BEVEZETÉS A MECHANIKÁBA II. MEREVTESTEK ÉS FOLYTONOS KÖZEGEK

Sailer Kornél

Egyetemi előadás

Elméleti Fizikai Tanszék
Debreceni Egyetem
Debrecen
2007.

Contents

BEVEZETÉS

1 MEREVTESTEK

1.1 Merevtestek kinematikája

1.1.1 Merevtest fogalma. Merevtesthez rögzített koordinátarendszer

Az olyan testet nevezzük merevtestnek, amelynek bármely két pontja közötti távolság a test mozgása során állandó marad. Tehát ha P és Q a merevtest két tetszőleges pontja, és valamely K vonatkoztatási rendszerben $\vec{r}_P(t)$ és $\vec{r}_Q(t)$ jelölik rendre az O origóból ezen pontokba mutató helyzetvektorokat a tetszőleges t időpillanatban, akkor

$$|\vec{r}_P(t) - \vec{r}_Q(t)| = \text{ const.} \tag{1.1.1}$$

a mozgás során. Meg kell jegyezni, hogy a merevtest fogalma absztrakcióval kapható. A valóságos testek ezt a feltételt szigorúan véve sosem teljesítik. Ugyanakkor számos test pontjai relatív távolságának megváltozása a mozgás során elhanyagolhatóan kicsiny mértékű magukhoz a szóbanforgó távolságokhoz képest. Ezeket a testeket tekinthetjük jó közelítéssel merevtesteknek.

A fenti értelmezés felhasználja a ,,merevtest pontjainak" fogalmát. Pontosítsuk, hogy ezen mit is értünk. A merevtest atomisztikus modelljében a merevtestet pontrendszernek, azaz kiterjedés és belső szerkezet nélküli anyagi pontok (részecskék) rendszerének tekintjük. Ebben a modellben a test merevsége azt jelenti, hogy bármely két részecskéjének távolsága időben állandó a test mozgása során. A merevtestet modellezhetjük folytonos közegként is. Ebben az esetben a testet kicsiny, de makroszkopikus számú részecskét tartalmazó ΔV_a $(a = 1, 2, \ldots, N)$ térfogatú darabkákra bontjuk gondolatban, ahol bámelyik darabka térfogata sokkal kisebb, mint az egész test V térfogata, $\Delta V_a \ll V = \sum_{a=1}^{N} \Delta V_a$. Ezesetben az egyes térfogatdarabkákat lényegében pontszerűnek tekinthetjük, és a merevség azt jelenti, hogy tetszőleges két ilyen anyagdarabka távolsága a test mozgása során állandó marad. Ilymódon a merevtestet folytonos közegnek tekintő modellt is visszavezettük a pontrendszer-modellre. A merevtestet jellemző fizikai mennyiségek többsége additív, azaz a merevtestet jellemző mennyiség az egyes részecskéket jellemző megfelelő fizikai mennyiségek összege, esetleg vektori összege. Ilyenkor a merevtestet jellemző fizikai mennyiség képletében $\sum_{a=1}^{N}$ összegzést kell végrehajtani a merevtest valamennyi részecskéjére. Ha a merevtestet részecskerendszerként modellezzük, akkor az összegzést szó szerint kell érteni. Ha a merevtestet folytonos tömegeloszlásúnak tekintjük, akkor érdemes az additív fizikai mennyiségek két csoportjával külön foglalkozni. Az egyik eset, amikor az egyes anyagdarabkákat jellemző fizikai mennyiség független az anyagdarabka tehetetlen tömegétől, amilyen pl. az egyes ΔV_a térfogatú anyagdarabkákban az atomok száma,

$$\Delta N_a = \sum_{b \in \Delta V_a} 1, \tag{1.1.2}$$

vagy átlagos sebessége,

$$\vec{v}_a = \sum_{b \in \Delta V_a} \vec{u}_b / \Delta N_a, \tag{1.1.3}$$

ahol az összegzés a térfogatdarabkában található atomokra vonatkozik, és $\vec{u}_b$ az egyes atomok sebessége. (Mivel a test merev, adott ΔV_a térfogatú darabkában a merevtest mozgása során nem vĺtozik az atomok ΔN_a száma.) A folytonos tömegeloszlást úgy tudjuk figyelembe venni, hogy képezzük azt a határesetet, amikor a ΔV_a térfogatdarabkákkal úgy tartunk nullához, hogy fokozatosan ráhuzzuk azokat a térfogatdarabka valamely $\vec{r}$ belső pontjára. Ekkor értelmezhetjük a részecske-sűrűséget,

$$n(\vec{r}) = \lim_{\Delta V_a \to \vec{r}} \frac{\Delta N_a}{\Delta V_a} \tag{1.1.4}$$

ami merevtestben a mozgás során állandó marad. Az anyagdarabkákra történő összegzést ezután úgy foghatjuk fel, mint integrálközelítő összeget, amelynek a fenti értelemben vett határértéke a megfelelő Riemann-integrál. Így pl. az atomok száma (részecskeszám) a merevtest egy tetszőleges V térfogatú darabjában

$$N = \lim \sum_{a\in V} \sum_{b\in \Delta V_a} 1 = \lim \sum_{a\in V} n(\vec{r}_a)\Delta V_a = \int_V n(\vec{r}) dV. \tag{1.1.5}$$

Hasonlóan értelmezhetjük a merevtest pontainak sebességmezejét, mint az atomok átalgos sebességét, amelynek értéke a merevtest $\vec{r}$ helyzetvektorú pontjában

$$\lim_{\Delta V_a \to \vec{r}} \frac{\sum_{b\in\Delta V_a} \vec{u}_b}{\Delta N_a} = \lim_{\Delta V_a \to \vec{r}} \frac{\sum_{b\in\Delta V_a} \vec{u}_b}{\Delta N_a} \frac{\Delta N_a}{\Delta V_a} \Delta V_a = \vec{v}(\vec{r}) n(\vec{r}) dV. \tag{1.1.6}$$

A részecskéket jellemző fizikai mennyiségek másik csoportja, mint az impulzus, kinetikus energia, stb. arányos a részecskék tehetetlen tömegével. Ezért érdemes bevezetni bevezetni a tömegsűrűséget,

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V_a \to \vec{r}} \frac{\Delta m_a}{\Delta V_a} = \lim_{\Delta V_a \to \vec{r}} \frac{\sum_{b\in\Delta V_a} m_b}{\Delta V_a} \tag{1.1.7}$$

határértékként. Ennek értéke merevtestben szintén nem változik a mozgás során a merevtest semelyik pontjában. Segítségével a merevtest tetszőleges V térfogatú darabjának a tehetetlen tömege,

$$m = \lim \sum_{a\in V} \Delta m_a = \lim \sum_{a\in V} \rho(\vec{r}_a)\Delta V_a = \int_V \rho(\vec{r}) dV, \tag{1.1.8}$$

vagy például az impulzusa, ill. kinetikus energiája, rendre

$$\vec{P} = \lim \sum_{a\in V} p_a = \lim \sum_{a\in V} \Delta m_a \vec{v}_a = \lim \sum_{a\in V} \frac{\Delta m_a}{\Delta V_a} \vec{v}_a \Delta V_a = \int_V \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) dV, \tag{1.1.9}$$

és

$$\vec{T}_{kin} = \lim \sum_{a\in V} \frac{1}{2}\Delta m_a v_a^2 = \lim \sum_{a\in V} \frac{1}{2}\Delta m_a v_a^2 = \lim \sum_{a\in V} \frac{1}{2} \frac{\Delta m_a}{\Delta V_a} v_a^2 \Delta V_a = \int_V \frac{1}{2}\rho(\vec{r}) v^2(\vec{r}) dV. \tag{1.1.10}$$

A diszkrét pontrendszer és a folytonos anyageloszlású közeg modellje így lényegében egyszerre tárgyalható, ha $\sum_a$ az egyik esetben a részecskékre történő diszkrét összegzést, a másik esetben a megfelelő térfogati integrált jelenti. Ezért a továbbiakban csak akkor írjuk ki a folytonos tömegeloszlású esetre vonatkozó képleteket explicit alakban, ha ez elengedhetetlenül szükséges.

A fizikai mennyiségek kétféle csoportjával érdemes itt részletesen foglalkoznunk. Az egyik eset, amikor az egyes részecskéket jellemző fizikai mennyiség nem függ a részecskék tömegétől A folytonos tömegeloszlású merevtest esetén ez az összeg közeg

Amikor a mechanikában értelmeztük a vonatkoztatási rendszert, akkor egymáshoz képest nyugvó méterrudak és nyugvó órak segítségével tettük ezt. A vonatkoztatási rendszer térbeliségét meghatározó méterrudakat és azok egymáshoz képest nyugvó rendszerét értelmezésüknél fogva merevtestnek kell tekintenünk.

A merevtest szabadsági fokainak számát a következőképpen kaphatjuk meg. Nézzük a merevtest helyzetét egy tetszőleges K vonatkoztatási rendszerben (laboratóriumi rendszerben) nyugvó megfigyelő ,,szemével". A merevtestet N anyagi pont rendszerének tekintjük. Jelöljük ki a merevtest egy tetszőleges P_0' pontját és nevezzük ezt a merevtesthez rögzített $O' = P_0'$ vonatkoztatási pontnak. Az O' pont helyzetét a K laboratóriumi vonatkoztatási rendszerben egy helyzetvektor, azaz 3 független geometriai adat határozza meg. A merevtest többi $N-1$ darab P_a' pontjának helyzetét a merevtesthez rögzített O' vonatkoztatási ponthoz képest az $\vec{r}_a'$ $(a = 1, 2, \ldots, N-1)$ helyzetvektorok határozzák meg. A mozgás során változhat az $\vec{r}_1'$ helyzetvektor (a merevtestre ,,ráfestett 1-es nyíl") iránya a K laborrendszerhez képest, amelyet 2 darab szög határoz meg egyértelműen. Továbbá a mozgás során változhat az $\vec{r}_1'$ és $\vec{r}_2'$ sík helyzete, amely elfordulhat az $\vec{r}_1'$ vektor, mint tengely körül. Ezt az elfordulást 1 darab elfordulási szög határozza meg. A merevtest összes többi helyzetvektora ezután már jól definiált helyzetbe kerül. Valóban, az O', P_1' és P_2' pontok meghatároznak egy háromszöget. A merevtest bármely P_a' $(a > 2)$ állandó távolságra kell legyen ennek a háromszögnek mindhárom csúcsától, úgyhogy helyzete egyértelműen meghatározott. Az elmondott érvelés alapján a merevtest szabadsági fokainak száma (a merevtest helyzetének egyértelmű megadásához szükséges és elégséges geometriai adatok száma) $s = 3 + 2 + 1 = 6$. Megfontolásunk szempontjából lényegtelen, hogy az érveléshez a test melyik 3 pontját neveztük P_0'-nak, P_1'-nek, ill. P_2'-nek.

Célszerű a mozgás leírása érdekében bevezetni a testhez rögzített K' vonatkoztatási rendszert. Legyen ennek origója a test tetszőlegesen választott O' pontja, és jelöljék ki az ebben felvett Descartes-koordinátarendszer tengelyeinek irányát az $\vec{E}_{(i)}'$ $(i = 1, 2, 3)$ egységvektorok, amelyek szintén a merevtesthez vannak rögzítve, azaz kezdőpontjuk O', végpontjaik pedig alkalmasan választott, ugyancsak a merevtesthez rögzített pontok (,,a koordinátatengelyek mintegy rá vannak festve a merevtestre"). A merevtest helyzetét egyértelműen meghatározza

1. az O' vonatkoztatási pont helyzete a K laborrendszerben, vagyis az az $\vec{R}$ helyzetvektor, amely a K laborrendszer origójából a merevtesthez rögzített K' rendszer O' origójába mutat, továbbá

2. a K' rendszerben felvett Descartes-koordinátarendszer tengelyeinek az irányítása a K laborrendszerben felvett Descartes-koordinátarendszer tengelyeihez képest.

A K-ban felvett Descartes-koordinátarendszer tengelyeit, ill. az azokat kijelölő $\vec{E}_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ bázis-egységvektorokat toljuk el párhuzamosan az O origóból az O' pontba. Ekkor a K'-ben felvett, $\vec{E}_{(i)}'$ bázis-egységvektorokkal kijelölt Descartes-koordinátarendszer helyzetét annak a térbeli elforgatásnak az adataival jellemezhetjük, amely az O' pontba párhuzamosan eltolt $\vec{E}_{(i)}$ bázisvektorokat átviszi az $\vec{E}'_{(i)}$ bázisvektorokba. Ezt az elforgatást többféleképpen is meghatározhatjuk.

1. Az egyik lehetőség, hogy megadjuk az $\alpha_i = (\vec{E}_i, \vec{E}'_i)\angle$ szögeket, $(i = 1, 2, 3)$, vagyis rendre az $x-$, $x'-$, az $y-$, $y'-$ és a $z-$, $z'-$tengelyek által bezárt szögeket.

2. Egy másik lehetőség, hogy a K' tengelyeinek K-hoz képesti irányulását az úgynevezett Euler-szögekkel adjuk meg. Ezeket a következőképpen értelmezzük.

   (a) Forgassuk el az O' pontba párhuzamosan eltolt $\vec{E}_{(i)}$ vektorhármast (triádot) az $\vec{E}_{(3)}$ körül $\psi \in [0, 2\pi]$ szöggel pozitív irányban (az $\vec{E}_{(3)}$ vektor hegye felől nézve az óramutató járásával ellentétes irányban). Ekkor az $\vec{E}_{(1)}$ és $\vec{E}_{(2)}$ vektorok rendre az $\vec{E}''_{(1)}$ és $\vec{E}''_{(2)}$ vektorokba transzformálódnak.

   (b) Az $\vec{E}''_{(1)}$ vektor által kijelölt félegyenest csomóvonalnak szokás nevezni. Forgassuk el most az $\vec{E}''_{(1)}$, $\vec{E}''_{(2)}$, $\vec{E}''_{(3)} = \vec{E}_{(3)}$ triádot az $\vec{E}''_{(1)}$ vektor, azaz a csomóvonal körül $\theta \in [0, \pi]$ szöggel pozitív irányban. Jelölje az $\vec{E}''_{(1)}$, $\vec{E}''_{(2)}$, $\vec{E}''_{(3)}$ vektorok elforgatottját rendre $\vec{E}'''_{(1)} = \vec{E}''_{(1)}$, $\vec{E}'''_{(2)}$, $\vec{E}'''_{(3)}$.

   (c) Végül forgassuk el az $\vec{E}'''_{(1)}$, $\vec{E}'''_{(2)}$, $\vec{E}'''_{(3)}$ triádot az $\vec{E}'''_{(3)}$ vektor körül $\varphi \in [0, 2\pi]$ szöggel pozitív irányban. Az eredményül kapott triád $\vec{E}'_{(1)}$, $\vec{E}'_{(2)}$, $\vec{E}'_{(3)} = \vec{E}'''_{(3)}$ feszíti ki az általános helyzetű koordinátarendszert a testhez rögzített K' vonatkoztatási rendszerben.

Két vonatkoztatási rendszer egymáshoz képesti véges elforgatása mindig előállítható úgy, mint infinitezimális elforgatások egymásutánja. Az infinitezimális elforgatásokat is megadhatjuk a fenti módokon, csak akkor a megfelelő koordinátatengelyek egymással bezárt szögei, ill. az Euler-szögek infinitezimálisak. Érdemes visszaemlékeznünk rá azonban (ld. Mechanika I.), hogy az infinitezimális elforgatások egyszerűbben is megadhatók. Nevezetesen úgy, mint egy $\vec{n}$ egységvektor által kijelölt irány körüli, pozitív értelmű (a vektorhoz képest jobbkéz-szabály szerint illeszkedő), infinitezimális $d\alpha$ szögű elforgatások. Vegyünk fel egy K'', a K laborrendszerhez képest nem forgó, a merevtesttel együtthaladó vonatkoztatási rendszert, amelynek O'' origója egybeesik a merevtesthez rögzített K' rendszer O' origójával. Ha a merevtest infinitezimálisan elfordul a K'' rendszerhez képest, azaz a merevtesthez K' vonatkoztatási rendszer elfordul K''-höz képest, akkor a merevtesthez rögzített $\vec{r}'$ vektorok is elfordulnak az O' pontban felvett, K''-ben (ill K-ban) rögzített $\vec{n}$ irány körül infinitezimális $d\alpha$ szöggel, úgyhogy eredményül K''-ből nézve az

$$\vec{r}' \longrightarrow \vec{r}' + \vec{n} d\alpha \times \vec{r}' \tag{1.1.11}$$

transzformáció jobb oldalán álló vektorba fordulnak bele.

1.1.2 Merevtest infinitezimális elmozdulása. Szögsebesség

A merevtest egy tetszőleges P pontjának helyzetét a K inerciarendszerben (laborrendszerben) az O origóból a P pontba mutató $\vec{r}_P$ helyzetvektor határozza meg. Ennek a pontnak a helyzetvektora a merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszerben $\vec{r}_P\,'$. Jelölje az $\vec{R}$ vektor a K laborrendszer O origójából a merevtesthez rögzített K' rendszer O' origójába mutató helyzetvektort. Ekkor tetszőleges t időpillanatban fennáll az

$$\vec{r}_P(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_P\,'(t) \tag{1.1.12}$$

egyenlőség. A merevtest dt idő alatt bekövetkező infinitezimális elmozdulása következtében ezen vektorok infinitezimális megváltozásaira tehát

$$d\vec{r}_P = d\vec{R} + d\vec{r}_P\,' \tag{1.1.13}$$

egyenlőség áll fenn. Itt a merevtest P pontjának elemi transzlációját $\delta_{\rm tr}\vec{r}_P = d\vec{R}$ írja le. Az $\vec{O'P} = \vec{r}_P\,'$ hossza állandó, hiszen a merevtest egyik pontjából a másikba mutató vektorról van szó. A mozgás során ez a vektor csak az irányát változtatja, azaz elfordul. Ezért $\delta_{\rm rot}\vec{r}_P = d\vec{r}_P\,'$ írja le a merevtest tetszőleges P pontjának elemi elfordulását az O' pont körül. Ha az elemi elforduás pozitív irányban $d\varphi$ szögű az $\vec{n}$ (O'-ben felvett, K-ban rögzített) irány körül, akkor

$$\delta_{\rm rot}\vec{r}_P = d\vec{r}_P\,' = \vec{n}d\varphi \times \vec{r}_P\,' \tag{1.1.14}$$

A merevtest tetszőleges infinitezimális elmozdulása így egy elemi transzláció és egy elemi rotáció egymásutánja.

Tegyük fel, hogy az elemi elmozdulás dt idő alatt következik be, akkor a merevtest tetszőleges P pontjának sebessége a K laborrendszerben

$$\vec{v}_P(t) = \frac{d\vec{r}_P(t)}{dt} = \vec{V}_{O'}(t) + \vec{\omega}' \times \vec{r}_P\,' \tag{1.1.15}$$

ahol

$$\vec{\omega}' = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n} \tag{1.1.16}$$

a merevtest O' körüli forgásának szögsebessége,

$$\vec{V}_{O'}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} \tag{1.1.17}$$

a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer O' origójának sebessége a K laborrendszerben. Utóbbi megegyezik a merevtest O' pontjával együtthaladó, nem forgó K'' vonatkoztatási rendszer sebességével is.

Most belátjuk, hogy a szögsebesség vektora független a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer origójának megválasztásától. Tegyük fel, hogy a vonatkoztatási pontot áthelyezzük a merevtest O_1' pontjából a merevtest O_2' pontjába. Ekkor a merevtest forgása rendre az $\vec{\omega}_1' = \vec{n}_1\frac{d\varphi_1}{dt}$, ill. a $\vec{\omega}_2' = \vec{n}_2\frac{d\varphi_2}{dt}$ szögsebességekkel jellemezhető, ahol az alsó index a megfelelő vonatkoztatási pontra utal. A merevtest tetszőleges P pontjának sebessége

$$\vec{v}_P = \vec{V}_{O_1'} + \vec{\omega}_1' \times \vec{r}_{P1}' = \vec{V}_{O_2'} + \vec{\omega}_2' \times \vec{r}_{P2}' \tag{1.1.18}$$

ahol $\vec{r}_{P1}' = \vec{b} + \vec{r}_{P2}'$, ahol $\vec{b} = \vec{O_1'O_2'}$ és $\vec{r}_{Pa}' = \vec{O_a'P}$ $(a = 1, 2)$. Az O_2' pont sebessége ugyanakkor

$$\vec{V}_{O_2'} = \vec{O}_1' + \vec{\omega}_1' \times \vec{b}, \tag{1.1.19}$$

amit behelyettesítve

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_P &= \vec{O}_1' + \vec{\omega}_1' \times \vec{b} + \vec{\omega}_2' \times (\vec{r}_{P1}' - \vec{b}) \\
&= \vec{O}_1' + \vec{\omega}_2' \times \vec{r}_{P1}' + (\vec{\omega}_1' - \vec{\omega}_2') \times \vec{b} \\
&= \vec{V}_{O_1'} + \vec{\omega}_1' \times \vec{r}_{P1}{}' \qquad (1.1.20)
\end{aligned}
$$

akkor és csak akkor áll fenn azonosságként tetszőleges $\vec{b}$ és $\vec{r}_{P1}{}'$ vektorok, azaz tetszőleges O_2' és P pontok esetén, ha

$$\vec{\omega}_1' - \vec{\omega}_2' = 0 \qquad (1.1.21)$$

és

$$\vec{\omega}_2' \times \vec{r}_{P1}' = \vec{\omega}_1' \times \vec{r}_{P1}', \qquad (1.1.22)$$

azaz ha $\vec{\omega}_1' = \vec{\omega}_2'$. Az $\vec{\omega}$ szögsebességvektor tehát nincsen vonatkoztatási ponthoz kötve, tetszőlegesen áthelyezhető, ezért beszélhetünk a merevtest forgásának $\vec{\omega}$ szögsebességéről. Ebből természetesen azonnal következik, hogy az infinitezimális elforgatás iránya és szöge (nagysága) is független a vonatkoztatási pont megválasztásától, azaz $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{n}$, ill. $d\varphi_1 = d\varphi_2 = d\varphi$. A $\vec{n}d\varphi$ vektort az infinitezimális forgatás szögelfordulás-vektorának szokás nevezni. Ne felejtsük el, hogy csak infinitezimális forgatáshoz lehet ilyen vektort rendelni, véges elforgatáshoz nem.

1.1.3 Szögsebesség komponensei a merevtesthez rögzített koordinátarendszerben

Ebben a fejezetben először meghatározzuk a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer bázisvektorainak iránykoszinuszait a laboratóriumi rendszerben, majd meghatározzuk a szögsebességvektor Descartes-komponenseit a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszerben.

Korábbi jelöléseinket használva a merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszer $\vec{E}'_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ bázis-egységvektorainak iránykoszinuszait a

$$\vec{E}_{(j)} \cdot \vec{E}'_{(k)} = \cos \alpha_{j,k} \qquad (1.1.23)$$

skalárszorzatok definiálják, $(j, k = 1, 2, 3)$, ahol $\vec{E}_{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ a K laboratóriumi rendszerben felvett Descartes-koordinátarendszer tengelyeit kijelölő bázis-egységvektorok. Ezeket az iránykoszinuszokat úgy tudjuk kifejezni az Euler-szögekkel, hogy nyomon követjük a K rendszer $\vec{E}_{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ bázis-egységvektorainak transzformációját azon elforgatások során, amelyek a K rendszer tengelyeit beleforgatják a K' rendszer tengelyeibe. Az Euler-szögek értelmezésének megfelelően ez az alábbi elforgatások egymásutánját jelenti:

1. Az $\vec{E}_{(3)}$ vektor körüli, pozitív irányú ψ szögű elforgatás:

   $$\vec{E}''_{(i)} = O^{[1]}_{i,j} \vec{E}_{(j)} \qquad (1.1.24)$$

   ahol az elforgatás mátrixa

   $$(O^{[1]}_{i,j}) = (\vec{E}''_{(i)} \cdot \vec{E}_{(j)}) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.1.25)$$

Itt és a továbbiakban a képletek egyszerűbb alakja érdekében a kétszer előforduló latin indexek (ha másképp nem mondjuk) összegzést jelentenek a Descartes-koordinátákra, $a_i b_i = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$, $A_{i,j} a_j = \sum_{j=1}^{3} A_{i,j} a_j$, stb.

