\vec{X}' = 0$, vagy pedig $\vec{X}' \neq 0$ és a húr $\vec{v} = \dot{\vec{X}}$ sebessége merőleges a húrra:

$$\dot{X}^A X'_A = \dot{X}^0 X^{0'} - \dot{X}^i X^{i'} = -\dot{X}^i X^{i'} = -\vec{v}\vec{X}' = 0. \tag{8.166}$$

A húrnak lehetnek tehát olyan pontjai, amelyekben $\vec{X}' = 0$, azaz amelyekbe egy véges $\tilde{\sigma}$ intervallum van leképezve. Az ilyen csomópontok véges ϵ_c energiát hordoznak, amelynek nagysága arányos annak az intervallumnak a $\Delta\tilde{\sigma}$ hosszával, amely a csomópontba van leképezve: $\epsilon_c = \kappa\Delta\tilde{\sigma}$.

(vi) A

$$0 = \dot{X}^A \dot{X}_A + X^{A'} X'_A = 1 - \vec{v}^2 - \vec{X}'^2 \tag{8.167}$$

mértékfeltételekből a húr pontjainak sebességére az

$$\vec{X}'^2 = 1 - \vec{v}^2 \tag{8.168}$$

összefüggés adódik.

A csomópontokban $\vec{X}' = 0$, úgyhogy a csomópontok fénysebességgel mozognak, $\vec{v}^2 = 1$. Ekkor viszont a csomópont energiája és impulzusa között az $\epsilon_c = \mid \vec{p}_c \mid$ összefüggés áll fenn. Amíg a húr síma szakaszainak sebessége csak transzverzális lehet, addig a csomópontok sebessége tetszőleges irányú lehet.

(vii) A húr infinitezimális, síma szakaszának fizikai hosszát a

$$d\ell = \left[\partial_{\tilde{\sigma}} X^i \partial_{\tilde{\sigma}} X^i\right]^{1/2} d\tilde{\sigma} = [1 - \vec{v}^2]^{1/2} d\tilde{\sigma} \tag{8.169}$$

ívhosszelem adja meg.

(viii) Az ívhosszelem segítségével kiszámolhatjuk a húr síma darabjainak fizikai jellemzőit. A vonalmenti energia-impulzussűrűség $\tilde{\jmath}^{0A}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\jmath}^{0A} &= \jmath^{0A} \frac{d\tilde{\sigma}}{d\ell} d\ell = \frac{\jmath^{0A}}{\sqrt{1 - v^2}} d\ell \\ &= \left(\frac{\kappa d\ell}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{\kappa \vec{v} d\ell}{\sqrt{1 - v^2}} \right). \end{aligned} \tag{8.170}$$

Innen látjuk, hogy $\kappa d\ell$ a húr $d\ell$ hosszúságú síma darabkájának a nyugalmi tömege.

Az energia-impulzusáram vonalmenti sűrűsége $\tilde{j}^{1A}$:

$$\tilde{j}^{1A} \;=\; j^{1A}\frac{d\tilde{\sigma}}{d\ell}d\ell = \left(0, \frac{\kappa\vec{X}'d\ell}{\sqrt{1-v^2}}\right). \tag{8.171}$$

A húr $\vec{T}$ mechanikai feszültsége az impulzusáramsűrűséggel azonos. A húrfeszültség nagysága κ:

$$\mid \vec{T} \mid = \frac{\kappa}{\sqrt{1-v^2}} \mid \vec{X}' \mid = \kappa. \tag{8.172}$$

(ix) Végül megadjuk a síma húr mozgását leíró hatást a fenti speciális paraméterválasztás esetén. Mivel

$$\begin{aligned}&\left[(\dot{X}^A X'_A)^2 + (\dot{X}^A\dot{X}_A)(X^{B'}X'_B)\right]^{1/2}\\ &\quad = \left[(\vec{v}\vec{X}')^2 + (1-\vec{v}^2)(\vec{X}')^2\right]^{1/2} = 1-\vec{v}^2,\end{aligned} \tag{8.173}$$

azt kapjuk, hogy

$$S = -\kappa\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\epsilon/\kappa} d\tilde{\sigma}(1-\vec{v}^2). \tag{8.174}$$

æ

9 Nyílt húrok speciális mozgásai

Most megismerkedünk a nyílt húrok két egyszerű gerjesztési állapotával.

(i) Jojó-mozgás. A húr legegyszerűbb longitudinális rezgését az ún. jojó-mozgás valósítja meg.

A mozgást az ábra illusztrálja. A vastag vonal a $\tilde{\sigma} = 0$, a vékony a $\tilde{\sigma} = M/\kappa$

végpont világvonalát ábrázolja. A két végpont között feszülő húrt szaggatott vonal jelöli; a rajta levő nyíl a paraméterezésből adódó irányítást jelzi. Az M nyugalmi tömegű húr a $t = 0$ pillanatban egyetlen pontba, az origóba húzódott össze. Végpontjai innen $p_0 = M/2$ kezdeti impulzussal szaladnak szét. Az előző előadásban elmondott paralellogramma szerkesztéssel beláthatjuk, hogy a mozgás első negyedperiódusában, $t \in [0, t_0]$, a $\tilde{\sigma} = 0$ végpont impulzusa lineárisan csökken zérusra:

$$p_x(t, 0) = -\frac{1}{2}M + \kappa t. \tag{9.175}$$

Ezután a $t \in [t_0, 2t_0]$ negyedperiódusban a $\tilde{\sigma} = 0$ végpont impulzusa lineárisan nő:

$$p_x(t, 0) = \kappa(t - t_0). \tag{9.176}$$

A $t = 2t_0$ pillanatban a két végpont áthalad az origón és újra szétszalad ellenkező irányban mint a $t = 0$ pillanatban. A harmadik negyedperiódusban

$$p_x(t, 0) = \frac{1}{2}M - \kappa t \tag{9.177}$$

A $t = 3t_0$ pillanatban a végpontok impulzusa ismét zérussá válik és a húrfeszültség hatására visszafordulnak az origó felé. Az utolsó negyedperiódusban:

$$p_x(t, 0) = -\kappa(t - 3t_0). \tag{9.178}$$

A mozgás periódusideje:

$$T = 4t_0 = 2M/\kappa. \tag{9.179}$$

A $\tilde{\sigma} = M/\kappa$ végpont impulzusa mindvégig ellentétes irányú és egyenlő nagyságú a $\tilde{\sigma} = 0$ végpont impulzusával:

$$p_x(t, M/\kappa) = -p_x(t, 0). \tag{9.180}$$

A mozgás sajátos jellemzője a húr két végén lévő csomópont, amelyek energiája:

$$\epsilon_c(t, 0) = \epsilon_c(t, M/\kappa) = \mid p_x(t, 0) \mid . \tag{9.181}$$

A húr közbenső, síma szakaszának impulzusa zérus. Ugyanakkor ezen a szakaszon a húrfeszültség κ =áll. A mozgás tehát nem hasonlít egy rúgó rugalmas rezgéseihez, ahol a rúgóban a mechanikai feszültség a relatív megnyúlással arányos. Sokkal inkább a jojó mozgására emlékeztet ez a húrmozgás, amikor a fonál feszültsége állandó és hossza azáltal változik, hogy feltekeredik a fonál végén levő testre vagy éppen letekeredik róla.

(ii) Merev rúdként forgó húr. A húr legegyszerűbb transzverzális "rezgése" a merev rúdként forgó húr esetében valósul meg. Az M nyugalmi tömegű húr direktrixe ebben az esetben egy

$$R = \frac{2M/\kappa}{2\pi} = \frac{M}{\kappa\pi} \tag{9.182}$$

sugarú kör. Mint az a direktrixből a paralellogramma szerkesztéssel könnyen megállapítható, a húr mindíg a kör valamely átmérője mentén helyezkedik el. Hossza:

$$\ell = 2R = \frac{2M}{\kappa\pi}. \tag{9.183}$$

A húr kezdőpontja fénysebességgel halad végig a direktrix $2R\pi$ kerületén, így a húr forgásának szögsebessége:

$$\omega = \frac{2\pi}{2R\pi} = \frac{1}{R} = \frac{\kappa\pi}{M}. \tag{9.184}$$

A forgó húrnak az origótól r távolságra lévő dr hosszúságú szakasza a húrra merőleges $v = r\omega$ sebességgel mozog. Egy ilyen kis szakasz impulzusa

$$dp_r = \frac{\kappa dr}{\sqrt{1 - r^2\omega^2}} r\omega. \tag{9.185}$$

A forgó húr impulzusmomentuma:

$$J = 2\int r dp_r = 2\int_0^R dr \frac{\kappa r^2 \omega}{\sqrt{1 - r^2\omega^2}} = \frac{M^2}{2\pi\kappa}. \tag{9.186}$$

A forgó húr lehetséges állapotai az (M^2, J) diagrammon $\alpha' = (2\pi\kappa)^{-1}$ meredekségű, lineáris Regge-trajektórián helyezkednek el. A tapasztalat szerint a hadron-rezonanciák Regge-trajektóriái is lineárisak.

Később majd belátjuk, hogy a merev rúdként forgó húr Regge-trajektóriája az Yrast-vonal szerepét játssza: adott impulzusmomentumú húrok között az a legkisebb nyugalmi tömegű, amelyik merev rúdként forog.

10 A húr mint harmonikus oszcillátorok rendszere

A húr mozgásegyenletének (a két-dimenziós hullámegyenletnek) az általános megoldását írhatjuk

$$X^A(\tau, \sigma) = q^A + \alpha_0^A \tau + i \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n^A}{n} \cos n\sigma e^{-in\tau} + \frac{\tilde{\alpha}_n^A}{n} \sin n\sigma e^{in\tau} \right) \tag{10.187}$$

alakba, ahol $q^A, \alpha_0^A, \alpha_n^A, \tilde{\alpha}_n^A$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ a dinamikai változók. Képezzük az első és a második deriváltat τ és σ szerint:

$$\begin{aligned}
\dot{X}^A(\tau,\sigma) &= \alpha_0^A + \sum_{n\neq 0}\left(\alpha_n^A \cos n\sigma e^{-in\tau} - \tilde{\alpha}_n^A \sin n\sigma e^{in\tau}\right), && (10.188)\\
\ddot{X}^A(\tau,\sigma) &= -i\sum_{n\neq 0} n\left(\alpha_n^A \cos n\sigma e^{-in\tau} + \tilde{\alpha}_n^A \sin n\sigma e^{in\tau}\right), && (10.189)\\
X'^A(\tau,\sigma) &= i\sum_{n\neq 0}\left(-\alpha_n^A \sin n\sigma e^{-in\tau} + \tilde{\alpha}_n^A \cos n\sigma e^{in\tau}\right), && (10.190)\\
X''^A(\tau,\sigma) &= -i\sum_{n\neq 0} -n\left(\alpha_n^A \cos n\sigma e^{-in\tau} + \tilde{\alpha}_n^A \sin n\sigma e^{in\tau}\right). && (10.191)
\end{aligned}$$

Látjuk, hogy valóban kielégül a hullámegyenlet, $\ddot{X}^A = X''^A$.

A (10.187) kifejezésnek valós értékűnek kell lenni, amiből $\alpha_{-n}^A = \alpha_n^{A*}$ és $\tilde{\alpha}_{-n}^A = -\tilde{\alpha}_n^{A*}$ következik.

Nyílt húr esetén a határfeltételekből $\tilde{\alpha}_n^A = 0$ $(n \neq 0)$ következik. A megoldás ezért

$$X^A(\tau,\sigma) = q^A + \alpha_0^A\tau + i\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^A}{n}\cos n\sigma e^{-in\tau} \qquad (10.192)$$

alakot ölt.

