MECHANIKA I. Gyakorlat

Sailer Kornél

Segédanyag számolási gyakorlathoz

Elméleti Fizikai Tanszék
Debreceni Egyetem
Debrecen
2009.

Contents

FELADATOK

1 . gyakorlat

1. Pontrészecske helyzetvektorának Descartes-komponensei
$$\underline{r}^T = (1, -2, 5). \tag{1.1}$$
Milyen távolságra van a részecske az origótól? Milyen szögeket zár be a helyzetvektor az egyes koordináta-tengelyekkel?

2. Két részecske rendre az $\underline{r}_1^T = (1, -2, 5)$, $\underline{r}_2^T = (1, 3, 2)$ helyzetvektorú pontokban helyezkedik el. Milyen távolságra van a két részecske egymástól? Milyen szögeket zár be a relatív helyzetvektor a koordináta-tengelyekkel?

3. Legyen adott két vektor a Descartes-komponenseivel: $\underline{a}^T = (1, -2, 5)$, $\underline{b}^T = (1, 3, 2)$. Határozzuk meg:
   (a) $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ Descartes-komponenseit,
   (b) az $\mathbf{a}{\cdot}\mathbf{b}$ skalárszorzat értékét (a skalárszorzat definíciója alapján, a skalárszorzat Descartes-komponensekkel kifejezett alakja alapján),
   (c) az $(\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$ szög koszinuszát,
   (d) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$-t, és $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$-t (egyrészt a Descartes-komponensekkel kifejezve, másrészt a koszinusz-tétel segítségével).

4. A 2-dimenziós síkon adott két-két vektor a Descartes-komponenseivel,
   (a) $\underline{a}^T = (1, 2)$, $\underline{b}^T = (2, 4)$, ill.
   (b) $\underline{a}^T = (1, 2)$, $\underline{b}^T = (1, 4)$.

   Lineárisan függetlenek-e ezek a vektorok?

5. Határozzuk meg a bázistranszformáció mátrixát, ha az $\{\mathbf{E}_{(i)'}\}$ ortonormált bázist az $\mathbf{E}_{(i)}$ ortonormált bázisból az $\mathbf{E}_{(3)}$ irány körüli α szögű elforgatással kaptuk. ($\mathbf{E}_{(i)'} = \sum_{j=1}^{3} O_{i,j}\mathbf{E}_{(j)}$, ahol $O_{i,j}$ a bázistranszformáció mátrixa.)

   Mutassuk meg, hogy $\underline{\underline{O}}$ ortogonális mátrix, amelynek determinánsa $\det \underline{\underline{O}} = +1$.

6. A 3-dimenziós térben adott az $\{\mathbf{E}_{(i)}\}$ ortonormált bázis és az $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{E}_{(i)}$ vektor. Legyen $\{\mathbf{E}_{(i)'}\}$ egy másik ortonormált bázis, amelyet az $\{\mathbf{E}_{(i)}\}$ bázisból az $\underline{\underline{O}}$ ortogonális transzformációval kaptunk. Legyenek az $\{\mathbf{E}_{(i)'}\}$ bázisban az $\mathbf{a}$ vektor komponensei a'_i, azaz $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a'_i\mathbf{E}_{(i)'}$. Fejezze ki az a'_i vektor-komponenseket az a_i vektor-komponensek segítségével.

7. Legyen $\underline{\underline{P}}$ a tértükrözés mátrixa, amely definíció szerint minden bázisvektort az ellentettjébe visz át:

$$\mathbf{E}_{(i)} \xrightarrow{\underline{\underline{P}}} \mathbf{E}_{(i)'} = -\mathbf{E}_{(i)}. \tag{1.2}$$

Határozza meg a $\underline{\underline{P}}$ mátrix elemeit! Mutassa meg, hogy $\underline{\underline{P}}$ ortogonális mátrix, amelynek determinánsa $\det \underline{\underline{P}} = -1$.

8. Adott a $\mathbf{v}$ és az $\mathbf{a}$ vektor. Bontsa fel az $\mathbf{a}$ vektort $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos $\mathbf{a}_{\parallel}$ és arra merőleges $\mathbf{a}_{\perp}$ vektorkomponensekre, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$.

   Határozza meg azokat a $\underline{\underline{P}}_{\parallel}$ és $\underline{\underline{P}}_{\perp}$ mátrixokat, amelyek a tetszőleges $\mathbf{v}$ vektort rendre az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos irányra, ill. az arra merőleges síkra vetítik. Mutassa meg, hogy

   (a) $\underline{\underline{P}}_{\parallel}\underline{\underline{P}}_{\parallel} = \underline{\underline{P}}_{\parallel}$,

   (b) $\underline{\underline{P}}_{\perp}\underline{\underline{P}}_{\perp} = \underline{\underline{P}}_{\perp}$,

   (c) $\underline{\underline{P}}_{\parallel}\underline{\underline{P}}_{\perp} = \underline{\underline{P}}_{\perp}\underline{\underline{P}}_{\parallel} = \underline{\underline{0}}$.

2 . gyakorlat

1. Részecske 1-dimenziós mozgást végez az x-tengely mentén, x-koordinátája az alábbi módon változik a t idő függvényében:

$$x(t) = A\cos(\omega(t)t), \tag{2.3}$$

ahol $\omega(t) = Bt + \omega_0$ és A, B és ω_0 időtől független állandók. Határozza meg a részecske $v_x(t)$ sebességét és $a_x(t)$ gyorsulását!

2. Legyen a Descartes-koordinátarendszer x és y-tengelyei által meghatározott sík vízszintes, a z-tengely mutasson függőlegesen felfelé. Egy részecske a koordinátarendszer origójából indult $v_{0x} = v_0\cos\alpha$, $v_{0z} = v_0\sin\alpha$, $v_{0y} = 0$ kezdősebességgel, ahol $\alpha \in (0, \pi/2)$ állandó és gyorsulása $a_x(t) = a_y(t) = 0$, $a_z(t) = -g$.

   (a) Határozza meg a sebességvektor Descartes-komponenseit, mint az idő függvényét!

   (b) Határozza meg a pályagörbe paraméteres egyenletét! Használja a t időt paraméterként.

   (c) Határozza meg a pályagörbe egyenletét $z = f(x, y)$ alakban, ill. $F(x, y, z) = 0$ alakban.

   (d) Határozza meg a pályagörbe azon ívhosszelemének ds hosszát, amelyet a részecske a $(t, t + dt)$ infinitezimális időintervallumban fut be!

   (e) Határozza meg a részecske által az origóból történő elindulástól számítva eltelt t idő alatt megtett $s(t)$ utat!

(f) Határozza meg a részecske $\mathbf{a}$ gyorsulásvektorának érintőirányú (tangenciális) $\mathbf{a}_t$ és az érintőre merőleges $\mathbf{a}_\perp$ vektorösszetevőjét.

3. Határozza meg a síkbeli (r, φ) polárkoordináták és az (x, y) Descartes-koordináták kapcsolatát! Fejezze ki a síkbeli polárkoordinátarendszer lokális $\mathbf{E}_{(r)}$, $\mathbf{E}_{(\varphi)}$ bázisvektorait a Descartes-koordinátarendszer $\mathbf{E}_{(1)}$, $\mathbf{E}_{(2)}$ bázisvektoraival, azaz határozza meg annak a lokális bázistranszformációnak a mátrixát, amely az $\mathbf{E}_{(1)}$, $\mathbf{E}_{(2)}$ bázisból előállítja az $\mathbf{E}_{(r)}$, $\mathbf{E}_{(\varphi)}$ bázist!

4. Az előző feladat eredményeit felhasználva fejezze ki a sík két infinitezimálisan közeli, $\mathbf{r}$ és $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontja által meghatározott $d\mathbf{r}$ relatív helyzetvektort az $\mathbf{r}$ helyzetvektorú ponthoz tartozó $\mathbf{E}_{(r)}$, $\mathbf{E}_{(\varphi)}$ bázisvektorokkal! Adja meg az infinitezimális felületelem kifejezését síkbeli polárkoordinátákban.

5. Határozza meg az (r, θ, φ) gömbi polárkoordináták és a Descartes-koordináták kapcsolatát! Fejezze ki a gömbi polár-koordinátarendszer $\mathbf{E}_{(r)}$, $\mathbf{E}_{(\varphi)}$, $\mathbf{E}_{(\theta)}$ lokális bázisvektorait a Descartes-koordináta-rendszer $\mathbf{E}_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ bázisvektoraival.

6. Az előző feladat eredményeit felhasználva fejezze ki a két infinitezimálisan közeli, $\mathbf{r}$ és $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ helyzetvektorú pont által meghatározott $d\mathbf{r}$ relatív helyzetvektort az $\mathbf{r}$ helyzetvektorú ponthoz tartozó $\mathbf{E}_{(r)}$, $\mathbf{E}_{(\varphi)}$, $\mathbf{E}_{(\theta)}$ bázisvektorokkal! Adja meg az infinitezimális térfogatelem kifejezését gömbi polárkoordinátákban.