2. A következő elforgatás az $\vec{E}''_{(1)}$ vektor körüli pozitív irányú θ szögű elforgatás,

$$\vec{E}'''_{(i)} = O^{[2]}_{i,j} \vec{E}''_{(j)} \tag{1.1.26}$$

ahol

$$O^{[2]}_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.1.27}$$

úgyhogy

$$\vec{E}'''_{(i)} = O^{[2]}_{i,j} O^{[1]}_{j,k} \vec{E}_{(k)} \tag{1.1.28}$$

a második elforgatási lépés után.

3. Végül az $\vec{E}'''_{(3)}$ vektor körül hajtunk végre pozitív irányú φ szögű elforgatást:

$$\vec{E}'_{(i)} = O^{[3]}_{i,j} \vec{E}'''_{(j)} \tag{1.1.29}$$

ahol az elforgatás mátrixa

$$O^{[3]}_{i,j} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.30}$$

Végül tehát a K' vonatkoztatási rendszerben felvett Descartes-koordinátarendszer bázisvektorait az

$$\vec{E}'_{(i)} \quad = \quad O^{[3]}_{i,j} O^{[2]}_{j,k} O^{[1]}_{k,l} \vec{E}_{(l)} \tag{1.1.31}$$

alakban fejezhetjük ki a K laborrendszerben felvett Descartes-koordinátarendszer bázisvektoraival. A mátrixszorzások elvégzése után az

$$\begin{aligned}
\vec{E}'_{(1)} &= (\cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi)\vec{E}_{(1)} + (\sin\psi\cos\varphi + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi)\vec{E}_{(2)} \\
&\quad + \sin\theta\sin\varphi\ \vec{E}_{(3)} \\
\vec{E}'_{(2)} &= (-\cos\psi\sin\varphi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi)\vec{E}_{(1)} \\
&\quad + (-\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi)\vec{E}_{(2)} + \sin\theta\cos\varphi\ \vec{E}_{(3)} \\
\vec{E}'_{(3)} &= \sin\theta\sin\psi\ \vec{E}_{(1)} - \sin\theta\cos\psi\ \vec{E}_{(2)} + \cos\theta\ \vec{E}_{(3)}
\end{aligned} \tag{1.1.32}$$

összefüggések adódnak.

A szögsebességvektor komponenseit a fenti összefüggések ismeretében könnyen kifejezhetjük az Euler-szögekkel. Bontsuk ehhez fel az $\vec{\omega}$ szögsebességvektort ferdeszögű, az $\vec{E}''_{(1)}$, $\vec{E}_{(3)}$ és $\vec{E}'_{(3)}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{E}_{(3)} + \dot{\theta}\vec{E}''_{(1)} + \dot{\varphi}\vec{E}'_{(3)}. \tag{1.1.33}$$

A szögsebességvektor Descartes-komponenseit a K' rendszerben az alábbi összefüggések határozzák meg:

$$\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \vec{\omega}\cdot\vec{E}'_{(1)} \\
&= \dot{\psi}\vec{E}_{(3)}\cdot\vec{E}'_{(1)} + \dot{\theta}\vec{E}''_{(1)}\cdot\vec{E}'_{(1)} \\
&= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \equiv p \\
\omega_{y'} &= \vec{\omega}\cdot\vec{E}'_{(2)} \\
&= \dot{\psi}\vec{E}_{(3)}\cdot\vec{E}'_{(2)} + \dot{\theta}\vec{E}''_{(1)}\cdot\vec{E}'_{(2)} \\
&= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi \equiv q \\
\omega_{z'} &= \vec{\omega}\cdot\vec{E}'_{(3)} \\
&= \dot{\psi}\vec{E}_{(3)}\cdot\vec{E}'_{(3)} + \dot{\theta}\vec{E}''_{(1)}\cdot\vec{E}'_{(3)} + \dot{\varphi} \\
&= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \equiv r
\end{aligned} \tag{1.1.34}$$

Itt bevezettük az egyes szögsebesség-komponensek konvencionális p, q, r jelölését. Fontos felfigyelni arra, hogy ezek a komponensek nem differenciálhányadosok, azaz nincsen olyan vektor, amelynek az idő szerinti első deriváltja a szögsebességvektor lenne.

1.1.4 Merevtestek impulzusa

Merevtest impulzusa tetszőleges K laboratóriumi vonatkoztatási rendszerben a merevtest részecskéi impulzusainak vektori összege, azaz

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \sum_a \vec{p}_a = \sum_a m_a\vec{v}_a \\
&= \sum_a m_a(\vec{V}_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}'_a) \\
&= M\vec{V}_{O'} + \vec{\omega}\times\sum_a m_a\vec{r}'_a \\
&= M(\vec{V}_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{R}'_{TKP})
\end{aligned} \tag{1.1.35}$$

ahol $\vec{O}'$ a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer origójának (a merevtest egy tetszőlegesen választott pontjának) a sebessége a laborrendszerben, $\vec{r}'_a$ a merevtest egyes részecskéinek helyzetvektorai a merevtesthez rögzített K' rendszerben, $\vec{R}'_{TKP} = \frac{1}{M}\sum_a m_a\vec{r}'_a$ a merevtest tömegközéppontjának helyzetvektora a merevtesthez rögzített rendszerben, $M = \sum_a m_a$ a merevtest teljes tehetetlen tömege.

Ha a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer origóját a merevtest tömegközéppontjában választjuk, akkor $\vec{R}'_{TKP} = 0$, úgyhogy a merevtest teljes impulzusa azonos annak az elképzelt részecskének az impulzusával, amelynek tehetetlen tömege egyenlő a merevtest teljes tehetetlen tömegével, sebessége pedig a TKP sebességével egyenlő,

$$\vec{P} = M\vec{V}_{TKP}. \tag{1.1.36}$$

1.1.5 Merevtestek kinetikus energiája. Tehetetlenségi nyomaték fogalma

Merevtest kinetikus energiája a K laborrendszerben

$$T = \sum_a \frac{1}{2} m_a \vec{v}_a^2. \tag{1.1.37}$$

Bontsuk fel az egyes merevtest egyes részecskéinek sebességét transzlációs és rotációs mozgás sebességére,

$$\vec{v}_a = \vec{V}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_a \tag{1.1.38}$$

és használjuk fel, hogy

$$\vec{v}_a^2 = \vec{V}_{O'}^2 + 2\vec{V}_{O'} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a) + (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a)^2, \tag{1.1.39}$$

ill. hogy

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a)^2 &= (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a)_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a)_i \\ &= \epsilon_{i,j,k} \omega_j x'_{a\ k} \epsilon_{i,l,n} \omega_l x'_{a\ n} \\ &= \omega_j \omega_k (\delta_{j,k} \vec{r}'^{\,2}_a - x'_{a\ j} x'_{a\ k}), \end{aligned} \tag{1.1.40}$$

ahol kihasználtuk az

$$\epsilon_{i,j,k} \epsilon_{i,l,n} = \delta_{j,l} \delta_{k,n} - \delta_{j,n} \delta_{k,l} \tag{1.1.41}$$

azonosságot. A fentieket behelyettesítve a kinetikus energia kifejezésébe

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \vec{V}_{O'}^2 \sum_a m_a + \vec{V}_{O'} \cdot (\vec{\omega} \times \sum_a m_a \vec{r}_a{}') + \frac{1}{2} \omega_j \omega_k \sum_a m_a (\delta_{j,k} \vec{r}_a{}'^{\,2} - x'_{a\ j} x'_{b\ k}) \\ &= \frac{1}{2} M \vec{V}_{O'}^2 + M \vec{V}_{O'} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{R}'_{TKP}) + \frac{1}{2} \Theta^{[O']}_{j,k} \omega_j \omega_k \end{aligned} \tag{1.1.42}$$

adódik, ahol $M = \sum_a m_a$ a merevtest teljes tehetetlen tömege, $\vec{R}'_{TKP}$ a merevtest TKP-jának helyzetvektora a merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszerben és

$$\Theta^{[O']}_{j,k} = \sum_a m_a (\delta_{j,k} \vec{r}_a{}'^{\,2} - x'_{a\ j} x'_{b\ k}) \tag{1.1.43}$$

definíció szerint a merevtestnek az O' pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka.

Látjuk, hogy a merevtest kinetikus energiájában a haladó mozgásból és a forgó mozgásból származó járulék általában nem különíthető el egyértelműen, kinetikus energia (1.1.42) kifejezésében szereplő második tag miatt. Ha azonban az O' testhez rögzített vonatkoztatási pontot speciálisan a merevtest TKP-jának választjuk, akkor az $\vec{R}'_{TKP}$ vektor a TKP-ból a TKP-ba mutató vektor, azaz nullvektor lesz, úgyhogy a kinetikus energia (1.1.42) kifejezésének második tagja ekkor eltűnik és azt kapjuk, hogy

$$T = \frac{1}{2} M \vec{V}^2_{TKP} + \frac{1}{2} \Theta^{[TKP]}_{j,k} \omega_j \omega_k, \qquad (1.1.44)$$

ahol $\vec{V}_{TKP}$ a TKP sebessége a K laborrendszerben, $\Theta^{[TKP]}_{j,k}$ pedig a merevtest TKP-ra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka. A merevtest kinetikus energiája tehát felírható, mint a TKP haladó mozgásából származó kinetikus energia és a merevtest TKP körüli forgásából származó forgási energia összege.

1.1.6 Tehetetlenségi nyomaték

A jelen fejezetben megvizsgáljuk közelebbről a tehetetlenségi nyomaték néhány fizikai és matematikai tulajdonságát.

1. A tehetetlenségi nyomaték függ a vonatkoztatási ponttól. Ennek belátásához helyezzük át a merevtesthez rögzített vonatkoztatási pontot az O' pontból a K' vonatkoztatási rendszerben $\vec{b}$ helyzetvektorú O'' pontba. Ekkor a merevtest valamennyi részecskéjének helyzetvektora $\vec{r}_a{}'$-ról $\vec{r}_a{}''$-re módosul,

$$\vec{r}_a{}' \;=\; \vec{b} + \vec{r}_a{}'', \qquad (1.1.45)$$

úgyhogy

$$\begin{aligned} \Theta^{[O']}_{j,k} &= \sum_a m_a(\delta_{j,k} x'_{a\ l} x'_{a\ l} - x'_{a\ j} x'_{a\ k}) \\ &= \sum_a [\delta_{j,k}(b_l b_l + 2 b_l x''_{a\ l} + x_a{}''_l x_a{}''_l) - b_j b_k - b_j x''_{a\ k} - b_k x''_{a\ j} - x''_{a\ j} x''_{a\ k}] \\ &= \sum_a m_a(\delta_{j,k} b_l b_l - b_j b_k) + 2 b_l \sum_a m_a x''_{a\ l} - b_j \sum_a x''_{a\ k} - b_k \sum_a x''_{a\ j} \\ &\quad + \sum_a m_a(\delta_{j,k} x_a{}''_l x_a{}''_l - x''_{a\ j} x''_{a\ k}) \\ &= M(\delta_{j,k} b_l b_l - b_j b_k) + 2 b_l M X''_{TKP\ l} \\ &\quad - M b_j X''_{TKP\ k} - M b_k X''_{TKP\ j} + \Theta^{[O'']}_{j,k} \end{aligned} \qquad (1.1.46)$$

A vonatkoztatási pont áthelyezése tehát a tehetetlenségi nyomaték megváltozását jelenti. A merevtest egy tetszőleges O' pontjára és a merevtest TKP-jára ($O'' = O_{TKP}$ vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték közötti kapcsolatot Steiner tétele adja meg:

$$\Theta^{[O']}_{j,k} = \Theta^{[TKP]}_{j,k} + M(\delta_{j,k} b_l b_l - b_j b_k), \qquad (1.1.47)$$

ahol $\vec{b} = \vec{O'O}_{TKP}$ a TKP helyzetvektora az O' origójú testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben.

2. Matematikai szempontból a tehetetlenségi nyomaték tenzorként viselkedik a 3-dimenziós térbeli elforgatásokkal szemben. Ezt legegyszerűbben a forgási energia

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \Theta_{j,k} \omega_j \omega_k \qquad (1.1.48)$$

kifejezéséből láthatjuk. A T_{rot} kinetikus energia skalár, értéke nem változik meg, ha a testhez rögzített K'-ben felvett koordinátarendszert elforgatjuk, $T'_{rot} = T_{rot}$. Ugyanakkor az $\vec{\omega}$ szögsebességvektor sem változik elforgatás során, csupán a komponensei transzformálódnak

$$\omega_j \longrightarrow \omega'_j = O_{j,k}\omega_k, \qquad \omega_k = (O^T)_{k,j}\omega'_j \tag{1.1.49}$$

módon, ahol $O_{j,k}$ a térbeli elforgatás mátrixa. A fentiekből következik a tehetetlenségi nyomaték komponenseinek transzformációs szabálya. Mivel a forgási energia skalár,

$$T'_{rot} = \frac{1}{2}\Theta_{j,k}(O^T)_{j,l}\omega'_l(O^T)_{k,n}\omega'_n \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\Theta'_{l,n}\omega'_l\omega'_n. \tag{1.1.50}$$

Innen a tehetetlenségi nyomaték komponenseinek transzformációjára a

$$\Theta'_{l,n} = \Theta_{j,k}(O^T)_{j,l}(O^T)_{k,n} \tag{1.1.51}$$

szabály adódik.

Legyen $\mathcal{V}$ a 3-dimenziós tér $\vec{\omega}$ vektorainak lineáris vektortere. A fentieket úgy is felfoghatjuk, hogy $\hat{\Theta}(\vec{\omega}, \vec{\omega}')$ egy olyan, mindkét változójában lineáris leképezés, amely $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ vektorteret leképezi a skalárok (valós számok) halmazára. Maga a leképezés változatlan az elforgatások során. Az ilyen leképezéseket tenzoroknak nevezzük. A $\hat{\Theta}$ leképezést az $\vec{E}'_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ bázis-egységvektorokkal kijelölt koordinátarendszerben a

$$\hat{\Theta}(\vec{E}'_{(i)}, \vec{E}'_{(j)}) = \Theta_{k,l}(\vec{E}'_{(i)})_k(\vec{E}'_{(j)})_l = \Theta_{k,l}\delta_{i,k}\delta_{j,l} = \Theta_{i,j} \tag{1.1.52}$$

elemekből alkotott 3×3-as mátrix határozza meg, amelynek elemei az elforgatások során a fent levezetett szabály szerint transzformálódnak. A $\Theta_{i,j}$-ket a tenzor komponenseinek nevezzük az $\vec{E}'_{(i)}$ bázis-egységvektorok által kifeszített koordinátarendszerben.

3. Bevezetjük a tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték fogalmát. Legyen O' a merevtest egy pontja, amelyben felvesszük az $\vec{n}$ tetszőleges egységvektort, ami kijelöli az O' ponton átmenő tengely irányát, és forogjon a test adott pillanatban ezen tengely körül, vagyis legyen az adott pillanatban $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$. Ekkor az O' pontra vonatkoztatott forgási energia

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\Theta_n\omega^2 \tag{1.1.53}$$

alakot ölt, ahol

$$\Theta_n = \Theta_{j,k}n_jn_k \tag{1.1.54}$$

az $\vec{n}$ irányú tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték. Részletesen kiírva:

$$\begin{aligned}\Theta_n &= \sum_a m_a(\delta_{j,k}x'_{a\ l}x'_{a\ l} - x'_{a\ j}x'_{a\ k})n_jn_k \\ &= \sum_a m_a[\vec{r}_a{}'^{\,2} - (\vec{r}_a{}' \cdot \vec{n})^2] \\ &= \sum_a m_a\vec{r}_a{}'^{\,2}_{\perp} = \sum_a m_a\ell_a^2, \end{aligned} \tag{1.1.55}$$

ahol $\vec{r}'_{a\,\perp}$ a merevtest a-adik részecskéje helyzetvektorának a tengelyre merőleges síkra vett merőleges vetülete, $\ell_a = |\vec{r}_a{}'_\perp|$ a merevtest a-adik részecskéjének a tengelytől mért távolsága.

4. A tehetetlenségi tenzor szimmetrikus, $\hat{\Theta}(\vec{\omega}, \vec{\omega}') = \hat{\Theta}(\vec{\omega}', \vec{\omega})$, azaz $\Theta_{i,j} = \Theta_{j,i}$ tetszőleges Descartes-koordinátarendszerben. Ez azt jelenti, hogy a tehetetlenségi tenzor komponenseinek mátrixa mindig diagonalizálható. A tehetetlenségi tenzornak létezik 3 darab valós sajátértéke és sajátvektora, amelyek a

$$\Theta_{i,j} n_j = \lambda n_i \tag{1.1.56}$$

sajátértékegyenlet megoldásai, ahol $\vec{n}$, ill. λ jelöli rendre az egyre normált sajátvektort, ill. a megfelelő sajátértéket. A sajátértékegyenlet átrendezés után

$$(\Theta_{i,j} - \lambda\delta_{i,j}) n_j = 0 \tag{1.1.57}$$

alakot ölt. Ennek a homogén lineáris algebrai egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nem triviális megoldása, ha az egyenletrendszer determinánsa eltűnik, azaz

$$|\Theta_{i,j} - \lambda\delta_{i,j}| = 0 \tag{1.1.58}$$

A szimmetrikusság miatt létezik 3 darab valós sajátérték, $\lambda^{(s)} = \Theta_s$ ($s = 1, 2, 3$). Azt is tudjuk, hogy a forgási energia nem negatív, azaz hogy a $\Theta_{i,j}$ mátrix pozitív szemidefinit. Ez azt jelenti, hogy a sajátértékek nem negatívak, $\Theta_s \geq 0$. Jelölje $\vec{n}^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3$) a megfelelő egységnyi hosszúságú sajátvektorokat. Az ezek által kijelölt irányokat fő tehetetlenségi irányoknak nevezzük. Meg lehet mutatni, hogy a fő tehetetlenségi irányok egymásra páronként ortogonálisak, ill. két vagy mindhárom sajátérték azonossága esetén páronként merőlegeseknek választhatók.

Érdemes diszkutálni a lehetséges eseteket.

(a) Ha minden sajátérték különböző, akkor aszimmetrikus merevtestről beszélünk. Ekkor létezik legnagyobb és legkisebb sajátérték.

(b) Ha két darab sajátérték egyenlő, pl. $\Theta_1 = \Theta_2$ akkor (tengely)szimmetrikus merevtestről beszélünk, mert a tehetetlenségi nyomaték komponensei változatlanok maradnak a vonatkoztatási ponton átmenő $\vec{n}^{(3)}$ fő tehetetlenségi irány körüli elforgatás során. Ekkor az $\vec{n}^{(1)}$ és $\vec{n}^{(2)}$ főtehetetlenségi irányok az $\vec{n}^{(3)}$-ra merőleges síkban tetszőlegesen megválaszthatók egymásra ortogonálisan.

(c) Ha mindhárom sajátérték megegyezik, $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$, akkor gömbszimmetrikus merevtesttel van dolgunk, mert a tehetetlenségi tenzor komponensei nem változnak a vonatkoztatási pont körüli tetszőleges elforgatás során sem. Ilyenkor a fő tehetetlenségi irányok bármely három, egymásra páronként merőleges egységvektorral kijelölhetők.

Válasszuk a merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszerben a Descartes-koordinátarendszer x'-, y'-, z'-tengelyeit rendre az egyes fő tehetetlenségi tengelyek irányában. Ekkor a tehetetlenségi tenzor mátrixa diagonális, $\Theta_{i,j} = \Theta_i \delta_{i,j}$, amelynek diagonálisában a sajátértékek állnak. Az egyes fő tehetetlenségi nyomatékok

$$\Theta_i = \Theta_{i,i} = \sum_a m_a [x'_{a\,l} x'_{a\,l} - (x'_{a\,i})^2] \tag{1.1.59}$$

ahol nincsen összegzés az i indexre, vagyis

$$\Theta_1 = \sum_a m_a({y'_a}^2 + {z'_a}^2), \quad \Theta_2 = \sum_a m_a({x'_a}^2 + {z'_a}^2), \quad \Theta_3 = \sum_a m_a({x'_a}^2 + {y'_a}^2), \tag{1.1.60}$$

ami egyúttal mutatja is, hogy a főtehetetlenségi nyomatékok nem negatívak. Egy tetszőleges $\vec{n}$ irányú tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték pedig kifejezhető a fő tehetetlenségi nyomatékokkal és az $\vec{n}$ vektor $n_j = \cos\alpha_j = \vec{n}\cdot\vec{n}^{(j)}$ iránykoszinuszaival,

$$\Theta_n = \sum_j \Theta_j n_j^2 = \sum_j \Theta_j \cos^2\alpha_j \tag{1.1.61}$$

alakban.

5. Végül beszéljük meg, hogy folytonos anyageloszlású merevtest tehetetlenségi nyomatékát hogyan értelmezhetjük. Ekkor a merevtest részecskéi valójában kicsiny ΔV_a térfogatú anyagdarabkák, amelyek (tömeg)sűrűsége $\rho(\vec{r}'_a)$ és tehetetlen tömege $\rho(\vec{r}'_a)\Delta V_a$. A korábban használt, összeg alakjában felírt tehetetlenségi nyomatékot úgy tekinthetjük most, mint integrálközelítő összeget, amelynek határértékét képezzük olymódon, hogy a merevtest feldarabolását végtelenül finomítjuk, a darabok számával végtelenhez és a méretükkel (tömegükkel) nullához tartva:

$$\begin{aligned}\Theta_{i,j} &= \lim_{N\to\infty,\max\Delta\mathrm{V_a}\to 0} \sum_a \rho(\vec{r}'_a)\Delta V_a(\delta_{i,j}x'_{a\ l}x'_{a\ l} - x'_{a\ i}x'_{a\ j}) \\ &= \int_V d\vec{r}'\rho(\vec{r}')(\delta_{i,j}x'_l x'_l - x'_i x'_j).\end{aligned} \tag{1.1.62}$$

Hasonló eljárással értelmezzük tetszőleges vonatkoztatási rendszerben a folytonos tömegeloszlású merevtest teljes tömegét,

$$M = \lim \sum_a \rho(\vec{r}_a)\Delta V_a = \int_V d\vec{r}\rho(\vec{r}), \tag{1.1.63}$$

és tömegközéppontjának helyzetvektorát,

$$\vec{R}_{TKP} = \frac{\lim\sum_a \rho(\vec{r}_a)\vec{r}_a\Delta V_a}{\lim\sum_a \rho(\vec{r}_a)\Delta V_a} = \frac{\int_V d\vec{r}\rho(\vec{r})\vec{r}}{\int_V d\vec{r}\rho(\vec{r})}. \tag{1.1.64}$$

1.1.7 Merevtestek impulzusmomentuma

A merevtestnek a K laborrendszer O origójára vonatkoztatott teljes (pálya)impulzusmomentuma

$$\vec{L}^{[O]} = \sum_a \vec{l}_a = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a = \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a, \tag{1.1.65}$$

ahol összegezni kell a merevtest valamennyi részecskéjére, ill. folytonos tömegeloszlású merevtest esetén az összeget integrálközelítő összegként kell felfogni és a megfelelő térfogati integrállal helyettesíteni. Szokásos módon felbontva a merevtest részecskéinek

$\vec{v}_a$ sebességét a merevtesthez rögzített, tetszőlegesen választott O' vonatkoztatási pont haladó mozgásának $\vec{V}_{O'}$ sebességére és az ezen pont körüli $\vec{\omega}$ szögsebességű forgásból adódó sebességre,

$$\vec{v}_a = \vec{V}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_a \tag{1.1.66}$$

adódik. Felhasználva, hogy

$$\vec{r}_a = \vec{R}_{O'} + \vec{r}'_a, \tag{1.1.67}$$

a laborrendszer origójára vonatkoztatott pályaimpulzusmomentum

$$\begin{aligned} \vec{L}^{[O]} &= \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{V}_{O'} + \vec{R}_{O'} \times (\vec{\omega} \times \sum_a m_a \vec{r}'_a) + \sum_a m_a \vec{r}'_a \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a) \\ &= M\vec{R}_{TKP} \times \vec{V}_{O'} + M\vec{R}_{O'} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}'_{TKP}) + \sum_a m_a \vec{r}'_a \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a) \end{aligned} \tag{1.1.68}$$

alakot ölt, ahol $\vec{R}_{TKP}$, ill. $\vec{R}'_{TKP}$ a TKP helyzetvektora rendre a K laborrendszerben, ill. a merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszerben. Hasonlóan, mint a kinetikus energia kifejezésének esetében, most sem lehet szétválasztani a vonatkoztatási pont pályamozgásából és a vonatkoztatási pont körüli forgásból származó tagokat, ha a vonatkoztatási pont egy tetszőleges O' pont.