Zárt húr esetén a (10.187) kifejezés az $X^A(\tau,0) = X^A(\tau,2\pi)$ feltételt minden további megszorítás nélkül elégíti ki.

Konform mértékben a megoldásnak ki kell elégítenie az

$$\dot{X}^A X'_A = 0; \qquad \dot{X}^A\dot{X}_A + X'^A X'_A = 0 \qquad (10.193)$$

kényszerfeltételeket is nyílt húr esetén a $\sigma \in [0,\pi]$, zárt húr esetén a $[0,2\pi]$ intervallumon. Nyilvánvalóan, a kényszerfeltételek egyenértékűek az

$$\left(\dot{X}^A \pm X'^A\right)\left(\dot{X}_A \pm X'_A\right) = 0 \qquad (10.194)$$

feltételekkel. Mivel nyílt húr esetén $\dot{X}^A$ ill. X'^A rendre σ páros ill. páratlan függvénye, azért a kényszerfeltételek ekvivalensek a $\sigma \in [-\pi,\pi]$ intervallumon megkövetelt

$$\left(\dot{X}^A + X'^A\right)\left(\dot{X}_A + X'_A\right) = 0 \qquad (10.195)$$

feltétellel. A kényszerfeltételek tehát

$$\begin{aligned}
&\left(\dot{X}^A \pm X'^A\right)\left(\dot{X}_A \pm X'_A\right) = 0, && \sigma \in [0,2\pi] \quad \text{zárt húr},\\
&\left(\dot{X}^A + X'^A\right)\left(\dot{X}_A + X'_A\right) = 0, && \sigma \in [-\pi,\pi] \quad \text{nyílt húr} \qquad (10.196)
\end{aligned}$$

alakban foglalhatók össze.

Használjuk fel, hogy

$$\begin{aligned}
\dot{X}^A \pm X'^A &= \alpha_0^A + \sum_{n\neq 0}\left(\alpha_n^A \pm i\tilde{\alpha}_{-n}^A\right)e^{-in(\tau\pm\sigma)} \\
&= \sum_n \beta_n^{(\pm)A} e^{-in(\tau\pm\sigma)} \qquad (10.197)
\end{aligned}$$

alakban írható és fejezzük ki a kényszereket a Fourier-együtthatókkal:

$$\sum_{n,m} \beta_n^{(\pm)A}\beta_{mA}^{(\pm)} e^{-i(n+m)(\tau\pm\sigma)} = 0. \qquad (10.198)$$

Vezessük be a $k = n + m$ összegző indexet az n index helyett:

$$\sum_{k,m} \beta_{k-m}^{(\pm)A}\beta_{mA}^{(\pm)} e^{-ik(\tau\pm\sigma)} = 0. \qquad (10.199)$$

A baloldal egy Fourier-sor, amely akkor és csak akkor tűnik el, ha

$$\sum_{m} \beta_{k-m}^{(\pm)A}\beta_{mA}^{(\pm)} = 0. \qquad (10.200)$$

Innen zárt húr esetén az

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{2}\sum_m \left(\alpha_{n-m}^A\alpha_{mA} - \tilde{\alpha}_{-(n-m)}^A\alpha_{-mA}\right) = 0, \\
\tilde{L}_n &= \frac{1}{2}\sum_m \left(\tilde{\alpha}_{-(n-m)}^A\alpha_{mA} + \alpha_{n-m}^A\tilde{\alpha}_{-mA}\right) = 0 \qquad (10.201)
\end{aligned}$$

kényszereket kapjuk, nyílt húr esetén pedig az

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_m \left(\alpha_{n-m}^A\alpha_{mA}\right) \qquad (10.202)$$

kényszereket. Ezek az ún. Virasoro-féle kényszerek.

A bevezetett $q^A, \alpha_0^A, \alpha_n^A, \tilde{\alpha}_n^A$ $(n \neq 0)$ dinamikai változók fizikai jelentése a következő:
(i) A q^A a húr tömegközéppontjának helyzetét szabja meg a $\tau = 0$ pillanatban.
(ii) Az α_0^A változó a húr teljes energia-impulzus vektorával arányos. A direktrix

$$Y^A(\tau) = X^A(\tau, 0) = q^A + \alpha_0^A\tau + i\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_0^A}{n}e^{-in\tau} \qquad (10.203)$$

alakú és a húr $[0, \sigma]$ darabjának energia-impulzus vektora

$$\Pi^A(\tau,\sigma) = \frac{\kappa}{2}\left[Y^A(\tau+\sigma) - Y^A(\tau-\sigma)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\kappa}{2}\Bigg[q^A + \alpha_0^A(\tau+\sigma) + i\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^A}{n}e^{-in(\tau+\sigma)} \\
&\qquad -q^A - \alpha_0^A(\tau-\sigma) - i\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^A}{n}e^{-in(\tau-\sigma)}\Bigg] \\
&= \kappa\alpha_0^A\sigma + \kappa\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^A}{n}e^{-in(\tau)}\sin n\sigma,
\end{aligned}
\tag{10.204}
$$

úgyhogy a húr teljes energia-impulzus vektora

$$
\begin{aligned}
Q^A &= \begin{cases} \Pi^A(\tau,\pi), & \text{nyílt} \\ \Pi^A(\tau,2\pi), & \text{zárt} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \kappa\alpha_0^A\pi, & \text{nyílt} \\ 2\kappa\alpha_0^A\pi, & \text{zárt} \end{cases} .
\end{aligned}
\tag{10.205}
$$

Következésképpen azt kapjuk, hogy

$$
\alpha_0^A = \frac{Q^A}{\kappa\pi\delta},
\tag{10.206}
$$

ahol nyílt húrra $\delta = 1$, zárt húrra pedig $\delta = 2$ értéket kell írni.
(iii) Az $n \neq 0$ Fourier-módusok a húr rezgéseit írják le. Ezek a rezgések azonban nem függetlenek, hanem végtelen sok, nem lineáris kényszer biztosít közöttük csatolást. A negatív és pozitív indexes Fourier-együtthatók közti kapcsolat miatt csak az L_n, $\tilde{L}_n$ $(n \geq 0)$ kényszerek függetlenek:

$$
L_{-n} = L_n^*, \qquad \tilde{L}_{-n} = \tilde{L}_n^*.
\tag{10.207}
$$

Az $L_0 = 0$ kényszerfeltétel a húr nyugalmi tömegét meghatározó egyenlet:

$$
L_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^A Q_A}{(\kappa\pi\delta)^2} + \sum_{m>0}\left(\alpha_{-m}^A\alpha_{mA} - \tilde{\alpha}_{-m}^A\tilde{\alpha}_{mA}\right) = 0,
\tag{10.208}
$$

s így

$$
\begin{aligned}
M^2 &= -2(\kappa\pi\delta)^2\sum_{m>0}\left(\alpha_{-m}^A\alpha_{mA} - \tilde{\alpha}_{-m}^A\tilde{\alpha}_{mA}\right) \\
&= -2(\kappa\pi\delta)^2\sum_{m>0}\left(\alpha_m^{A*}\alpha_{mA} + \tilde{\alpha}_m^{A*}\tilde{\alpha}_{mA}\right).
\end{aligned}
\tag{10.209}
$$

A húr nyugalmi tömegének négyzete tehát az egyes relativisztikus oszcillátor-módusok energiájának négyzeteiből additívan tevődik össze. Vegyük észre, hogy nem a módusok energiái adódnak össze, mint nem relativisztikus oszcillátorok esetén.

Végezetül megmutatjuk, hogy az L_0 kényszer a rendszer Hamilton-függvényének szerepét játssza. Az $X^A(\tau,\sigma)$ általános koordinátákhoz kanonikusan konjugált impulzusok konform mértékben:

$$
\mathcal{P}^A(\tau,\sigma) = \frac{\delta S}{\delta\dot{X}_A(\tau,\sigma)} = \kappa\dot{X}^A(\tau,\sigma).
\tag{10.210}
$$

(Itt a hatás Nambu-Hara-Gotō alakját deriváltuk, majd felhasználtuk a mértékrögzítő feltételeket.) A húr mozgásegyenletei származtathatók a

$$H=\frac{1}{2}\int_0^{\pi\delta}d\sigma\left(\frac{1}{\kappa}\mathcal{P}^A\mathcal{P}_A+\kappa X'^A X'_A\right) \tag{10.211}$$

Hamilton-függvényből[1]:

$$\begin{aligned}\dot{X}^A(\tau,\sigma) &= \frac{\delta H}{\delta\mathcal{P}_A(\tau,\sigma)}=\mathcal{P}^A(\tau,\sigma)/\kappa, &(10.212)\\ \dot{\mathcal{P}}^A(\tau,\sigma) &= -\frac{\delta H}{\delta X_A(\tau,\sigma)}=\kappa X''^A. &(10.213)\end{aligned}$$

Ha $\mathcal{P}^A$-t kiküszöböljük, akkor innen valóban az $\ddot{X}^A-X''^A=0$ hullámegyenletet kapjuk vissza.

Fejezzük ki a Hamilton-függvényt a Fourier-együtthatókkal! Azonos átalakítás után:

$$\begin{aligned}H &= \frac{\kappa}{2}\int_0^{\pi\delta}d\sigma\left(\dot{X}^A\dot{X}_A+X'^A X'_A\right)\\ &= \frac{\kappa}{4}\int_0^{\pi\delta}d\sigma\left[\left(\dot{X}^A+X'^A\right)\left(\dot{X}_A+X'_A\right)+\left(\dot{X}^A-X'^A\right)\left(\dot{X}_A-X'_A\right)\right]\\ &= \frac{\kappa}{4}\int_0^{\kappa\delta}d\sigma\sum_{k,m}\left(\beta^{(+)A}_{k-m}\beta^{(+)}_{mA}e^{-ik(\tau+\sigma)}+\beta^{(-)A}_{k-m}\beta^{(-)}_{mA}e^{-ik(\tau-\sigma)}\right). &(10.214)\end{aligned}$$

Nyílt húr esetén $\beta^{(+)A}_m=\beta^{(-)A}_m=\alpha^A_m$, úgyhogy

$$\begin{aligned}H &= \frac{\kappa}{2}\int_0^{\pi}d\sigma\sum_{k,m}\alpha^A_{-m}\alpha_{mA}e^{-ik\tau}\cos k\sigma\\ &= \frac{\kappa}{2}\pi\sum_m\alpha^A_{-m}\alpha_{mA}\\ &= \kappa\pi\left(\sum_{m>0}\alpha^{A*}_m\alpha_{mA}+\frac{1}{2}\alpha^A_0\alpha_{0A}\right)\\ &= \kappa\pi L_0; &(10.215)\end{aligned}$$

ugyanakkor zárt húr esetén $\beta^{(\pm)A}_m=\alpha^A_m\pm i\tilde{\alpha}^A_{-m}$ és

$$H = \frac{\kappa}{4}\int_0^{2\pi}d\sigma\sum_{k,m}e^{-ik\tau}\left(\beta^{(+)A}_{k-m}\beta^{(}_{mA}+)e^{-ik\sigma}+\beta^{(-)A}_{k-m}\beta^{(-)}_{mA}e^{ik\sigma}\right)$$

[1] A Hamilton-függvényt egyszerűbb kitalálni, mint leszármaztatni, mert a húr Lagrange-sűrűsége elfajult.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\kappa}{2}\pi \sum_m \left(\beta^{(+)A}_{k-m}\beta^{(+)}_{mA} + \beta^{(-)A}_{k-m}\beta^{(-)}_{mA}\right) \\
&= \kappa\pi \sum_m \left(\alpha^A_{-m}\alpha_{mA} - \tilde\alpha^A_m\tilde\alpha_{-mA}\right) \\
&= 2\kappa\pi[\sum_{m>0}\left(\alpha^{A*}_m\alpha_{mA} + \tilde\alpha^{A*}_m\tilde\alpha_{mA}\right) + \frac{1}{2}\alpha^A_0\alpha_{0A}] \\
&= 2\kappa\pi L_0. \qquad (10.216)
\end{aligned}
$$

A $H = \kappa\pi L_0\delta$ Hamilton-függvény tehát az L_0 kényszerrel arányos.