3 . gyakorlat

1. Részecske R sugarú körön mozog ω_0 =áll. szögsebességgel az óramutató járásával ellentétes, ill. egyező irányban. Határozzuk meg

   (a) a kör középpontjából a részecskéhez húzott helyzetvektor x-tengellyel bezárt φ szögének időbeli változását (A φ polárszög pozitív, ha a részecskéhez húzott sugár az x-tengelyhez képest az óramutató járásával ellentétes irányban fordult el.);

   (b) a részecske által a t_0 kezdeti és $t = t_0 + T$ $(T > 0)$ végső időpillanat között megtett $s(T)$ utat;

   (c) a mozgás periódusidejét;

   (d) a részecske v_φ kerületi sebességének nagyságát és a részecske sebességének Descartes-komponenseit;

   (e) a részecske gyorsulásvektorának megváltozását a mozgás egy félperiódusa alatt.

2. A részecske az (x, y)-síkon olyan mozgást végez, hogy $\mathbf{r}$ helyzetvektora eleget tesz a

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r} \tag{3.4}$$

   differenciálegyenletnek, ahol $\omega^2 > 0$ pozitív állandó. A részecske a kezdeti $t = 0$ időpillanatban a Descartes-koordináta-rendszer origójától R távolságra van az x-tengelyen pozitív irányban és v_0 nagyságú kezdősebessége az x-tengellyel $\alpha \in [0, \pi/2]$ szöget zár be.

   (a) Határozza meg a részecske helyzetvektorának $\mathbf{r}(t)$ időfüggését!

   (b) Határozza meg a pályagörbe $F(x, y) = 0$ alakú egyenletét, és

   (c) mutassa meg az $\alpha = \pi/2$ esetben, hogy az a koordinátarendszer alkalmas ψ szögű elforgatásával az ellipszis kanonikus egyenletébe megy át. Megjegyzés: az ellipszis egyenletének kanonikus alakja:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.5}$$

   (d) Mi a feltétele, hogy az előző pontban talált ellipszis kör legyen.

3. Részecske mozgását síkbeli polárkoordinátákban a

$$\dot{\varphi} = \frac{b}{r}, \quad v_r = v_0 \tag{3.6}$$

   egyenletek írják le, ahol $b > 0$ és $v_0 > 0$ állandók. Tudjuk továbbá, hogy a részecske a $t = 0$ időpillanatban az $r(0) = R$, $\varphi(0) = 0$ koordinátájú pontban tartózkodott. Határozza meg

   (a) a mozgáspályájának $F(r, \varphi) = 0$ alakú egyenletét, és mondja meg, hogy ez milyen görbe;

   (b) a pályának a t idővel parametrizált $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ egyenletrendszerét; valamint

   (c) a részecske v_φ sebességkomponensének időbeli változását.

4 . gyakorlat

1. zárthelyi

5 .gyakorlat

1. Oldja meg az egy-dimenziós harmónikus rezgőmozgás differenciálegyenletét azzal a feltétellel, hogy a részecske mozgása során rögzített $t_f - t_i$ idő alatt az $x_i = x(t_i)$ kezdeti helyzetből az $x_f = x(t_f)$ végső helyzetbe jut. A mozgás ω körfrekvenciája adott. Elemezze a megoldást $x_f = x_i$ esetén.

2. Az x-tengely mentén
$$\psi(x,t) = Ae^{-\frac{(x-ct)^2}{2\sigma^2}} \tag{5.7}$$
egyenlettel leírt hullámcsomag mozog, ahol A, c és σ pozitív állandók.
   (a) Bontsa fel a hullámcsomagot síkhullámok lineáris szuperpozíciójára.
   (b) Határozza meg az összetevő síkhullámok fázissebességét! Hogyan viszonyulnak ezek a hullámcsomag $v_x = c$ terjedési sebességéhez?

3. Mi a feltétele annak, hogy a
$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{5.8}$$
alakú síkhullám, ahol A, ω, k pozitív állandók, $\alpha \in [0, 2\pi)$ állandó, megoldása legyen az
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0 \tag{5.9}$$
homogén hullámegyenletnek? Milyen kezdőfeltételekhez tartozik ez a megoldás, ha a kezdeti időpillanat a $t = 0$ pillanat, vagyis $\psi(x,0) =?$, $\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\Big|_{t=0} =?$

4. Az $f(t)$ fizikai mennyiség periódikusan változik az időben:
$$f(t) = A\sin^2(\omega t). \tag{5.10}$$
   (a) Mennyi a T periódusidő?
   (b) Határozza meg az $f(t)$ fizikai mennyiség Fourier-komponenseit, azaz a periódikus mozgást állítsa elő harmónikus rezgések lineáris kombinációjaként! Mi az előforduló frekvenciák spektruma? Mekkora az egyes összetevő rezgések amplitudója?

5. Keresse meg az
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0 \tag{5.11}$$
homogén hullámegyenlet állóhullám megoldásait az $x \in [0, L]$ intervallumon, ha feltesszük, hogy az intervallum mindkét vége ,,rögzített vég", azaz $\psi(0,t) = \psi(L,t) \equiv 0$ tetszőleges t időpillanatban. Mi a lehetséges állóhullámok hullámhossza, ill. frekvenciája?

6 .gyakorlat

1. Egy részecske Lagrange-függvénye

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \tag{6.12}$$

ahol m állandó, a részecske tömege.

(a) Írjuk fel az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletet! Milyen mozgást végez a részecske?

(b) Oldjuk meg a mozgásegyenletet az $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_{0x}$ kezdőfeltételekkel!

(c) Oldjuk meg a mozgásegyenletet az $x(0) = x_i$, $x(T) = x_f$ feltételekkel!

(d) Keressük az $S[x] = \int_0^T L dt$ hatás szélsőértékét azon $x(t)$ függvények terében, amelyek a t időváltozónak másodrendű polinomjai! Visszakapjuk-e a mozgásegyenlet helyes megoldását?

2. Írjuk fel az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletek explicit alakját, ha a Lagrange-függvény

(a)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{6.13}$$

ahol $m > 0$, $\omega^2 > 0$ állandók;

(b)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + xF(t), \tag{6.14}$$

ahol $m > 0$ állandó és $F(t)$ az idő ismert függvénye;

(c)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r), \tag{6.15}$$

ha *(a)* $V(r) = 0$, *(b)* $V(r) = mgz$, ahol $m > 0$, $g > 0$ állandók;

(d)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \tag{6.16}$$

ahol (r, φ) a részecske síkbeli polárkoordinátái, $m > 0$ állandó;

(e)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \gamma\frac{mM}{r}, \tag{6.17}$$

ahol (r, φ) a részecske síkbeli polárkoordinátái, $m > 0$, $M > 0$, $\gamma > 0$ állandók.

Minden esetben hasonlítsa össze a kapott mozgásegyenleteket Newton II. törvényével, és mondja meg, hogy milyen mozgást végző a részecske Lagrange-függvényét adtuk meg kiindulásul?

3. Két részecske mozog az x-tengely mentén, a két-részecskés mechanikai rendszer Lagrange-függvénye

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}D(x_1 - x_2)^2, \tag{6.18}$$

ahol $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, $D > 0$ állandók és x_1 ill. x_2 rendre az 1-es ill. a 2-es részecske koordinátája.

   (a) Jellemezze, hogy milyen mechanikai rendszer Lagrange-függvénye L?

   (b) Írja fel az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenleteket!

   (c) A Galilei-transzformációk közül melyekkel szemben invariáns a hatás?

4. Két-részecskés mechanikai rendszer Lagrange-függvénye

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}_2^2 + \gamma\frac{mM}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \tag{6.19}$$

ahol $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, $\gamma > 0$ állandók és $\mathbf{r}_1$ ill. $\mathbf{r}_2$ rendre az 1-es ill. a 2-es részecske helyzetvektora.

   (a) Írja fel az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenleteket!

   (b) A Galilei-transzformációk közül melyekkel szemben invariáns a hatás?

7 .gyakorlat

1. Függőleges, zérus tömegű, végtelen hosszú pálca a vízszintes x-irányban önmagával párhuzamosan harmonikus rezgő mozgást végez úgy, hogy egyenlete

$$X(t) = A\sin(\omega t) \quad A > 0, \quad \omega > 0. \tag{7.20}$$

A pálcán golyócska mozog súrlódás nélkül a nehézségi erő $U = mgz$ potenciáljában (a z tengelyt függőleges felfelé irányítottuk). Írja fel a mozgást a legkisebb hatás elve alapján meghatározó feltételes szélsőérték-feladatot! Írja fel a Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenleteket! Hogyan mozog a golyócska, és milyen kényszererőt fejt ki rá a pálca? Oldja meg a feladatot úgy is, hogy csak független általános koordinátákat és sebességeket használ (vagyis hogy eliminálja az x kordinátát)!