Megváltozik a helyzet azonban, ha a merevtesthez rögzített vonatkoztatási pontot a TKP-ban választjuk, $O' = O_{TKP}$. Ekkor értelemszerűen $\vec{R}'_{TKP} = \vec{0}$ és $\vec{r}'_a$ pedig a TKP-ból a merevtest egyes részecskéinek helyére mutató helyzetvektorok, úgyhogy a laborrendszerben nyugvó O pontra vonatkoztatott pályaimpulzusmomentum a TKP haladó mozgásából származó

$$\vec{L}_{TKP} = \vec{R} \times M\vec{V}_{TKP} = \vec{R} \times \vec{P} \tag{1.1.69}$$

pályaimpulzusmomentum és a TKP körüli forgásból származó pályaimpulzusmomentum,

$$\vec{L}^{[TKP]}_{rot} = \sum_a \vec{r}'_a \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a) \tag{1.1.70}$$

vektori összegeként írható fel,

$$\vec{L}^{[O]} = \vec{L}_{TKP} + \vec{L}^{[TKP]}_{rot}. \tag{1.1.71}$$

Ha felírjuk a TKP körüli forgásból származó pályaimpulzusmomentumot a merevtesthez rögzített Descartes-koordinátarendszerre vonatkozó komponensekben, akkor azt könnyen kifejezhetjük a TKP-ra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték és a szögsebesség segítségével:

$$\begin{aligned} (\vec{L}^{[TKP]}_{rot})_i &= \sum_a m_a \epsilon_{i,j,k} x'_{a\ j} \epsilon_{k,l,n} \omega_l x'_{a\ n} \\ &= \sum_a m_a (\delta_{i,l}\delta_{j,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,l}) x'_{a\ j} x'_{a\ n} \omega_l \\ &= \sum_a m_a (\delta_{i,l} x'_{a\ n} x'_{a\ n} - x'_{a\ i} x'_{a\ l}) \omega_l \\ &= \Theta^{[TKP]}_{i,j} \omega_j. \end{aligned} \tag{1.1.72}$$

A kapott összefüggés mutatja, hogy általában a szögsebesség $\vec{\omega}$ vektora és a TKP körüli forgásból származó pályaimpulzusmomentum $\vec{L}_{rot}$ vektora nem párhuzamosak.

Végül következzen néhány fontos megjegyzés.

1. Válasszuk a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer origóját a TKP-ben és irányítsuk a Descartes-koordinátarendszer tengelyeit a fő tehetetlenségi tengelyek irányába. Ekkor a tehetetlenségi tenzor mátrixa diagonális és a forgásból származó pályaimpulzusmomentum Descartes-komponensei
$$(\vec{L}_{rot}^{[TKP]})_i = \Theta_i^{[TKP]}\omega_i \tag{1.1.73}$$
alakban fejezhetők ki a főtehetetlenségi nyomatékokkal.

2. Ha a K laborrendszer a TKP-tal együtthaladó ($\vec{V}_{TKP} = 0$), nem forgó rendszer, amelynek origója egybeesik a merevtest TKP-jával, és a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer origóját is a TKP-ban választjuk, akkor
$$\vec{L} = \vec{L}_{rot}^{[TKP]}, \qquad T = T_{rot} = \frac{1}{2}\Theta_{i,j}^{[TKP]}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}L_i\omega_i. \tag{1.1.74}$$
Ha ráadásul még a merevtesthez rögzített koordinátarendszer tengelyeit a főtengelyeknek választjuk, akkor az $L_i = \Theta_i^{[TKP]}\omega_i$ is fenn áll (nincs összegzés az i indexre), úgyhogy a forgásból származó kinetikus energia
$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\Theta_i^{[TKP]}\omega_i^2 = \sum_{i=1}^{3}\frac{L_i^2}{2\Theta_i^{[TKP]}} \tag{1.1.75}$$
alakot ölt. A második egyenlőség csak akkor érvényes, ha a főtehetetlenségi nyomatékok egyike sem zérus.

3. Ha a merevtest TKP-ja haladó mozgást végez a K laborrendszerben, akkor egyrészt az O origóra vonatkoztatott pályaimpulzusmomentumra az
$$\vec{L}^{[O]} = \vec{L}_{TKP} + \vec{L}_{rot}^{[TKP]} \tag{1.1.76}$$
összefüggés érvényes, másrészt a merevtest kinetikus energiája
$$T = \frac{1}{2}M\vec{V}_{TKP}^2 + T_{rot}^{[TKP]} \tag{1.1.77}$$
alakot ölt, ahol a TKP körüli forgásból származó kinetikus energia
$$T_{rot}^{[TKP]} = \frac{1}{2}\Theta_{i,j}^{[TKP]}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_{rot}^{[TKP]} \tag{1.1.78}$$
alakban írható fel. Az első egyenlőség jobb oldalán a szögsebességvektornak a merevtesthez képest rögzített koordinátarendszerben való felbontására van szükségünk, hiszen a tehetetlenségi tenzor komponenseit ilyen koordinátarendszerben értelmeztük.

4. Említsük meg még azt az esetet, amikor a K laborrendszer origója egybeesik a merevtest tömegközéppontjával és a K vonatkoztatási rendszer együtt halad és együtt forog a merevtesttel. Ekkor K és K' ugyanaz a vonatkoztatási rendszer. Másképpen azt is mondhatjuk, hogy ekkor a merevtest a K-ban nyugvó megfigyelő szempontjaából sem haladó mozgást nem végez, sem nem forog, vagyis ekkor $\omega = 0$ és a merevtest kinetikus energiája zérus.

1.2 Merevtestek dinamikája

1.2.1 Merevtestek mozgásegyenletei

A merevtestek Lagrange-függvénye talán akkor ölti a legegyszerűbb alakot, ha a K laborrendszer inerciarendszer és a testhez rögzített vonatkoztatási rendszer origóját a merevtest TKP-jában választjuk:

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_{TKP}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{i,j}^{[TKP]}\omega_i\omega_j - V(\vec{R}_{TKP}, \psi, \theta, \varphi), \tag{1.2.1}$$

ahol általános koordinátákként a TKP K laboratóriumi rendszerbeli $\vec{R}_{TKP}$ helyzetvektorának Descartes-komponenseit és a merevtesthez rögzített K' rendszer koordinátatengelyeinek K-hoz képesti irányítását meghatározó (ψ, θ, φ) Euler-szögeket használtuk. Az $\vec{\omega}$ szögsebesség K'-rendszerbeli Descartes-komponenseit, mint az Euler szögek és idő szerinti első deriváltjaik kifejezését kell itt szerepeltetnünk. A merevtest részecskéi közötti kölcsönhatás potenciális energiája additív állandó, amit elhagyhatunk. A merevtest potenciális energiáját a külső térben $V(\vec{R}_{TKP}, \psi, \theta, \varphi)$ jelöli, amiről feltettük, hogy időtől és az általános sebességektől független, konzervatív erőtér. Tekintve, hogy a Lagrange-függvény explicit alakja, és vele együtt az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletek alakja is rendkívül bonyolult, ezért célszerű a merevtestek mozgását közvetlenül az impulzustétel és az impulzusmomentum-tétel alapján tárgyalni. A merevtestnek 6 darab szabadsági foka van, 3 transzlációs és 3 forgási szabadsági fok. Az impulzustétel és a impulzusmomentum-tétel jelent rendre egy-egy vektoregyenletet, azaz 3-3 egyenletet a vektorkomponensekre, vagyis összesen 6 darab független egyenletet a 6 darab szabadsági foknak, mint az idő függvényének a meghatározására.

Legyen a laborrendszer a K inerciarendszer és O annak az origója. Ekkor az impulzustétel

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(k)}, \tag{1.2.2}$$

az O origóra felírt impulzusmomentum-tétel pedig

$$\frac{d\vec{L}^{[O]}}{dt} = \vec{M}^{[O](k)} \tag{1.2.3}$$

alakú, ahol a jobb oldalon rendre a merevtestre ható külső erők $\vec{F}^{(k)}$ eredője, ill. a merevtestre ható külső, O origóra vonatkoztatott forgatónyomatékok $\vec{M}^{[O](k)}$ eredője áll. Ezek általában az erőtörvényekből következően valamilyen függvényei a merevtest mechanikai állapotát meghatározó általános koordinátáknak és általános sebességeknek, azaz

$$\begin{aligned}
\vec{F}^{(k)} &= \vec{F}^{(k)}(\vec{R}_{TKP}, \dot{\vec{R}}_{TKP}, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}), \\
\vec{M}^{[O](k)} &= \vec{M}^{[O](k)}(\vec{R}_{TKP}, \dot{\vec{R}}_{TKP}, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}).
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Használjuk fel, hogy a merevtest teljes impulzusa

$$\vec{P} = M\vec{V}_{TKP} = M\frac{d\vec{R}_{TKP}}{dt}, \tag{1.2.5}$$

ill. hogy a merevtestnek a K inerciarendszerben nyugvó O origóra vonatkoztatott impulzusmomentuma

$$\vec{L}^{[O]} = \vec{R}_{TKP} \times M\vec{V}_{TKP} + \vec{E}'_{(i)}\Theta^{[TKP]}_{i,j}\omega_j \tag{1.2.6}$$

ahol $\vec{E}'_{(i)}$ $(i = 1,2,3)$ a merevtesthez rögzített koordinátarendszer tengelyeinek irányát meghatározó bázis-egységvektorok, $\omega_i = \vec{\omega} \cdot \vec{E}'_{(i)}$ pedig a szögsebességvektor Descartes-komponensei ebben a koordinátarendszerben. Ekkor a haladó és a forgó mozgást leíró mozgásegyenletek rendre

$$\begin{aligned}
&M\ddot{\vec{R}}_{TKP} = \vec{F}^{(k)}(\vec{R}_{TKP}, \dot{\vec{R}}_{TKP}, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}),\\
&\vec{R}_{TKP} \times M\ddot{\vec{R}}_{TKP} + \dot{\vec{E}}'_{(i)}\Theta^{[TKP]}_{i,j}\omega_j + \vec{E}'_{(i)}\Theta^{[TKP]}_{i,j}\dot{\omega}_j\\
&\qquad = \vec{M}^{[O](k)}(\vec{R}_{TKP}, \dot{\vec{R}}_{TKP}, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

alakot öltenek. Az impulzustétel egyszerűbb alakba írható, ha a tetszőlegesen mozgó TKP-ra írjuk fel:

$$\begin{aligned}
&\dot{\vec{E}}'_{(i)}\Theta^{[TKP]}_{i,j}\omega_j + \vec{E}'_{(i)}\Theta^{[TKP]}_{i,j}\dot{\omega}_j\\
&= \ \vec{M}^{[TKP](k)}(\vec{R}_{TKP}, \dot{\vec{R}}_{TKP}, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

ahol természetesen

$$\vec{M}^{[TKP](k)} = \vec{M}^{[O](k)} - \vec{R}_{TKP} \times \vec{F}^{(k)}. \tag{1.2.9}$$

Az impulzus- és az impulzusmomentum-tétel együtt általában 6 darab csatolt, közönséges másodrendű differenciálegyenletből álló egyenletrendszert jelent, amely számot ad a haladó és a forgó mozgás közötti csatolásról, amelyet a külső erők és forgatónyomatékok létesítenek.

1.2.2 Haladó és forgó mozgás szétcsatolódása. Euler-egyenletek

Abban az esetben, ha a külső erők eredője nem függ a merevtest orientációjától (az Euler-szögektől és azok idő szerinti első deriváltjaitól), akkor a TKP haladó mozgását leíró impulzustétel egyenletei lecsatolódnak. Az impulzustételben csak a TKP koordinátái (és azok idő szerinti első és második deriváltjai) szerepelnek. Így a TKP kezdeti helyzetének és sebességének ismeretében az impulzustétel egyértelműen megoldható. A megoldás szolgáltatja a TKP helyzetvektorát, mint az idő függvényét: $\vec{R}_{TKP}(t)$.

Ha a külső, TKP-ra vonatkoztatott forgatónyomatékok eredője meg nem függ a merevtest TKP-jának helyzetétől és transzlációs sebességétől, akkor még tovább egyszerűsödik a helyzet: a forgó mozgás is függetlenné válik a TKP haladó mozgásától,

$$\frac{d\vec{L}^{[TKP]}}{dt} = \dot{\vec{E}}'_{(i)}\Theta^{[TKP]}_{i,j}\omega_j + \vec{E}'_{(i)}\Theta^{[TKP]}_{i,j}\dot{\omega}_j \ = \ \vec{M}^{[TKP](k)}(\psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}). \tag{1.2.10}$$

Ekkor 3 darab csatolt, közönséges másodrendű differenciálegyenletből álló egyenletrendszert kapunk a 3 darab Euler-szögre, mint az idő függvényére: $(\psi(t), \theta(t), \varphi(t))$. Ezek a merevtest TKP körüli forgásának egyenletei. Az egyértelmű megoldáshoz kezdőfeltételként meg kell adni az Euler-szögek és idő szerinti első deriváltjaik értékét a tetszőlegesen választott kezdeti időpillanatban.

A TKP körüli forgást leíró egyenlet bal oldalán a TKP-ra vonatkoztatott impulzusmomentum vektorának az idő szerinti első deriváltja áll, ahol $d\vec{L}^{[TKP]}$ az impulzusmomentum vektorának a K laborrendszerben nyugvó megfigyelő által az infinitezimális dt idő alatt észlelt megváltozása. Látjuk, hogy a megváltozás részben abból adódik, hogy a szögsebességnek a testhez rögzített koordinátarendszerben változnak a komponensei az idő függvényében (ld. az $\dot{\omega}_j$-tól függő tagokat), másrészt meg abból, hogy a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer elfordul a laborrendszerhez képest (ld. az $\dot{\vec{E}}'_{(i)}$ deriváltvektorokat tartalmazó tagokat). A merevtestre „ráfestett” $\vec{E}'_{(i)}$ nyilak megváltozása a merevtest (ill. a hozzá rögzített koordinátarendszer) $\vec{n}$ irány körüli $d\alpha$ szögű infinitezimális elfordulása esetén

$$d\vec{E}'_{(i)} = \vec{n}d\alpha \times \vec{E}'_{(i)}, \tag{1.2.11}$$

úgyhogy a szögsebesség $\vec{\omega} = \vec{n}\frac{d\alpha}{dt}$ definíciója alapján,

$$\dot{\vec{E}}'_{(i)} = \vec{\omega} \times \vec{E}'_{(i)}. \tag{1.2.12}$$

Ennek következtében a TKP-ra vonatkoztatott pályaimpulzusmomentum idő szerinti első deriváltja a K laborrendszerben:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}^{[TKP]}}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{E}'_{(i)}\Theta^{[TKP]}_{i,j}\omega_j + \vec{E}'_{(i)}\Theta^{[TKP]}_{i,j}\dot{\omega}_j \\ &= \vec{\omega} \times \vec{L}^{[TKP]} + \vec{E}'_{(i)}\frac{d}{dt}(\vec{E}'_{(i)} \cdot \vec{L}^{[TKP]}).\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

Megjegyezzük, hogy tetszőleges $\vec{A}$ vektor K rendszerbeli komponenseinek idő szerinti első deriváltjai és a merevtesthez rögzített K' rendszerbeli komponenseinek idő szerinti első deriváltjai között ugyanilyen alakú összefüggés áll fenn,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A} + \vec{E}'_{(i)}\frac{d}{dt}(\vec{E}'_{(i)} \cdot \vec{A}). \tag{1.2.14}$$

A merevtest TKP körüli forgásának mozgásegyenlete tehát

$$\vec{\omega} \times \vec{L}^{[TKP]} + \vec{E}'_{(i)}\frac{d}{dt}(\vec{E}'_{(i)} \cdot \vec{L}^{[TKP]}) = \vec{M}^{[TKP]}(\psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}). \tag{1.2.15}$$

Írjuk fel ezt a merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszerben választott Descartes-koordinátarendszerben vektorkomponensekben. A megfelelő egyenleteket az egyes

$\vec{E}'_{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ egységvektorokkal történő skaláris szorzással kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{dL_{x'}^{[TKP]}}{dt} + \omega_{y'} L_{z'}^{[TKP]} - \omega_{z'} L_{y'}^{[TKP]} &= M_{x'}^{[TKP]}, \\
\frac{dL_{y'}^{[TKP]}}{dt} + \omega_{z'} L_{x'}^{[TKP]} - \omega_{x'} L_{z'}^{[TKP]} &= M_{y'}^{[TKP]}, \\
\frac{dL_{z'}^{[TKP]}}{dt} + \omega_{x'} L_{y'}^{[TKP]} - \omega_{y'} L_{x'}^{[TKP]} &= M_{z'}^{[TKP]}.
\end{aligned} \tag{1.2.16}$$

Tovább egyszerűsödnek az egyenletek, ha a K' koordinátarendszer tengelyeit a főtengelyek irányában választjuk. Ekkor az

$$L_{x'}^{[TKP]} = \Theta_1 \omega_{x'}, \quad L_{y'}^{[TKP]} = \Theta_2 \omega_{y'}, \quad L_{z'}^{[TKP]} = \Theta_3 \omega_{z'} \tag{1.2.17}$$

összefüggések felhasználásával a merevtest TKP körüli forgására az Euler-egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned}
\Theta_1 \dot{\omega}_{x'} + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_{y'} \omega_{z'} &= M_{x'}^{[TKP]}, \\
\Theta_2 \dot{\omega}_{y'} + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_{x'} \omega_{z'} &= M_{y'}^{[TKP]}, \\
\Theta_3 \dot{\omega}_{z'} + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_{x'} \omega_{y'} &= M_{z'}^{[TKP]}.
\end{aligned} \tag{1.2.18}$$

Mint azt korábban láttuk, a szögsebességnek a merevtesthez rögzített koordinátarendszerbeli Descartes-komponensei kifejezhetők az Euler-szögekkel és idő szerinti első deriváltjaikkal. Az Euler-egyenletek tehát közönséges másodrendű differenciálegyenletek az Euler-szögekre, mint az idő függvényeire. Ha adottak a kezdeti időpillanatban az Euler-szögek és idő szerinti első deriváltjaik értékei, akkor az egyenletrendszernek létezik egyértelmű megoldása.

1.2.3 Munkatétel

A munkatétel értelmében a K inerciarendszerben a merevtest kinetikus energiájának dT infinitezimális megváltozása megegyezik a külső erők és forgatónyomatékok $d'W$ elemi munkájával, ha feltesszük, hogy a belső erők centrálisak és így munkájuk nulla. Ha feltesszük, hogy a külső forgatónyomatékok is erőkre vezethetők vissza, akkor

$$dT = d'W = \sum_a \vec{F}_a^{(k)} d\vec{r}_a, \tag{1.2.19}$$

ahol $\vec{F}_a^{(k)}$, ill. $d\vec{r}_a$ a merevtest a-adik részecskéjére ható külső erő, ill. az a-adik részecske infinitezimális elmozdulása. Utóbbi mindig felbontható a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer O' origójának infinitezimális transzlációjából és az O' ponton átmenő $\vec{n}$ irány körüli infinitezimális $d\alpha$ szögű elfordulás járulékaira,

$$d\vec{r}_a = d\vec{R}_{O'} + \vec{n} d\alpha \times \vec{r}'_a = d\vec{R}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_a dt, \tag{1.2.20}$$

ahol felhasználtuk, hogy a szögsebesség definíciója értelmében $\vec{\omega}dt = \vec{n}d\alpha$, és $\vec{r}'_a$ jelöli a merevtest a-adik részecskéjének helyzetvektorát abban a merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszerben, amelynek origója az O' pont. Ezt behelyettesítve

$$\begin{aligned} dT &= d'W = \sum_a \vec{F}_a^{(k)} \cdot d\vec{R}_{O'} + \sum_a \vec{F}_a^{(k)} \cdot (\vec{\omega}dt \times \vec{r}'_a) \\ &= \vec{F}^{(k)} \cdot d\vec{R}_{O'} + \vec{\omega}dt \cdot \sum_a (\vec{r}'_a \times \vec{F}_a^{(k)}) \\ &= \vec{F}^{(k)} \cdot d\vec{R}_{O'} + \vec{\omega}dt \cdot \vec{M}^{[O'](k)} \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

adódik, ahol $\vec{F}^{(k)} = \sum_a \vec{F}_a^{(k)}$ a külső erők vektori eredője, $\vec{M}^{[O'](k)} = \sum_a \vec{r}'_a \times \vec{F}_a^{(k)}$ pedig a merevtestre ható, O' pontra vonatkoztatott külső forgatónyomatékok eredője.

Érdemes külön vizsgálni néhány fontos esetet:

1. Legyen az O' origó a merevtest TKP-ja. Az impulzustétel értelmében ekkor

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}_{TKP}}{dt} = \vec{F}^{(k)}, \tag{1.2.22}$$

úgyhogy a külső eredő erő elemi munkája a TKP-on megegyezik a test haladó mozgásából származó kinetikus energia infinitezimális megváltozásával, $\vec{F}^{(k)} \cdot d\vec{R}_{TKP} = d\left(\frac{1}{2}M\vec{V}_{TKP}^2\right)$. Felhasználva, hogy a merevtest kinetikus energiája a TKP haladó mozgásából származó kinetikus energia és a TKP körüli forgásból származó kinetikus energia összege, $T = \frac{1}{2}M\vec{V}_{TKP}^2 + T_{rot}^{[TKP]}$, azt kapjuk, hogy a merevtest forgási energiájának megváltozása

$$dT_{rot}^{[TKP]} = \vec{n}d\alpha \cdot \vec{M}^{[TKP](k)} = \vec{\omega}dt \cdot \vec{M}^{[TKP](k)}. \tag{1.2.23}$$

2. Legyen a merevtest egy pontjában rögzítve és válasszuk ebben a pontban a merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszer O' origóját. Ekkor $d\vec{R}_{O'} = 0$, úgyhogy csak a külső forgatónyomatékok végeznek zérustól különböző munkát. A merevtest kinetikus energiája ekkor az O' pont körüli forgásból származik, $T = T_{rot}^{[O']}$ és a munkatétel

$$dT = dT_{rot}^{[O']} = \vec{n}d\alpha \cdot \vec{M}^{[O'](k)} \tag{1.2.24}$$

alakot ölt.

3. Forogjon a merevtest rögzített tengely körül, amelynek irányát az $\vec{n}$ egységvektor határozza meg, és válasszuk az O' origót a forgástengelyen. Ekkor is $d\vec{R}_{O'} = 0$, úgyhogy érvényes az előző pontban kapott összefüggés a kinetikus (forgási) energia infinitezimális megváltozására. Figyelembe véve, hogy $\vec{n} \cdot \vec{M}^{[O'](k)} = M_n^{(k)}$ a rögzített tengelyre vonatkoztatott forgatónyomaték, a munkatétel

$$dT = dT_{rot}^{[O']} = M_n^{(k)} d\alpha = M_n^{(k)} \omega dt \tag{1.2.25}$$

alakot ölt, $\omega = |\vec{\omega}|$. Másrészt a forgási energia kifejezhető a rögzített tengelyre vonatkoztatott Θ_n tehetetlenségi nyomatékkel, $T_{rot}^{[O']} = \frac{1}{2}\Theta_n \omega^2$, úgyhogy

$$d\left(\frac{1}{2}\Theta_n \omega^2\right) = M_n^{(k)} \omega dt. \tag{1.2.26}$$

Ez az egyenlet természetesen az impulzusmomentum-tétellel összhangban levő

$$\frac{dL_n}{dt} = \Theta_n \frac{d\omega}{dt} = M_n^{(k)} \tag{1.2.27}$$

egyenletre egyszerűsödik.