10.1 Példa: A jojó

A jojó-mozgás Fourier-komponensei tömegközépponti rendszerben

$$
\begin{aligned}
\alpha^\mu_n &= 0 \qquad (\mu = 0,1,2; n \neq 0), \\
\alpha^3_n &= -i\frac{M}{\kappa\pi^2 n}[(-1)^n - 1] \qquad (n \neq 0), \\
\alpha^0_0 &= \frac{M}{\kappa\pi} \\
\alpha^i_0 &= 0 \qquad (i = 1,2,3). \qquad (10.217)
\end{aligned}
$$

A húrt

$$
\begin{aligned}
X^0 &= \frac{M}{\kappa\pi}\tau = t \to \tau = \frac{\kappa\pi}{M}t, \\
X^3(t,\sigma) &= 2\frac{M}{\kappa\pi^2}\sum_{n>0}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos n\frac{\kappa\pi}{M}\sigma\cos n\frac{\kappa\pi}{M}t \qquad (10.218)
\end{aligned}
$$

alakban írhatjuk fel. Innen a direktrix:

$$
Y^3(t) = 2\frac{M}{\kappa\pi^2}\sum_{n>0}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos n\frac{\kappa\pi}{M}t, \qquad (10.219)
$$

ami analóg az elektronikából ismert $T = 2M/\kappa$ periodusidejű fűrészfogrezgéssel.

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a Fourier-együtthatók csakugyan kielégítik a Virasoro kényszereket. Az $n = 0$ esetben:

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \frac{M^2}{2\kappa^2\pi^2} - \sum_{m>0}\alpha^{3*}_m\alpha^3_m \\
&= \frac{M^2}{2\kappa^2\pi^2} - \frac{2M^2}{\kappa^2\pi^4}\sum_{m>0}\frac{1-(-1)^m}{m^2}. \qquad (10.220)
\end{aligned}
$$

A jobboldalon álló összeg kifejezhetó a Riemann-féle ζ-függvénnyel, úgyhogy ($\zeta(2) = \pi^2/6$):

$$L_0 = \frac{M^2}{2\kappa^2\pi^2} - \frac{2M^2}{\kappa^2\pi^4}\frac{3}{2}\zeta(2) = 0. \tag{10.221}$$

Az L_n ($n \neq 0$) kényszerek

$$\begin{aligned} L_n &= -\frac{1}{2}\sum_{m\neq 0,n} \alpha^3_{n-m}\alpha^3_m \\ &= \frac{1}{2}\frac{M^2}{\kappa^2\pi^4}\sum_{m\neq 0,n}\frac{[(-1)^{n-m}-1][(-1)^m-1]}{(n-m)m} \\ &= \frac{1}{2}\frac{M^2}{\kappa^2\pi^4}\frac{[(-1)^n-1]}{n}\sum_{m\neq 0,n}[1-(-1)^m](\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}) \end{aligned} \tag{10.222}$$

alakot öltenek. Páratlan n esetén L_n triviálisan zérus. Páros n esetén az összeg második tagjában az $\bar{m} = m - n$ összegző indexet vezetjük be és felhasználjuk, hogy $(-1)^{\bar{m}+n} = (-1)^{\bar{m}}$. Ekkor az első és a második összegben a tagok páronként kiejtik egymást az $m = -n$ ill. az $\bar{m} = n$ tagok kivételével,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{m\neq 0,n} & \frac{1-(-1)^m}{m} - \sum_{\bar{m}\neq 0,-n}\frac{1-(-1)^{\bar{m}}}{\bar{m}} \\ & \frac{1-(-1)^n}{-n} - \frac{1-(-1)^n}{n} \end{aligned} \tag{10.223}$$

amelyeknek hiányzik a párjuk. Az utóbbi tagok azonban páros n esetén zérus értékűek.

10.2 Példa: Merev rúdként forgó húr

A direktrix Fourier-sorának felhasználásával könnyen beláthatjuk, hogy az (1,2) ikban merev rúdként forgó húr Fourier-komponenseinek amplitudói:

$$\begin{aligned} \alpha_0^0 &= \frac{M}{\kappa\pi}, \qquad \alpha_0^i = 0 \quad (i = 1,2,3), \\ \alpha_1^1 &= -iR/2 = -i\frac{M}{2\kappa\pi} = -\alpha_{-1}^1, \qquad \alpha_n^{1,2} = 0 \quad (n = 2,3,\ldots), \\ \alpha_1^2 &= R/2 = \frac{M}{2\kappa\pi} = \alpha_{-1}^2, \qquad \alpha_n^3 = 0 \quad (n \neq 0). \end{aligned} \tag{10.224}$$

A húr képletei:

$$\begin{aligned} X^1(t,\sigma) = 2i\alpha_1^1 \cos\frac{\kappa\pi}{M}\sigma\cos\frac{\kappa\pi}{M}t, \\ X^2(t,\sigma) = 2i\alpha_1^2 \sin\frac{\kappa\pi}{M}\sigma\sin\frac{\kappa\pi}{M}t. \end{aligned} \tag{10.225}$$

æ

11 Nyilt húrok impulzusmomentuma

A húr impulzusmomentum tenzora:

$$Q^{AB} = \int_0^\pi d\sigma (X^B \mathcal{P}^A - X^A \mathcal{P}^B), \tag{11.226}$$

amelynek térszerű komponenseiből származtatjuk az impulzusmomentumot. Négydimenziós téridőben az impulzusmomentum komponensei:

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} Q^{jk}. \tag{11.227}$$

A Fourier-sorokat behelyettesitve, az impulzusmomentum tenzor

$$Q^{AB} = Q^A q^B - Q^B q^A + i\kappa\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\alpha_{-n}^A \alpha_n^B - \alpha_n^A \alpha_{-n}^B) \tag{11.228}$$

alakot ölt. A húr nyugalmi rendszerében, időmértékben $(t = X^0(\tau, \sigma))$

$$Q^{jk} = i\kappa\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\alpha_n^{j*} \alpha_n^k - \alpha_n^j \alpha_n^{k*}) \tag{11.229}$$

adódik. Képezzük az impulzusmomentum négyzetét:

$$\begin{aligned} J^2 &= \frac{1}{2} Q^{jk} Q^{jk} \\ &= -\frac{1}{2}(\kappa\pi)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{nm}(\alpha_n^{j*}\alpha_n^k - \alpha_n^j \alpha_n^{k*})(\alpha_m^{j*}\alpha_m^k - \alpha_m^j \alpha_m^{k*}) \\ &= \frac{1}{2}(\kappa\pi)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{nm}[(\alpha_n^j \alpha_m^{j*})(\alpha_n^{k*}\alpha_m^k) - (\alpha_n^{j*}\alpha_m^{j*})(\alpha_n^k \alpha_m^k)]. \end{aligned} \tag{11.230}$$

A Schwarz-féle egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(\alpha_n^j \alpha_m^{j*})(\alpha_n^{k*}\alpha_m^k) - (\alpha_n^{j*}\alpha_m^{j*})(\alpha_n^k \alpha_m^k) \leq nm(\alpha_n^{j*}\alpha_n^j)(\alpha_m^{k*}\alpha_m^k) \tag{11.231}$$

(n-re és m-re nincs összegzés). Következésképpen az impulzusmomentum négyzete felülről korlátos:

$$\begin{aligned} J^2 &\leq (\kappa\pi)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_n^{j*}\alpha_n^j)(\alpha_m^{k*}\alpha_m^k) \\ &= \left(\frac{M^2}{2\kappa^2\pi^2}\right)^2 (\kappa\pi)^2 = \frac{M^4}{4\kappa^2\pi^2}, \end{aligned} \tag{11.232}$$

azaz

$$\mid \vec{J} \mid \leq \frac{M^2}{2\kappa\pi} = \alpha' M^2. \tag{11.233}$$

Adott impulzusmomentumú húr tömege tehát nem lehet kisebb a $2\kappa\pi \mid \vec{J} \mid$ minimális értéknél. Az egyenlőséget a merev rúdként forgó húr valósitja meg. A merev rúdként forgó húr Regge-trajektóriája tehát lineáris és az Yrast-vonal szerepét játssza.

12 A húr által besöpört invariáns felület

A hatást kifejezhetjük a bevezetett harmonikus oszcillátorok amplitudóival. Nyilt húrra konform mértékben

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\kappa}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma(\dot{X}^A\dot{X}_A - X'^A X'_A) \\ &= \kappa\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma X'^A X'_A \\ &= \kappa\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma \frac{1}{\kappa\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^A \alpha_{mA} e^{-i(n+m)\tau}\sin(n\sigma)\sin(m\sigma). \\ &= \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^A\alpha_{nA} e^{-2in\tau} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^A\alpha_{nA}\frac{i}{2n}\left(e^{-2in\tau_2} - e^{-2in\tau_1}\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\alpha_0^A\alpha_{0A}(\tau_2-\tau_1). \end{aligned} \tag{12.234}$$

Itt felhasználtuk az $\dot{X}^A\dot{X}_A = -X'^A X'_A$ kényszert, valamint azt, hogy

$$\int_0^\pi d\sigma \sin(n\sigma)\sin(m\sigma) = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}. \tag{12.235}$$

Az M nyugalmi tömegű húr által besöpört invariáns felület:

$$\begin{aligned} A(\tau_2,\tau_1) &= S/\kappa \\ &= \frac{M^2}{2\pi\kappa^2}(\tau_2-\tau_1) + \frac{i}{4\kappa}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^A\alpha_{nA}}{n}\left(e^{-2in\tau_2} - e^{-2in\tau_1}\right). \end{aligned} \tag{12.236}$$

Ha $\tau_2-\tau_1$ éppen a mozgás egy periódusideje, vis. $\tau_2-\tau_1 = 2\pi$, akkor a besöpört invariáns felület $A = (M/\kappa)^2$.

13 Fénykúp-mérték

Az előzőekben láttuk, hogy a húr végtelen sok kényszernek, a Virasoro- kényszereknek tesz eleget. A bevezetett $q^A, \alpha_0^A, \alpha_n^A$ $(n \neq 0)$ harmonikus oszcillátor koordináták tehát nem független dinamikai változók. Választhatunk azonban olyan mértéket, amelyben a Virasoro-kényszerek explicite megoldhatók és ekkor a tárgyalásban csak független dinamikai változók szerepelnek. Ilyen mérték az η-mérték ill. annak speciális esete a fénykúp-mérték. A fénykúp-mérték használatának az az ára, hogy a húr longitudinális rezgési módusainak leirási lehetőségét elveszítjük. Fénykúp-mértékben csak a húr transzverzális rezgéseit tudjuk tárgyalni.