2. A függőleges (x, z)-síkban a vízszintes x-tengellyel α szöget bezáró pálca önmagával párhuzamosan eltolódva az x-irányban harmonikus rezgő mozgást végez úgy, hogy a pálca (vízszintes) talajjal érintkező pontjának koorinátája $X_0(t) = A\sin(\omega t)$, ahol $A > 0$, $\omega > 0$ állandók. A pálcán egy golyócska mozog súrlódásmentesen, amely kezdetben $z(0) = H$ magasságban van és amelynek kezdeti sebessége a pálcához képest zérus.

   (a) Határozza meg a golyócska helyzetét megadó Descartes-koordinátákat, mint az idő függvényeit!

(b) Határozza meg a pálca által a golyócskára kifejtett kényszererőt!

3. Részecske az (x, y)-síkban elhelyezkedő olyan kör mentén mozog, amelynek középpontja a koordinátarendszer origójában nyugszik, és amelynek $R(t)$ sugara $R(t) = R_0 e^{bt}$, ($b > 0$ állanó) összefüggés szerint időben exponenciálisan nő. A részecske kezdeti szögsebessége $\omega(0) = \omega_0$ adott.

   (a) Mennyi lesz a részecske szögelfordulása végtelen hosszú idő alatt?

   (b) Mi legyen a b paraméter értéke, hogy a részecske végtelen hosszú idő alatt 2π szögelfordulást szenvedjen?

   (c) Határozza meg a részecskére ható kényszererő sugárirányú és érintőirányú komponensét!

   (Használjon síkbeli polárkoordinátákat! Kezdje azzal, hogy felírja azt a feltételes szélsőérték-feladatot, amelynek megoldása határozza meg a mozgást, és oldja meg a megfelelő Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenleteket! Mutassa meg, hogy a megoldás akkor is ugyanaz, ha az r koordinátát eliminálja!)

FÜGGELÉK

A Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletek

A.1 Feltételes szélsőérték-feladat

Az feltételes szélsőérték-feladat matematikai megfogalmazása: Keressük egy $m+n$ változós f függvény lokális szélsőértékét,

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = \text{ extremum}, \tag{A.1.21}$$

azokkal a mellékfeltételekkel, hogy az $m+n$ darab változó nem mind független, hanem változók $1 \leq n$ darab független feltételi egyenletet elégítenek ki,

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{A.1.22}$$

A feladat az, hogy határozzuk meg a lokális szélsőérték $(x_1^*, \dots, x_m^*, x_{m+1}^*, \dots, x_{m+n}^*)$ helyét. Előfordulhat, hogy az n darab feltételi egyenlet feloldható pontosan n darab változóra. Ha ez a helyzet, akkor indexeljük úgy a változókat, hogy x_j, $(j = m+1, \dots, m+n)$ legyenek azok a változók, amelyek kifejezhetők a többi x_i $(i = 1, \dots, m)$ változó függvényeként a $\varphi_j = 0$ kényszerek segítségével. Ha ezt megtesszük, akkor

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}(x_1, \dots, x_m), \dots, x_{m+n}(x_1, \dots, x_m)) = F(x_1, \dots, x_m) \tag{A.1.23}$$

függvény már csak az x_i $(i = 1, \dots, m)$ m darab független változó függvénye lesz és ezért az eredeti, feltételes szélsőérték-feladatot közvetlenül visszavezettük a

$$F(x_1, \dots, x_m) = \text{ extremum}, \tag{A.1.24}$$

feltétel nélküli szélsőérték-feladatra. A szélsőérték szükséges feltétele,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{A.1.25}$$

Ennek az m darab egyenletből álló egyenletrendszernek az $(x_1^*, \dots, x_m^*)$ megoldásából kapjuk meg a lokális szélsőérték helyét,

$$(x_1^*, \dots, x_m^*, x_{m+1}(x_1^*, \dots, x_m^*), \dots, x_{m+n}(x_1^*, \dots, x_m^*)). \tag{A.1.26}$$

A mellékfeltételi egyenletek feloldása sokszor matematikailag nehézkes, máskor meg nem is lehetséges. Ezért most mutatunk egy olyan eljárást, ami mindig alkalmazható a feltételes szélsőérték-feladat megoldására. Az eljárást a **Lagrange-multiplikátorok módszerének** nevezzük. A lényege az, hogy az $m+n$ változósf függvény feltételes szélsőértéke helyének meghatározását visszavezetjük az $m+2n$-változós $F = f + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$ függvény feltétel nélküli szélsőértéke helyének meghatározására. Ennek ára az, hogy a változók száma megnő az n darab λ_i új változóval, amelyeket Lagrange-multiplikátoroknak nevezünk. Így az eredeti feltételes szélsőérték-feladat megoldása ekvivalens az

$$F(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{ extremum} \tag{A.1.27}$$

feltétel nélküli szélsőérték-feladat megoldásával, ahol

$$\begin{aligned} & F(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+n},\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \\ = \; & f(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+n}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+n}) \end{aligned} \tag{A.1.28}$$

A módszerhelyességét az alábbiak szerint láthatjuk be. A szélsőérték x_j^* ($j = 1,\ldots,m+n$) helyéről infinitezimálisan „elmozdulva”, $x_j^* \to x_j^* + \delta x_j$, a függvény értéke első rendben változatlan marad, azaz a függvény értékének elsőrendű megváltozása zérus,

$$\delta f = \sum_{j=1}^{m+n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{x_j^*} \delta x_j = 0. \tag{A.1.29}$$

Ez a szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Most azonban ebben a kifejezésben a változók δx_j megváltozásai nem függetlenek, mert a változók között fennálló n darab $\varphi_i = 0$ ($i = 1,\ldots,n$) kényszer miatt a változók infinitezimális megváltozásai között a

$$\sum_{j=1}^{m+n} \left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right|_{x_j^*} \delta x_j = 0, \quad i = 1,\ldots,n \tag{A.1.30}$$

relációk állnak fenn. Legyenek a λ_i számok egyelőre tetszőlegesek és képezzük a segítségükkel a fenti egyenletekből az alábbi összeget,

$$\sum_{j=1}^{m+n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{x_j^*} \delta x_j = 0. \tag{A.1.31}$$

Pontosan annyi darab λ_i ($i = 1,\ldots,n$) Lagrange-multiplikátort vezettünk be, mint ahány független mellékfeltételünk van. Határozzuk itt meg a λ_i ($i = 1,\ldots,n$) Lagrange-multiplikátorokat úgy, hogy a változók infinitezimális megváltozásai közül n darabnak az együtthatója zérus legyen a fenti összegben. Jelölje ezeket δx_{m+1}, …, δx_{m+n},

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{x_j^*} = 0, \quad j = m+1,\ldots,m+n. \tag{A.1.32}$$

Ez n darab egyenletből álló inhomogén lineáris egyenletrendszer az n darab λ_i Lagrange-multiplikátorra vonatkozóan. Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldása egyértelműen létezik, ha az egyenletrendszer mátrixának determinánsa nem zérus,

$$\mathrm{Det} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) \neq 0, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = m+1,\ldots,m+n. \tag{A.1.33}$$

A determináns azonban valóban nem zérus akkor és csak akkor, ha az n darab kényszer lineárisan független. Ha tehát a Lagrange-multiplikátorokat a fentiek szerint határozzuk meg, akkor

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{x_j^*} \delta x_j = 0. \tag{A.1.34}$$

egyenletre jutunk, amelynek bal oldalán az összegzés már csak az m darab független, tetszőleges δx_j ($j = 1,\ldots,m$) növekményt tartalmazó tagra történik. A független δx_j

növekmények lineáris kombinációja akkor és csak akkor lehet zérus, ha minden egyes tag együtthatója zérus,

$$ket\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\Big)_{x_j^*}=0,\quad j=1,\ldots,m. \qquad (A.1.35)$$

Végezetül a változók a szélsőérték helyén is kielégítik a

$$har\varphi_i(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+n})_{x_j^*}|=0,\quad i=1,\ldots n \qquad (A.1.36)$$

mellékfeltételeket.

Ha összeolvassuk az (A.1.32)-(**??**) egyenleteket, akkor azok pontosan az (A.1.28) egyenlőséggel értelmezett $(m+2n)$-változós F függvénynek a feltétel nélküli szélsőértéke létezésének szükséges feltételei:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_j^*}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{x_j^*}&=0,\quad j=1,\ldots,m+n,\\ \left(\frac{\partial F}{\partial\lambda_i}\right)_{x_j^*}&=(\varphi_i)_{x_j^*}=0.\end{aligned} \qquad (A.1.37)$$

A feltételes szélsőérték-feladatot átalakítottuk tehát feltétel nélküli szélsőérték-feladattá.