1.2.4 Merevtest mozgásának speciális esetei

1. **Merevtest szabad mozgása**

   Inerciarendszerben szabadon mozgó merevtest energiája megmarad, $E =$const., hiszen a szabadon mozgó merevtest szigorú értelemben zárt rendszer, amely nem hat kölcsön a környezetével. A szabad merevtest energiája a merevtest T kinetikus energiájának és a merevtesten belüli részecskék kölcsönhatásából származó (általánosított) potenciális energiának az összege. A munkatétel értelmében (ha centrális belső erőket feltételezünk) a merevtest kinetikus energiájának megváltozása egyenlő a külső erők (és forgatónyomatékok) munkájával. Szabad mozgás esetén azonban nem hatnak külső erők és forgatónyomatékok a merevtestre, ezért a szabadon mozgó merevtest kinetikus energiája is állandó $T =$const. Ebből következik, hogy a merevtestnek a részecskéi kölcsönhatásából származó általánosított potenciális energiája is állandó.

   Másrészről az impulzustétel értelmében a szabadon mozgó merevtest impulzusa állandó, amiből következik, hogy a TKP-jának sebessége is állandó,

   $$\vec{P} = const. \quad \vec{V}_{TKP} = \vec{P}/M = const., \tag{1.2.28}$$

   ahol M a merevtest tehetetlen tömege. A szabadon mozgó merevtest TKP-ja inerciarendszerben egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. Ez azt is jelenti, hogy a kinetikus energiának a TKP haladó mozgásából származó $\frac{1}{2}M\vec{V}_{TKP}^2$ tagja állandó. Ezért a TKP körüli forgásból származó kinetikus energia is állandó:

   $$T_{rot}^{[TKP]} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L}_{rot}^{[TKP]} = \frac{1}{2}\Theta_{i,j}^{[TKP]}\omega_i\omega_j, \tag{1.2.29}$$

   ahol ω_i a szögsebesség Descartes-komponensei abban a merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszerben, amelynek origóját a TKP-ban választottuk. A TKP haladó mozgása és a TKP körüli forgás teljesen szétcsatolódik.

A merevtest TKP körüli forgását az (1.2.18) Euler-egyenletek írják le, ahol a külső forgatónyomaték zérus:

$$\begin{aligned} \Theta_1\dot{\omega}_{x'} + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_{y'}\omega_{z'} &= 0, \\ \Theta_2\dot{\omega}_{y'} + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_{x'}\omega_{z'} &= 0, \\ \Theta_3\dot{\omega}_{z'} + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_{x'}\omega_{y'} &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.30}$$

Ha speciálisan a kezdeti időpillanatban a szögsebesség vektora valamelyik főtengely irányába mutat, akkor ez a főtengely a mozgás során mindvégig megmarad forgástengelynek. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Essen pl. a $t = 0$ kezdeti időpillanatban a szögsebesség az 1-es főtengely irányába, $\omega_1(0) = \omega$, $\omega_2(0) = \omega_3(0) = 0$. Ekkor a $t = 0$ időpillanatban $\dot{\omega}_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, azaz egyik szögsebesség-komponens sem kezd el változni az időben, de akkor a mozgás a dt időpillanatban változatlan kezdőfeltétellel indul, s ugyanúgy a szögsebességek állandóságával jellemezhető, stb. A szögsebesség komponensei tehát nem változnak a mozgás során. Másképpen is érvelhetünk. Az Euler-egyenleteknek, mint a szögsebesség komponenseire vonatkozó közönséges elsőrendű differenciálegyenletrendszernek a szögsebesség-komponensek adott kezdeti értékei mellett egyértelműen létezik a megoldása. Behelyettesítéssel viszont meggyőződhetünk róla, hogy

$$\omega_1(t) = \omega = \text{ const.}, \qquad \omega_2(\mathrm{t}) = \omega_3(\mathrm{t}) = 0. \tag{1.2.31}$$

megoldás. Ez tehát *a* megoldás.

Általános esetben a megoldás bonyolultabb: először a szögsebesség komponenseire vonatkozó kezdeti feltételekkel megoldjuk az (1.2.30) közönséges elsőrendű differenciálegyenletrendszert. Ezután felhasználjuk a szögsebesség komponenseinek (1.1.34) kifejezéseit, amelyek (ha adottak a szögsebesség komponensei, mint az idő függvényei) közönséges elsőrendű differenciálegyenletrendszert jelentenek az Euler-szögekre, mint az idő függvényeire. Utóbbiak az Euler-szögek kezdeti értékeinek ismeretében egyértelműen megoldhatók. Így kapjuk meg a szabad merevtest forgása mozgásegyenleteinek adott kezdőfeltételekhez tartozó megoldását. Mivel ugyanezzel a feladattal fogunk találkozni az erőmentes pörgettyű mozgása esetén, ezért a megoldást ott fogjuk tárgyalni.

2. **Egy pontjában rögzített merevtest mozgása**

Rögzítsük a merevtest egy pontját a K inerciarendszer O origójában. Válasszuk ezt a K inerciarendszerben nyugvó pontot (a laborrendszer origóját) a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer közös O' origójának. Ekkor a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer (origója) nem végez haladó mozgást, hanem az origója körül forog. A merevtest pályaimpulzusmomentuma

$$\vec{L}^{[O]} = \sum_a m_a \vec{r}'_a \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a) = \vec{E}'_{(i)} \Theta^{[O']}_{i,j} \omega_j. \tag{1.2.32}$$

A merevtest mozgását kimerítően leírjuk, ha meghatározzuk az Euler-szögeket, mint az idő függvényeit. Ehhez az impulzusmomentum-tételt írjuk fel a K inerciarendszerben,

$$\frac{d\vec{L}^{[O]}}{dt} = \vec{M}^{[O](k)}, \qquad (1.2.33)$$

ahol a jobb oldalon a merevtestre ható külső forgatónyomatékok eredője áll. Megjegyezzük, hogy a rögzítési pontban általában fellép $\vec{K}$ kényszererő, de ennek az O rögzítési pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka zérus, mert a kényszererő karja zérus. Az impulzusmomentum-tétel az impulzusmomentum explicit alakját felhasználva

$$\dot{\vec{E}}'_{(i)}\Theta^{[O']}_{i,j}\omega_j + \vec{E}'_{(i)}\Theta^{[O']}_{i,j}\dot{\omega}_j = \vec{M}^{[O](k)} \qquad (1.2.34)$$

alakot ölt. Ha a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer koordinátatengelyeit a fő tehetetlenségi tengelyek irányában választjuk, akkor az $\vec{E}'_{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ egységvektorokkal rendre rászorozva az impulzusmomentum-tétel mindkét oldalára, a merevtest tetszőleges O' pont körüli forgására vonatkozó Euler-egyenleteket kapjuk (most O' általában nem a TKP):

$$\begin{aligned}
\Theta_1\dot{\omega}_{x'} + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_{y'}\omega_{z'} &= M^{[O](k)}_{x'}, \\
\Theta_2\dot{\omega}_{y'} + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_{x'}\omega_{z'} &= M^{[O](k)}_{y'}, \\
\Theta_3\dot{\omega}_{z'} + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_{x'}\omega_{y'} &= M^{[O](k)}_{z'}. \qquad (1.2.35)
\end{aligned}$$

Az Euler-szögek és idő szerinti első deriváltjaik kezdeti értékeinek ismeretében ezek az egyenletek egyértelműen megoldhatók, ha adott a külső forgatónyomaték, mint az Euler-szögek és idő szerinti első deriváltjaik függvénye.

Az Euler-egyenletek megoldása után meghatározhatjuk a rögzítési pontban ébredő kényszererőt a K inerciarendszerben felírt impulzus-tétel felhasználásával,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R}'_{TKP}) = \vec{K} + \vec{F}^{(k)}. \qquad (1.2.36)$$

Itt a külső erők $\vec{F}^{(k)}$ eredője értelemszerűen nem tartalmazza a rögzítési pontban fellépő $\vec{K}$ kényszererőt. A bal oldalon részletesen kiírva a deriváltat,

$$\begin{aligned}
M\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R}'_{TKP}) &= M\frac{d}{dt}(\vec{E}'_{(i)}\omega_i \times \vec{E}'_{(j)}X'_{TKP\ j}) \\
&= M\omega_i X'_{TKP\ j}\frac{d}{dt}[\vec{E}'_{(i)} \times \vec{E}'_{(j)}] \\
&= M\omega_i X'_{TKP\ j}\epsilon_{i,j,k}\dot{\vec{E}}'_{(k)} \\
&= M\epsilon_{i,j,k}\omega_i X'_{TKP\ j}[\vec{\omega} \times \vec{E}'_{(k)}] \\
&= M\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}'_{TKP}) \\
&= M[\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{R}'_{TKP}) - \omega^2\vec{R}'_{TKP}], \qquad (1.2.37)
\end{aligned}$$

az alábbi kifejezés adódik a kényszererőre:

$$\vec{K} = M[\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{R}'_{TKP}) - \omega^2\vec{R}'_{TKP}] - \vec{F}^{(k)}. \tag{1.2.38}$$

A kényszererő komponenseit a merevtesthez rögzített rendszerben $\vec{E}'_{(i)}\cdot\vec{K}$, a K inerciarendszerben pedig $\vec{E}_{(i)}\cdot\vec{K}$ szolgáltatja.

Ha nem hatnak a merevtestre a rögzítési pontban fellépő kényszererőn kívül külső erők és forgatónyomatékok, akkor a munkatétel értelmében a külső erők munkája a kényszererő munkája, ami viszont zérus, mert a rögzítési pont elmozdulása zérus. Ekkor a kinetikus energia, ami csak a rögzítési pont körüli forgásból származó kinetikus energia, állandó:

$$T = T^{[O']}_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}^{[O']}_{rot} = \frac{1}{2}(\Theta_1\omega_{x'} + \Theta_2\omega_{y'} + \Theta_3\omega_{z'}) = const. \tag{1.2.39}$$

Természetesen ekkor maga az $\vec{L}^{[O']}$ impulzusmomentum is állandó, hiszen a merevtestre ható, rögzítési pontra vonatkoztatott forgatónyomaték ekkor zérus. Így pályaimpulzusmomentum inerciarendszerbeli komponensei is állandók,

$$L^{[O']}_i = \vec{E}_{(i)}\cdot\vec{L}^{[O']} = (\vec{E}_{(i)}\cdot\vec{E}'_{(j)})\Theta_{j,k}\omega_k = const. \tag{1.2.40}$$

A mozgás ezen első integráljai felhasználhatók az egy pontjában rögzített, de egyébként „szabad” merevtest, az úgynevezett erőmentes pörgettyű mozgásának leírására.

3. **Erőmentes pörgettyű**

Ebben a fejezetben az erőmentes pörgettyű mozgásával foglalkozunk. Az erőmentes pörgettyű olyan, egy pontjában rögzített merevtest, amelyre a rögzítési pontban fellépő kényszererőn kívül nem hat más külső erő, ill. forgatónyomaték. Az egyszerűség kedvéért a rögzítési pont a TKP. A gyakorlatban ez megvalósítható úgy, hogy a pörgettyű a TKP-jában van alátámasztva, vagy az ún. Cardani-féle felfüggesztéssel. Természetesen a merevtestre hat nehézségi erő, de ennek a TKP-ra vonatkoztatott forgatónyomatéka zérus.

(a) *Gömbi pörgettyű.* Gömbi pörgettyűről akkor beszélünk, ha a merevtest TKP-ra vonatkoztatott fő tehetetlenségi nyomatékai mind azonosak, $\Theta_1^{[TKP]} = \Theta_2^{[TKP]} = \Theta_3^{[TKP]} = \Theta$. Ekkor a merevtesthez rögzített Descartes-koordinátarendszerben írhatjuk, hogy

$$\Theta = \sum_a m_a({y'_a}^2 + {z'_a}^2) = \sum_a m_a({x'_a}^2 + {z'_a}^2) = \sum_a m_a({x'_a}^2 + {y'_a}^2), \tag{1.2.41}$$

azaz

$$\Theta = \frac{2}{3}\sum_a m_a {\vec{r}'_a}^2. \tag{1.2.42}$$

A gömbszimmetria miatt a 3 darab fő tehetetlenségi tengelynek tetszőleges 3 darab, páronként egymásra merőleges egyenes választható a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszerben, amelyek a TKP-ban metszik egymást.
A merevtest $\vec{L}^{[TKP]} = \vec{L}$ (pálya)impulzusmomentuma a K inerciarendszerben állandó,

$$\vec{L} = \Theta\vec{\omega} = \text{ const.} \tag{1.2.43}$$

Ebből következik, hogy a szögsebesség és az impulzusmomentum párhuzamos, és hogy a szögsebesség is állandó (a K inerciarendszerből nézve),

$$\vec{\omega} = \frac{1}{\Theta}\vec{L} = \text{ const.} \tag{1.2.44}$$

Az (1.2.30) Euler-egyenletekből ugyanakkor az is következik, hogy a szögsebességvektornak a Descartes-komponensei a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszerben szintén állandók:

$$\frac{d\omega_{i'}}{dt} = 0, \qquad \omega_{i'} = \text{ const.} \tag{1.2.45}$$

A helyzet geometriai szemléltetéséhez tegyük fel, hogy a merevtesthez rögzített Descartes-koordinátarendszer tengelyeit úgy választjuk, hogy a kezdeti időpillanatban az y' tengely legyen merőleges a K rendszerben állandó irányú $\vec{L}$ és a vele egyirányú $\vec{\omega}$ vektorokra. Legyen továbbá ebben a pillanatban a z'-tengely és az impulzusmomentum vektorának bezárt szöge θ. A kezdeti pillantban ekkor

$$\omega_{y'} = 0, \quad \omega_{z'} = \omega\cos\theta, \quad \omega_{x'} = \omega\sin\theta, \tag{1.2.46}$$

de ezek az összefüggések akkor minden időpillanatban fennállnak, hiszen $\omega_{i'}$ =áll. Ez csak úgy lehetséges, hogy K-ból nézve az y'-tengely ω szögsebességgel körbeforog a $\vec{L}$ állandó vektorra merőleges síkban ω szögsebességgel (pozitív irányban). Eközben a z'-tengely (x'-tengely) az $\vec{L}$ vektorral θ $(\pi/2 - \theta)$ szöget bezáró alkotójú kúp palástján mozog.
A pörgettyű kinetikus energiája,

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{\vec{L}^2}{2\Theta} \tag{1.2.47}$$

szintén állandó.

(b) *Szimmetrikus pörgettyű.* Szimmetrikus pörgettyűről akkor beszélünk, ha a TKP-jában rögzített merevtest TKP-ra vonatkoztatott két fő tehetetlenségi nyomatéka egyenlő, de a harmadik fő tehetetlenségi nyomaték ettől különböző,mondjuk $\Theta_1^{[TKP]} = \Theta_2^{[TKP]} \neq \Theta_3^{[TKP]}$. (A továbbiakban elhagyjuk a TKP jelölését a felső indexben.) A főtehetetlenségi tengelyek választott számozása esetén a 3. tengely, a z'-tengely a merevtest szimmetriatengelye. Vizsgáljuk meg először, mit észlel az a megfigyelő, aki a merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszerben nyugszik, amelynek origója a TKP-ban van. Az (1.2.30) Euler-egyenletek az alábbi alakot öltik:

$$\begin{aligned} \Theta_1\dot{\omega}_{x'} + (\Theta_3 - \Theta_1)\omega_{y'}\omega_{z'} &= 0, \\ \Theta_2\dot{\omega}_{y'} + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_{x'}\omega_{z'} &= 0, \\ \Theta_3\dot{\omega}_{z'} &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.48}$$

Az utolsó egyenletből $\omega_{z'}$ =áll. adódik. Az első két egyenlet ekkor a

$$\lambda = \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1}\omega_{z'} \tag{1.2.49}$$

állandó bevezetése után

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{x'} + \lambda\omega_{y'} &= 0, \\ \dot{\omega}_{y'} - \lambda\omega_{x'} &= 0 \end{aligned} \tag{1.2.50}$$

alakot ölt. Vezessük be az $\Omega(t) = \omega_{x'}(t)+i\omega_{y'}(t)$ komplex értékű függvényt. Ha a második egyenlet mindkét oldalát i-vel szorozzuk és az egyenletek megfelelő oldalait összeadjuk, akkor az

$$\dot{\Omega} - i\lambda\Omega = 0 \tag{1.2.51}$$

közönséges, elsőrendű, állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenletet kapjuk a keresett $\Omega(t)$ függvényre. Ennek a megoldása

$$\Omega = \Omega_0 e^{i\lambda t + i\alpha} \tag{1.2.52}$$

alakú, ahol Ω_0 és α valós állandók, amelyeknek az értékét a kezdőfeltételekből kell meghatározni. A fenti megoldásból adódik, hogy

$$\omega_{x'} = \Omega_0\cos(\lambda t + \alpha), \qquad \omega_{y'} = \Omega_0\sin(\lambda t + \alpha). \tag{1.2.53}$$

Ez azt jelenti, hogy a szgsebességvektornak a merevtest szimmetriatengelyére merőleges síkra vett merőleges vetülete,

$$\omega_\perp = \sqrt{\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2} = \Omega_0 = \text{ áll.} \tag{1.2.54}$$

Továbbá a szögsebességvektornak a szimmetriatengellyel bezárt θ_0 szöge is állandó,

$$\text{tg }\theta_0 = \frac{\Omega_0}{\omega_{z'}}, \tag{1.2.55}$$

és a szögsebességvektor nagysága is állandó,

$$\omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \omega_{z'}^2}. \tag{1.2.56}$$

Fejezzük ki a szögsebesség komponenseit ω-val és θ_0-lal,

$$\omega_{x'} = \omega \sin\theta_0 \; \cos(\lambda t + \alpha), \quad \omega_{y'} = \omega \sin\theta_0 \; \sin(\lambda t + \alpha), \quad \omega_{z'} = \omega \cos\theta_0. \tag{1.2.57}$$

Azt kaptuk tehát eredményül, hogy az állandó hosszúságú szögsebességvektor a szimmetriatengely körül körbejár $\lambda = [(\Theta_3 - \Theta_1)\omega\cos\theta_0]/\Theta_1$ állandó szögsebességgel egy kúp palástján, amelynek alkotója a szimmetriatengellyel θ_0 =áll. szöget zár be. Itt θ_0 és ω értékét a kezdőfeltételek határozzák meg.

A pályaimpulzusmomentum fő tehetetlenségi tengelyek irányába mutató komponensei a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszerben

$$\begin{aligned} L_{x'}(t) &= \Theta_1\omega_x'(t) = \Theta_1\omega\sin\theta_0 \; \cos(\lambda t + \alpha), \\ L_{y'}(t) &= \Theta_1\omega_y'(t) = \Theta_1\omega\sin\theta_0 \; \sin(\lambda t + \alpha), \\ L_{z'} &= \Theta_3\omega\cos\theta_0 = \text{ áll.} \end{aligned} \tag{1.2.58}$$

A merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszerben nyugvó megfigyelő számára ez egyrészt azt jelenti, hogy a pályaimpulzusmomentumnak a szimmetriatengelyre merőleges síkra vett merőleges vetülete, $L_\perp = \sqrt{L_{x'}^2 + L_{y'}^2} = \Theta_1\omega\sin\theta_0$ =áll., és a szimmetriatengelyre vett merőleges vetülete is állandó, $L_{z'} = \Theta_3\omega\cos\theta_0$ =áll., azaz hogy a pályaimpulzusmomentum vektorának hossza állandó, és a szimmetriatengellyel bezárt θ_L szöge is állandó:

$$\text{tg } \theta_L = \frac{L_\perp}{L_{z'}} = \frac{\Theta_1}{\Theta_3} \text{ tg } \theta_0 = \text{ const.} \tag{1.2.59}$$

Másrészt a K' rendszerben nyugvó megfigyelő azt észleli az impulzusmomentum komponenseinek időfüggése alapján, hogy az impulzusmomentum vektora a szimmetriatengely körül körbejár a szögsebességvektor körbejárásával azonos λ szögsebességgel. Az impulzusmomentum vektora így mindig benne van a szögsebesség vektora és a szimmetriatengely által meghatározott síkban .

A K laborrendszerből nézve a pályaimpulzusmomentum vektora $\vec{L}$ =áll. A szimmetriatengely tetszőleges $\vec{r}_P = (0, 0, z')$ helyzetvektorú P pontja $\vec{v}_P = \vec{V}_{TKP} + \vec{\omega} \times \vec{r}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$ sebességgel mozog. Mivel $\vec{\omega}$ benne van a szimmetriatengely és $\vec{L}$ síkjában, a szimmetriatengely minden pontja erre a síkra merőleges irányú sebességgel mozog, amelynek nagysága $\omega z' \sin\theta_0$. A $\vec{v}_P$ sebességet viszont felírhatjuk $\vec{v}_P = \omega_p \frac{\vec{L}}{L} \times \vec{r}_P$ alakban is, amelynek nagysága $\omega_p z' \sin\theta_L$. Az

$$\omega_p z' \sin\theta_L = \omega z' \sin\theta_0 \tag{1.2.60}$$

azonosságból azt kapjuk, hgoy a szimmetriatengely az impulzusmomentum $\vec{L}$ =áll. vektora körül körbejár, precesszál

$$\omega_p = \omega \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_L} = \frac{\omega_\perp}{\sin\theta_L} = \frac{\Theta_1\omega_\perp}{\Theta_1\sin\theta_L} = \frac{L_\perp}{\Theta_1\sin\theta_L} = \frac{L}{\Theta_1} = \text{ áll.} \qquad (1.2.61)$$

szögsebességgel.

A szögsebesség így meghatározott időfüggését beírjuk az (1.1.34) összefüggésekbe, amelyek ezáltal az Euler-szögekre, mint az idő függvényeire vonatkozó közönséges elsőrendű differenciálegyenleteket jelentenek,

$$\begin{aligned} \omega_{z'} &= \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi, \\ \omega_{x'} &= \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\phi, \\ \omega_{y'} &= \dot\psi\sin\theta\cos\varphi + \dot\theta\sin\phi, \end{aligned} \qquad (1.2.62)$$

ahol a θ Euler-szög a K' rendszer z'-tengelye és a K rendszer z-tengelye által bezárt szög. Ha a z-tengelyt az állandó $\vec{L}$ impulzusmomentum irányában választjuk, akkor $\theta = \theta_L$ =áll. A szögsebesség Descartes-komponensei a merevtesthez rögzített K' rendszerben tehát

$$\begin{aligned} \omega\cos\theta_0 &= \dot\psi\cos\theta_L + \dot\varphi, \\ \omega\sin\theta_0\cos(\lambda t + \alpha) &= \dot\psi\sin\theta_L\sin\varphi \\ \omega\sin\theta_0\sin(\lambda t + \alpha) &= \dot\psi\sin\theta_L\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (1.2.63)$$

A két utolsó egyenlet megfelelő oldalainak hányadosát képezve

$$\text{tg }\varphi = \text{ ctg }(\lambda t + \alpha) = -\text{ tg }(\lambda t + \alpha - \frac{1}{2}\pi) \qquad (1.2.64)$$

adódik, ahonnan

$$\varphi = -\lambda t - \alpha + \frac{1}{2}\pi = -\frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1}\omega t\cos\theta_0 + \varphi_0. \qquad (1.2.65)$$

Az első egyenletből így azt kapjuk, hogy

$$\dot\psi = \frac{1}{\cos\theta_L}(\omega\cos\theta_0 + \lambda) = \frac{\Theta_3\cos\theta_0}{\Theta_1\cos\theta_L}\omega = \text{ const.}, \qquad (1.2.66)$$

illetve integrálás után

$$\psi(t) = \frac{\Theta_3\cos\theta_0}{\Theta_1\cos\theta_L}\omega t + \psi_0. \qquad (1.2.67)$$

A φ_0 és ψ_0 integrációs állandók a megfelelő Euler-szögek kezdeti értékei a $t = 0$ időpillanatban. A megoldások explicit alakját felhasználva, a második (vagy a harmadik) egyenlet azonosságként történő kielégülését követelve, meghatározhatjuk a θ_0 szöget. Természetesen újra a geometriai szemlélet alapján kapott eredményre jutunk:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \frac{\omega \sin\theta_0}{\sin\theta_L} = \omega_p = \frac{\Theta_3 \cos\theta_0}{\Theta_1 \cos\theta_L}\omega, \\ \text{tg}\ \theta_0 &= \frac{\Theta_3}{\Theta_1}\ \text{tg}\ \theta_L. \end{aligned} \tag{1.2.68}$$

A $\psi(t)$ függvény írja le a szimmetriatengely reguláris precesszióját, úgynevezett nutációját az állandó impulzusmomentum-vektor körül.