A V^A Lorentz-vektor fénykúp-koordinátáit a

$$V^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V^0 \pm V^{d-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_0 \mp V_{d-1}) = V_{\mp} \tag{13.237}$$

összefüggésekkel definiáljuk. A V^A és W^A vektorok skalárszozatát kifejezhetjük fénykúp-koordinátákkal:

$$V^A W_A = V^+ W^- + V^- W^+ - \sum_{j=1}^{d-2} V^j W^j. \tag{13.238}$$

Fénykúp-mértékben a nyílt húrt az

$$X^+ = \frac{Q^+}{\kappa\pi}\tau = \frac{1}{2}[Y^+(\sigma^+) + Y^+(\sigma^-)], \tag{13.239}$$

$$X^- = \frac{1}{2}[Y^-(\sigma^+) + Y^-(\sigma^-)], \tag{13.240}$$

$$\vec{X}^{\perp} = \frac{1}{2}[\vec{Y}^{\perp}(\sigma^+) + \vec{Y}^{\perp}(\sigma^-)] \tag{13.241}$$

egyenletek írják le, ahol a direktrix eleget tesz az

$$\dot{Y}^A \dot{Y}_A = 2\dot{Y}^+ \dot{Y}^- - \sum_{j=1}^{d-2} \dot{Y}^j \dot{Y}^j = 0, \tag{13.242}$$

$$Y^+(\tau + \pi) = Y^+(\tau - \pi) + 2Q^+/\kappa, \tag{13.243}$$

$$Y^-(\tau + \pi) = Y^-(\tau - \pi) + 2Q^-/\kappa, \tag{13.244}$$

$$\vec{Y}^{\perp}(\tau + \pi) = \vec{Y}^{\perp}(\tau - \pi) + 2\vec{Q}^{\perp}/\kappa, \tag{13.245}$$

kényszerfeltételeknek. A (13.243) egyenlet automatikusan kielégül, nem jelent megszorítást. A (13.242) egyenletből kifejezhetjük $\dot{Y}^-$-t a direktrix transzverzális komponenseivel. Integrálás után

$$Y^-(\tau) = q_0^- + \frac{\kappa\pi}{2Q^+}\int_0^{\tau} d\tau' [\dot{\vec{Y}}^{\perp}(\tau')]^2, \tag{13.246}$$

adódik, ahol q_0^- tetszőleges állandó, amelynek értékét a kezdőfeltételek szabják meg. A (13.244) egyenletből kifejezhetjük az impulzus Q^- komponensét:

$$Q^- = \frac{\kappa^2\pi}{4Q^+}\int_{\tau-\pi}^{\tau+\pi} d\tau' [\dot{\vec{Y}}^{\perp}(\tau')]^2. \tag{13.247}$$

A fentiekből látjuk, hogy Q^+, $\vec{Y}^{\perp}(u)$ $u \in [\tau - \pi, \tau + \pi]$ és q_0^- a független dinamikai változók. Segítségükkel $Y^{\pm}(u)$ kifejezhetők. A direktrix transzverzális vetületére az egyetlen megszorítást a (13.245) periodikussági feltétel jelenti.

Hasonlitsuk össze a mértékrögzitő $X^+ = \frac{Q^+}{\kappa\pi}\tau$ kifejezést X^+ Fourier-sorával:

$$X^+ = \frac{Q^+}{\kappa\pi}\tau q_0^+ + \alpha_0^+ i \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^+ e^{-in\tau}\cos(n\sigma). \tag{13.248}$$

Innen

$$q_0^+ = 0, \qquad \alpha_0^+ = \frac{Q^+}{\kappa\pi}, \qquad \alpha_n^+ = 0 \quad (n\neq 0) \tag{13.249}$$

adódik. Ezt felhasználva a Virasoro-kényszerek

$$\begin{aligned} L_n &= -\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\alpha_{n-m}^+\alpha_m^- + \alpha_{n-m}^-\alpha_m^+ - \sum_{j=1}^{d-2}\alpha_{n-m}^j\alpha_m^j\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{Q^+}{\kappa\pi}\alpha_n^- + \frac{1}{2}\alpha_n^-\frac{Q^+}{\kappa\pi} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d-2}\alpha_{n-m}^j\alpha_m^j \\ &= \alpha_0^+\alpha_n^- - \mathcal{L}_n^\perp = 0 \end{aligned} \tag{13.250}$$

alakot öltenek, ahol

$$\mathcal{L}_n^\perp = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{d-2}\alpha_{n-m}^j\alpha_m^j. \tag{13.251}$$

A Virasoro-kényszerek tehát feloldhatók az α_n^- Fourier-komponensekre nézve:

$$\alpha_n^- = \mathcal{L}_n^\perp/\alpha_0^+ \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{13.252}$$

A független változók tehát:

$$q_0^-, \quad \alpha_0^+, \quad q_0^j, \quad \alpha_n^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, d-2; \quad n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{13.253}$$

Az α_0^- komponens definició szerint arányos az energia-impulzus vektor Q^- komponensével:

$$\begin{aligned} \alpha_0^- &= Q^-/(\kappa\pi) \\ &= \frac{\kappa}{4Q^+}\int_{\tau-\pi}^{\tau+\pi} d\tau' \left[\vec{\alpha}_0^\perp + \sum_{n\neq 0}\vec{\alpha}_n^\perp e^{-in\tau}\right]^2 \\ &= \frac{\kappa}{4Q^+}\int_{\tau-\pi}^{\tau+\pi} d\tau' \left[(\vec{\alpha}_0^\perp)^2 + 2\sum_{n\neq 0}\vec{\alpha}_0^\perp\vec{\alpha}_n^\perp e^{-in\tau} + \sum_{n\neq 0}\sum_{m\neq 0}\vec{\alpha}_n^\perp\vec{\alpha}_m^\perp e^{-i(n+m)\tau}\right] \\ &= \frac{\kappa\pi}{2Q^+}(\vec{\alpha}_0^\perp)^2 + \frac{\kappa\pi}{2Q^+}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{2}\vec{\alpha}_{k-m}^\perp\vec{\alpha}_m^\perp 2\pi\delta_{k0} \\ &= \mathcal{L}_0^\perp/\alpha_0^+. \end{aligned} \tag{13.254}$$

A longitudinális mozgást elfajultnak látjuk fénykúp koordinátákban. Vegyük a jojó példáját:

A világlepedő minden $\tau = const.$ metszete azonos hosszúságú X^- irányban. A longitudinális rezgést az jellemzi, hogy $\tau_0 = M/(\sqrt{2}\kappa)$ "idő" eltelte után a világlepedő $X^+ = const.$ metszete eltolódik X^- irányban $\Delta X^- = \tau_0$ "távolságra".

14 A húr Hamilton-i mechanikája fénykúp-mértékben

A húr kvantálásához az egyik kiindulópontul a Hamilton-i tárgyalás szolgálhat. Ezért most erről fogunk beszélni. Fénykúp-mértékben az X^+, X^- és $\vec{X}^\perp$ koordinátákhoz kanonikusan konjugált impulzus-komponensek rendre $\mathcal{P}^+ = Q^+/\kappa$, $\mathcal{P}^- = \kappa \dot{X}^-$ és $\vec{\mathcal{P}}^\perp = \kappa \dot{\vec{X}}^\perp$. Az X^-, $\mathcal{P}^-$ változók nem függetlenek. A konform mértéket rögzitő feltételekből az alábbiak következnek:

(i)

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa \dot{X}^A {X_A}' = \mathcal{P}^A {X_A}' = \mathcal{P}^+ X^{-\prime} + \mathcal{P}^- X^{+\prime} - \vec{\mathcal{P}}^\perp \vec{X}^{\prime\perp} \\ &= \frac{Q^+}{\pi} X^{-\prime} - \vec{\mathcal{P}}^\perp \vec{X}^{\prime\perp}, \end{aligned} \tag{14.255}$$

ahonnan

$$X^{-\prime} = \frac{\pi}{Q^+} \vec{\mathcal{P}}^\perp \vec{X}^{\perp\prime} \tag{14.256}$$

Integráljunk σ szerint:

$$X^-(\tau,\sigma) = f(\tau) + \frac{\pi}{Q^+}\int_0^\sigma d\sigma' \vec{\mathcal{P}}^\perp \vec{X}^{\perp\prime} \tag{14.257}$$

ahol $f(\tau)$ tetszőleges függvény. Vezessük be a

$$q^-(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\sigma d\sigma X^-(\tau,\sigma) \tag{14.258}$$

koordinátát. Segítségével kifejezhetjük az $f(\tau)$ függvényt:

$$\begin{aligned} q^-(\tau) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma f(\tau) + \frac{1}{Q^+}\int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \Theta(\sigma-\sigma')\vec{\mathcal{P}}^\perp(\tau,\sigma')\vec{X}^{\perp\prime}(\tau,\sigma') \\ &= f(\tau) + \frac{1}{Q^+}\int_0^\pi d\sigma' \vec{\mathcal{P}}^\perp(\tau,\sigma')\vec{X}^{\perp\prime}(\tau,\sigma')\int_{\sigma'}^\pi d\sigma, \end{aligned} \tag{14.259}$$

ahonnan

$$f(\tau) = q^-(\tau) + \frac{1}{Q^+}\int_0^\pi d\sigma' \left(\frac{\sigma'}{\pi} - 1\right)\vec{\mathcal{P}}^\perp(\tau,\sigma')\vec{X}^{\perp\prime}(\tau,\sigma'). \tag{14.260}$$

Igy végezetül

$$X^-(\tau,\sigma) = q^-(\tau) + \frac{1}{Q^+}\int_0^\pi d\sigma' \left(\frac{\sigma'}{\pi} - 1 + \Theta(\sigma-\sigma')\right)\vec{\mathcal{P}}^\perp(\tau,\sigma')\vec{X}^{\perp\prime}(\tau,\sigma') \tag{14.261}$$

adódik.

(ii)

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{P}^A\mathcal{P}_A + \kappa^2 X^{A\prime}X_A{}' = 2\mathcal{P}^+\mathcal{P}^- - (\vec{\mathcal{P}}^\perp)^2 + \kappa^2(2X^{+\prime}X^{-\prime} - (\vec{X}^{\perp\prime})^2) \\ &= 2\frac{Q^+}{\pi}\mathcal{P}^- - (\vec{\mathcal{P}}^\perp)^2 - \kappa^2(\vec{X}^{\perp\prime})^2), \end{aligned} \tag{14.262}$$

ahonnan

$$\mathcal{P}^-(\tau,\sigma) = \frac{\pi}{2Q^+}\left[(\vec{\mathcal{P}}^\perp)^2 + \kappa^2(\vec{X}^{\perp\prime})^2)\right]. \tag{14.263}$$

A mozgásegyenleteket átirhatjuk a független dinamikai változókra vonatkozó egyenletekké:

$$\ddot{X}^+ - X^{+\prime\prime} = \ddot{X}^+ = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathcal{P}}^+ = 0, \tag{14.264}$$

$$\ddot{\vec{X}}^\perp - \vec{X}^{\perp\prime\prime} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{\mathcal{P}}}^\perp = \kappa\vec{X}^{\perp\prime\prime}, \tag{14.265}$$

$$\vec{\mathcal{P}}^\perp = \kappa\dot{\vec{X}}^\perp \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{X}}^\perp = \vec{\mathcal{P}}^\perp/\kappa, \tag{14.266}$$

$$q^- = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma X^- \qquad \Rightarrow \qquad \dot{q}^- = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^- = \frac{Q^-}{\pi}. \tag{14.267}$$

Definiáljuk a független $q_0 = q^-(\tau = 0)$, Q^+, X^j, $\mathcal{P}^j$ $(j = 1, 2, \ldots, d-2)$ változók Poisson-zárójeleit:

$$\begin{aligned}
\{X^j(\tau,\sigma), X^k(\tau,\sigma')\} &= \{\mathcal{P}^j(\tau,\sigma), \mathcal{P}^k(\tau,\sigma')\} = 0, \\
\{X^j(\tau,\sigma), \mathcal{P}^k(\tau,\sigma')\} &= \delta^{jk}\delta(\sigma-\sigma'), \\
\{q_0^-, Q^+\} &= -1, \\
\{Q^+, X^j(\tau,\sigma)\} &= \{q_0^-, X^j(\tau,\sigma)\} = \{Q^+, \mathcal{P}^j(\tau,\sigma)\} \\
&= \{q_0^-, \mathcal{P}^j(\tau,\sigma)\} = 0,
\end{aligned} \tag{14.268}$$