A.2 Elsőfajú Lagrange-egyenletek

A sok-változós függvény feltételes szélsőérték-feladatának megoldása általánosítható a funkcionálok felételes szélsőérték-feladatának megoldására. Ha keressük az S hatásfunkcionál szélsőértékét,

$$S[q_1,\ldots,q_s]=\text{ extremum },\qquad (A.2.38)$$

a nem független általános koordináták között fennálló

$$\varphi_i(q_1,\ldots,q_s,\dot q_1,\ldots,\dot q_s)=0,\quad i=1,\ldots,k<s \qquad (A.2.39)$$

$k<s$ darab kényszer teljesülése esetén.

Az S hatásfunkcionál feltételes szélsőérték-feladata átfogalmazható az

$$\begin{aligned}&S'[q_1,\ldots,q_s,\lambda_1,\ldots,\lambda_k]\\ =\;&S[q_1,\ldots,q_s]+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_i}^{t_f}\lambda_k(t)\varphi_i(q_1(t),\ldots,q_s(t),\dot q_1(t),\ldots,\dot q_s(t))\end{aligned} \qquad (A.2.40)$$

funkcionál feltétel nélküli szélsőérték-feladatává. Az S' funkcionál az s darab $q_j(t)$ általános koordináta, mint az idő függvénye mellett a k darab $\lambda_i(t)$ Lagrange-multiplikátornak, mint az idő függvényének is a funkcionálja. A feltétel nélküli szélsőérték szükséges feltételei a megfelelő Euler-Lagrange-egyenletek:

$$\begin{aligned}0&=\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\dot q_j}-\frac{\partial L'}{\partial q_j}\quad j=1,\ldots,s\\ 0&=-\frac{\partial L'}{\partial\lambda_i}\quad i=1,\ldots,k\end{aligned} \qquad (A.2.41)$$

Innen a mozgásegyenletek

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} &= -\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s \\
\varphi_i = 0, \quad i = 1, \dots, k. & \qquad \text{(A.2.42)}
\end{aligned}$$

Ezek az úgynevezett elsőfajú Lagrange-egyenletek.

B Vektoralgebra

B.1 Műveletek vektorokkal

Legyen adott az **a** vektor[1], akkor $a = |\mathbf{a}|$ jelöli a vektor hosszát. Ha $a \neq 0$, akkor

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{a}, \qquad |\mathbf{a}^0| = 1 \qquad \text{(B.1.1)}$$

az **a** vektor irányába mutató egységvektor.

Összeadás.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}, \qquad \text{(B.1.2)}$$

ahol **c** a parallelogramma-szabállyal határozható meg és

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle} \qquad \text{(B.1.3)}$$

ahol $(\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$ az **a** és **b** vektorok által közbezárt szög. Az összeadás kommutatív,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \qquad \text{(B.1.4)}$$

és asszociatív,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \qquad \text{(B.1.5)}$$

művelet, és létezik a **0** nullvektor, amelyet tetszőleges **a** vektorhoz hozzáadva az eredeti vektort kapjuk vissza: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$.

Számmal szorzás. Legyen λ, μ tetszőleges valós számok, és **a** tetszőleges vektor, akkor

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}, \quad |\mathbf{b}| = |\lambda||\mathbf{a}| \qquad \text{(B.1.6)}$$

és **b** az **a** vektorral egyirányba, ill. ellentétes irányba mutat, ha rendre $\lambda > 0$, ill. $\lambda < 0$ és $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, ha $\lambda = 0$. A számmal szorzásra fennállnak az alábbi műveleti szabályok:

$$\begin{aligned}
&\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \\
&(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \\
&\lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{b}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda\mu\mathbf{a}. \qquad \text{(B.1.7)}
\end{aligned}$$

[1]A jelen függelékben csak a 3-dimenziós euklideszi tér vektoraival foglalkozunk. A tér különböző pontjaiban értelmezett, egymásból párhuzamos eltolással nyerhető vektorokat most ekvivalenseknek tekintjük.

Ha $\lambda = -1$, akkor $\lambda\mathbf{a}$ az $\mathbf{a}$ vektor ellentettje. Vektorok kivonása: $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ az a vektor, amelyhez $\mathbf{b}$-t hozzáadva visszakapjuk $\mathbf{a}$-t. Erre a vektorra igaz, hogy

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}, \tag{B.1.8}$$

és az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ különbségvektort geometriai szerkesztéssel úgy kapjuk meg, mint a $\mathbf{b}$ vektor hegyétől az $\mathbf{a}$ vektor hegyéhez mutató vektort.

Vektorok skaláris szorzása Definíció szerint két tetszőleges vektor skalárszorzata az

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle \tag{B.1.9}$$

valós szám. Innen adódik, hogy ha sem $\mathbf{a}$, sem $\mathbf{b}$ nem nullvektorok, akkor a skalárszorzatuk akkor és csak akkor lehet nulla, ha egymásra merőlegesek. Ha sem $\mathbf{a}$, sem $\mathbf{b}$ nem nullvektor, akkor a vektorok által bezárt szög koszinuszát

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} \tag{B.1.10}$$

összefüggés alapján kapjuk meg a skalárszorzatból. A skalárszorzat kommutatív,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \tag{B.1.11}$$

és mindkét tényezőjében lineáris,

$$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mu\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \tag{B.1.12}$$

és pozitív szemidefinit, azaz

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0, \tag{B.1.13}$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Vektor önmagával vett skalárszorzata definíció szerint meghatározza a vektor hosszának négyzetét,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = a^2, \tag{B.1.14}$$

úgyhogy

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \tag{B.1.15}$$

Vektoriális szorzat[2] Definíció szerint

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \tag{B.1.16}$$

olyan **vektor**, amelynek hossza

$$c = ab\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle, \tag{B.1.17}$$

és amely merőleges mindkét tényező vektorra és azokkal az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sorrendben jobbsodrású vektorrendszert alkot. A vektoriális szorzat antikommutatív,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \tag{B.1.18}$$

és mindkét tényezőjében lineáris,

$$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mu\mathbf{b} \times \mathbf{c}. \tag{B.1.19}$$

[2] A vektoriális szorzás csak 3-dimenziós térben értelmezhető.

Az antikommutativitás következménye, hogy vektor önmagával vett vektori szorzata mindig nullvektor,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}. \tag{B.1.20}$$

Kettős vektori szorzat:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{B.1.21}$$

Vegyesszorzatban a tényezők ciklikusan permutálhatók:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \\ = \; & -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} \end{aligned} \tag{B.1.22}$$

B.2 Vektorok felbontása összetevőkre

Vektorrendszer vektorait lineárisan függetlennek nevezzük akkor és csak akkor, ha belőlük a nullvektor csak triviálisan kombinálható lineárisan, azaz csak csupa zérus együtthatókkal: $\mathbf{a}_l$, $l = 1, 2, \ldots, n$ lineárisan függetlenek akkor és csak akkor, ha az

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \tag{B.2.1}$$

egyenlőség csak $\lambda_i = 0$ együtthatókkal állhat fenn. d dimenziós vektortérben a lineárisan független vektorok maximális száma d, de ezek végtelen sokféleképpen megválaszthatók. A maximális számosságú, lineárisan független vektorokból álló vektorrendszert bázisnak nevezzük. Normált bázisról beszélünk, ha a bázisvektorok egységvektorok. Legyenek $\{\mathbf{E}_{(i)}\}$ $(i = 1, 2, 3)$ normált bázisvektorok a 3-dimenziós eulideszi térben. A tér tetszőleges $\mathbf{a}$ vektora egyértelműen felbontható ezen bázisvektorok lineáris kombinációjára:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{E}_{(i)}. \tag{B.2.2}$$

Az $\{\mathbf{E}_{(i)}\}$ bázist ortonormált bázisnak nevezzük, ha a bázisvektorok egységvektorok és páronként merőlegesek egymásra, azaz ha

$$\mathbf{E}_{(i)} \cdot \mathbf{E}_{(j)} = \delta_{i,j} \tag{B.2.3}$$

ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker-delta: $\delta_{i,j} = 1$, ha $i = j$ és $\delta_{i,j} = 0$, ha $i \neq j$. Ortonormált bázisvektorok esetén:

$$\mathbf{E}_{(i)} \times \mathbf{E}_{(j)} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k} \mathbf{E}_{(k)} \tag{B.2.4}$$

ahol $\epsilon_{i,j,k} = +1, -1$, ill. 0, rendre aszerint, hogy (i, j, k) az $(1, 2, 3)$ indexhármas páros permutációja, páratlan permutációja, ill. hogy legalább két index megegyezik.