(c) *Rotátor.* A rotátor olyan szimmetrikus pörgettyű, amelynek a szimmeriatengelyére vett tehetetlenségi nyomatéka zérus, azaz pl. $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$, $\Theta_3 = 0$, ha a szimmetriatengely a 3. fő tehetetlenségi tengely. Ezt olyan merevtest valósítja meg jó közelítéssel, amely végtelenül vékony, pálca alakú. Ha a pálca szimmetriatengelye a 3., azaz a z'-tengely, és a pálca x' és y' irányú kiterjedése elhanyagolható a pálca z' irányú kiterjedéséhez képest, akkor ez a merevtest jó közelítéssel merev rotátor, hiszen

$$\begin{aligned}\Theta_1 = \Theta_{x',x'} = \Theta_2 = \Theta_{y',y'} &= \sum_a m_a {z'_a}^2, \\ \Theta_3 = \Theta_{z',z'} = \sum_a m_a({x'_a}^2 + {y'_a}^2) &= 0,\end{aligned} \tag{1.2.69}$$

hiszen a merevtest bármely részecskéjére $x'_a = y'_a = 0$. Egy végtelen vékony pálca saját tengelye körüli forgásáról értelmetlen beszélni, hiszen nem lehet az egyenesre olyan jelet „festeni”, rajta olyan anyagi pontok halmazát kijelölni, amelyek elmozdulásával az egyenes önmaga, mint tengely körüli elfordulása megfigyelhetővé válna. Arra az álláspontra kell ezért helyezkedjünk, hogy ilyen forgás nem is lehetséges. A fizikus számára az, ami nem figyelhető elvileg sem meg, az nem létezik. Azt kell mondjuk tehát, hogy $\omega_{z'} = 0$, azaz a szögsebesség mindig merőleges a rotátor szimmetriatengelyére. Ekkor az impulzusmomentum Descartes-komponensei a rotátorhoz rögzített K' vonatkoztatási rendszerben:

$$L_{x'} = \Theta\omega_{x'}, \quad L_{y'} = \Theta\omega_{y'}, \quad L_{z'} = 0, \tag{1.2.70}$$

azaz a rotátor impulzusmomentuma is merőleges a rotátor szimmetriatengelyére és párhuzamos és egyirányú a szögsebességvektorral,

$$\vec{L} = \Theta\vec{\omega}. \tag{1.2.71}$$

A rotátor kinetikus energiája a K laborrendszerben

$$T = \frac{1}{2}\Theta(\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) = \frac{L_{x'}^2 + L_{y'}^2}{2\Theta} = \frac{\vec{L}^{\,2}}{2\Theta}. \tag{1.2.72}$$

A rotátor TKP körüli forgására vonatkozó (1.2.35) Euler-egyenletekben a rotátor tengelyére vonatkoztatott külső forgatónyomaték mindig zérus, hiszen a rotátor tengelyén lehet csak a külső erők támadási pontja, akkor viszont a z'-tengelyre vonatkoztatott forgatónyomatékuk zérus, mert az ilyen erők erőkarja zérus, $\sqrt{x_a'^{\,2} + y_a'^{\,2}} = 0$. Az (1.2.35) Euler-egyenletek közül csak kettő nem triviális,

$$\Theta\dot{\omega}_{x'} = M_{x'}, \quad \Theta\dot{\omega}_{y'} = M_{y'}. \tag{1.2.73}$$

A rotátor erőmentes mozgása esetén a forgatónyomaték zérus, $M_{x'} = M_{y'} = 0$, úgyhogy $\omega_{x'} = \omega_{y'} =$áll. adódik, azaz a rotátor szögsebességvektora a rotátorhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben a rotátor tengelyére merőleges állandó vektor.

A K laborrendszerben nyugvó megfigyelő szerint az impulzusmomentum vektora állandó,

$$\vec{L} = \Theta\vec{\omega} = \text{ const.}, \tag{1.2.74}$$

és a rotátor szimmetriatengelyére merőleges, mert a szögsebesség vektorával megegyező irányú. A rotátor szimmetriatengelye a K-ban nyugvó megfigyelő szerint

$$\omega = \frac{L}{\Theta} \tag{1.2.75}$$

szögsebességgel forog az $\vec{L}$ impulzusmomentum-vektorra merőleges síkban, annak hegye felől nézve pozitív (az óramutató járásával ellentétes) körüljárási irányban.

(d) *Aszimmetrikus pörgettyű.* Aszimmetrikus pörgettyűről akkor beszélünk, ha a merevtest a TKP-jában van rögzítve és valamennyi, a TKP-ra vonatkoztatott fő tehetetlenségi nyomatéka különböző. Az erőmentes mozgás Euler-egyenletei ekkor is integrálhatóak, de ezzel az esettel részletesen nem foglalkozunk.

4. **Súlyos pörgettyű**

Ebben a fejezetben a súlyos szimmetrikus pörgettyű mozgásával foglalkozunk. A TKP-ra vonatkoztatott fő tehetetlenségi nyomatékok $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$. A pörgettyű alátámasztási pontja a szimmetriatengelyen levő $O = O'$ pont, amelyet egyúttal a K laborrendszer és a pörgettyűhöz rögzített K' vonatkoztatási rendszer közös origójának választunk. Legyen a TKP és az alátámasztási pont távolsága ℓ. Ekkor Steiner tétele értelmében $\Theta_1^{[O]} = \Theta_1 + M\ell^2$, ahol M a pörgettyű tömege. Válasszuk a z'-tengelyt a szimmetriatengelynek, a z-tengelyt pedig az O ponton átmenő, függőlegesen felfelé irányított egyenesnek.

A súlyos pörgettyű Lagrange-függvénye ekkor

$$L = \frac{1}{2}(\Theta_1 + M\ell^2)(\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + \frac{1}{2}\Theta_3\omega_{z'}^2 - Mgl\cos\theta. \tag{1.2.76}$$

Ahhoz, hogy ezt explicit módon kifejezzük az Euler-szögekkel és deriváltjaikkal, használjuk fel a szögsebesség merevtesthez rögzített rendszerben vett Descartes-komponenseinek (1.1.34) kifejezéseit:

$$\omega_{x'} = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \quad \omega_{y'} = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \quad \omega_{z'} = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi. \tag{1.2.77}$$

Ekkor

$$L = \frac{1}{2}(\Theta_1 + M\ell^2)(\dot\psi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{1}{2}\Theta_3(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)^2 - Mgl\cos\theta. \tag{1.2.78}$$

Az Euler-szögekhez kanonikusan konjugált impulzusok:

$$\begin{aligned}
p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = (\Theta_1 + M\ell^2)\dot\psi\sin^2\theta + \Theta_3(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)\cos\theta, \\
p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \Theta_3(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi), \\
p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = (\Theta_1 + M\ell^2)\dot\theta.
\end{aligned} \tag{1.2.79}$$

Látjuk, hogy a Lagrange-függvény nem függ explicit módon az időtől, ezért megmarad a pörgettyű energiája,

$$\begin{aligned}
E &= p_\psi\dot\psi + p_\varphi\dot\varphi + p_\theta\dot\theta - L \\
&= \frac{1}{2}(\Theta_1 + M\ell^2)(\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{1}{2}\Theta_3(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)^2 + Mgl\cos\theta \\
&= \text{const.}
\end{aligned} \tag{1.2.80}$$

Mivel a Lagrange-függvény nem függ explicit módon sem a ψ, sem a φ Euler-szögtől, $\partial L/\partial\psi = \partial L/\partial\varphi = 0$, azért a Lagrange-függvény invariáns ezen változók tetszőleges konstans eltolásával szemben, amiből következik (a megfelelő Euler-Lagrange-egyenletekből, $\dot p_\psi = \dot p_\varphi = 0$ közvetlenül is megkapható) két további megmaradási törvény:

$$p_\psi = \text{ const.}, \quad p_\varphi = \text{ const.} \tag{1.2.81}$$

Az olyan általános koordinátákat, amelyektől a Lagrange-függvény nem függ, azaz az olyan általános koordinátákat, amelyekhez tartozó általános sebességektől függ csak a Lagrange-függvény, ciklikus koordinátáknak szokás nevezni. Ciklikus koordinátához kanonikusan konjugált impulzus mindig megmarad a mozgás során.

Tisztázzuk még a megmaradó kanonikusan konjugált impulzusok fizikai jelentését. Egyrészt

$$p_\varphi = \Theta_3\omega_{z'} = L_{z'}^{[O]}, \tag{1.2.82}$$

azaz megmarad az impulzusmomentumnak a pörgettyű szimmetriatengelyére vett vetülete. Másrészt, ha rendre $\vec{E}_{(3)}$ és $\vec{E}'_{(3)}$ egységvektorok jelölik a z- ill. a z'-tengely irányát, akkor az impulzusmomentum függőleges vetülete

$$
\begin{aligned}
L_z^{[O]} &= \vec{E}_{(3)} \cdot \vec{L} \\
&= \vec{E}_{(3)} \cdot \vec{E}'_{(1)} L_{x'}^{[O]} + \vec{E}_{(3)} \cdot \vec{E}'_{(2)} L_{y'}^{[O]} + \vec{E}_{(3)} \cdot \vec{E}'_{(3)} L_{z'}^{[O]} \\
&= (\Theta_1 + M\ell^2)[\omega_{x'} \sin\theta \sin\varphi + \omega_{y'} \sin\theta \cos\varphi] + \Theta_3 \omega_{z'} \cos\theta \\
&= [(\Theta_1 + M\ell^2)\sin^2\theta + \Theta_3 \cos^2\theta]\dot{\psi} + \Theta_3 \cos\theta \; \dot{\varphi} \\
&= p_\psi. \qquad (1.2.83)
\end{aligned}
$$

Azt is könnyű megérteni, miért marad meg az impulzusmomentum függőleges és szimmetriatengely irányú vetülete. A nehézségi erőnek az $O = O'$ alátámasztási pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka,

$$\vec{M}^{[O]} = -\ell \vec{E}'_{(3)} \times Mg\vec{E}_{(3)}, \qquad (1.2.84)$$

merőleges minden időpillanatban a z- és z'- tengelyekre. Az impulzusmomentum-tételből ezért közvetlenül adódik az impulzusmomentum ezen két vetületének állandósága.

A három Euler-szöget, mint az idő függvényét meghatározhatjuk a mozgás fenti három első integráljából. Az impulzusmomentum megmaradó L_z és $L_{z'}$ vetületeivel kifejezve

$$\dot{\psi} = \frac{L_z - L_{z'} \cos\theta}{(\Theta_1 + M\ell^2)\sin^2\theta}, \qquad (1.2.85)$$

amit behelyettesítve a megmaradó energia kifejezésébe

$$E = \frac{1}{2}(\Theta_1 + M\ell^2)\left[\frac{(L_z - L_{z'}\cos\theta)^2 \sin^2\theta}{(\Theta_1 + M\ell^2)^2 \sin^4\theta} + \dot{\theta}^2\right] + \frac{L_{z'}^2}{2\Theta_3} + Mgl\cos\theta \qquad (1.2.86)$$

adódik, amit érdemes

$$E' = \frac{1}{2}(\Theta_1 + M\ell^2)\dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta) \qquad (1.2.87)$$

alakba átírni, ahol

$$E' = E - \frac{L_{z'}^2}{2\Theta_3} - Mg\ell \qquad (1.2.88)$$

és bevezettük a

$$V_{eff}(\theta) = \frac{(L_z - L_{z'}\cos\theta)^2}{2(\Theta_1 + M\ell^2)\sin^2\theta} - Mg\ell(1 - \cos\theta) \qquad (1.2.89)$$

effektív potenciális energiát, amelynek segítségével alakilag az E' =áll. ,,energia" kifejezése olyan, mint egy $\Theta_1 + M\ell^2$,,tömegű", egy szabadsági fokú részecske energiája, amelynek potenciális energiája $V_{eff}(\theta)$. Ezt a tényt majd később felhasználjuk a mozgás kvalitatív jellemzésére.

A θ Euler-szögre vonatkozó

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2[E' - V_{eff}(\theta)]}{\Theta_1 + M\ell^2} \equiv f(\theta) \tag{1.2.90}$$

mozgásegyenlet integrálható,

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta)}} + C_\theta = t(\theta), \tag{1.2.91}$$

ahol C_θ a primitív függvény integrációs állandója. Invertálva a $t = t(\theta)$ függvénykapcsolatot, kapjuk a keresett $\theta(t)$ függvényt. Ezt felhasználva, megkapjuk $\dot{\psi}$ explicit időfüggését, amelynek integrálása eredményezi $\psi(t)$-t, benne egy újabb, C_ψ integrációs állandóval. Végül

$$\dot{\varphi} = \frac{L_{z'}}{\Theta_3} - \dot{\psi}\cos\theta \tag{1.2.92}$$

időfüggését is explicit módon megkapjuk, amelyet integrálva adódik $\varphi(t)$, benne a C_φ integrációs állandóval. A C_θ, C_ψ és C_φ integrációs állandókat, valamint a megmaradó E, L_z és $L_{z'}$ mennyiségek értékét a 6 darab kezdeti feltétel egyértelműen rögzíti. Ha például a kezdeti $t = 0$ időpillanatban a pörgettyű csak szimmetriatengelye körül forog és szimmetriatengelye a z-tengellyel θ_0 szöget zár be, akkor a kezdeti feltételek:

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \varphi(0) = \psi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_{z'0}, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\psi}(0) = 0. \tag{1.2.93}$$

Ahelyett, hogy megoldanánk a mozgásegyenleteket, vizsgáljuk meg a mozgás jellemzőit az effektív egy-dimenziós mozgás alapján. Az effektív potenciális energia $\theta = 0$ és $\theta = \pi$ esetén pozitív végtelenhez tart, $V_{eff}(0) = V_{eff}(\pi) = +\infty$ és közben valahol minimuma van. A megoldás akkor és csak akkor létezik, ha $E' \geq V_{eff}(\theta)$ teljesül $\theta(t)$ minden értékére, azaz egyrészt $E' \geq \min V_{eff}(\theta)$, másrészt $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, ahol θ_1 és θ_2 az effektív egy-dimenziós mozgás fordulópontjai, a $V_{eff}(\theta) = E'$ egyenlet gyökei. Az effektív potenciál viselkedéséből következik, hogy $E' \geq \min V_{eff}(\theta)$ esetén 2 darab ilyen valós gyök van. Ez azt jelenti, hogy a pörgettyű szimmetriatengelye a $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ intervallumban mozog oda-vissza, fel-le rezgést, úgynevezett nutációt végez. Eközben $\dot{\psi} \neq 0$ miatt a szimmetriatengely körbejár a függőleges z-tengely körül, azaz az alátámasztási ponton átmenő függőleges egyenes körül precesszál. Ha a nutáció közben $\dot{\psi}$ nem vált előjelet, akkor a precesszió a szimmetriatengely fel-le mozgása alatt mindig azonos irányú, a pörgettyű szimmetriatengelye monoton precesszál. Előfordulhat, hogy a $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ intervallum két szélén a precesszió iránya ellentétes, azaz $\dot{\psi}$ előjele ellentétes

$\theta = \theta_1$ és $\theta = \theta_2$ esetén. Ekkor a szimmetriatengely és az O pontot körülvevő egységgömb metszéspontja hurkokat ír le az egységgömbön.

5. **Impulzusmomentum Larmor-precessziója**

Vizsgáljuk meg azt az esetet, hogyan mozogna a klasszikus mechanika törvényei szerint egy olyan merevtest, amelynek $\vec{J}$ impulzusmomentuma van, és amelyre a külső, homogén $\vec{B}$ tér $\vec{M} = -g\vec{J} \times \vec{B}$ forgatónyomatékot gyakorol. A valóságban ilyen eset úgy valósul meg általában, hogy a merevtest az impulzusmomentumával arányos $-g\vec{J}$ mágneses momentummal rendelkezik és ezt homogén, $\vec{B}$ mágneses indukciójú mágneses térbe helyezzük.

Az impulzusmomentum-tételből következik, hogy a merevtest TKP-jával együttmozgó, nem forgó K rendszerben

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = -g\vec{J} \times \vec{B}. \tag{1.2.94}$$

Válasszuk a z-tengelyt párhuzamosnak a $\vec{B}$ vektorral. Ekkor

$$\frac{dJ_x}{dt} = -gJ_yB, \quad \frac{dJ_y}{dt} = gJ_xB, \quad \frac{dJ_z}{dt} = 0, \tag{1.2.95}$$

úgyhogy az impulzusmomentum $\vec{B}$-irányú merőleges vetülete állandó marad a mozgás során, J_z =áll. Az impulzusmomentum merőleges komponenseire vonatkozó egyenletekből az $N = J_x + iJ_y$ komplex függvényre a

$$\frac{dN}{dt} = igBN \tag{1.2.96}$$

egyenlet adódik, ahonnan

$$N = N_0 e^{igBt+i\alpha}, \tag{1.2.97}$$

ahol N_0 és α valós paraméterek. Innen a valós és képzetes rész szétválasztása után

$$J_x = N_0 \cos(gBt + \alpha), \quad J_y = N_0 \sin(gBt + \alpha) \tag{1.2.98}$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy az impulzusmomentumnak a $\vec{B}$ külső térerősségre merőleges komponense állandó nagyságú, $J_\perp = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = N_0 = \vec{J}^2 - J_z^2$, továbbá, hogy a merőleges vetület $\omega_L = gB$ szögsebességgel körbejár a külső térre merőleges síkban, a $\vec{B}$ vektor „hegye" felől nézve pozitív körüljárási irányban. Az impulzusmomentum $\vec{J}$ vektora tehát állandó $|\vec{J}| = J$ nagyságú marad, valamint állandó θ szöget zár be a $\vec{B}$ külső tér irányával, $\cos\theta = J_z/J$ =áll., úgyhogy a $\vec{J}$ vektor egy olyan kúp palástján jár körbe a $\vec{B}$ vektor körül, amelynek alkotója a $\vec{B}$ vektorral θ szöget zár be. Ez a Larmor-precesszió.

6. **Merevtest tengely körüli forgása**

Ebben a fejezetben merevtest rögzített tengely körüli forgásával foglalkozunk. Válasszuk a rögzített forgástengelyt a K laboratóriumi és a K' merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszerek közös z-, z'-tengelyének. Válasszuk továbbá a K és K' rendszerek $O = O'$ közös origóját abban a forgástengelyre merőleges síkban, amelyben a TKP helyezkedik el. Legyen a merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer x'-tengelye az origón és a TKP-on áthaladó, az origóból a TKP felé irányított egyenes. Az Euler-szögek közül ekkor egyedül a ψ szög nem azonosan nulla, ez definíció szerint az x'- és az x-tengely által bezárt szög. A rögzített tengely körüli forgás miatt a szögsebesség, $\vec{\omega} = \omega \vec{E}_{(3)} = \omega \vec{E}'_{(3)}$ a forgástengellyel párhuzamos. A z-, z'-tengelyeket úgy irányítjuk, hogy irányuk egyezzen meg a szögsebesség irányával, ekkor $\dot{\psi} = \omega > 0$.

A rögzített tengely körül forgó merevtestnek egy darab szabadsági foka van, a ψ Euler-szög. Ennek időfüggését az impulzusmomentum-tétel segítségével határozhatjuk meg. Az impulzusmomentum-tételt a K laborrendszerben (inerciarendszerben) nyugvó O pontra írjuk fel,

$$\frac{d\vec{L}^{[O]}}{dt} = \vec{M} = \vec{M}^{(k)} + \vec{M}^{(t)}, \tag{1.2.99}$$

ahol a forgatónyomatékokat szétválasztottuk a tengely által a merevtestre kifejtett $\vec{M}^{(t)}$ és nem a tengely által kifejtett $\vec{M}^{(k)}$, ,,külső" forgatónyomatékokra. Mivel az origók egybeeesnek,

$$\vec{L}^{[O]} = \vec{L}^{[O']} = \sum_a m_a \vec{r}'_a \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a), \tag{1.2.100}$$

ahol $\vec{r}'_a$ az O' origóból a merevtest a-adik részecskéjéhez húzott helyzetvektor (a K' rendszerben). Felhasználva az impulzusmomentum vektorának K' rendszerben vett Descartes-komponensei és a szögsebesség megfelelő komponensei közti összefüggéseket,

$$L_{x'} = \Theta^{[O']}_{x',z'} \omega, \quad L_{y'} = \Theta^{[O']}_{y',z'} \omega, \quad L_{z'} = \Theta^{[O']}_{z',z'} \omega, \tag{1.2.101}$$

kapjuk az impulzusmomentum-tétel mindkét oldalának z-komponensét véve a ψ elfordulási szög meghatározásához szükséges mozgásegyenletet,

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{dL_{z'}}{dt} = \Theta_{z',z'} \ddot{\psi} = M_z. \tag{1.2.102}$$

Ahhoz , hogy fel tudjuk írni az impulzusmomentum-tétel mindkét oldalának x- és y- irányú vetületét, szükségünk van az impulzusmomentum Descartes-komponenseire a K inerciarendszerben. Írjuk ehhez az impulzusmomentum vektorát

$$\vec{L}^{[O']} = \vec{E}'_{(1)} L_{x'} + \vec{E}'_{(2)} L_{y'} + \vec{E}'_{(3)} L_{z'} \tag{1.2.103}$$

alakba, akkor

$$\begin{aligned}
L_x &= \vec{E}_{(1)} \cdot \vec{L} = \vec{E}_{(1)} \cdot \vec{E}'_{(1)} L_{x'} + \vec{E}_{(1)} \cdot \vec{E}'_{(2)} L_{y'} \\
&= L_{x'} \cos\psi - L_{y'} \sin\psi, \\
L_y &= \vec{E}_{(2)} \cdot \vec{L} = \vec{E}_{(2)} \cdot \vec{E}'_{(1)} L_{x'} + \vec{E}_{(2)} \cdot \vec{E}'_{(2)} L_{y'} \\
&= L_{x'} \sin\psi + L_{y'} \cos\psi. \qquad (1.2.104)
\end{aligned}$$

Ezek segítségével megkapjuk az impulzusmomentum-tételből az impulzusmomentum forgástengelyre merőleges komponenseire vonatkozó egyenleteket,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[(\Theta_{x',z'} \cos\psi - \Theta_{y',z'} \sin\psi)\dot{\psi}] &= M_x, \\
\frac{d}{dt}[(\Theta_{x',z'} \sin\psi + \Theta_{y',z'} \cos\psi)\dot{\psi}] &= M_y. \qquad (1.2.105)
\end{aligned}$$

A fenti egyenletekből látjuk, hogy a forgatáshoz z-irányú forgatónyomatékot kell kifejteni a merevtestre. Az impulzusmomentum forgástengelyre merőleges komponenseinek változására vonatkozó egyenleteket pedig felhasználhatjuk, hogy a $\psi(t)$ megoldás ismeretében meghatározzuk a tengelyben ébredő forgatónyomatékot.

A továbbiakban feltesszük, hogy $\vec{M}^{(k)} \parallel \vec{E}_{(3)}$ a forgástengely irányába mutat, és a hogy a $t = 0$ pillanatban a kezdőfeltételek $\psi_0(0) = \psi_0$, $\dot{\psi}(0) = \omega_0$. Ekkor az $L_z^{[O]}$-ra vonatkozó egyenlet egyértelműen megoldható a $\psi(t)$ függvényre. A $\psi(t)$ megoldást behelyettesítve, $M_x^{(t)}$ és $M_y^{(t)}$ explicit módon számolhatók. A tengelyben akkor és csak akkor ébrednek forgatónyomatékok, ha a $\Theta_{x',z'}^{[O']}$ és $\Theta_{y',z'}^{[O']}$, az úgynevezett eltérítő, azaz deviációs nyomatékok legalább egyike nem nulla. Ebből az is következik, hogy ha a forgástengely a TKP-on átmenő valamelyik fő tehetetlenségi tengely, akkor nem lép fel eltérítő forgatónyomaték a tengelyre, azaz a fő tehetetlenségi tengelyek szabad tengelyként szolgálhatnak, nem kell őket rögzíteni, akkor sem változtatják a K laborrendszerben a helyzetüket fő tengely irányú forgatónyomaték hatására. Megjegyezzük még, hogy a tengelyben tengelyirányú forgatónyomaték nem tud ébredni, hiszen a tengely pontjaiban támadó erők tengelyre vonatkoztatott erőkarja zérus.