A Poisson-zárójel megvalósitása:

$$\begin{aligned}
\{A, B\} &= \int_0^\pi d\sigma \left[\frac{\delta A}{\delta X^j(\tau,\sigma)}\frac{\delta B}{\delta \mathcal{P}^j(\tau,\sigma)} - \frac{\delta A}{\delta \mathcal{P}^j(\tau,\sigma)}\frac{\delta B}{\delta X^j(\tau,\sigma)}\right] + \\
&\quad \frac{\partial A}{\partial Q^+}\frac{\partial B}{\partial q_0^-} - \frac{\partial B}{\partial Q^+}\frac{\partial A}{\partial q_0^-}.
\end{aligned} \tag{14.269}$$

A Hamilton-függvény szerepét

$$H = \frac{Q^+}{\kappa\pi}Q^- = \frac{1}{2\kappa}\int_0^\pi d\sigma \left[(\vec{\mathcal{P}}^\perp)^2 + \kappa^2(\vec{X}^{\perp\prime})^2\right] \tag{14.270}$$

játssza, hiszen az ebből származó Hamilton-egyenletek éppen a fentebb felírt mozgásegyenletek:

$$\dot{Q}^+ = -\frac{\partial H}{\partial q_0^-} = 0, \tag{14.271}$$

$$\dot{q}_0^- = \frac{\partial H}{\partial Q^+} = 0, \tag{14.272}$$

$$\dot{\vec{\mathcal{P}}}^\perp = -\frac{\delta H}{\delta \vec{X}^\perp(\tau,\sigma)} = \kappa \vec{X}^{\perp\prime\prime}, \tag{14.273}$$

$$\dot{\vec{X}}^\perp = \frac{\delta H}{\delta \vec{\mathcal{P}}^\perp(\tau,\sigma)} = \frac{1}{\kappa}\vec{\mathcal{P}}^\perp. \tag{14.274}$$

Fejezzük ki a mozgásegyenletek megoldását normálmódusok segitségével:

$$X^A(\tau,\sigma) = q_0^A + Q^A\frac{\tau}{\pi\kappa} + \frac{i}{\sqrt{\pi\kappa}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^A e^{-in\tau}\cos(n\sigma), \tag{14.275}$$

$$\mathcal{P}^A(\tau,\sigma) = \frac{1}{\pi}Q^A + \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^A e^{-in\tau}\cos(n\sigma). \tag{14.276}$$

Kényelmi okokból az α_n^A együtthatókból explicite leválasztottuk a $(\kappa\pi)^{-1/2}$ tényezőt.

Definiálhatjuk a Fourier-együtthatók Poisson-algebráját, amely egyenértékű a q_0^-, Q^+, $\vec{X}^\perp$, $\vec{\mathcal{P}}^\perp$ változók algebrájával:

$$\begin{aligned}
\{\alpha_n^j, \alpha_m^k\} &= -in\delta_{n,-m}\delta^{jk}, && (14.277)\\
\{q_0^j, Q^k\} &= \delta^{jk}, \qquad \{q_0^j, q_0^k\} = 0, && (14.278)\\
\{Q^j, Q^k\} &= 0, \qquad \{q_0^-, Q^+\} = -1, \quad (j,k = 1,2,\ldots,d-2). && (14.279)
\end{aligned}$$

A bizonyitás főbb lépései a következők:

(i) Belátjuk, hogy q_0^- megegyezik a fentebb definiált ugyanilyen jelű mennyiséggel. Ez nyilvánvaló, hiszen

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma X^A(\tau,\sigma) = q_0^A + Q^A\frac{\tau}{\pi\kappa}. \tag{14.280}$$

(ii) Belátjuk, hogy az

$$f'(\sigma)\mid_{\sigma=0,\pi} = 0 \tag{14.281}$$

határfeltételt kielégitő függvények terében

$$\delta(\sigma-\sigma') = \frac{1}{\pi}\left\{1 + \sum_{n\neq 0}\cos(n\sigma)\cos(n\sigma')\right\}. \tag{14.282}$$

Csakugyan, minden ilyen tulajdonságú függvényre:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi d\sigma'\frac{1}{\pi}\left\{1+\sum_{n\neq 0}\cos(n\sigma)\cos(n\sigma')\right\}.f(\sigma')\\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m\int_0^\pi d\sigma'\cos(m\sigma')\left\{1+\sum_{n\neq 0}\cos(n\sigma)\cos(n\sigma')\right\}.\\
&= f_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n\neq 0} f_m\cos(n\sigma)\frac{\pi}{2}(\delta_{nm}+\delta_{n,-m})\\
&= f_0 + \sum_{n\neq 0} f_n\cos(n\sigma) = f(\sigma).
\end{aligned} \tag{14.283}$$

Itt felhasználtuk $f(\sigma)$ Fourier-sorát:

$$f(\sigma) = f_0 + \sum_{n\neq 0} f_n\cos(n\sigma). \tag{14.284}$$

(iii) A (ii) tulajdonságot felhasználva kiszámoljuk az alábbi Poisson-zárójeleket:

$$\{X^j(\sigma), X^k(\sigma')\} =$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{ q_0^j + Q^j \frac{\tau}{\pi\kappa} + \frac{i}{\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^j e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \right. \\
&\left. q_0^k + Q^k \frac{\tau}{\pi\kappa} + \frac{i}{\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{m\neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^k e^{-im\tau} \cos(m\sigma') \right\} \\
= \; & -\frac{1}{\pi\kappa} \sum_{n\neq 0} \sum_{m\neq 0} \frac{1}{nm} (-i) n \delta_{n,-m} \delta^{jk} \cos(n\sigma) \cos(m\sigma') \\
= \; & -\frac{1}{\pi\kappa} \delta^{jk} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \cos(n\sigma) \cos(n\sigma') = 0,
\end{aligned}
\tag{14.285}
$$

$$
\{\mathcal{P}^j(\sigma), \mathcal{P}^k(\sigma')\} = 0, \tag{14.286}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{X^j(\sigma), \mathcal{P}^k(\sigma')\} = \\
&\quad \left\{ q_0^j + Q^j \frac{\tau}{\pi\kappa} + \frac{i}{\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^j e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \right. \\
&\quad \left. Q^k \frac{1}{\pi} + \sqrt{\kappa\pi} \sum_{m\neq 0} \alpha_m^k e^{-im\tau} \cos(m\sigma') \right\} \\
= \; & -\frac{1}{\pi} \delta^{jk} + \frac{i}{\pi} \sum_{n\neq 0} \sum_{m\neq 0} \frac{1}{n} (-i) n \delta_{n,-m} \delta^{jk} \cos(n\sigma) \cos(m\sigma') \\
= \; & \delta^{jk} \frac{1}{\pi} \{1 + \sum_{n\neq 0} \cos(n\sigma) \cos n\sigma')\} \\
= \; & \delta^{jk} \delta(\sigma - \sigma').
\end{aligned}
\tag{14.287}
$$

Fejezzük ki a Hamilton-függvényt a Fourier-együtthatókkal:

$$
\begin{aligned}
H \; &= \; Q^+ Q^- / (\kappa\pi) = Q^+ \alpha_0^- = Q^+ \mathcal{L}_0^\perp / \alpha_0^+ = \kappa\pi \mathcal{L}_0^\perp \\
&= \; \kappa\pi \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{-m}^j \alpha_m^j = \frac{1}{2\kappa\pi} (\vec{P}^\perp)^2 + \frac{\kappa\pi}{2} \sum_{m\neq 0} \vec{\alpha}_{-m}^\perp \vec{\alpha}_m^\perp,
\end{aligned}
\tag{14.288}
$$

ahol $\vec{P}^\perp$ a teljes impulzus transzverzális (azaz az X^0, X^{d-1} sikra merőleges) komponense.

A húr nyugalmi tömegének négyzete:

$$
\begin{aligned}
M^2 \; &= \; Q^A Q_A = 2Q^+ Q^- - (\vec{P}^\perp)^2 = 2\kappa\pi H - (\vec{P}^\perp)^2 \\
&= \; (\kappa\pi)^2 \sum_{m\neq 0} \vec{\alpha}_{-m}^\perp \vec{\alpha}_m^\perp.
\end{aligned}
\tag{14.289}
$$

A fénykúp mértékben a képleteink nem Lorentz-kovariánsak. A húr dinamikájának Lorentz-kovariáns voltáról meggyőződhetünk, ha belátjuk, hogy a Poincaré-generátorok a szokásos Poincaré-algebrát elégitik ki. Ezt a következőképpen látjuk be:

(i) Kiszámoljuk a

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{L}_n^\perp, \mathcal{L}_m^\perp\} &= -i(n-m)\mathcal{L}_{n+m}^\perp, && (14.290)\\
\{\mathcal{L}_n^\perp, \alpha_m^j\} &= im\alpha_{n+m}^j, && (14.291)\\
\{q_0^j, \mathcal{L}_m^\perp\} &= \frac{1}{\sqrt{\kappa\pi}}\alpha_m^j, \qquad (m \neq 0) && (14.292)\\
\{q_0^j, \mathcal{L}_0^\perp\} &= \frac{1}{\kappa\pi}Q^j, \qquad (m \neq 0) && (14.293)\\
& && (14.294)
\end{aligned}$$

Poisson-zárójeleket az

$$\{AB, CD\} = A\{B,C\}D + AC\{B,D\} + \{A,C\}DB + C\{A,D\}B \qquad (14.295)$$

azonosság felhasználásával.

(ii) Az $\alpha_n^- = \mathcal{L}_n^\perp/\alpha_0^+$ összefüggés alapján belátjuk, hogy a nem független α_n^- módusok algebrája azonos az $\mathcal{L}_n^\perp$ kényszerek Virasoro-algebrájával:

$$\{\alpha_n^-, \alpha_m^-\} = -i(n-m)\frac{\sqrt{\kappa\pi}}{Q^+}\alpha_{n+m}^-, \qquad (14.296)$$

továbbá, hogy

$$\begin{aligned}
\{\alpha_n^-, \alpha_m^j\} &= im\frac{\sqrt{\kappa\pi}}{Q^+}\alpha_{n+m}^j, && (14.297)\\
\{q_0^j, \alpha_m^-\} &= \frac{\alpha_m^j}{Q^+}. && (14.298)
\end{aligned}$$

(iii) A Q^A energia-impulzus vektor az eltolások generátora. Miután felbontottuk fénykúp-koordinátákra, $Q^A = (Q^+, \kappa\pi\mathcal{L}_0^\perp/Q^+, Q^j)$, kiszámoljuk a téridő-forgatások generátorait:

$$\begin{aligned}
Q^{AB} &= \int_0^\pi d\sigma(\mathcal{P}^A X^B - X^A \mathcal{P}^B)\\
&= Q^A q_0^B - Q^B q_0^A + i\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(\alpha_{-n}^A\alpha_n^B - \alpha_n^A\alpha_{-n}^B), && (14.299)
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
Q^{+-} &= Q^+ q_0^-, \qquad Q^{+j} = Q^+ q_0^j,\\
Q^{-j} &= Q^- q_0^j - q_0^- Q^j + i\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(\alpha_{-n}^-\alpha_n^j - \alpha_n^-\alpha_{-n}^j),\\
Q^{ij} &= P^i q_0^j - q_0^i P^j + i\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(\alpha_{-n}^i\alpha_n^j - \alpha_n^i\alpha_{-n}^j). && (14.300)
\end{aligned}$$

A koordinátarendszer kezdőpontját mindig választhatjuk úgy, hogy $q_0^- = q_0^j = 0$ legyen.