Vektor felbontása ortonormált bázisban:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{E}_{(i)}, \quad a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}_i. \tag{B.2.5}$$

A bázisvektorok által kijelölt irányokban koordinátatengelyeket vehetünk fel, amelyek akkor egy Descartes-koordinátarendszert alkotnak. a_i-t az $\mathbf{a}$ vektor i-edik koordinátatengely irányába eső komponensének nevezzük. Vektor Descartes-komponenseit számoszlopba rendezhetjük és értelmezhetjük ezen számoszlop transzponáltját is:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}^T = (a_1, a_2, a_3) \tag{B.2.6}$$

A vektorműveleteket Descartes-komponensekben is elvégezhetjük:

$$\begin{aligned} \lambda\underline{a} + \mu\underline{b} &= \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \\ \lambda a_3 + \mu b_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \underline{a}^T\underline{a} &= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \\ a^2 = \mathbf{a}^2 &= \sum_{i=1}^{3} a_i^2 \end{aligned} \tag{B.2.7}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{E}_{(1)} & \mathbf{E}_{(2)} & \mathbf{E}_{(3)} \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{E}_{(1)} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{E}_{(2)} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{E}_{(3)} \\ \underline{c} &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B.2.8}$$

B.3 Bázistranszformáció

Az áttérés az $\{\mathbf{E}_{(i)}\}$ bázisról az $\{\mathbf{E}_{(j)'}\}$ bázisra, ahol

$$\mathbf{E}_{(j)'} = \sum_{i=1}^{3} O_{j,i}\mathbf{E}_{(i)} \quad j = 1,2,3 \tag{B.3.1}$$

az $O_{j,i}$ bázistranszformáció segítségével történik. Ha a ,,régi" és az ,,új" bázis is ortonormált, akkor

$$O_{j,i} = \mathbf{E}_{(j)'}\cdot\mathbf{E}_{(i)}. \tag{B.3.2}$$

A bázistranszformáció mátrixa ortogonális mátrix:

$$\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{O}}^T = \underline{\underline{1}}, \tag{B.3.3}$$

ahol a ^{T} felső index transzponálást jelöl, $\underline{\underline{1}}$ pedig az egységmátrix, igaz továbbá, hogy

$$\det \underline{\underline{O}} = \pm 1. \tag{B.3.4}$$

A $+1$ determin
ansú ortogonális transzformációk a térbeli elforgatások, a -1 determinánsú ortogonális

transzformációk az egyes bázisvektorok tükrözései, ill. ilyen tükrözések és térbeli elforgatások egymásutánjai. Speciális eset a tértükrözés, amikor mindhárom bázisvektort az ellentettjére változtatunk.

Ha az $\mathbf{a}$ vektor komponensei az $\{\mathbf{E}_{(i)}\}$ bázisban az $\underline{a}$ számoszlopba, az $\{\mathbf{E}_{(i)'}\}$ bázisban pedig az $\underline{a}'$ számoszlopba foglalhatók, akkor

$$\underline{a}' = \underline{\underline{O}}\underline{a}. \tag{B.3.5}$$

A skalárszorzat a bázistranszformáció során invariáns marad, azaz

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \underline{a}^T \underline{b} = \underline{a}'^T \underline{\underline{O}}\underline{\underline{O}}^T \underline{b}' = \underline{a}'^T \underline{b}'. \tag{B.3.6}$$

A fizikus általában azt a szemléletet követi, hogy vektornak nevezi azokat a mennyiségeket, amelyek 3-komponensűek és amelyek komponensei bázistranszformáció során az $\underline{a}' = \underline{\underline{O}}\underline{a}$ szabály szerint transzformálódnak. Maga a vektor változatlan marad a bázistranszformáció során. Azokat a mennyiségeket, amelyeknek nincsen több komponense (egy-komponensűek) és változatlanul (invariánsan) maradnak a térbeli elforgatásokat jelentő bázistranszformációk során, skalároknak nevezzük. A skalárszorzat ilyen skalár.

A vektorok lehetnek polárvektorok, amelyeknek komponensei a tértükrözéskor előjelet váltanak, és lehetnek axiálvektorok, amelyek komponensei tértükrözéskor nem váltanak előjelet. A helyzetvektor, a sebességvektor, a gyorsulásvektor polárvektorok. Bármely két polárvektor vektori szorzata viszont axiálvektor. A skalárok is kétfélék lehetnek, a valódi skalárok tértükrözéskor sem váltanak előjelet (általában szűkebb értelemben csak ezeket nevezzük skalároknak), míg az úgynevezett pszeudoskalárok tértükrözéskor előjelet váltanak. Két polárvektor, vagy két axiálvektor skalárszorzata mindig (valódi) skalár, míg egy polárvektor és egy axiálvektor skalárszorzata mindig pszeudoskalár.

B.4 Vektoregyenlet és vektorkomponensekre vonatkozó egyenletrendszer

Általánosan mondhatjuk, az alábbiakat. Amennyiben fennáll a

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 \tag{B.4.1}$$

vektoregyenlet, akkor ez mindig

$$\mathbf{V} = \mathbf{0} \tag{B.4.2}$$

alakra hozható. Ha egy fizikai törvényt kifejező egyenlet a fenti alakú, akkor az azt jelenti, hogy ez a törvény független a koordinátarendszer megválasztásától. A (B.4.2) vektoregyenlet egyenértékű azzal az egyenletrendszerrel, amelyet valamilyen $\{\mathbf{E}_{(i)}$ bázist választva ezen egyenletből nyerhetünk úgy, hogy az egyenlet mindkét oldalát rendre skalárisan szorozzuk az $\mathbf{E}_{(i)}$ bázisvektorokkal:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}_{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{B.4.3}$$

azaz

$$V_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{B.4.4}$$

Fordítva is igaz, ha a V_i vektorkomponensekre fennáll a (B.4.4) egyenletrendszer, akkor ezen egyenletrendszer egyes egyenleteit a megfelelő $\mathbf{E}_{(i)}$ bázisvektorokkal szorozva, majd az egyenletek megfelelő oldalait összeadva a (B.4.2) vektoregyenletet kapjuk eredményül. Vigyázat! Ügyeljünk egy fontos részletre. A (B.4.4) egyenletrendszer egyenleteinek bal oldalán álló V_i mennyiségeknek vektorkomponenseknek kell lenniük, s ez csak akkor igaz, ha $\underline{\underline{Q}}$ bázistranszformáció során ezek a mennyiségek a $\underline{V}' = \underline{\underline{Q}}\ \underline{V}$ szabálynak megfelelően transzformálódnak. Ha ez nem teljesül, akkor a $\sum_{i=1} V_i \mathbf{E}_{(i)}$ lineáris kombináció nem eredményez a bázistranszformáció során invariánsan maradó vektort.

C Analitikus geometria

Descartes-koordinátarendszerben az $\mathbf{r}$ helyzetvektorú pont $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ Descartes-koordinátái a helyzetvektor x_i $(i = 1, 2, 3)$ koordináta-komponensei. Ha a Descartes-koordinátarendszer tengelyeit az $\mathbf{E}_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ ortonormált bázis vektorai jelölik ki, akkor $x_i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{(i)}$.

C.1 Egyenes

Adott ponton átmenő, adott irányú egyenes paraméteres egyenlete. Az $\mathbf{r}_0$ helyzetvektorú ponton áthaladó, $\mathbf{t}$ irányvektorú ($\mathbf{t}^2 = 1$) egyenes paraméteres egyenlete,

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + (s - s_0)\mathbf{t}, \tag{C.1.1}$$

ahol $\mathbf{r}(s)$ az egyenes tetszőleges s ívhossz-paraméterű pontjának a helyzetvektora. (Az ívhossz-paramétert úgy választottuk, hogy értéke az $\mathbf{r}_0$ pontban $s = s_0$ legyen). A Descartes-koordinátarendszer tengelyeinek irányát meghatározó $\mathbf{E}_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ ortonormált bázisban

$$t_i = \mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_{(i)} = \cos\alpha_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{C.1.2}$$

ahol $\cos\alpha_i$ az úgynevezett iránykoszinuszok, az $\mathbf{t}$ egységvektornak rendre a Descartes-koordinátarendszer tengelyeivel bezárt $\alpha_i \in [0, \pi]$ szögeinek koszinuszai. Ebben a bázisban az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x_i(s) - x_{0i} = (s - s_0)\cos\alpha_i. \tag{C.1.3}$$

A 3 iránykoszinusz közül legalább 1 nem nulla. Jelöljük a megfelelő tengelyt $i = 1$ indexszel. Ekkor az egyenletekből eliminálhatjuk az s paraméter, ha kifejezzük

$$s - s_0 = \frac{x_1 - x_{01}}{\cos\alpha_1} \tag{C.1.4}$$

alakban és ezt behelyettesítjük a másik 2 egyenletbe:

$$\begin{aligned} x_2 - x_{02} &= (x_1 - x_{01})\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}, \\ x_3 - x_{03} &= (x_1 - x_{01})\frac{\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1} \end{aligned} \tag{C.1.5}$$

vagy átjelölve az $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ koordinátákat rendre $(x,\ y,\ z)$-re,

$$y = y_0 + a(x - x_0), \quad z = z_0 + b(x - x_0) \tag{C.1.6}$$

alakban kapjuk az egyenest meghatározó egyenletrendszert, ahol a, b az iránykoszinuszok hányadosai által meghatározott állandók. Az egyes egyenletek egy-egy sík egyenletei, és ez matematikailag kifejezi, hogy az egyenes 2 sík metszésvonalaként adódik.