A tengely által a merevtestre kifejtett eredő erő komponenseit az impulzustételből számolhatjuk ki, ami a K laborrendszerben

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}_{TKP}}{dt} = M\frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{R}_{TKP}]. \qquad (1.2.106)$$

Bontsuk fel az eredő erőt a tengely által a merevtestre kifejtett $\vec{F}^{(t)}$ és a többi külső erő, $\vec{F}^{(k)}$ összegére. Ekkor a tengely által a merevtestre kifejtett erő

$$\vec{F}^{(t)} = M\frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{R}_{TKP}] - \vec{F}^{(k)}. \qquad (1.2.107)$$

Az $\vec{F}^{(k)}$ eredőerő zérus vagy merőleges a tengelyre, mert csak a tengelyre merőleges erők tudnak tengely irányú $\vec{M}^{(k)}$ forgatónyomatékot kifejteni. Így a tengely által a merevtestre kifejtett erő is merőleges a forgástengelyre. Mivel

$$X'_{TKP} = \ell, \quad Y'_{TKP} = 0, \quad X_{TKP} = \ell \cos\psi, \quad Y_{TKP} = \ell \sin\psi, \tag{1.2.108}$$

a tengely által kifejtett erő el nem tűnő komponensei

$$\begin{aligned} F_x^{(t)} &= -\frac{d}{dt}(\dot{\psi} Y_{TKP}) - F_x^{(k)} = \ell \frac{d^2}{dt^2}\cos\psi - F_x^{(k)}, \\ F_y^{(t)} &= \frac{d}{dt}(\dot{\psi} X_{TKP}) - F_y^{(k)} = \ell \frac{d^2}{dt^2}\sin\psi - F_y^{(k)}. \end{aligned} \tag{1.2.109}$$

Speciális esetek

(a) *Merevtest forgása rögzített tengeky körül állandó, tengelyirányú forgatónyomaték hatására.* Ha speciálisan, mint sokszor a gyakorlatban, a külső $\vec{M}^{(k)}$ forgatónyomaték forgástengely irányú és állandó nagyságú, akkor a megoldás

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\beta t^2 + \omega_0 t + \psi_0. \tag{1.2.110}$$

ahol a szöggyorsulás $\beta = |\vec{M}^{(k)}|/\Theta_{z',z'}$ =áll.

(b) *Fizikai inga.* A fizikai inga olyan merevtest, amely rögzített vízszintes tengely körül forog a nehézségi erő által a merevtestre kifejtett forgatónyomaték hatására. A K vonatkoztatási rendszer (x, y) síkja legyen merőleges a z-forgástengelyre, legyen az y-tengely függőlegesen felfelé irányítva. Jelölje α az x'-tengelynek a függőleges y-tengellyel bezárt szögét, $\psi = \frac{1}{2}\pi - \alpha$. A merevtestre ható külső erők eredője $\vec{F}^{(k)} = -Mg\vec{E}_{(2)}$. Az eredő nehézségi erő tangenciális és sugárirányú komponensei rendre

$$F_\psi^{(k)} = Mg\cos\psi = Mg\sin\alpha, \quad F_r^{(k)} = Mg\sin\psi = Mg\cos\alpha. \tag{1.2.111}$$

A merevtestre ható külső forgatónyomaték

$$\vec{M}^{(k)} = \vec{R}_{TKP} \times \vec{F}^{(k)} = -Mg\ell \vec{E}'_{(1)} \times \vec{E}_{(2)}, \tag{1.2.112}$$

ahonnan a forgatónyomaték egyetlen, nem azonosan eltűnő komponense

$$M_z^{(k)} = -Mg\ell\cos\psi = -Mg\ell\sin\alpha. \tag{1.2.113}$$

Az impulzustételből az impulzusmomentum z-komponensének idő szerinti első deriváltjára vonatkozó egyenlet

$$\ddot{\alpha} = -\frac{Mg\ell\sin\alpha}{\Theta_{z,z}^{[O]}} \tag{1.2.114}$$

alakot ölt. Kis szögkitérések esetén $\sin\alpha \approx \alpha$, s ekkor

$$\ddot{\alpha} = -\Omega^2\alpha, \qquad \Omega^2 = \frac{Mg\ell}{\Theta^{[O]}_{z,z}} > 0. \tag{1.2.115}$$

Ekkor a mozgásegyenlet megoldása harmonikus rezgés:

$$\alpha(t) = A\cos(\Omega t + \delta), \tag{1.2.116}$$

ahol A és α valós állandók, amelyek értékét a kezdőfeltételek határozzák meg. A lengési idő

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta^{[O]}_{z,z}}{Mg\ell}}. \tag{1.2.117}$$

A merevtestre a forgástegely által kifejtett erő tangenciális és radiális komponensei, rendre

$$\begin{aligned} F^{(t)}_{\psi} &= -M\ell\ddot{\alpha} - F^{(k)}_{\psi} = Mg\Big(\frac{M\ell^2}{\Theta^{[O]}_{z,z}} - 1\Big)\alpha(t), \\ F^{(t)}_{r} &= -M\ell\dot{\alpha}^2 - F^{(k)}_{r} = -M\ell\dot{\alpha}^2(t) - Mg\cos\alpha(t). \end{aligned} \tag{1.2.118}$$

A tengely által kifejtett erő első tagja a TKP körpályán történő, haladó mozgásának fenntartásához szükséges centripetális erő. A tengely által a merevtestre kifejtett forgatónyomaték merőleges a forgástengelyre, $M^{(t)}_z = 0$, és a forgástengelyre merőleges komponensei:

$$M^{(t)}_x = -\frac{\Theta^{[O]}_{x',z'}}{\Theta^{[O]}_{z',z'}}Mg\ell\alpha, \quad M^{(t)}_y = -\frac{\Theta^{[O]}_{y',z'}}{\Theta^{[O]}_{z',z'}}Mg\ell\alpha. \tag{1.2.119}$$

7. **Csúszásmentes gördülés**

Ha két merevtest érintkezik és az egyik merevtest elmozdul a másik felületén, akkor gördülésről beszélünk. A gördülésnek két esete lehetséges.

(a) *Csúszásmentes gördülés.* Ez akkor következik be, ha az egyik merevtest megtapad a másik felületén, vagyis olyan nagy a felületek közti tapadási súrlódás, hogy a két felület érintkező pontjainak relatív sebessége zérus. Ekkor gördülés közben adott Δt idő alatt az érintkezési pont az egyik test felületén ugyanannyi utat tesz meg, mint a másik test felületén.

(b) *Csúszó gördülés.* Ekkor az érintkező felületek között mozgási súrlódási erő lép fel. A két érintkező felület éppen érintkező felületi pontjai nem nulla relatív sebességgel rendelkeznek.

Mi az alábbiakban a csúszásmentes gördülés esetével foglalkozunk kicsit részletesebben, egyszerű példán szemléltetve a jelenséget.

Henger gördülése vízszintes síkon. Ilyen eset pl. a gépkocsi kerekének mozgása a Föld felszínén, ha nem csúszik meg. Rögzítsük a K laboraóriumi rendszert a vízszintes síkhoz. Legyen a vízszintes sík a Descartes-koordinátarendszer (x, z) síkja, mutasson az y-tengely függőlegesen lefelé. Haladjon a henger TKP-ja $\vec{V}_{TKP}$ vízszintes sebességgel (a gépkocsi sebessége), $V_{TKP\,x} = V$. A henger a vízszintes síkkal egyik alkotója mentén érintkezik. Ennek az egyenesnek (a henger síkkal érintkező alkotójának) minden pontja zérus sebességgel mozog a vízszintes síkhoz képest, azaz a K laborrendszerben. Ez a csúszásmentesség kinematikai feltétele. A merevtesthez rögzített vonatkoztatási rendszer azon egyenesét, amelynek minden pontja zérus sebességű a K laborrendszerben, pillanatnyi forgástengelynek nevezzük. Henger síkon történő csúszásmentes gördülése során a pillanatnyi forgástengely mindig a hengernek a síkkal aktuálisan érintkező alkotója.

Ahhoz, hogy a csúszásmentesség feltétele teljesülni tudjon, a hengernek olyan, a szimmetriatengelyével párhuzamos, vízszintes $\vec{\omega}$ szögsebességgel kell forognia, $\omega_z = \omega > 0$, hogy a síkkal érintkező alkotó bármely P pontjának $\vec{V}_{TKP}$ haladási sebessége és $\vec{\omega} \times \vec{r}_P$ forgásból adódó sebessége zérussá adódjon össze vektorilag,

$$\vec{v}_P = \vec{V}_{TKP} + \vec{\omega} \times \vec{r}_P = 0. \tag{1.2.120}$$

Ha a henger sugara R, akkor ebből az következik, hogy $\omega = V/R$ és a szögsebességvektor olyan irányú, hogy a forgásból származó $\vec{\omega}\times\vec{r}_P$ sebesség ellentétes irányú legyen a TKP $\vec{V}_{TKP}$ sebességével,

$$V = \omega R. \tag{1.2.121}$$

Tegyük fel, hogy a henger azért halad, mert rá a szimmetriatengelyével párhuzamos M_z =const. forgatónyomatékot fejtünk ki. A hengerre ugyanakkor függőlegesen lefelé mutató eredő nehézségi erő hat, amelynek nagysága Mg, $G_y = Mg$. Ennek a henger szimmetriatengelyére vonatkoztatott forgatónyomatéka zérus. Ugyanakkor Newton második törvénye értelmében a sík a hengerre az érintkezési pontokban függőleges, felfelé irányuló nyomóerőt fejt ki, amelynek eredője $N_y = -Mg$, hiszen a henger függőleges irányban nem gyorsul, $G_y + N_y = 0$. Ekkor a síkkal érintkező alkotó mentén a vízszintes sík $S_x = S > 0$ tapadási súrlódási erőt fejt ki a hengerre. A súrlódási erő forgatónyomatékának az állandó szögsebesség fenntartásához kompenzálnia kell az M_z külső forgatónyomatékot, azaz $SR = M_z$. Másrészről a tapadási súrlódási erő értéke nem haladhatja meg a nyomóerő nagyságának és a μ_0 tapadási súrlódási együtthatónak a szorzatát, így a csúszásmentes gördülés dinamikai feltétele,

$$S = \frac{M_z}{R} \leq \mu_0 Mg, \qquad \mu_0 \geq \frac{M_z}{MgR} \tag{1.2.122}$$

azaz, hogy a tapadási súrlódási együttható legyen nagyobb egy alsó korlátnál. (Tapasztalatból tudjuk, hogy a kerék megcsúszik, ha a tapadási súrlódási együttható nagyon kicsi, pl. jeges úton.) Példánkban a súrlódási erő gyorsítani fogja a hengert, hiszen Newton második törvénye értelmében

$$M\dot{V}_{TKP\ x} = S_x, \qquad a_{TKP\ x} = S/M. \tag{1.2.123}$$

A hengerre kifejtett forgatónyomaték a tapadási súrlódási erőnek köszönhetően tudja gyorsítani a hengert vízszintes irányban.

2 RUGALMASAN DEFORMÁLHATÓ KÖZEGEK

2.1 Kisrezgések

A merevtest idealizált fogalom. A valóságos testek csak közelítőleg tekinthetők merevtesteknek. Általában jobb közelítés, ha a testet kis mértékben deformálhatónak tekintjük. Olyan modellt alkotunk a testről, amelyben a test minden részecskéjének van egy egyensúlyi helyzete. Ha ebben a helyzetben lennének befagyva a részecskék, akkor a test merevtest lenne. Most azonban feltételezzük, hogy a részecskék el tudnak mozdulni az egyensúlyi helyzetükből és akörül kis amplitudójú rezgéseket végezhetnek. Az ehhez szükséges gerjesztési energiát általában termikus gerjesztéssel kapták, de ez további megfontolásainkban nem játszik szerepet, csak az, hogy a gerjesztési energia elég kicsi és elég egyenletesen oszlik el a részecskéken ahhoz, hogy mindegyik részecske csak kicsit mozduljon ki egyensúlyi állapotából.

Tekintsünk egy $s > 1$ szabadsági fokú mechanikai rendszert, amelynek Lagrange-függvénye

$$L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} a_{i,j}(\underline{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(\underline{q}), \tag{2.1.1}$$

ahol $a_{i,j}(\underline{q}) = a_{j,i}(\underline{q})$ pozitív definit, szimmetrikus mátrix. Tegyük fel továbbá, hogy a potenciális energiának a $\underline{q} = \underline{q}_0$ helyen minimuma van. Ennek szükséges feltétele, hogy

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{\underline{q}=\underline{q}_0} = 0, \tag{2.1.2}$$

és elégséges feltétele, hogy az $U^{(2)}_{i,j} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\underline{q}=\underline{q}_0}$ szimmetrikus mátrix pozitív definit legyen.

A q_i általános koordinátához kanonikusan konjugált impulzus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j, \tag{2.1.3}$$

és a mechanikai rendszer energiája

$$E = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} a_{i,j}(\underline{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j + U(\underline{q}). \tag{2.1.4}$$

Az energiának alsó pontos korlátja van, amivel akkor rendelkezik a rendszer, ha $\dot{q}_i = 0$ minden $i = 1, 2, \ldots, s$ esetén és a potenciális energia minimális, $E \geq U(\underline{q}_0)$. A mechanikai rendszer gerjesztési energiája $E_{gerj} = E - U(\underline{q}_0) \geq 0$. Az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletek

$$\frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{2.1.5}$$

alakba írhatók. Ha a rendszer energiája minimális, $E = U(\underline{q}_0)$, akkor az egyenletek jobb oldala zérus, azaz nem hatnak erők, amiknek következtében megváltoznának az általános impulzusok, úgyhogy a ($\underline{q} = \underline{q}_0, \dot{\underline{q}} = 0$) állapot egyensúlyi állapot. Ráadásul stabil, mert ha infinitezimálisan kimozdítjuk a részecskéket egyensúlyi állapotukból, akkor a rendszer potenciális energiája nő, úgyhogy olyan erők lépnek fel, amelyek igyekeznek visszatéríteni a részecskéket az egyensúlyi állapotukba.

A továbbiakban feltesszük, hogy a mechanikai rendszer gerjesztési energiája kicsi. Vezessük be az $x_i = q_i - q_{0\ i}$ új általános koordinátákat, $\dot{x}_i = \dot{q}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$. A kicsiny gerjesztési energia miatt a rendszerben minden q_i általános koordináta csak kicsit különbözhet az egyensúlyi értékétől. Ezért jó közelítés, ha a Lagrange-függvényt Taylor-sorba fejtjük az $\underline{x} = \underline{0}$ pont körül és elhanyagoljuk a kvadratikusnál magasabb rendű tagokat,

$$L(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} m_{i,j}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} D_{i,j}x_ix_j + \mathcal{O}(x^3, x\dot{x}^2), \tag{2.1.6}$$

ahol $m_{i,j} = a_{i,j}(\underline{q}_0)$ és $D_{i,j} = U^{(2)}_{i,j}$ pozitív definit, szimmetrikus mátrixok. Az Euler-Lagrange-egyenletek ezután

$$\sum_{j=1}^{s} m_{i,j}\ddot{x}_j = -\sum_{j=1}^{s} D_{i,j}x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \tag{2.1.7}$$

alakot öltenek. Keressük a megoldást $x_j = A_je^{i\omega t}$ alakban, $(j = 1, 2, \ldots, s)$, ami az A_j együtthatókra vonatkozó

$$\sum_{j=1}^{s}(-m_{i,j}\omega^2 + D_{i,j})A_j = 0 \tag{2.1.8}$$

homogén lineáris egyenletrendszerre vezet. Ennek akkor és csak akkor létezik nem triviális megoldása, ha az egyenletrendszer $s \times s$-es mátrixának a determinánsa zérus,

$$|-m_{i,j}\omega^2 + D_{i,j}| = 0. \tag{2.1.9}$$

Ennek az egyenletnek s darab gyöke van, $\omega^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$, amelyek között előfordulhatnak azonos gyökök is. Minden $\omega^{(\alpha)}$ gyökhöz tartozik a homogén lineáris egyenletnek egy $A^{(\alpha)}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ megoldása. Az $x^{(\alpha)}_j = A^{(\alpha)}_je^{i\omega^{(\alpha)}t}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$megoldások lineárisan függetlenek és a homogén elsőrendű differenciálegyenletrendszer megoldásainak terében egy teljes rendszert alkotnak. Az általános megoldás

$$\underline{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} C^{(\alpha)}\underline{x}^{(\alpha)}(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} C^{(\alpha)}\underline{A}^{(\alpha)}e^{i\omega^{(\alpha)}t} = \sum_{\alpha=1}^{s}\underline{A}^{(\alpha)}\xi^{(\alpha)}(t) \tag{2.1.10}$$

ahol $\xi^{(\alpha)}(t) = C^{(\alpha)}e^{i\omega^{(\alpha)}t}$ az úgynevezett normálkoordináták, amelyek $\omega^{(\alpha)}$ körfrekvenciájú lineáris harmonikus oszcillátorként viselkednek. Ezeket szokás normálrezgéseknek vagy normálmódusoknak nevezni. A kisrezgéseket végző rendszer mozgása tehát előállítható normálmódusok lineáris kombinációjaként.

Meg lehet mutatni, hogy minden sajátfrekvencia valós, azaz $\omega^{(\alpha)\ 2} > 0$. Egyrészt a következő fizikai érvelés mutatja ezt. A rendszer zárt, ezért a rendszer E energiája megmaradó. Ha lenne olyan sajátfrekvencia, amelyre $\omega^{(\alpha)\ 2} < 0$ lenne, akkor a megfelelő saját frekvencia imaginárius lenne, azaz a rendszer energiája exponenciálisan csökkenne vagy nőne az idő függvényében, ha éppen ilyen normálrezgés valósulna meg. Ez azonbanellentmondana az energiamegmaradás törvényének. Másrészt matematikai bizonyítás is adható. Szorozzuk meg a mozgásegyenleteket $A_i^\star$-gal és adjuk őket össze,

$$\sum_{i,j=1}^{s}(-m_{i,j}\omega^2 + D_{i,j})A_i^\star A_j = 0. \tag{2.1.11}$$

Innen

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^{s} D_{i,j}A_i^\star A_j}{\sum_{i,j=1}^{s} m_{i,j}A_i^\star A_j} \tag{2.1.12}$$

adódik. Ha $b_{i,j} = b_{j,i}$ valós elemű szimmetrikus mátrix, akkor

$$[\sum_{i,j=1}^{s} b_{i,j}A_i^\star A_j]^\star = \sum_{i,j=1}^{s} b_{i,j}A_i A_j^\star = \sum_{i,j=1}^{s} b_{j,i}A_j A_i^\star, \tag{2.1.13}$$

ami azt jelenti, hogy $\sum_{i,j=1}^{s} b_{i,j}A_i^\star A_j$ valós. Továbbá írhatjuk, hogy $A_j = a_j + ib_j$, ahol a_j és b_j valósak, ekkor

$$\sum_{j,k=1}^{s} b_{j,k}A_j^\star A_k \;=\; \sum_{j,k=1}^{s} b_{j,k}(a_j - ib_j)(a_k + ib_k) = \sum_{j,k=1}^{s} b_{j,k}a_j a_k + \sum_{j,k=1}^{s} b_{j,k}b_j b_k. \tag{2.1.14}$$

De ha $b_{j,k}$ pozitív definit, akkor a jobb oldalon mindkét összeg pozitív. Mindez azt jelenti, hogy ω^2 kifejezésében a számlálóban és a nevezőben szereplő kvadratikus alak egyaránt valós és pozitív értékű, azaz ω^2 is valós és pozitív, akármelyik megoldást írjuk is az A_j-k helyébe.

Be lehet továbbá bizonyítani, hogy normálkoordinátákkal kifejezve a kinetikus energia és a potenciális energia kvadratikus alakjai egyszerre öltenek diagonális alakot:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\mu_\alpha \dot{\xi}^{(\alpha)\ 2}, \quad U = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s} D_\alpha \xi^{(\alpha)\ 2}, \\
L &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}(\mu_\alpha \dot{\xi}^{(\alpha)\ 2} - D_\alpha \xi^{(\alpha)\ 2}), \\
E &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}(\mu_\alpha \dot{\xi}^{(\alpha)\ 2} + D_\alpha \xi^{(\alpha)\ 2}) = \sum_{\alpha=1}^{s} E^{(\alpha)},
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

ahol μ_α és D_α valós pozitív értékűek,

$$D_\alpha = \mu_\alpha \omega^{(\alpha)\ 2}. \tag{2.1.16}$$

Fontos azt megfigyelni, hogy a kisrezgéseket végző mechanikai rendszer teljes energiája az egyes normálmódusok energiáinak összege. A rendszer normálmódusai úgy tekinthetők, mint egymással kölcsön nem ható lineáris harmonikus oszcillátorok. Ez a Lagrange-függvény alakjából is következik, hiszen a normálkoordinátákban felírt Euler-Lagrange-egyenletekben teljesen szétcsatolódnak az egyes szabadsági fokok:

$$\mu_\alpha \ddot{x}_\alpha = -D_\alpha x_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.1.17}$$

Megjegyezzük, hogy a fentiekben eltekintettünk attól az esettől, ha vannak elfajult normálfrekvenciák. Ha valamelyik normálfrekvencia r-szeres gyök, akkor a megfelelő megoldások r-dimenziós alteret alkotnak a homogén lineáris egyenletrendszer össze megoldásainak terében. Ebben az altérben ekkor önkényesen választhatunk egymásra páronként ortogonális, r darab lineárisan független A_j megoldást.

2.2 Deformálható test kinematikája

2.2.1 Infinitezimális elmozdulás leírása

Amíg az előző fejezetben megmutattuk, hogyan lehet a deformálható testet diszkrét anyagi pontok rendszereként modellezni, addig a továbbiakban a deformálható testet folytonos tömegeloszlásúnak fogjuk tekinteni. A deformálható testek mozgását is, mint általában minden mozgást, infinitezimális elmozdulások egymásutánjaként tudjuk leírni. Először azzal foglalkozunk, hogyan lehet leírni kinematikailag a deformálható test infinitezimális deformációját.

Vegyünk fel egy globális K vonatkoztatási rendszert, a laboratóriumi rendszert. Gondolatban daraboljuk a testet úgynevezett testelemekre, mondjuk N darab testelemre. Testelemeken a test kicsiny Δm_a $(a = 0, 1, \dots, N-1)$ tömegű, ΔV_atérfogatú darabkáit értjük, amelyek bármelyikének tömege sokkal kisebb a test össztömegénél, lineáris méretei is kicsinyek a deformálható test lineáris méreteihez képest, amelyek azonban makroszkopikus számú atomból állnak. Formálisan a folytonos közeg határesetét a feldarabolás finomításával ($N \to \infty$, $\Delta V_a \to 0$) kapjuk feltéve, hogy a tömegsűrűség közben a test minden pontjában állandó marad, vagyis úgy húzzuk össze gondolatban a testelem térfogatát annak tetszőleges belső P pontjára, hogy

$$\lim_{\Delta V_a \to P} \frac{\Delta m_a}{\Delta V_a} = \rho(P) \tag{2.2.1}$$

véges legyen. A test deformációját ebben a K laboratóriumi rendszerben az $\vec{s}(\vec{r})$ elmozdulás-vektormezővel írjuk le. Ez definíció szerint azon testelem elmozdulásvektora, amelyik eredetileg az $\vec{r}$ helyzetvektorú P pontban volt. Megjegyezzük, hogy ez már lehetett deformált állapot, amelyhez képesti infinitezimális további deformáció leírásával foglalkozunk most. Az eredetileg $\vec{r}$ helyen található testelem deformáció után a tér $\vec{r}+\vec{s}(\vec{r})$ helyzetvektorú P' pontjába kerül. Olyan esetekre fogunk szorítkozni, amikor $\vec{s}(\vec{r})$ a test minden pontjában infinitezimálisan kicsi az egész mozgás során. A részecske elmozdulásvektora tulajdonképpen a részecskével helyettesített anyagdarabkát alkotó egyes atomok elmozdulásvektorainak valamilyen átlagaként, pl. TKP-jának (tömeggel súlyozott átlag) elmozdulásaként értelmezhető egy atomisztikus anyagmodellben.