(iv) Ezek után meggyőződhetünk behelyettesités útján arról, hogy a $Q^A = (Q^+, \kappa\pi\mathcal{L}_0^\perp/Q^+, Q^j)$ energia-impulzus vektor és a $Q^{AB} = (Q^{+-}, Q^{+j}, Q^{-j}, Q^{ij})$ impulzusmomentum tenzor kielégiti a Poicaré-algebrát:

$$\{Q^A, Q^B\} = 0, \tag{14.301}$$
$$\{Q^A, Q^{BC}\} = i(\eta^{AB}Q^C - \eta^{AC}Q^B), \tag{14.302}$$
$$\{Q^{AB}, Q^{CD}\} = i(\eta^{BC}Q^{AD} - \eta^{BD}Q^{AC} + \eta^{AC}Q^{BD} - \eta^{AD}Q^{CB}). \tag{14.303}$$

æ

15 A Hamilton-formalizmus kovariáns tárgyalásban

Az $X^A(\tau, \sigma)$ általános koordinátákhoz kanonikusan konjugált impulzusok konform mértékben:

$$\mathcal{P}^A(\tau, \sigma) = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}_A(\tau, \sigma)} = \kappa \dot{X}^A(\tau, \sigma). \tag{15.304}$$

(Itt a hatás Nambu-Hara-Gotō alakját deriváltuk, majd felhasználtuk a mértékrögzítő feltételeket.) A húr mozgásegyenletei származtathatók a

$$H = \frac{1}{2}\int_0^{\pi\delta} d\sigma \left(\frac{1}{\kappa}\mathcal{P}^A\mathcal{P}_A + \kappa X^{A\prime}X_A{}'\right) \tag{15.305}$$

Hamilton-függvényből:

$$\dot{X}^A(\tau, \sigma) = \frac{\delta H}{\delta \mathcal{P}_A(\tau, \sigma)} = \mathcal{P}^A(\tau, \sigma)/\kappa, \tag{15.306}$$
$$\dot{\mathcal{P}}^A(\tau, \sigma) = -\frac{\delta H}{\delta X_A(\tau, \sigma)} = \kappa X^{A\prime\prime}. \tag{15.307}$$

Ha $\mathcal{P}^A$-t kiküszöböljük, akkor innen valóban az $\ddot{X}^A - X^{A\prime\prime} = 0$ hullámegyenletet kapjuk vissza. Megjegyezzük, hogy a Hamilton-függvényt nem lehet a szokásos $H = p\dot{q} - L$ összefüggéssel értelmezni, mert a húr Lagrange-függvénye elfajult, azaz X^A és $\dot{X}^A$ nem függetlenek.

Fejezzük ki a Hamilton-függvényt a húr sajátrezgéseinek amplitudóival:

$$H = \frac{\kappa}{2}\int_0^{\pi\delta} d\sigma(\dot{X}^A\dot{X}_A + X^{A\prime}X_A{}')$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\kappa}{4}\int_0^{\pi\delta} d\sigma \left[(\dot{X}^A + X^{A\prime})(\dot{X}_A + X_A{}') + (\dot{X}^A - X^{A\prime})(\dot{X}_A - X_A{}')\right] \\
&= \frac{\kappa}{4}\int_0^{\pi\delta} d\sigma \sum_{k,m}\left(\beta_{k-m}^{(+)A}\beta_{mA}^{(+)}e^{-ik(\tau+\sigma)} + \beta_{k-m}^{(-)A}\beta_{mA}^{(-)}e^{-ik(\tau-\sigma)}\right). \qquad (15.308)
\end{aligned}
$$

Nyilt húr esetén $\beta_m^{(+)A} = \beta_m^{(-)A} = \alpha_m^A$, úgyhogy

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\kappa}{2}\int_0^{\pi} d\sigma \sum_{k,m}\alpha_{-m}^A\alpha_{mA}e^{-ik\tau}\cos(k\sigma) \\
&= \frac{\kappa\pi}{2}\sum_m \alpha_{-m}^A\alpha_{mA} = \kappa\pi\left(\sum_{m>0}\alpha_m^{A*}\alpha_{mA} + \frac{1}{2}\alpha_0^A\alpha_{0A}\right) \\
&= -\kappa\pi L_0. \qquad (15.309)
\end{aligned}
$$

Ugyanakkor zárt húr esetén $\beta_m^{(\pm)A} = \alpha_m^A \pm i\tilde{\alpha}_{-m}^A$ és igy

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\kappa}{4}\int_0^{2\pi} d\sigma \sum_{k,m} e^{-ik\tau}\left(\beta_{k-m}^{(+)A}\beta_{mA}^{(+)}e^{-ik\sigma} + \beta_{k-m}^{(-)A}\beta_{mA}^{(-)}e^{ik\sigma}\right) \\
&= \frac{\kappa\pi}{2}\sum_m\left(\beta_{k-m}^{(+)A}\beta_{mA}^{(+)} + \beta_{k-m}^{(-)A}\beta_{mA}^{(-)}\right) \\
&= \kappa\pi\sum_m(\alpha_{-m}^A\alpha_{mA} - \tilde{\alpha}_m^A\tilde{\alpha}_{-mA}) \\
&= 2\kappa\pi\left[\sum_{m>0}(\alpha_m^{A*}\alpha_{mA} + \tilde{\alpha}_m^{A*}\tilde{\alpha}_{mA}) + \frac{1}{2}\alpha_0^A\alpha_{0A}\right] \\
&= -2\kappa\pi L_0. \qquad (15.310)
\end{aligned}
$$

A Hamilton-függvény tehát arányos az L_0 kényszerrel.

A mozgásegyenleteket átirhatjuk Poisson-zárójeles alakba is, amely különösen kellemes a kvantálás szempontjából. Definiáljuk az alábbi Poisson-zárójeleket:

$$
\begin{aligned}
\{X^A(\tau,\sigma), X^B(\tau,\sigma')\} &= \{\mathcal{P}^A(\tau,\sigma), \mathcal{P}^B(\tau,\sigma')\} = 0, \\
\{X^A(\tau,\sigma), \mathcal{P}^B(\tau,\sigma')\} &= -\eta^{AB}\delta(\sigma-\sigma'). \qquad (15.311)
\end{aligned}
$$

Ezt a Poisson-zárójelet megvalósítja az

$$
\{F,G\} = \int_0^{\pi\delta} d\sigma'\eta^{AB}\left(\frac{\delta F}{\delta X^A(\tau,\sigma')}\frac{\delta G}{\delta\mathcal{P}^B(\tau,\sigma')} - \frac{\delta F}{\delta\mathcal{P}^A(\tau,\sigma')}\frac{\delta G}{\delta X^B(\tau,\sigma')}\right) \qquad (15.312)
$$

előirás, ahol F és G két tetszőleges fizikai mennyiség, az X^A és $\mathcal{P}^A$ tetszőleges funkcionáljai. A Poisson-zárójelek segítségével a mozgásegyeneletek az alábbi alakot öltik:

$$
\dot{X}^A = \{X^A, H\} = \mathcal{P}^A/\kappa, \qquad (15.313)
$$

$$
\dot{\mathcal{P}}^A = \{\mathcal{P}^A, H\} = \kappa X^{A\prime\prime}. \qquad (15.314)
$$

Az X^A, $\mathcal{P}^A$ változók azonban nem függetlenek, mint tudjuk, hanem a

$$\begin{aligned}\chi_0 &= \frac{1}{2\kappa}\mathcal{P}^A\mathcal{P}_A + \frac{\kappa}{2}X^{A\prime}X_A{}' = 0, \qquad (15.315)\\ \chi_1 &= \mathcal{P}^A X_A{}' = 0 \qquad (15.316)\end{aligned}$$

kényszereknek tesznek eleget. A Dirac által bevezetett értelemben ezek ún. első osztályú kényszerek, mert $\{\chi_0, \chi_1\}$ és $\{\chi_a, H\}$ $(a = 1, 2)$ a kényszerek lineáris kombinációi:

$$\begin{aligned}\{\chi_a(\sigma), \chi_b(\sigma')\} &= \int_0^{\pi\delta} d\sigma'' C^c_{ab}(\sigma, \sigma'; \sigma'')\chi(\sigma''), \qquad (15.317)\\ \{\chi_a(\sigma), H\} &= \int_0^{\pi\delta} d\sigma' V_a^b(\sigma; \sigma')\chi_b(\sigma'), \qquad (15.318)\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}C^c_{ab}(\sigma, \sigma'; \sigma'') &= 2\delta^c_0\epsilon_{ab}\delta(\sigma - \sigma'')\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma'), \qquad (15.319)\\ V_0^1(\sigma; \sigma') &= V_1^0(\sigma; \sigma') = \partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma'), \qquad (15.320)\\ V_0^0(\sigma; \sigma') &= V_1^1(\sigma; \sigma') = 0. \qquad (15.321)\end{aligned}$$

A $\{\chi_a, H\}$ Poisson-zárójelek kiszámolásakor felhasználtuk az

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B \qquad (15.322)$$

azonosságot. A (15.317) egyenletek a kényszerek algebráját definiálják valamely rögzitett időpillanatban, a (15.318) egyenletek pedig a kényszerek időbeli állandóságát biztosítják, hiszen $\dot{\chi}_a = \{\chi_a, H\} = 0$ a kényszerek által megszabott hiperfelületen.

A χ_a kényszerek azokat az infinitezimális koordinátatranszformációkat generálják, amelyek nem vezetenek ki a konform mértékből. Ezek az infinitezimális konform transzformációk. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Legyenek $\delta\xi^\alpha(\tau, \sigma)$ infinitezimális függvények a két-dimenziós homogén hullámegyenlet megoldásai, és F tetszőleges fizikai mennyiség. Definiáljuk F infinitezimális megváltozását az

$$\delta_\xi F = \left\{F, \int_0^{\pi\delta} d\sigma\delta\xi^\alpha(\tau, \sigma)\chi_\alpha(\tau, \sigma)\right\} \qquad (15.323)$$

összefüggés révén. Vegyük pl. az $F = X^A$ esetet:

$$\begin{aligned}\delta_\xi X^A(\tau, \sigma) &= \left\{X^A(\tau, \sigma), \int_0^{\pi\delta} d\sigma'\delta\xi^\alpha(\tau, \sigma')\chi_\alpha(\tau, \sigma')\right\}\\ &= \delta\xi^0(\tau, \sigma)\mathcal{P}^A(\tau, \sigma)/\kappa + \delta\xi^1(\tau, \sigma)X^{A\prime}(\tau, \sigma)/\kappa +\\ &= \delta\xi^0\partial_\tau X^A + \delta\xi^1\partial_\sigma X^A. \qquad (15.324)\end{aligned}$$

Innen látjuk, hogy $\delta_\xi X^A$ éppen megfelel a $\tau \to \tau + \delta\xi^0$, $\sigma \to \sigma + \delta\xi^1$ infinitezimális koordinátatranszformációnak. A kényszerek az (15.317) összefüggések értelmében nem változnak meg ezen transzformáció során, hiszen

$$\delta_\xi \chi_a = \{\chi_a, \int d\sigma' \delta\xi^b \chi_b\} = \int d\sigma' \int d\sigma'' C^c_{ab} \chi_c = 0 \tag{15.325}$$

a kényszerek által kijelölt hiperfelületen. A kényszerek tehát valóban olyan infinitezimális koordinátatranszformációkat generálnak, amelyek nem vezetnek le a kényszerek által kijelölt hiperfelületről.