Két adott ponton áthaladó egyenes egyenlete. Tekintsük azt az egyenest, amelyik átmegy az $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ helyzetvektorú pontokon. Jelölje az s ívhosszparaméter értékét az $\mathbf{r}_1$, ill. $\mathbf{r}_2$ helyzetvektorú pontokban rendre s_1, ill. s_2, akkor

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_1 + (s - s_1)\mathbf{t}, \quad \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_2 + (s - s_2)\mathbf{t}, \tag{C.1.7}$$

ahol

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{s_2 - s_1}. \tag{C.1.8}$$

Innen átrendezéssel

$$\frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_1}{s - s_1} = \frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_2}{s - s_2}, \tag{C.1.9}$$

ill.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2}\right)\mathbf{r}(s) = \frac{\mathbf{r}_1}{s - s_1} - \frac{\mathbf{r}_2}{s - s_2} \\
&(s_1 - s_2)\mathbf{r}(s) = (s - s_2)\mathbf{r}_1 - (s - s_1)\mathbf{r}_2 \\
&\mathbf{r}(s) = s\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{s_1 - s_2} + \frac{s_1\mathbf{r}_2 - s_2\mathbf{r}_1}{s_1 - s_2} = s\mathbf{t} + \frac{s_1\mathbf{r}_2 - s_2\mathbf{r}_1}{s_1 - s_2}
\end{aligned} \tag{C.1.10}$$

Adott ponton átmenő, adott irányítású egyenes egyenlete a síkon. A két-dimenziós (x, y) sík $\mathbf{t}$ $(\mathbf{t}^2 = 1)$ egységvektor irányába irányított egyenese esetén vezessük be az egyenesnek az x tengellyel bezárt irányított $\alpha \in [0, 2\pi)$ szögét, ekkor

$$t_x = \cos\alpha, \quad t_y = \sin\alpha. \tag{C.1.11}$$

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$x(s) - x_0 = (s - s_0)\cos\alpha, \quad y(s) - y_0 = (s - s_0)\sin\alpha. \tag{C.1.12}$$

Ha $\cos\alpha \neq 0$, akkor innen

$$s - s_0 = \frac{x - x_0}{\cos\alpha} \tag{C.1.13}$$

és az ívhossz-paraméter eliminálása után az egyenes egyenlete

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{C.1.14}$$

alakban adódik, ahol az $m = \operatorname{tg}\alpha \in (-\infty, +\infty)$ az egyenes meredeksége. A paraméteres egyenlet hordoz információt az egyenes irányításáról (melyik irányban nő az ívhossz paraméter), míg az egyenes paraméter-független egyenlete az egyenes irányításáról nem hordoz információt. Más alakban az egyenes egyenlete

$$y = mx + c, \tag{C.1.15}$$

ahol c az egyenesnek és az y-tengelynek a tengelymetszete, $c = y_0 - mx_0$. Ha $\alpha = \pm\pi/2$, akkor $x = 0$ az egyenes egyenlete, ez éppen az y-tengely egyenlete, ha $\alpha = 0,\ \pi$, akkor az egyenes egyenlete $y = 0$, ami éppen az x-tengely egyenlete. Ha $\cos\alpha = 0$, azaz $\alpha = \pi/2$ vagy $3\pi/2$, akkor az egyenes az y-tengellyel párhuzamos, azzal rendre azonos, ill. ellentétes irányítású. Ekkor az egyenes egyenlete $x = x_0$.

A síkon a koordinátatengelyektől különböző egyenesek egyenlete mindig

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{C.1.16}$$

alakra hozható, ahol a ill. b az egyenesnek a tengelymetszete rendre az x-, ill. az y-tengellyel. Az $a \to \pm\infty$ határeset az x-tengellyel párhuzamos egyenesek, a $b \to \pm\infty$ határeset az y-tengellyel párhuzamos egyensek egyenletét szolgáltatja.

Adott síkot adott pontban merőlegesen metsző egyenes egyenlete. Az egyenes egyenletének másik megadási módja, hogy azt adjuk meg, hogy az egyenes az $\mathbf{r}_0$ ponton halad át és merőleges az erre a pontra illeszkedő valamelyik síkra. Legyenek a síkot kifeszítő merőleges egységvektorok $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$, akkor az egyenes tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor és az $\mathbf{r}_0$ vektor különbsége merőleges a síkra, azaz ezen egységvektorok bármelyikére, úgyhogy az egyenes egyenletét írhatjuk

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{C.1.17}$$

alakban. Az egyenes irányát a $\mathbf{n} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ egységvektor jelöli ki, amely merőleges az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok által kifeszített síkra. Attól függően, hogy az egyenest a sík $\mathbf{n}$ normálisával párhuzamosan vagy azzal ellentétesen irányítjuk, az egyenes paraméteres egyenlete rendre

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 \pm s\mathbf{n}, \tag{C.1.18}$$

hiszen most $\mathbf{n}$ játssza az egyenes $\mathbf{t}$ érintő egységvektorának szerepét.

A két-dimenziós síkban az $\mathbf{n}$ egységvektorra merőleges, az $\mathbf{r}_0$ helyzetvektorú ponton áthaladó egyenes egyenlete,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{C.1.19}$$

Innen

$$(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha = 0, \tag{C.1.20}$$

ha $\underline{n}^T = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Ha figyelembe vesszük, hogy $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} = \pm d$ éppen az egyenesnek az origótól mért előlejeles távolsága, akkor

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \pm d \tag{C.1.21}$$

adódik az egyenes egyenletére (ahol a $+$ ill. a $-$ előjel rendre megfelel annak, hogy az egyenes az origóhoz képest attól az $\mathbf{n}$ irányban, vagy azzal ellentétes irányban helyezkedik el a síkon).

C.2 Kör

A kör az O origótól állandó távolságra levő P pontok mértani helye a síkon. Legyen $\mathbf{r}_0$ a kör origójának helyzetvektora, legyen $\mathbf{r}$ a kör tetszőleges P pontjának a helyzetvektora és legyen $\mathbf{n}$ a kör síkjának normálisa. Ekkor fennállnak az

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = R \tag{C.2.1}$$

összefüggések, ahol R a kör sugara. Vegyük fel az (x, y) Descartes-koordinátarendszert a kör síkjában, akkor a kör egyenlete

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \tag{C.2.2}$$

ahol $\underline{r}^T = (x, y)$, $\underline{r}_0^T = (x_0, y_0)$. Ha síkbeli polárkoordinátarendszert veszünk fel úgy, hogy az origója a kör középpontjába essen és (r, φ) jelöli a polárkoordinátákat, akkor a kör egyenlete

$$r(\varphi) = R. \tag{C.2.3}$$

C.3 Ellipszis egyenlete

Az ellipszis olyan görbe, amely azon pontok mértani helye, amelyeknek a sík két F_1 és F_2 pontjától mért távolságainak összege állandó. Az F_1 és F_2 pontokat az ellipszis fókuszpontjainak nevezzük. Az $\mathbf{r}_0$ középpontú ellipszis egyenlete

$$\sum_{i,j=1}^{2} A_{i,j}(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) = \text{ const.} = C^2 \tag{C.3.1}$$

ahol az $A_{i,j} = A_{j,i}$ szimmetrikus 2×2 mátrix mindkét sajátértéke pozitív. Legyenek ezek rendre a_1 és a_2. Toljuk el először a koordinátarendszert önmagával párhuzamosan úgy, hogy az origó az ellipszis középpont'ába kerüljön, majd forgassuk el úgy, hogy az egyenlet bal oldalán álló kvadratikus forma diagonális legyen. Ekkor legyenek az új koordináták ξ_i $(i = 1, 2)$. Az új koordinátarendszerben

$$a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 = C^2 > 0. \tag{C.3.2}$$

Ezt mindig átírhatjuk

$$\frac{\xi_1^2}{C^2/a_1^2} + \frac{\xi_2^2}{C^2/a_2^2} = 1 \tag{C.3.3}$$

alakba, vagy bevezetve az $x = \xi_1$, $y = \xi_2$ jelölést a szokásosabb

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ ill. } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{C.3.4}$$

alakba, ahol $a > 0$, ill. $0 < b < a$ az ellipszis fél-nagytengelye, ill. fél-kistengelye, és $a^2 = C^2/a_1^2$, $b^2 = C^2/a_2^2$, ha $a_1 < a_2$, ill. $a^2 = C^2/a_2^2$, $b^2 = C^2/a_1^2$, ha $a_1 > a_2$. Az (C.3.4) egyenlet az ellipszis egyenletének kanonikus alakja.