A deformációt akkor tekinthetjük kicsinynek, ha a test szomszédos pontjai közel azonos módon mozdulnak el. Ezért a kicsiny deformációkat célszerű úgy leírni, hogy a test egymáshoz közeli anyagdarabkáinak, azaz részecskéinek elmozdulását hasonlítjuk össze. Vegyünk fel ezért gondolatban a K laborrendszerhez rögzített lokális koordinátarendszereket, amelyek O_P origóit rendre a deformálatlan test egyes P pontjaiban választjuk. Az egyszerűség kedvéért válasszuk a koordinátatengelyeket párhuzamosnak és egyirányúnak a globális K vonatkoztatási rendszerben választott koordinátarendszer megfelelő tengelyeivel. Vegyük az egyik ilyen lokális koordinátarendszert, mondjuk azt a K_P lokális koordinátarendszertt, amelynek origója a deformálatlan test P pontjában van. Nézzük ebből a koordinátarendszerből, mi történik deformáció során a deformálatlan test P és ahhoz infinitezimálisan közeli tetszőleges Q pontjával. Jelölje $\delta\vec{r}$ a lokális K_P koordinátarendszerben a Q pont helyzetvektorát. A test eredetileg P pontban tartózkodó részecskéjének elmozdulása $\vec{s}(\vec{r})$, a tetszőleges, infinitezimálisan közeli Q-ban tartózkodó részecske elmozdulása pedig $\vec{s}(\vec{r}+\delta\vec{r})$. Ha a P pont tetszőlegesen kicsiny környezetére szorítkozunk, akkor az $\vec{s}(\vec{r}+\delta\vec{r})$ mező $\vec{r}$ körüli sorfejtésében, azaz a lokális K_P vonatkoztatási rendszer origója körüli sorfejtésében jó közelítéssel megállhatunk az elsőrendű tagoknál:

$$\vec{s}(\vec{r}+\delta\vec{s}) = \vec{s}(\vec{r}) + \frac{\partial\vec{s}(\vec{r})}{\partial x_j}\delta x_j + \mathcal{O}(\delta x_j \delta x_i). \tag{2.2.2}$$

Ilyenkor lineáris deformációról beszélünk. A kicsiny deformáció azt jelenti, hogy a $\partial s_i/\partial x_j$ parciális deriváltak olyan kicsinyek, hogy a belőlük alkotott kvadratikus kifejezések elhanyagolhatóak. A Descartes-komponensekben a sorfejtés

$$s_i(\vec{r}+\delta\vec{r}) = s_i(\vec{r}) + \frac{\partial s_i(\vec{r})}{\partial x_j}\delta x_j + \ldots \tag{2.2.3}$$

alakot ölt.

Vizsgáljuk meg a sorfejtés elsőrendű tagját matematikai szempontból. Az $A_{i,j} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j}$ komponensekkel értelmezett mennyiség másodrendű tenzor a háromdimenziós tér forgatásai tekintetében. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Az egyenlet bal oldalán vektor áll, és az $A_{i,j}$ komponensek mátrixa is egy vektorra hat. Az $A_{i,j}$ komponensekkel értelmezett A mennyiség tehát matematikailag olyan leképezés, amely a 3-dimenziós tér vektorait a 3-dimenziós tér vektoraiba képezi le:

$$A: \quad \underline{v} \in V \mapsto \underline{w} \in V, \quad w_i = A_{i,j} v_j, \tag{2.2.4}$$

ami egyúttal azt is jelenti, hogy a $\underline{w}^T \cdot \underline{v}$ skalárszorzat révén A olyan leképezést valósít meg, amely a $V \times V$ vektortéren van értelmezve, amelynek az eredménye valós szám, és amely mindkét vektorváltozójában lineáris:

$$A: \quad (\underline{v}, \underline{w}) \in V \times V \mapsto A_{i,j} w_i v_j \in R. \tag{2.2.5}$$

Az ilyen A leképezést másodrendű tenzornak nevezzük.

Másodrendű tenzorra már láttunk példát a mechanikában, a merevtestek tehetetlenségi tenzorát. Korábban már azt is megbeszéltük, hogy a másodrendű tenzor komponenseinek mátrixa koordinátatranszformációk során meghatározott módon transzformálódik. Ha a koordinátarendszer elforgatásának mátrixa $O_{i,j} = \vec{E}'_{(i)} \cdot \vec{E}_{(j)}$, azaz az $\vec{E}_{(i)}$ ortonormált bázisról elforgatással áttérünk az $\vec{E}'_{(i)} = O_{i,j}\vec{E}_{(j)}$ ortonormált bázisra ($O_{i,j}$ egységnyi determinánsú ortogonális mátrix), akkor az $A_{i,j}$ tenzorkomponensek transzformációja

$$A'_{i,j} = O_{i,k} A_{k,l} (O^{-1})_{l,j} = O_{i,k} O_{j,l} A_{k,l}. \tag{2.2.6}$$

A transzformáció során a tenzor spurja és determinánsa invariáns marad:

$$\text{Sp } A = A_{i,i} = A'_{i,i}, \qquad \text{Det } A = \text{ Det } A_{i,j} = \text{ Det } A'_{i,j}. \tag{2.2.7}$$

A továbbiakban fontos lesz számunkra, hogy tetszőleges másodrendű tenzor egyértelműen felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus másodrendű tenzor összegére:

$$A_{i,j} = A^{\mathrm{s}}_{i,j} + A^{\mathrm{a}}_{i,j}, \qquad A^{\mathrm{s}}_{i,j} = \frac{1}{2}(A_{i,j} + A_{j,i}), \;\; A^{\mathrm{a}}_{i,j} = \frac{1}{2}(A_{i,j} - A_{j,i}), \tag{2.2.8}$$

ahol $A^{\mathrm{s}}_{i,j} = A^{\mathrm{s}}_{j,i}$, $A^{\mathrm{a}}_{i,j} = -A^{\mathrm{a}}_{j,i}$. A szimmetrikus részt fel lehet írni egyértelműen az egységtenzor számszorosának és egy zérus spúrú tenzornak az összegeként:

$$A^{\mathrm{s}}_{i,j} = \frac{1}{3}\delta_{i,j}A_{k,k} + \Big(A_{i,j} - \frac{1}{3}\delta_{i,j}A_{k,k}\Big). \tag{2.2.9}$$

Az antiszimmetrikus rész 3 független eleme egy axiálvektor 3 Descartes-komponensét értelmezi,

$$a_x = -A^{\mathrm{a}}_{2,3}, \;\; a_y = A^{\mathrm{a}}_{1,3}, \;\; a_z = -A^{\mathrm{a}}_{1,2}, \tag{2.2.10}$$

amelyeket

$$a_i = \frac{1}{2}\epsilon_{i,j,k}A^{\mathrm{a}}_{j,k} = \frac{1}{2}\epsilon_{i,j,k}A_{j,k} \tag{2.2.11}$$

alakban is írhatjuk az $\epsilon_{i,j,k}$ teljesen antiszimmetrikus harmadrendű tenzor segítségével.

Alkalmazzuk a fentieket az $A_{i,j} = \partial s_i/\partial x_j$ tenzorra. Értelmezzük először a deformációs tenzort, mint

$$\epsilon_{i,j} = A^{\mathrm{s}}_{i,j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\Big), \tag{2.2.12}$$

továbbá az

$$\varphi_i = \frac{1}{2}\epsilon_{i,j,k}A^{\mathrm{a}}_{j,k} = \frac{1}{2}\epsilon_{i,j,k}\frac{\partial s_k}{\partial x_j}, \qquad \vec{\varphi} = \frac{1}{2}\text{ rot } \vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{s} \tag{2.2.13}$$

vektort. Ekkor az elmozdulás vektormező az egyes lokális koordinátarendszerek origóinak infinitezimális környezetében a lineáris tagokkal bezárólag

$$s_i(\vec{r} + \delta\vec{r}) = s_i(\vec{r}) + \epsilon_{i,j}(\vec{r})\delta x_j + \epsilon_{i,j,k}\varphi_j(\vec{r})\delta x_k + \ldots \tag{2.2.14}$$

alakkal közelíthető. Innen közvetlenül leolvasható az egyes tagok fizikai jelentése. Nyilvánvalóan az első tag a test vizsgált darabjának (P pontja infinitezimális környezetének) merevtestszerű transzlációját írja le. A harmadik tag vektoralakban $\vec{\varphi} \times \delta\vec{r}$, ez az anyagdarabnak a $\vec{\varphi}/\varphi$ irány körüli, φ szögű, merevtestszerű infinitezimális szögelfordulását írja le. Így tulajdonképpen a második tag az, ami az anyagdarab alakjának megváltozását, nem merevtestszerű mozgását, azaz deformációját írja le. Ezért nevezzük $\epsilon_{i,j}$-t deformációs tenzornak, a $\vec{\varphi}$ szöget pedig az infinitezimális szögelfordulás vektorának. A deformációs tenzor és a szögelfordulás vektora a rugalmasan deformált test mentén a K globális vonatkoztatási rendszerben értelmezett tenzor-, ill. vektormező, amelyek, mint láttuk, az elmozdulásvektormező helykoordináták szerinti elsőrendű parciális deriváltjaiból vannak megalkotva. A deformációs tenzor és az elfordulási szög a deformálható test lokális jellemzői, lokálisan, a test tetszőleges pontjának kicsiny környezetében vannak értelmezve. A merevtestek fizikájában megismert tehetetlenségi tenzor ezzel szemben a merevtest globális jellemzője, a merevtest egészére vonatkozik.

2.2.2 Deformációs tenzor

Ebben a fejezetben vizsgáljuk meg a deformációs tenzor komponenseinek jelentését. Abból indulunk ki, hogy a definícióból következően

$$\Delta x_i \mapsto \Delta x_i' = \Delta x_i + \epsilon_{i,j}\Delta x_j \tag{2.2.15}$$

leképezés írja le, hogy tiszta deformáció esetén (ha nincs transzláció és elfordulás) hogyan változik meg a test két szomszédos $\Delta\vec{r}$ relatív helyzetvektorú pontjának helyzete, amikoris a deformáció következtében ugyanezen két pont relatív helyzetvektora $\Delta\vec{r}\,'$ lesz. Ha elhanyagoljuk a transzlációt ($P_0 = P_0' = O$)és a forgást, akkor korábbi jelöléseinkkel összhangban $\Delta\vec{r} = \vec{P_0P}$, $\Delta\vec{r}\,' = \vec{P_0P'}$, $\vec{s}(\vec{0}) = \vec{0}$, $\vec{s}(\vec{r}) = \vec{PP'}$.

1. Legyen $\Delta\vec{r} = b\vec{E}_{(i)}$, akkor

$$\Delta x_i' = b + \epsilon_{i,i}b, \qquad \epsilon_{i,i} = \frac{\Delta x_i' - b}{b}, \tag{2.2.16}$$

   ahol $\epsilon_{i,i}$ az $\vec{E}_{(i)}$ irányú előjeles relatív megnyúlás (itt az i index jellegzetes index, nincsen rá összegzés), ha pozitív, akkor relatív megnyúlás, ha negatív, akkor relatív összehúzódás. Ugyanakkor

$$\Delta x_{j\neq i} = \epsilon_{j,i}b, \tag{2.2.17}$$

   ami azt jelenti, hogy a test (i,j) síkjára rajzolt négyzet rombusszá deformálódik, amelynek megfelelő oldalai

$$\varphi_{j,i} \approx \ \mathrm{tg}\ \varphi_{j,i} \approx \frac{\epsilon_{j,i}b}{b + \epsilon_{i,i}b} \approx \epsilon_{j,i}, \tag{2.2.18}$$

   ill. $\varphi_{i,j} = \epsilon_{i,j} = \epsilon_{j,i}$ szöget zárnak be egymással. A $\varphi_{i,j}$ szögeket nyírási szögeknek nevezzük.

2. A deformációs tenzor spúrja a test ΔV térfogatú kicsiny darabjának relatív térfogatváltozásával egyenlő. A tiszta deformáció hatására a ΔV térfogat $\Delta V'$-re változik,

$$\Delta V \mapsto \Delta V' = \prod_{i=1}^{3}\Delta x_i' = \prod_{i=1}^{3}\Delta x_i(1+\epsilon_{i,i}) = \Delta V + \Delta V\epsilon_{k,k} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{2.2.19}$$

úgyhogy a relatív térfogatváltozás

$$\Theta \equiv \frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = \epsilon_{k,k} = \text{ Sp } \epsilon. \tag{2.2.20}$$

A deformációs tenzor

$$\epsilon_{i,j} = \left(\epsilon_{i,j} - \frac{\Theta}{3}\delta_{i,j}\right) + \frac{\Theta}{3}\delta_{i,j} \tag{2.2.21}$$

alakjából kiolvashatjuk néhány speciális alakú deformációs tenzor fizikai jelentését.

1. Ha $\epsilon_{i,j} = C\delta_{i,j}$, ahol C =áll., akkor az egyenletes összenyomás (megnyúlás) esetével állunk szemben. Valóban, ekkor a deformációs tenzornak csak a diagonális komponensei nem zérusok, ezek egymással egyenlők és $\Theta = 3C$, ami $C < 0$ ($C > 0$) esetén minden irányban azonos mértékű relatív összenyomást (megnyúlást) jelent.
2. Ha $\Theta = 0$, akkor relatív térfogatváltozás nélküli deformációról, úgynevezett tiszta nyírásról beszélünk.

A deformációs tenzor fenti alakja tehát azt jelenti, hogy tetszőleges infinitezimális tiszta alakváltozás egy tiszta nyírás és egy egyenletes összenyomás együtteseként értelmezhető.

2.2.3 Feszültségi tenzor

Vizsgáljuk meg, hogy a deformálható test kicsiny, makroszkopikus térfogatdarabjára milyen erők hatnak. Ebben a fejezetben a szomszédos anyagdarabok által a kiszemelt anyagdarab felületére ható erőket fogjuk vizsgálni. Legyen a kiszemelt (egyszeresen összefüggő) anyagdarab térfogata ΔV, kifelé mutató felületi normálisa $\vec{n}$. Jelölje $\vec{P}_{\vec{n}}df$ az $\vec{n}$ külső normálisú df felületelemre a szomszédos anyagdarab által kifejtett felületi erőt. Ez fizikailag a szomszédos (vagy egymáshoz közeli) atomok közötti rövidhatótávolságú erők következtében lép fel. Ha az atomok egyensúlyi helyzetükben vannak, azaz a test deformálatlan állapotban van, akkor minden atom potenciális energia minimumban ül, azaz akkor ezek az erők zérusok. Alakváltozás esetén azonban az atomok kimozdulnak egyensúlyi helyzetükből, és akkor rájuk erők fognak hatni. A felületi erők ekkor nem lesznek zérusok. A ΔV térfogatú anyagdarab teljes F felületére ható felületi erők eredője

$$\oint_F \vec{P}_{\vec{n}} df. \tag{2.2.22}$$

A felületi $\vec{P}_{\vec{n}}$ erő néhány tulajdonságáról könnyű meggyőződni.

1. Newton III. törvényéből következik, hogy a ΔV kiszemelt térfogatelem $\vec{n}$ külső normálisú *df* felületelemére a szomszédos anyagdarab által kifejtett erő minusz egyszerese a kiszemelt anyagdarab által a szomszédos anyagdarabra ugyanezen felületelemen kifejtett $\vec{P}_{-\vec{n}}$ erőnek, azaz

$$\vec{P}_{-\vec{n}} = -\vec{P}_{\vec{n}}. \tag{2.2.23}$$

2. Viszgáljuk meg, milyen kapcsolat van a tér egyazon P pontjában felvett, különböző irányítású felületelemekre ható felületi erők között. Ehhez vegyünk fel a tér P pontjában egy kicsiny tetraédert úgy, hogy annak egyik csúcsa a P pont legyen, ebben a csúcsban találkozó három oldallapja rendre legyen párhuzamos az (x,y), (x,z) és (y,z) síkokkal. Legyen a P csúccsal szemközti lap felülete Δf és külső normálisa $\vec{n}$. Jelölje az $\vec{n}$ egységvektor iránykoszinuszait $\vec{n} = (\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z)$. A kicsiny tetraéder oldallapjaira ható felületi erők eredője

$$\vec{P}_{\vec{n}}\Delta f + \vec{P}_{-\vec{E}_{(1)}}\Delta f_x + \vec{P}_{-\vec{E}_{(2)}}\Delta f_y + \vec{P}_{-\vec{E}_{(3)}}\Delta f_z, \tag{2.2.24}$$

ahol Δf_i a P csúccsal szemközti oldallap (j,k) síkra $(j,k \neq i)$ vett merőleges vetületének a területe, $\Delta f_i = \Delta f \cos\alpha_i$ $(i = 1,2,3)$. Ha csak felületi erők hatnak, akkor a tetraéderrel határolt anyagdarab mozgásegyenlete (Newton II. törvénye értelmében)

$$\begin{aligned} \rho\Delta V\vec{a} &= (\vec{P}_{\vec{n}} + \vec{P}_{-\vec{E}_{(1)}}\cos\alpha_x + \vec{P}_{-\vec{E}_{(2)}}\cos\alpha_y + \vec{P}_{-\vec{E}_{(3)}}\cos\alpha_z)\Delta f \\ &= (\vec{P}_{\vec{n}} - \sum_{i=1}^{3}\vec{P}_{\vec{E}_{(i)}}\cos\alpha_i)\Delta f, \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

ahonnan

$$\rho\frac{\Delta V}{\Delta f}\vec{a} = (\vec{P}_{\vec{n}} - \sum_{j=1}^{3}\vec{P}_{\vec{E}_{(j)}}\cos\alpha_j). \tag{2.2.26}$$

A jobb oldal nem függ a tetraéder méretétől, vagyis akkor a bal oldal sem függhet tőle. Másrészt a bal oldal zérushoz tart, ha a tetraédert gondolatban összehúzzuk a P pontra, hiszen a TKP $\vec{a}$ gyorsulásának eközben végesnek kell maradnia és $\Delta V/\Delta f \to 0$. Ez azt jelenti, hogy a jobb oldal zérus. Ha viszont a tetraédert összehúztuk a P pontra, akkor a jobb oldal eltűnése

$$(\vec{P}_{\vec{n}})_i = \sigma_{i,j}n_j \tag{2.2.27}$$

alakot ölt, ahol $\sigma_{i,j} = \vec{E}_{(i)}\cdot\vec{P}_{\vec{E}_{(j)}}$ az $\vec{E}_{(j)}$ normálisú felületre, a normális oldaláról ható felületi erőnek az $\vec{E}_{(i)}$ irányú komponense. Egyúttal az is igaz, hogy a tetszőleges $\vec{n}$ normálisú egységfelületre ható erőnek a tetszőleges $\vec{n}'$ irányú komponense

$$\vec{n}'\cdot\vec{P}_{\vec{n}} = n'_i\sigma_{i,j}n_j. \tag{2.2.28}$$

A bal oldalon álló kifejezés két vektor skaláris szorzata, amelynek az értéke nem függ attól, hogy hogyan bontjuk a vektorokat Descartes-komponensekre, de akkor a jobb oldalon álló kifejezés is skalár a koordinátarendszer elforgatásaival szemben. Ez úgy és csak úgy lehetséges, ha $\sigma_{i,j}$ egy másodrendű tenzor Descartes-komponensei. Az így értelmezett $\sigma_{i,j}$ tenzort (mechanikai) feszültségi tenzornak nevezzük. Később be fogjuk látni, hogy a feszültségi tenzor szimmetrikus, $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$.

A testben ébredő feszültség általában helyről helyre más, a $\sigma_{i,j}(\vec{r})$ feszülségmezővel jellemezhetjük. A feszültség eltűnik ott, abban a pontban (v. azokban a pontokban), amelyben (amelyekben) a test lokálisan nem szenved alakváltozást.

A fejezet végén még arról kell szót ejtsünk, hogy a deformálható test külső, a test részecskéinek tömegével arányos térfogati erőknek, mint például a nehézségi erő, is alá lehet vetve. Ezeket az egységnyi tömegre ható erővel, az úgynevezett $\vec{f}(\vec{r})$ erősűrűséggel szokás jellemezni. A $\Delta m = \rho\Delta V$ tömegű kicsiny anyagdarabkára ható tömegerő nagysága, $\Delta m\vec{f}(\vec{r}) = \rho\Delta V\vec{f}(\vec{r})$. A tömeg megmaradó mennyiség, ezért az anyagdarabkákat tömegük alapján jelöljük ki. Adott tömegű anyagdarabka alakja, térfogata változhat a deformáció következtében, de a tömege nem változik. A sűrűséget homogénnek feltételeztük, vagyis helytől függetlennek. Ezzel azt akartuk jelezni, hogy csak olyan közegek deformációjával fogunk foglalkozni, amelyek deformálatlan egyensúlyi állapotban állandó tömegsűrűségűek.

2.3 Deformálható test dinamikája

2.3.1 Deformálható közeg mozgásegyenlete. Az impulzus-tétel.

A deformálható közeg mozgásegyenletéhez legegyszerűbben úgy jutunk, ha Newton II. törvényét alkalmazzuk egy kicsiny, de makroszkopikus méretű, adott $\Delta m = \rho\Delta V$ infinitezimális tömegű anyagdarabkára. Legyen ennek pályája $\vec{r}(t)$. Ekkor a mozgásegyenlet

$$\rho\Delta V\vec{a}(t) = \rho\Delta V\vec{f}(\vec{r}(t)) + \oint_{\partial\Delta V}\vec{P}_{\vec{n}}df\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t)}, \tag{2.3.29}$$

ahol $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{s}(\vec{r}(t),t)}{dt^2}$ az anyagdarabka gyorsulása. Húzzuk össze a $\rho\Delta V$ tömegű anyagdarabot az $\vec{r}(t)$ helyzetvektorú pontba. Az $\vec{r}(t)$ pontban az anyagdarabka pillanatnyi gyorsulására az

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{s}(\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{f}(\vec{r}(t)) + \lim_{\Delta V\to P}\frac{1}{\Delta V}\oint\vec{P}_{\vec{n}}df\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t)} \tag{2.3.30}$$

egyenlet adódik. Ez Newton II. törvénye, az $\vec{r}(t)$ helyen található infinitezimális anyagdarab mozgásegyenlete. Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát rendre a K laborrendszerben rögzített $\vec{E}_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ egységvektorokkal skalárisan, ekkor az alábbi egyenletekre jutunk:

$$\rho\frac{d^2s_i(\vec{r}(t))}{dt^2} = \rho f_i(\vec{r}(t)) + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{i,j}(\vec{r},t)}{\partial x_j}\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t)}. \tag{2.3.31}$$

Vizsgáljuk meg, mit is jelent az egyenlet bal oldalán az idő szerinti második derivált. Jelölje $\vec{v}(\vec{r},t)$ a geometriai tér $\vec{r}$ helyzetvektorú pontjában az éppen ott tartózkodó részecske sebességét a t időpillanatban, ez az úgynevezett sebességmező, amivel a részecskék mozgása jellemezhető. Ez azonban nem azonos egy kiszemelt anyagdarabka $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ sebességével, ahol $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{s}(\vec{r}(t),t)$ a kiszemelt anyagdarabka pályája. Egy kiszemelt anyagdarabka sebességének időfüggését úgy kaphatjuk, hogy a sebességmező argumentumába behelyettesítjük a kiszemelt anyagdarabka pályáját, mint az idő függvényét, $\vec{v}(\vec{r}(t),t)$. Newton II. törvényének bal oldalán egy kiszemelt anyagdarabka gyorsulása áll, azaz

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(\vec{r}(t),t)}{dt} = \left[\frac{\partial\vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t} + (\vec{v}(\vec{r},t)\cdot\vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r},t)\right]_{\vec{r}=\vec{r}(t)}. \tag{2.3.32}$$

Ha ezt visszaírjuk a mozgásegyenlet bal oldalába, akkor nem marad olyan kifejezés az egyenletben, amelyben az $\vec{r}(t)$ pályát kellene idő szerint deriválni. Ezért megtehetjük, hogy az egyenlet mindkét oldalán $\vec{r}(t)$-t átjelöljük a $\vec{r}$ független változóvá. Így a sebességmező időbeli változását leíró mozgásegyenletet kapunk:

$$\rho\frac{\partial\vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t} + \rho(\vec{v}(\vec{r},t)\cdot\vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r},t) = \rho\vec{f}(\vec{r}) + \vec{\mathrm{Div}}\underline{\underline{\sigma}}(\vec{r},t). \tag{2.3.33}$$

Itt a tenzor divergenciájára az utolsó tagban bevezetett jelölés a

$$[\vec{\mathrm{Div}}\underline{\underline{\sigma}}]_i = \frac{\partial \sigma_{i,j}(\vec{r},t)}{\partial x_j} \tag{2.3.34}$$

Descartes-komponensekkel rendelkező vektort jelöli. A kicsiny deformációk esetén fel szokás tételezni, hogy a deformáció lassú, úgyhogy a mozgásegyenlet bal oldalán szereplő, a sebességmezőben kvadratikus $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ tag elhanyagolhatóan kicsiny, azaz hogy jó közelítéssel

$$\vec{a} \approx \frac{\partial \vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t}, \tag{2.3.35}$$

ill. hogy

$$\frac{d\vec{s}(\vec{r}(t),t)}{dt} \approx \left.\frac{\partial \vec{s}(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{\vec{r}=\vec{r}(t)}. \tag{2.3.36}$$

A mozgásegyenlet így a

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{s}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial \vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t} = \rho \vec{f}(\vec{r}) + \vec{\mathrm{Div}}\underline{\underline{\sigma}}(\vec{r},t) \tag{2.3.37}$$

alakot ölti.