Beláthatjuk, hogy az infinitezimális konform transzformációk algebrája zárt a kommutátor-müveletre nézve, vis. ha $\delta\xi$ és $\delta\eta$ a két-dimenziós homogén hullámegyenlet két tetszőleges infinitezimális megoldása, akkor létezik olyan $\delta\zeta$ infinitezimális megoldás is, amelyre

$$[\delta_\xi, \delta_\eta] = \delta_\xi \delta_\eta - \delta_\eta \delta_\xi = \delta_\zeta. \tag{15.326}$$

Csakugyan, ha alkalmazzuk a baloldali kommutátort egy tetszőleges .F fizikai .mennyiségre, akkor az eredmény

$$[\delta_\xi, \delta_\eta] F = \left\{ F, \int_0^{\pi\delta} d\sigma'' \delta\zeta^c(\sigma'') \chi_c(\sigma'') \right\} \tag{15.327}$$

alakba írható, ahol

$$\begin{aligned} \delta\zeta^c(\sigma'') &= \int_0^{\pi\delta} d\sigma \int_0^{\pi\delta} d\sigma' \delta\xi^a(\sigma) \delta\eta^b(\sigma') C^c_{ba}(\sigma', \sigma; \sigma'') \\ &= 2\left(\delta\xi^1(\sigma'')\partial_{\sigma'}\delta\eta^0(\sigma') - \delta\xi^0(\sigma'')\partial_{\sigma'}\delta\eta^1(\sigma')\right). \end{aligned} \tag{15.328}$$

Mivel $\delta\xi^\alpha$ és $\delta\eta^\alpha$ a kétdimenziós hullámegyenlet megoldásai, azért $\delta\zeta^\alpha$ is az.

Térjünk át most harmonikus oszcillátor koordinátákra. A nyílt húr példáján megmutatjuk, hogy a kényszerek algebrája a Virasoro-algebra. Az új változók Poisson-algebrája:

$$\{\alpha^A_n, \alpha^B_m\} = in\delta_{n,-m}\eta^{AB}, \tag{15.329}$$

$$\{q^A_0, Q^B\} = -\eta^{AB}. \tag{15.330}$$

Ez az algebra egyenértékű a (15.311) algebrával, mint arról a húr

$$X^A(\tau, \sigma) = q^A_0 + \frac{Q^A}{\kappa\pi}\tau + \frac{i}{\sqrt{\kappa\pi}} \sum_{n\neq 0} \alpha^A_n e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \tag{15.331}$$

$$\mathcal{P}^A(\tau, \sigma) = \frac{Q^A}{\pi} + \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \sum_{n\neq 0} \alpha^A_n e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \tag{15.332}$$

sorfejtését felhasználva könnyen meggyőződhetünk.

Képezzük most a kényszerekből a

$$\chi^{\pm} = \chi_0 \pm \chi_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\mathcal{P}^A \pm \sqrt{\frac{\kappa}{2}}X^{A\prime}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\mathcal{P}_A \pm \sqrt{\frac{\kappa}{2}}X_A{}'\right) \qquad (15.333)$$

kombinációkat. Helyettesitsük be a húr sorfejtését. Azonos átalakitások után

$$\chi_{\pm} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n,m}\alpha_n^A\alpha_{mA}e^{-i(n+m)\sigma^{\pm}} \qquad (15.334)$$

adódik, ahonnan látjuk, hogy χ_+ (χ_-) csak a σ^+ (σ^-) változótól függ. Végezzük el az $m+n \to n$ átjelölést, ekkor

$$\chi_{\pm}(\sigma^{\pm}) = \frac{1}{2\pi}\sum_n e^{-in\sigma^{\pm}}\sum_m \alpha_{n-m}^A\alpha_{mA} = 0, \qquad (15.335)$$

ahonnan az

$$L_n = -\frac{1}{2}\sum_m \alpha_{n-m}^A\alpha_{mA} = 0 \qquad (15.336)$$

Virasoro-kényszerek adódnak. A Hamilton-függvény $H = -L_0$.

A kényszerek első osztályúak:

$$\{L_m, L_n\} = C_{mn}^k L_k = -i(m-n)L_{m+n}, \qquad (15.337)$$

$$\{L_m, H\} = V_m^k L_k = imL_m, \qquad (15.338)$$

ahol

$$C_{mn}^k = -i(m+n)\delta_{m+n}^k, \qquad V_m^k = -C_{m0}^k = im\delta_m^k. \qquad (15.339)$$

Ennek belátásához felhasználjuk az

$$\{AB, CD\} = A\{B,C\}D + AC\{B,D\} + \{A,C\}DB + C\{A,D\}B \qquad (15.340)$$

azonosságot:

$$\begin{aligned}\{L_m, L_n\} &= \frac{1}{4}\sum_{k,l}\{\alpha_{m-k}^A\alpha_{kA}, \alpha_{n-l}^B\alpha_{lB}\} \\ &= \frac{i}{4}\sum_{k,l}(k\alpha_{m-k}^A\alpha_{l\,A}\delta_{k\;l-n} + k\alpha_{m-k}^A\alpha_{n-l\,A}\delta_{k\;-l} \\ &\quad +(m-k)\alpha_{l\,A}\alpha_k^A\delta_{k-m\;n-l} + (m-k)\alpha_{n-l}^A\alpha_{kA}\delta_{k-m\;l}) \\ &= \frac{i}{2}\sum_k k\alpha_{m-k}^A\alpha_{k+n\,A}\frac{i}{2}\sum_k(m-k)\alpha_{m-k+n}^A\alpha_{k\,A}. \end{aligned} \qquad (15.341)$$

Térjünk át az első tagban a $k' = k + n$ összegző index használatára:

$$\begin{aligned}
\{L_m, L_n\} &= \frac{i}{2}\sum_{k'}(k'-n)\alpha^A_{m-k'+n}\alpha_{k'A} + \frac{i}{2}\sum_k (m-k)\alpha^A_{m-k+n}\alpha_{kA} \\
&= \frac{i}{2}\sum_k (m-n)\alpha^A_{m-k+n}\alpha_{kA} \\
&= -i(m-n)L_{m+n}. \qquad (15.342)
\end{aligned}$$

Ezt akartuk belátni.

Az α^A_n, q^A_0 változókat úgy tekinthetjük, mint a $\tau = 0$ pillanatbeli kezdeti értékeket, amelyekre teljesül a Poisson-algebra. Ezen változók időfüggéséhez úgy jutunk, hogy képezzük az

$$\begin{aligned}
\{L_n, \alpha^A_m\} &= -im\alpha^A_{m+n}, \qquad (15.343) \\
\{L_m, q^A_0\} &= \frac{1}{\sqrt{\kappa\pi}}\alpha^A_m \qquad (15.344)
\end{aligned}$$

Poisson-zárójeleket, majd segítségükkel a mozgásegyenleteket:

$$\begin{aligned}
\dot\alpha^A_m &= \{\alpha^A_m, H\} = -\{\alpha^A_m, L_0\} = -im\alpha^A_m, \qquad (15.345) \\
\dot q^A_0 &= \{q^A_0, H\} = -\{q^A_0, L_0\} = \frac{1}{\sqrt{\kappa\pi}}\alpha^A_0 = \frac{Q^A}{\kappa\pi} \qquad (15.346)
\end{aligned}$$

A mozgásegyenletek megoldása:

$$\begin{aligned}
\alpha^A_m(\tau) &= \alpha^A_m(0)e^{-im\tau}, \\
q^A_0(\tau) &= q^A_0 + \frac{Q^A}{\kappa\pi}\tau. \qquad (15.347)
\end{aligned}$$

A húr Fourier-sorfejtésében valóban ezek az időfüggő együtthatók szerepelnek:

$$\begin{aligned}
X^A(\tau,\sigma) &= q^A_0(\tau) + \frac{i}{\sqrt{\kappa\pi}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^A_n(\tau)\cos(n\sigma), \qquad (15.348) \\
\mathcal{P}^A(\tau,\sigma) &= \kappa\dot q^A_0(\tau) + \sum_{n\neq 0}\alpha^A_n(\tau)\cos(n\sigma). \qquad (15.349)
\end{aligned}$$

A korábbiakban már láttuk, hogy a kényszerek az infinitezimális konform transzformációkat generálják. Irjuk át $\delta_\xi F$ kifejezését az

$$\begin{aligned}
\delta\xi^\alpha\chi_\alpha &= \frac{1}{2}\left(\delta\xi^+(\sigma^+)\chi_+(\sigma^+) + \delta\xi^-(\sigma^-)\chi_-(\sigma^-)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_n L_n\left(\delta\xi^+(\sigma^+)e^{-in\sigma^+} + \delta\xi^-(\sigma^-)e^{-in\sigma^-}\right) \qquad (15.350)
\end{aligned}$$

azonosság felhasználásával:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi F &= \left\{F, \int_0^\pi d\sigma \delta\xi^\alpha \chi_\alpha\right\} \\
&= \{F, -\sum_n L_n \delta\xi_n\} = -\sum_n \delta\xi_n \{F, L_n\}, \qquad (15.351)
\end{aligned}$$

ahol bevezettük a

$$\delta\xi_n = \frac{1}{2}(\delta\xi_n^+ + \delta\xi_n^-) \qquad (15.352)$$

jelölést.

Az infinitezimális konform transzformációk algebrája zárt, mert léteznek olyan $\delta\zeta_k$ paraméterek, hogy tetszőleges $\delta\xi_m$ és $\delta\eta_n$ paraméterekkel adott infinitezimális konform transzformációk kommutátora, $[\delta_\xi, \delta_\eta]$ éppen a $\delta\zeta_k$ paraméterekkel adott konform transzformáció, vis.

$$[\delta_\xi, \delta_\eta] = \delta_\zeta, \qquad (15.353)$$

ahol

$$\delta\zeta_k = \sum_{n,m} C^k_{nm} \delta\xi_m \delta\eta_n = -i(n-m)\delta^k_{m+n}\delta\xi_m\delta\eta_n. \qquad (15.354)$$

A koordináták maguk nem konforminvariánsak:

$$\delta_\xi \alpha^A_m = -\{\alpha^A_m, \sum_n L_n \delta\xi_n\} = im \sum_n \delta\xi_n \alpha^A_{n+m}, \qquad (15.355)$$

$$\delta_\xi q^A_0 = -\{q^A_0, \sum_n L_n \delta\xi_n\} = \frac{1}{\sqrt{\kappa\pi}} \sum_n \delta\xi_n \alpha^A_n. \qquad (15.356)$$

A kényszerek ezzel szemben konforminvariánsak:

$$\delta_\xi L_m = -\{L_m, \sum_n L_n \delta\xi_n\} = i \sum_n \delta\xi_n (m-n) L_{m+n} = 0. \qquad (15.357)$$

A Poincaré-csoport generátorai

$$\begin{aligned}
Q^A &= \sqrt{\kappa\pi}\alpha^A_0, \qquad (15.358) \\
Q^{AB} &= \sqrt{\kappa\pi}(\alpha^A_0 q^B_0 - q^A_0 \alpha^B_0) \\
&\quad + i \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(\alpha^A_{-n}\alpha^B_n - \alpha^A_n \alpha^B_{-n}) \qquad (15.359)
\end{aligned}$$

alakúak. Az explicit kovariáns tárgyalásmód biztositja az elmélet Poincaré-invarianciáját. A Poincaré-generátorok egyúttal konforminvariánsak is:

$$\begin{aligned}
\{Q^A, L_n\} &= \sqrt{\kappa\pi}\{\alpha^A_0, L_n\} = 0, \qquad (15.360) \\
\{Q^{AB}, L_m\} &= 0. \qquad (15.361)
\end{aligned}$$

æ

16 Az η-mértékben megfogalmazott elmélet Lorentz-kovariáns általánosítása

A kovariáns tárgyalásmód hátránya az η-mértékben történő tárgyalással szemben abban nyilvánul meg, hogy a húr leirása nem független dinamikai változók segítségével történik. Ugyanakkor az η-mérték használata esetén az elmélet Lorentz-invarianciája nem jut explicit módon kifejezésre. Most megmutatjuk, hogy bevezethetők olyan kovariáns és konform invariáns koordináták, amelyek az η-mértékben használtak általánositásai, azaz amelyekben a húr dinamikáját megszabó Poisson-algebra izomorf az η-mértékben használt koordináták algebrájával. Az új tárgyalásmód előnye a későbbi kvantálás során abban nyilvánul meg, hogy a húr longitudinális módusait sem veszitjük el.