C.4 Görbe

Görbe parametrizálása. A görbe a valós számegyenes valamely $I \subset (-\infty, +\infty)$ intervallumának a $\mathcal{S}$ síkba, ill. $\mathcal{V}$ térbe történő kölcsönösen egyértelmű $\mathbf{f} : I \mapsto \mathcal{S}$, ill. $\mathbf{f} : I \mapsto \mathcal{V}$ leképezése. A görbe folytonos, differenciálható, folytonosan differenciálható, stb. ha a leképezés rendre folytonos, differenciálható, folytonosan differenciálható, stb. Jelölje $\lambda \in I$ a görbe paraméterét, akkor a görbe egyenlete

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\lambda) \tag{C.4.1}$$

ahol $\mathbf{r}$ jelöli a görbe λ paraméterű pontjának helyzetvektorát.A fizikában nem szoktunk a leképezésre külön jelölést bevezetni és az egyenletet

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda) \tag{C.4.2}$$

alakban írjuk. Descartes-koordinátákban a görbe paraméteres megadása az

$$x_i = x_i(\lambda), \quad i = 1, 2, 3 \tag{C.4.3}$$

egyenletrendszerrel történik, ha térgörbéről van szó; síkgörbe esetén $i = 1, 2$. Természetesen hengerkoordináták, ill. gömbi polárkoordináták használata esetén a térgörbe paraméteres megadása az

$$r = r(\lambda), \quad \varphi = \varphi(\lambda), \quad z = z(\lambda), \tag{C.4.4}$$

ill. az

$$r = r(\lambda), \quad \theta = \theta(\lambda), \quad \varphi = \varphi(\lambda) \tag{C.4.5}$$

függvények explicit alakjának megadásával történik. Mindezt röviden úgy mondhatjuk el, hogy ha tetszőleges q_i $(i = 1, 2, 3)$ görbevonalú koordinátákat használunk a térbeli pontok helyzetének megadására, akkor a görbe paraméteres egyenletei:

$$q_i = q_i(t) \quad i = 1, 2, 3 \tag{C.4.6}$$

Kísérő háromél. A fizikában a részecskék pályagörbéjét vagy azzal a t idővel szokás parametrizálni, ami a mozgás kezdete óta eltelt, vagy azzal az s ívhosszal, amekkora utat a részecske a mozgás kezdete óta a görbe mentén befutott. Természetesen a görbe attól nem változik meg, hogy hogyan parametrizáljuk. Ezért áttérhetünk az ívhosszal történő paraméterezésről az idővel történő paraméterezésre, ill. fordítva:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(s) = \tilde{\mathbf{f}}(t) \tag{C.4.7}$$

és $s = s(t)$ miatt $\mathbf{f}(s(t)) = \tilde{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{r}(t)$ definiálja a helyzetvektor, mint az idő függvényét. Ekkor

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{f}(s)}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{r}'|\mathbf{v}|, \tag{C.4.8}$$

ahol a pályagörbe ívhosszal parametrizált alakjának az ívhossz szerinti első deriváltja, $\mathbf{r}'$ éppen a görbének a sebesség irányába mutató érintő egységvektora:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}(s)}{ds} = \mathbf{r}'. \tag{C.4.9}$$

A pályagörbe tetszőleges $\mathbf{r}(s)$ helyzetvektorú P pontja közelében felvehetünk a görbén két másik, infinitezimálisan közeli P' és P'' pontot. Ez a 3 pont mindig meghatároz egy síkot. Tegyük fel, hogy ha P'-t és P''-t közelítjük a P ponthoz, olyan síkok seregét kapjuk, amelyek határesetben (amikor P'-t és P''-t ráhúzzuk a P pontra) egy jól definiált síkhoz tartanak. Ekkor ezt a síkot a görbe P pontjához tartozó simulósíkjának nevezzük. A simulósíkot az s ívhosszparaméterű pontban a

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \tag{C.4.10}$$

érintővektor és az

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} \tag{C.4.11}$$

ívhossz szerinti második derivált vektora feszíti ki, ha $\mathbf{r}'' \neq 0$. A második derivált vektora mindig merőleges a sebességre, mert

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(\mathbf{r}')^2 = \frac{d}{ds}1 = 0 \\ &2\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 0 \end{aligned} \tag{C.4.12}$$

ahonnan $|\mathbf{r}'| = 1$ és $\mathbf{r}'' \neq 0$ miatt $\mathbf{r}' = \mathbf{t} \perp \mathbf{r}''$. Az ívhossz szerinti második derivált irányába mutató egységvektort a görbe s paraméterű pontjához tartozó

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|} \tag{C.4.13}$$

főnormálisának nevezzük. A görbe minden pontjához hozzárendelhetünk még egy $\mathbf{b}(s)$ egységvektort, amelyik merőleges az érintőre és a főnormálisra is, és amely az előbbiekkel a $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ sorrendben jobbsodrású rendszert alkot,

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \tag{C.4.14}$$

Ez az úgynevezett binormális vektor. Ilyen módon a görbe minden pontjához hozzárandeltünk 3 darab, páronként merőleges egységvektort, az úgynevezett kísérő háromélt.

Görbe természetes egyenletrendszere. Az egyenes érintővektora minden pontban azonos irányú. Ha a görbe nem egyenes, akkor azt, hogy mennyire ,,görbül", avval lehet jellemezni, hogy hogyan változik az érintője. Ennek jellemzésére vezessük be a görbe adott s paraméterű pontjához tartozó $\kappa(s)$ átlaggörbületét. Jelölje $\Delta\alpha$ az s paraméterű pontban felvett $\mathbf{t}(s)$ érintő és az $s + \Delta s$ paraméterű, közeli pontban felvett $\mathbf{t}(s + \Delta s)$ érintő által bezárt szögét. Ekkor az átlaggörbületen a

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \tag{C.4.15}$$

határértéket értjük. Meg lehet mutatni, hogy

$$\kappa(s) = |\mathbf{r}''(s)|. \tag{C.4.16}$$

Innen az is következik, hogy

$$\mathbf{t}'(s) = \mathbf{r}''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s). \tag{C.4.17}$$

Ebből az is következik, hogy bármely egyenes görbülete zérus, ill. ha egy görbe görbülete zérus, akkor az egyenes. Valóban egyenes érintő egységvektora állandó, s így $\Delta\alpha(s) = 0$ miatt $\kappa(s) = 0$. Fordítva, ha $\kappa(s) = 0$ és $\mathbf{n}(s)$ a görbe főnormálisa, akkor $\mathbf{t}'(s) = 0$ adódik, ami azt jelenti, hogy az érintő a görbe minden pontjában azonos, azaz a görbe egyenes.

A tetszőleges P ponthoz tartozó simuló síkban létezik egy kör, amelyik éppen érinti a P pontban a görbét, ez a görbe P pontjához tartozó simuló kör. Az s ívhossz paraméterű P ponthoz tartozó simulókör $R(s)$ sugara az átlaggörbülettel

$$\kappa(s) = \frac{1}{R(s)} \tag{C.4.18}$$

kapcsolatban áll.

Ha a görbe síkgörbe, akkor a binormális vektorok a görbe mentén haladva nem fordulnak el. A binormálisvektorok változása tehát általában azt jellemzi, hogy a görbe egy adott pontja közelében mennyire ,,hajlik ki" a simulósíkból (a binormálisra merőleges síkból). Ezért be szokás vezetni a $\mathbf{b}(s + \Delta s)$ és a $\mathbf{b}(s)$ binormálisok $\Delta\beta(s)$ szögének változását jellemző

$$|\tau(s)| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\beta(s)}{\Delta s} \tag{C.4.19}$$

mennyiséget, ami a simulósíkok szögelfordulásának sebességét jellemzi. A $\tau(s)$ mennyiséget torziónak nevezzük. Előjelét úgy definiáljuk, hogy a binormális vektor deriváltja és a főnormális közötti lineáris kapcsolat,

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s) \tag{C.4.20}$$

a jobb oldalon – előjellel álljon fenn. Ekkor azt is meg lehet mutatni, hogy

$$\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \tag{C.4.21}$$

egyenlet is fennáll. A (C.4.17), (C.4.21), (C.4.20) egyenletek együttesen a a görbe természetes egyenletei, az úgynevezett Frenet-féle képletek, amelyek kifejezik a görbe kísérő háromélе vektorainak deriváltjait a kísérő háromélben, mint bázisban.

A görbeparaméter eliminálása. Mivel a görbe egy egy-dimenziós vonal ezért megadása a térben (síkban) azt jelenti, hogy 2 darab (1 darab) összefüggést kell megadni a görbe pontjainak 3 koordinátája (2 koordinátája) között, azaz térgörbe egyenletei

$$F_1(q_1, q_2, q_3) = 0, \quad F_2(q_1, q_2, q_3) = 0, \tag{C.4.22}$$

amelyek két felület metszésvonalaként határozzák meg a térgörbét, ill. a síkgörbe egyenlete

$$F(q_1, q_2) = 0. \tag{C.4.23}$$

Vizsgáljuk továbbiakban a síkgörbe esetét. Előfordulhat, hogy a síkgörbe $F(q_1, q_2) = 0$ alakú, implicit egyenlete feloldható valamelyik koordinátára

$$q_1 = f_1(q_2), \quad \text{vagy} \quad q_2 = f_2(q_1) \tag{C.4.24}$$

alakban, ezek a síkgörbe egyenletének explicit alakjai. Ilyenkor gondosan meg kell adni a függvények értelmezési tartományát. [1] Ilyen alak pl. a síkgörbe

$$y = f_1(x) \quad \text{vagy} x = f_2(y) \tag{C.4.25}$$

alakja Descartes-koordinátarendszerben, vagy az

$$r = f_1(\varphi), \quad \text{ill.} \quad \varphi = f_2(r) \tag{C.4.26}$$

alakok a síkbeli polárkoordinátarendszerben.

D Komplex számok

A komplex számok

$$z = x + iy \tag{D.1}$$

alakúak, ahol x, y valós számok, $i = \sqrt{-1}$. Definíció szerint

$$x = \text{ Re } z, \quad y = \text{ Im } z, \tag{D.2}$$

ahol Re és Im rendre a komplex szám valós (reális), ill. képzetes (imaginárius) részének jelölésére szolgál. Ha y, akkor a komplex szám valós, ha $x = 0$, akkor a komplex szám tiszta képetes. Az $i = \sqrt{-1}$ képzetes egység első néhány hatványa:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1. \tag{D.3}$$

[1] Vigyázat: Előfordulhat, hogy a síkgörbe implicit egyenletét csak szakaszonként lehet feloldani úgy, hogy f_1, ill. f_2 egyértékű függvények legyenek. Pl. a kör egyenlete $x^2 + y^2 = R^2$, amelynek az $y > 0$, ill. az $y < 0$ félsíkon elhelyezkedő szakaszain rendre $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$, ill. $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Az értelmezési tartományok mindkét esetben $x \in [-R, R]$.

A komplex számok között értelmezve van az összeadás művelete: bármely z_1, z_2 komplex szám esetén

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad \text{ha} \quad z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2. \tag{D.4}$$

Az összeadás művelete rendelkezik az alább tulajdonságokkal: bármely z_1, z_2, z_3 komplex szám esetén

$$\begin{aligned} & z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad \text{kommutatív}, \\ & (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3, \quad \text{asszociatív}, \\ & \text{létezik nullelem}, 0: \quad z_1 + 0 = 0 + z_2 \end{aligned} \tag{D.5}$$

Ekkor Re $0 = 0$, Im $0 = 0$. A komplex számokra értelmezve van a szorzás: bármely z_1, z_2 komplex szám esetén

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{D.6}$$

A szorzás művelete kommutatív,

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, \tag{D.7}$$

asszociatív,

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) = z_1 z_2 z_3 \tag{D.8}$$

disztributív,

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3, \tag{D.9}$$

továbbá létezik az 1 egységelem Re $1 = 1$, Im $1 = 0$, amelyre

$$z\ 1 = 1\ z = z, \tag{D.10}$$

és létezik az inverz, $z^{-1} = 1/z$, amelyre

$$z z^{-1} = z^{-1} z = 1. \tag{D.11}$$

Ha $z = x + iy$, akkor

$$z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}. \tag{D.12}$$

Értelmezve van a tetszőleges z komplex szám z^* komplex konjugáltja:

$$z^* = x - iy, \tag{D.13}$$

ahonnan speciálisan $i^* = -i$. A komplex konjugálás a komplex számsíkon a valós tengelyre történő tükrözést jelent. Komplex szám abszolút értéke:

$$|z| = z z^* = (x^2 + y^2)^{1/2}. \tag{D.14}$$

Komplex szám n egész kitevős hatványa:

$$z^n = z z \cdots z = (x + iy)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} i^k y^k. \tag{D.15}$$

A komplex szám Euler-féle alakja:

$$z = R e^{i\alpha}, \tag{D.16}$$

ahol $R = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ pedig a komplex szám fázisa, amelyre fennáll a

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{y}{x} \tag{D.17}$$

összefüggés.

Az egységnyi abszolút értékű komplex számok általános alakja $e^{i\alpha}$,

$$|e^{i\alpha}| = 1, \tag{D.18}$$

ezek a komplex számsíkon az origó körüli egységnyi sugarú körön helyezkednek el. Az egységnyi abszolút értékű komplex számokra érvényes az Euler-féle

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{D.19}$$

összefüggés. (Innen látszik, hogy az $e^{i\alpha}$ függvény 2π szerint periódikus.) Speciálisan

$$1 = e^{i0}, \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -1 = e^{i\pi} = e^{-i\pi}, \quad -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}. \tag{D.20}$$

A komplex számok Euler-féle alakjának használata különösen kényelmessé teszi komplex számok szorzását, hatványozását, ill. logaritmusának képzését: tetszőleges z, z_1, z_2 komplex számok, és tetszőleges λ valós szám esetén

$$\begin{aligned}
&z_1 z_2 = |z_1|e^{i\alpha_1}|z_2|e^{i\alpha_2} = |z_1||z_2|e^{i(\alpha_1+\alpha_2)},\\
&z^{-1} = 1/z = (|z|e^{i\alpha})^{-1} = (1/|z|)e^{-i\alpha},\\
&\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\alpha_1-\alpha_2)},\\
&z^\lambda = |z|^\lambda e^{i\lambda\alpha}
\end{aligned} \tag{D.21}$$

Fontos figyelembe venni, hogy az e^{ix} exponenciális függvény, ahol x valós, 2π szerint periódikus. A hatványozáskor ezért, ha $\lambda > 1$, akkor z^λ fázisa egyértelmű, a $\lambda\alpha/(2\pi)$ hányados törtrésze; ilyenkor a hatványozás egyértékű eredményt ad. Ha $\lambda < 1$, akkor azonban figyelembe kell venni, hogy $e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+n2\pi)}$, ahol n tetszöleges egész szám. Ezért ilyenkor a $\lambda(\alpha + n2\pi)$ valós számok közül több is eshet a $[0, 2\pi)$ intervallumba. Ekkor a hatványozás többértékű művelet.

Speciálisan az n-edik ($n > 1$, egész szám) gyökvonás n-értékű művelet. A $z = 1$ komplex szám n-edik gyökei a $\zeta_k^{[n]} = 1^{1/n}$ n-edik egységgyökök:

$$\zeta_k^{[n]} = 1^{1/n} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{D.22}$$

úgyhogy

$$z^{1/n} = |z|^{1/n}e^{i\alpha/n}\zeta_k^{[n]}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{D.23}$$

Az n-edik egységgyökök az origó körüli egységsugarú körön, egy szabályos n-szög csúcsaiban helyezkednek el a komplex számsíkon. A fentiak alapján a négyzetgyökvonás kétértékű művelet, a második egységgyökök

$$\zeta_1^{[2]} = 1 = 1 + i0, \quad \zeta_2^{[2]} = -1 = -1 + i0, \tag{D.24}$$

és $z^{1/2} = \pm|z|^{1/2}$. (Valós szám négyzetgyöke az a pozitív valós szám, amelynek négyzete az eredeti valós szám. Valós számok közt a négyzetgyökvonás csak nem negatív számokra van értelmezve.) Komplex számok körében például

$$(-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}i\pi}\zeta_k^{[2]} = \pm i. \tag{D.25}$$

E Trigonometrikus függvények, összefüggések

A $y = \sin x$ függvény jellemzői:

- ÉT(értelmezési tartomány): $x \in (-\infty, +\infty)$,
- ÉK (értékkészlet): $y \in [-1, +1]$.
- 2π szerint periódikus: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$
- páratlan függvény: $\sin(-x) = -\sin x$
- Zéróhelyek: $x = n\pi$, n tetszőleges egész szám.
- Maximumhelyek: $x = \frac{1}{2}\pi + 2\pi n$, $\forall\ n$ egész szám.
- Minimumhelyek: $x = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi n$, $\forall\ n$ egész szám.

Az $y = \cos x$ függvény jellemzői:

- ÉT(értelmezési tartomány): $x \in (-\infty, +\infty)$,
- ÉK (értékkészlet): $y \in [-1, +1]$.
- 2π szerint periódikus: $\cos x = \cos(x + 2\pi)$
- Páros függvény: $\cos(-x) = \cos x$
- Zéróhelyek: $x = \frac{1}{2}\pi + n\pi$, n tetszőleges egész szám.
- Maximumhelyek: $x = 2\pi n$, $\forall\ n$ egész szám.
- Minimumhelyek: $x = \pi + 2\pi n$, $\forall\ n$ egész szám.

Azonosságok:

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \\
&\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \\
&\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \\
&\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
&\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y
\end{aligned} \tag{E.1}$$