Az új változókat definiáljuk az alábbi módon:

$$\mathcal{Q}^A(\eta) = \mathcal{Q}^A(\eta; \alpha_k^B, q_0^B) = -\frac{Q^{AC}\eta_C}{Q^B\eta_B}, \tag{16.362}$$

$$\mathcal{A}_n^A(\eta) = \mathcal{A}_n^A(\eta; \alpha_k^B, q_0^B) = \frac{\sqrt{\kappa\pi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau \dot{Y}^A(\tau)\phi_n, \tag{16.363}$$

ahol

$$\phi_n = \exp\left(in\eta_B Y^B(\tau)/\lambda\right), \tag{16.364}$$

η^A az η-mérték rögzitéséhez használt időszerű vagy fényszerű vektor, $\lambda = \eta_C Q^C/\kappa\pi$, és a direktrix Fourier-kifejtése

$$Y^A(\tau) = q_0^A + \frac{Q^A}{\kappa\pi}\tau + \frac{i}{\sqrt{\kappa\pi}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^A e^{-in\tau}. \tag{16.365}$$

Definiciójukból következően ezek az új válktozók Lorentz-kovariánsak.

Megmutatjuk, hogy az új változók konform invariánsak is. A Q^{AB} impulzusmomentum tenzor és a Q^A energia-impulzus vektor konform invariánsak, amiből következik, hogy $\delta_\xi \mathcal{Q}^A(\eta) = 0$, azaz

$$\{\mathcal{Q}^A(\eta), L_n\} = 0. \tag{16.366}$$

Képezzük most az $\mathcal{A}_n^A$ konform transzformációját meghatározó Poisson-zárójelet:

$$\{\mathcal{A}_n^A, L_m\} = \frac{\sqrt{\kappa\pi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau\left(\dot{Y}^A(\tau)\{\phi_n, L_m\} + \{\dot{Y}^A(\tau), L_m\}\phi_n\right). \tag{16.367}$$

Ha felhasználjuk az

$$\{A^k, B\} = kA^{k-1}\{A, B\} \tag{16.368}$$

azonosságot, akkor az alábbi összefüggések adódnak:

$$
\begin{aligned}
\{\phi_n, L_m\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\{(\ln\phi_n)^k, L_m\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (\ln\phi_n)^{k-1}\{\ln\phi_n, L_m\} \\
&= \phi_n \frac{in\eta_C}{\lambda}\left\{q_0^C + \frac{Q^C}{\kappa\pi}\tau + \frac{i}{\sqrt{\kappa\pi}}\sum_{\ell\neq 0}\frac{1}{\ell}\alpha_\ell^C e^{-i\ell\tau}, L_m\right\} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\kappa\pi}}\phi_n\frac{in\eta_C}{\lambda}\left(\alpha_m^C + \sum_{\ell\neq 0}\alpha_{\ell+m}^C e^{-i\ell\tau}\right) \\
&= -\phi_n\frac{in\eta_C}{\lambda}e^{im\tau}\dot{Y}^C(\tau), \qquad (16.369) \\
\{\dot{Y}^A(\tau), L_m\} &= \frac{1}{\sqrt{\kappa\pi}}\sum_\ell\{\alpha_\ell^A e^{-i\ell\tau}, L_m\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\kappa\pi}}\sum_\ell e^{-i\ell\tau} i\ell\alpha_{\ell+m}^A \\
&= -\frac{d}{d\tau}\left(e^{im\tau}\dot{Y}^A(\tau)\right). \qquad (16.370)
\end{aligned}
$$

Végezetül tehát azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{A}_n^A, L_m\} &= -\frac{\sqrt{\kappa\pi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau\left(\dot{Y}^A(\tau)\phi_n\ln\phi_n e^{im\tau} + \frac{d}{d\tau}\left(e^{im\tau}\dot{Y}^A(\tau)\right)\phi_n\right) \\
&= -\frac{\sqrt{\kappa\pi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau\frac{d}{d\tau}\left(e^{im\tau}\dot{Y}^A(\tau)\phi_n\right) \\
&= -\frac{\sqrt{\kappa\pi}}{2\pi}\left[\dot{Y}^A(\tau)\phi_n\right]_{\tau=0}^{\tau=2\pi} = 0, \qquad (16.371)
\end{aligned}
$$

hiszen

$$
Y^A(2\pi) \;=\; Y^A(0) + 2Q^A/\kappa, \qquad (16.372)
$$

úgyhogy

$$
\ln\phi_n(2\pi) = \ln\phi_n(0) + 2n\pi. \qquad (16.373)
$$

Hosszadalmas, de valójában elemi számolás útján beláthatók még az alábbiak.

(i) A fázistérnek az $L_n = 0$ kényszerek által definiált hiperfelületén

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_n^A(\eta; \alpha_{k\eta}^B, q_{0\eta}^B) &= \alpha_{n\eta}^A, \qquad (16.374) \\
\mathcal{Q}^A(\eta; \alpha_{k\eta}^B, q_{0\eta}^B) &= q_{0\eta}^A \qquad (16.375)
\end{aligned}
$$

éppen a húr Fourier-amplitudói az η-mértékben.

(ii) Az új változók Poisson-algebrája izomorf az η-mértékben használt változók Poisson-algebrájával:

$$
\begin{array}{ll}
\eta\text{-mérték} & \text{általánositás} \\
\{\alpha_n^j, \alpha_m^k\} = -in\delta_{-m\,n}\delta^{jk} & \{\mathcal{A}_n^j, \mathcal{A}_m^k\} = -in\delta_{-m\,n}\delta^{jk} \\
\{\alpha_n^-, \alpha_m^j\} = im\frac{\sqrt{\kappa\pi}}{Q^+}\alpha_{n+m}^j & \{\mathcal{A}_n^-, \mathcal{A}_m^j\} = im\frac{\sqrt{\kappa\pi}}{Q^+}\mathcal{A}_{n+m}^j \\
\{\alpha_n^-, \alpha_m^-\} = -i(n-m)\frac{\sqrt{\kappa\pi}}{Q^+}\alpha_{n+m}^- & \{\mathcal{A}_n^-, \mathcal{A}_m^-\} = -i(n-m)\frac{\sqrt{\kappa\pi}}{Q^+}\mathcal{A}_{n+m}^- \\
\{q_0^j, Q^k\} = \delta^{jk} & \{\mathcal{Q}^j, Q^k\} = \delta^{jk} \\
\{q_0^-, Q^+\} = -1 & \{\mathcal{Q}^-, Q^+\} = -1
\end{array}
\tag{16.376}
$$

Itt a $v^+ = \eta_A v^A$ és $v^- = \nu_A v^A$ jelölést használtuk, ahol ν^A az η^A-ra ortogonális egységvektor az η^A és az időtengely síkjában.

(iii) Az η-mértékben a koordináták az $L_n = 0$ hiperfelületre vannak korlátozva, és ebből következik, hogy

$$\alpha_n^- \;=\; \kappa\pi\mathcal{L}_n^\perp/Q^+, \tag{16.377}$$

ahol

$$\mathcal{L}_n^\perp \;=\; -\frac{1}{2}\sum_m\sum_{j=1}^{d-2}\alpha_{n-m}^j\alpha_m^j. \tag{16.378}$$

Ugyanakkor az általánositott koordináták az α_n^A-k teljes fázisterében eleget tesznek az

$$\eta_A\mathcal{Q}^A = 0, \qquad \eta_A\mathcal{A}_n^A = 0 \quad (n \neq 0) \tag{16.379}$$

relációknak. Vezessük be az

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_0^A &= \frac{1}{\kappa\pi}Q^A, \\
\bar{L}_n &= -\frac{1}{2}\sum_m\mathcal{A}_{n-m}^A\mathcal{A}_{mA}
\end{aligned}
\tag{16.380}
$$

jelöléseket. Az $L_n = 0$ kényszerek helyettesithetők az $\bar{L}_n = 0$ kényszerekkel, uis. $\bar{L}_n = L_n$ a kényszerek által megszabott hiperfelületen. Ez nyilvánvaló, hiszen az általánositott koordinaták ezen a hiperfelületen azonosak az η-mértékben használtakkal. Közvetlen számolással beláthatjuk, hogy az $\bar{L}_n$ kényszerek a Virasoro-algebrának tesznek eleget:

$$\{\bar{L}_n, \bar{L}_m\} \;=\; -i(n-m)\bar{L}_{n+m} \tag{16.381}$$

Az $\bar{L}_n = 0$ kényszerek feloldhatók, és $\mathcal{A}_n^-$ $(n \neq 0)$ kifejezhetők a transzverzális koordinátákkal, mivel $\mathcal{A}_n^+ = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{L}_n = -\frac{1}{2}\sum_m (\mathcal{A}_{n-m}^+ \mathcal{A}_m^- + \mathcal{A}_{n-m}^- \mathcal{A}_m^+ - \sum_{j=1}^{d-2} \mathcal{A}_{n-m}^j \mathcal{A}_m^j) \\ &= -\frac{1}{2}(\mathcal{A}_0^+ \mathcal{A}_n^- + \mathcal{A}_0^- \mathcal{A}_n^+ - \frac{1}{2}\sum_m \sum_{j=1}^{d-2} \mathcal{A}_{n-m}^j \mathcal{A}_m^j), \end{aligned} \tag{16.382}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^- &= -\frac{\sqrt{\kappa\pi}}{2Q^+}\sum_m \sum_{j=1}^{d-2} \mathcal{A}_{n-m}^j \mathcal{A}_m^j \\ &= \frac{\sqrt{\kappa\pi}}{Q^+}\bar{\mathcal{L}}_n^\perp \quad (n \neq 0). \end{aligned} \tag{16.383}$$

Az algebrák izomorfiája miatt:

$$\{\bar{\mathcal{L}}_n^\perp, \bar{\mathcal{L}}_m^\perp\} = -i(n-m)\bar{\mathcal{L}}_{n+m}^\perp. \tag{16.384}$$

A bevezetett új változók konforminvarianciája kifejezhető

$$\{\mathcal{A}_n^A, \bar{L}_m\} = 0, \qquad \{\mathcal{Q}^A, \bar{L}_m\} = 0 \tag{16.385}$$

alakban. A húr nyugalmi tömegének négyzete:

$$\begin{aligned} M^2 &= Q^A Q_A = \kappa\pi \mathcal{A}_0^A \mathcal{A}_{0A} \\ &= -2\kappa\pi(\bar{L}_0 + \sum_{m>0}\sum_j \mathcal{A}_{-m}^j \mathcal{A}_m^j). \end{aligned} \tag{16.386}$$

Irodalom

[1] L. Brink and M. Henneaux, *Principles of String Theory* (Plenum Press, New York, 1987)

[2] J. Scherk, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975), 123

æ