2.3.2 Impulzusmomentum-tétel

Az impulzusmomentum-tételt alkalmazzuk a merevtest infinitezimális, $\Delta m = \rho \Delta V$ tömegű darabkájára. Ennek az origóra vonatkoztatott pályaimpulzusmomentuma $\vec{r}(t) \times \rho \Delta V \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$, ahol $\vec{r}(t)$ az anyagdarabka pályája. Mivel Δm állandó tömegű darabka mozgását vizsgáljuk, azért

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \times \rho \Delta V \frac{d\vec{r}(t)}{dt}) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times \rho \Delta V \frac{d\vec{r}(t)}{dt} + \vec{r}(t) \times \rho \Delta V \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{r}(t) \times \rho \Delta V \vec{a}(t). \tag{2.3.38}$$

Ezt és a mozgásegyenlet (2.3.29) alakját felhasználva, az impulzusmomentum-tétel az alábbi alakot ölti,

$$\vec{r}(t) \times \rho \vec{a}(t) = \vec{r}(t) \times \rho \vec{f}(\vec{r}(t)) + \lim_{\Delta V \to P} \frac{1}{\Delta V} \left.\oint \vec{r} \times \vec{P}_{\vec{n}} df\right|_{\vec{r}=\vec{r}(t)}, \tag{2.3.39}$$

ha összehúzzuk a ΔV térfogatot a részecske pályájának $\vec{r}(t)$ helyzetvektorú P pontjára. A jobb oldal első, ill. második tagja rendre a tömegerők és a felületi erők forgatónyomatékát jelenti. Felhasználva a feszültségi tenzor definícióját,

$$(\vec{r} \times \vec{P}_{\vec{n}})_i = \epsilon_{i,j,k} x_j \sigma_{k,l}(\vec{r},t) n_l, \tag{2.3.40}$$

a felületi erők forgatónyomatékának $\vec{E}_{(i)}$ irányú komponensére az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta V\to P}\frac{1}{\Delta V}\oint_F(\vec{r}\times\vec{P}_{\vec{n}})_i df\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t)} &= \epsilon_{i,j,k}\lim_{\Delta V\to P}\frac{1}{\Delta V}\oint_F x_j\sigma_{k,l}(\vec{r},t)n_l df\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t)}\\
&= \epsilon_{i,j,k}\lim_{\Delta V\to P}\frac{1}{\Delta V}\oint_F \vec{U}_{(j,k)}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}df\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t)}\\
&= \epsilon_{i,j,k}\vec{\nabla}\cdot\vec{U}_{(j,k)}(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t)}\\
&= \epsilon_{i,j,k}\frac{\partial U_{(j,k)l}(\vec{r},t)}{\partial x_l}\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t)}\\
&= \epsilon_{i,j,k}\frac{\partial[x_j\sigma_{k,l}(\vec{r},t)]}{\partial x_l}\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t)},
\end{aligned}\tag{2.3.41}$$

ahol közbülső lépésben bevezettük az $\vec{U}_{(j,k)}(\vec{r},t)$ vektormezőket (a (j,k) indexpár a vektormezőket indexeli), amelyeknek Descartes-komponensei $U_{(j,k),l}(\vec{r},t)=x_j\sigma_{k,l}(\vec{r},t)$ (az l index a vektormezők komponenseit jelöli). Menetközben felhasználtuk a vektormező divergenciájának definícióját. A felületi erők forgatónyomatékának Descartes-komponenseit tovább alakíthatjuk,

$$\epsilon_{i,j,k}\frac{\partial(x_j\sigma_{k,l})}{\partial x_l}=\epsilon_{i,j,k}\Big(\sigma_{k,j}+x_j\frac{\partial\sigma_{k,l}}{\partial x_l}\Big)\tag{2.3.42}$$

Írjuk ezt be az impulzusmomentum-tétel Descartes-komponensekben felírt alakjába:

$$\epsilon_{i,j,k}x_j(t)\rho a_k(t) \quad = \quad \epsilon_{i,j,k}x_j(t)\rho f_k(\vec{r}(t))+\epsilon_{i,j,k}\sigma_{k,j}(\vec{r}(t),t)+\epsilon_{i,j,k}x_j(t)\frac{\partial\sigma_{k,l}(\vec{r},t)}{\partial x_l}\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t)}.\tag{2.3.43}$$

Rendezzük a tagokat,

$$\epsilon_{i,j,k}x_j(t)\Big(\rho a_k(t)-\rho f_k(\vec{r}(t))-\frac{\partial\sigma_{k,l}(\vec{r},t)}{\partial x_l}\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t)}\Big) \quad = \quad \epsilon_{i,j,k}\sigma_{k,j}(\vec{r}(t),t),\tag{2.3.44}$$

és felismerjük, hogy a bal oldalon a kerekzárójelben szereplő kifejezés az (2.3.29) impulzustétel, azaz Newton II. törvénye értelmében zérus. Mivel az egyenletnek azonosságként fenn kell állnia minden részecskére, minden időpillanatban, azért a tér tetszőleges $\vec{r}$ helyén és tetszőleges t időpillanatban

$$\epsilon_{i,j,k}\sigma_{k,j}(\vec{r},t)=0\tag{2.3.45}$$

egyenlőségnek kell fennállnia. Innen az következik, hogy a feszültségi tenzormezőnek szimmetrikusnak kell lennie:

$$\sigma_{j,k}(\vec{r},t)=\sigma_{k,j}(\vec{r},t).\tag{2.3.46}$$

2.3.3 Anyagegyenletek szükségességéről

Vizsgáljuk először a deformálható test egyensúlya feladatának megoldhatóságát. Lineárisan deformálható test egyensúlyának feltétele, hogy a testrészecskék gyorsulása azonosan zérus legyen,

$$\frac{d^2\vec{s}(\vec{r}(t),t)}{dt^2} = 0, \tag{2.3.47}$$

ami a mozgásegyenlet alapján azt jelenti, hogy a tömegerők és a felületi erők egymással egyensúlyt tartanak:

$$\rho\vec{f}(\vec{r}) + \ \vec{\mathrm{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}}(\vec{r},t) = 0. \tag{2.3.48}$$

A feszültségi tenzort 6, az erősűrűséget 3 független adat határozza meg. Ezért matematikailag az egyensúly feltétele megengedi, hogy ha ismertek a feszültségek, akkor meghatározhatók a tömegerők,

$$\vec{f} = -\frac{1}{\rho}\ \vec{\mathrm{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}}. \tag{2.3.49}$$

Ugyanakkor fordítva nem lehetséges az erősűrűség ismeretében az egyenletből közvetlenül meghatározni a feszültségeket. Ehhez további, úgynevezett anyagegyenletekre van szükség, amelyek meghatározzák a mechanikai feszültségek és a deformációs tenzor kapcsolatát. Ezzel ugyanis a feszültségi tenzor 6 komponense visszavezethető egy 3 független komponensű vektormező, a test részecskéinek a deformáció miatti elmozdulását leíró $\vec{s}(\vec{r},t)$ vektormező helykoordináták szerinti parciális deriváltjaira. Így a $\vec{s}(\vec{r},t)$ vektormező 3 komponensének meghatározására az egyensúly feltétele 3 darab csatolt parciális differenciálegyenletet fog jelenteni.

Nem nehéz belátni, hogy az anyagegyenletek ismeretében, adott tömegerők esetén a mozgásegyenlet a $\vec{s}(\vec{r},t)$ vektormező időbeli és térbeli változására vonatkozó, mind a térváltozók, mind az időváltozó tekintetében másodrendű parciális differenciálegyenlet lesz. Tekintve, hogy csak infinitezimális deformációkkal foglalkozunk, a sűrűség deformáció miatti megváltozását elhanyagoljuk és ugyancsak elhanyagoljuk a gyorsulásban a $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$ nem lineáris tagot. Így a mozgásegyenlet lineáris parciális differenciálegyenlet a $\vec{s}(\vec{r},t)$ vektormezőre vonatkozóan.

2.4 Rugalmasan deformált közeg

2.4.1 Anyagegyenletek rugalmasan deformálható közegben. Hooke-törvény

Az anyagegyenletekben azt fogjuk feltételezni, hogy a feszültségi tenzor és a deformációs tenzor közötti kapcsolat lokális és, hogy a deformálható test nem rendelkezik ,,emlékzettel", vagyis a feszültségi tenzor adott helyen és időpillanatban csak az ott és akkor uralkodó deformációtól függ. A valóságos testek esetében ez a feltevés általában addig érvényes, amíg a deformáció mértéke nem halad meg egy bizonyos határt, a tökéletesen rugalmas viselkedés határát. Azt a deformálható testet, amelyre a lokalitás és az ,,emlékzet-nélküliség" jellemző, tökéletesen rugalmas testnek nevezzük. Miután továbbra is csak infinitezimális deformációkkal kívánunk foglalkozni, azért a fenti feltevéssel nyugodtan élhetünk. Általánosságban azt mondhatjuk, hogy a feszültségi tenzor a deformációs tenzornak analitikus függvénye. Fejtsük ezt a függvényt gondolatban Taylor-sorba a deformációs tenzor azonosan zérus ,,értéke" körül, ami a deformálatlan állapotnak felel meg. A feszültségi tenzort úgy értelmeztük, hogy komponensei azonosan eltűnjenek, ha nincsen deformáció, ezért a Taylor-sor nulladrendű tagja zérus. Másrészt a deformáció infinitezimális kicsinysége azt jelenti, hogy a sorfejtésben elegendő elmenni a lineáris tagokig. Az infinitezimális rugalmas alakváltozás esetén tehát az anyagegyenlet legáltalánosabb alakja:

$$\sigma_{i,j} = C_{i,j,k,l}\epsilon_{k,l}, \tag{2.4.1}$$

ahol $C_{i,j,k,l}$ az úgynevezett rugalmas anyagállandókat jelöli. Az anyagállandók mátrixának mind a négy indexe 3 értéket vehet fel, így ez 3^4 együttható, azonban ezek nem mind függetlenek. Mivel a feszültségi tenzor is és a deformációs tenzor is szimmetrikusak, azért az anyagállandók mátrixa is szimmetriáknak tesz eleget,

$$C_{i,j,k,l} = C_{j,i,k,l} = C_{i,j,l,m}. \tag{2.4.2}$$

Ezért az első index pár, (i, j) és a második indexpár, (k, l) is csak $6 - 6$ független értéket vehet fel, azaz a független komponensek száma $6 \times 6 = 36$. Alább meg fogjuk mutatni a rugalmas feszültségek munkáját vizsgálva, hogy további szimmetria is fennáll az első és a második indexpár cseréjével szemben, $C_{i,j,k,l} = C_{k,l,i,j}$, ami azt jelenti, hogy a független anyagállandók száma csupán $6 \times 7/2 = 21$. Abban az esetben, ha a deformálható test anyaga szerkezetéből adódóan szintén rendelkezik szimmetriákkal, akkor a független anyagállandók szḿa még tovább csökkenhet.

2.4.2 Rugalmas feszültségek munkája

Számoljuk ki azt az elemi munkát, amit a rugalmas feszültségekből származó felületi erők végeznek egy kicsiny, $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ térfogatú téglatesten, ha infinitezimálisan megváltozik a kitérés vektormező $\vec{s}(\vec{r})$-ről $\vec{s}(\vec{r}) + d\vec{s}(\vec{r})$-re,

$$\begin{aligned}
&d'W \\
&= \Delta y \Delta z (\vec{P}_{\vec{E}_{(1)}} \cdot d\vec{s})_{x+\Delta x,y,z} + \Delta x \Delta z (\vec{P}_{\vec{E}_{(2)}} \cdot d\vec{s})_{x,y+\Delta y,z} + \Delta x \Delta y (\vec{P}_{\vec{E}_{(3)}} \cdot d\vec{s})_{x,y,z+\Delta z} \\
&\quad + \Delta y \Delta z (\vec{P}_{-\vec{E}_{(1)}} \cdot d\vec{s})_{x,y,z} + \Delta x \Delta z (\vec{P}_{-\vec{E}_{(2)}} \cdot d\vec{s})_{x,y,z} + \Delta x \Delta y (\vec{P}_{-\vec{E}_{(3)}} \cdot d\vec{s})_{x,y,z} \\
&= \Delta x \Delta y \Delta z \Big(\frac{(\vec{P}_{\vec{E}_{(1)}} \cdot d\vec{s})_{x+\Delta x,y,z} - (\vec{P}_{\vec{E}_{(1)}} \cdot d\vec{s})_{x,y,z}}{\Delta x} \\
&\quad + \frac{(\vec{P}_{\vec{E}_{(2)}} \cdot d\vec{s})_{x,y+\Delta y,z} - (\vec{P}_{\vec{E}_{(2)}} \cdot d\vec{s})_{x,y,z}}{\Delta y} + \frac{(\vec{P}_{\vec{E}_{(3)}} \cdot d\vec{s})_{x,y+\Delta y,z} - (\vec{P}_{\vec{E}_{(3)}} \cdot d\vec{s})_{x,y,z}}{\Delta z} \Big) \\
&= \Delta x \Delta y \Delta z \Big(\frac{(\sigma_{i,1} ds_i)_{x+\Delta x,y,z} - (\sigma_{i,1} ds_i)_{x,y,z}}{\Delta x} \\
&\quad + \frac{(\sigma_{i,2} ds_i)_{x,y+\Delta y,z} - (\sigma_{i,2} ds_i)_{x,y,z}}{\Delta y} + \frac{(\sigma_{i,3} ds_i)_{x,y,z+\Delta z} - (\sigma_{i,3} ds_i)_{x,y,z}}{\Delta z} \Big). \qquad (2.4.3)
\end{aligned}$$

Itt alsó indexben jelöltük a helykoordináták azon értékét, amelyeknél venni kell a $(\vec{P}_{\vec{n}} \cdot d\vec{s})$ skalárszorzatokat. Tartsunk most a téglatest lineáris méreteivel zérushoz, akkor az infinitezimális ΔV térfogatú téglatesten a rugalmas erők elemi munkája

$$d'W = \Delta V \frac{\partial(\sigma_{i,j} ds_i)}{\partial x_j}. \qquad (2.4.4)$$

A továbbiakban szorítkozzunk a rugalmas erők kvázisztatikus munkájára, amikor a deformáció olyan lassan következik be, hogy az anyagdarabkák alakváltozás miatti $\vec{a}$ gyorsulása zérusnak vehető. Ekkor tömegerők hiányában $0 = \rho a_i = \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j}$, úgyhogy a rugalmas erők kvázisztatikus munkája

$$d'_{kv.sz.}W = \Delta V \sigma_{i,j} \frac{\partial ds_i}{\partial x_j} = \Delta V \sigma_{i,j} d\frac{\partial s_i}{\partial x_j} = \Delta V \sigma_{i,j} d\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\Big)\Big] = \Delta V \sigma_{i,j} d\epsilon_{i,j}, \qquad (2.4.5)$$

ahol a harmadik egyenlőség felírásakor felhasználtuk, hogy a feszültségi tenzor szimmetrikus.

A további megfontolásainkban azt is figyelembe kell vegyük, hogy az alakváltozás nem tisztán mechanikai folyamat, hanem termodinamikai természetű. Általánosságban a rugalmas deformáció következtében változhatnak nemcsak azok az energiaállapotok, amelyeket az test egyes atomjai betölthetnek, hanem változhat annak a valószínűsége is, hogy az egyes atomi állapotok milyen valószínűséggel vannak betöltve. Ez eredményezheti a test termodinamikai jellemzőinek megváltozását a mechanikai alakváltozás során. A kvázisztatikus deformáció ebből a szempontból azt jelenti, hogy feltételezzük, hogy az alakváltozás olyan lassan megy végbe, hogy a test részecskéinek a deformáció folyamata során mindvégig ,,van ideje" felvenni a megváltozott alakhoz tartozó termodinamikai egyensúlyi állapotot. Kvázisztatikus folyamatokban a termodinamika

I. főtétele abban az alakban érvényes, hogy a test vizsgált anyagdarabja ΔU belső energiájának $d(\Delta U)$ megváltozása egyenlő a $T(\vec{r})d(\Delta S)$ kvázisztatikus hőközlés és a $d'W_{kv.sz.}$ kvázisztatikus mechanikai munka összegével,

$$d(\Delta U) = T(\vec{r})d(\Delta S) + d'W_{kv,sz.} \qquad (2.4.6)$$

Itt ΔS jelöli a ΔV téfogatú, infinitezimális anyagdarab entrópiáját, $T(\vec{r})$ pedig az $\vec{r}$ helyzetvektorú pontban a test hőmérsékletét. Mivel azonban a belső energia megváltozása, ugyancsak a termodinamika I. főtétele szerint csak a vizsgált anyagdarab kezdeti és végső termodinamikai egyensúlyi állapotától függ, azért a fenti módon kiszámolt belsőenergia-változás akkor is ennyi, ha az adott kezdeti és végállapot között nem kvázisztatikusan zajlott a deformáció folyamata. A ΔV térfogattal való osztás után az $u(\vec{r})$, ill. $s(\vec{s})$ belsőenergia- ill. entrópiasűrűség megváltozásaira az alábbi összefüggést kapjuk tehát rugalmas deformáció esetén:

$$du = Tds + \sigma_{i,j}d\epsilon_{i,j}. \qquad (2.4.7)$$

A térfogategységre vonatkoztatott elemi kvázisztatikus rugalmas munka ezért a test $f = u - Ts$ szabadenergia-sűrűségének megváltozásával egyenlő:

$$df = du - Tds = \sigma_{i,j}d\epsilon_{i,j}. \qquad (2.4.8)$$

Innen a rugalmasan deformált test szabadenergia-sűrűsége az $\vec{r}$ helyzetvektorú pontban, mint az ott uralkodó $T(\vec{r})$ hőmérséklet és $\epsilon_{i,j}(\vec{r})$ deformáció függvénye ezért

$$f(T, \epsilon_{i,j}) = f_0(T) + \int \sigma_{i,j}d\epsilon_{i,j}, \qquad (2.4.9)$$

ahol $f_0(T)$ a deformálatlan test szabadenergia-sűrűsége és az egyszerűség kedvéért elhagytuk a hőmérséklet és a deformációs tenzor helyfüggésének explicit jelölését. A második tagban az integrálást az $\vec{s} \equiv 0$, azaz $\epsilon_{i,j} \equiv 0$ deformálatlan állapottól az el nem tűnő $\vec{s}$, azaz $\epsilon_{i,j}$ deformációval jellemzett végállapotig kell elvégezni. Az integrál tényleges kiszámolása csak úgy lehetséges, ha felhasználjuk a feszültségi tenzor és a deformációs tenzor kapcsolatát meghatározó anyagegyenletet.

A kapott összefüggésből először is kiolvashatjuk a szabadenergia-sűrűség és a feszültségi tenzor közötti kapcsolatot,

$$\sigma_{i,j} = \frac{\partial f(T, \epsilon_{i,j})}{\partial \epsilon_{i,j}}. \qquad (2.4.10)$$

Ha figyelembe vesszük, hogy $\sigma_{i,j} = C_{i,j,k,l}\epsilon_{k,l}$, akkor újabb deriválással

$$C_{i,j,k,l} = \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial \epsilon_{k,l}} = \frac{\partial^2 f(T, \epsilon_{i,j})}{\partial \epsilon_{i,j}\partial \epsilon_{k,l}} \qquad (2.4.11)$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy az anyagállandók mátrixa szimmetrikus az első és a második indexpár felcserélésével szemben, mint ahogy ezt korábban már említettük. Figyelembe véve a fenti szimmetriát, a kvázisztatikus infinitezimális rugalmas munka

$$\sigma_{i,j} d\epsilon_{i,j} = C_{i,j,k,l} \epsilon_{k,l}, d\epsilon_{i,j} \tag{2.4.12}$$

alakot ölt, ami könnyen imtegrálható:

$$f(T, \epsilon_{i,j}) = f_0(T) + \frac{1}{2} C_{i,j,k,l} \epsilon_{i,j} \epsilon_{k,l}. \tag{2.4.13}$$

A szabadenergia-sűrűség tehát a deformációs tenzornak szimmetrikus kvadratikus alakja, a második tagot úgy tekinthetjük, mint a rugalmas deformáció potenciális energiájának sűrűségét.

Általában f és f_0 és a rugalmas deformáció potenciális energiájának sűrűsége is helyről helyre más lehet a testben. Az f_0 tag, ami a deformálatlan test szabadenergia-sűrűsége, általában függ a testben lokálisan uralkodó T hőmérséklettől. Ha a folyamatokban a hőmérséklet nagyon tág határok között változik, akkor a rugalmas állandók hőmérsékletfüggésével is számolnunk kell, ennek tulajdonítható pl. a hőtágulás jelensége, amellyel azonban itt nem foglalkozunk. Az esetek többségében azonban ez elhanyagolható, a rugalmas állandók hőmérséklettől függetlennek tekinthetők. A homogén hőmérséklet-eloszlású rugalmasan deformált test teljes térfogatának szabadenergiája általában tehát a hőmérséklet függvénye és a deformációs tenzornak, mint a hely függvényének a funkcionálja:

$$F(T, [\epsilon_{i,j}]) = F_0(T) + \int_V dV \frac{1}{2} C_{i,j,k,l} \epsilon_{i,j}(\vec{r}) \epsilon_{(k,l)}(\vec{r}). \tag{2.4.14}$$

Megjegyezzük, hogy a termodinamikából tudjuk, hogy a szabadenergia állapotfüggvény, azért a kapott eredmény nem függ attól, hogy speciálisan kvázisztatikus deformációt feltételezve vezettük azt le.

A szabadenergia-sűrűség rugalmas deformáció miatti járuléka az $\epsilon_{i,j}$ deformációs tenzornak homogén másodrendű függvénye, azaz ha $\epsilon_{i,j} \to \xi \epsilon_{i,j}$, ahol ξ tetszőleges (dimenziótlan) pozitív valós szám, akkor $f - f_0 \to \xi^2 (f - f_0)$. Ekkor erre a függvényre alkalmazható Euler tétele:

$$\epsilon_{i,j} \frac{\partial (f - f_0)}{\partial \epsilon_{i,j}} = 2(f - f_0). \tag{2.4.15}$$

Felhasználva a feszültségi tenzor és a szabadenergia-sűrűség kapcsolatát,

$$\epsilon_{i,j} \sigma_{i,j} = 2(f - f_0), \tag{2.4.16}$$

azaz

$$f - f_0 = \frac{1}{2} \epsilon_{i,j} \sigma_{i,j}. \tag{2.4.17}$$

Ez a $\sigma_{i,j} = C_{i,j,k,l}\epsilon_{k,l}$ lineáris összefüggés miatt egyúttal azt is jelenti, hogy

$$\epsilon_{i,j} = \frac{\partial f(T, \sigma_{i,j})}{\partial \sigma_{i,j}}, \tag{2.4.18}$$

ha a szabadenergia-sűrűséget kifejezzük, mint a T hőmérséklet és a feszültségi tenzor függvényét, amihez invertálni kell a feszültségi tenzor és a deformációs tenzor közötti kapcsolatot megadó anyagegyenletet.

2.4.3 Izotróp közeg szabadenergia-sűrűsége, anyagegyenlete

Az alábbiakban felírjuk az izotróp rugalmas közeg szabadenergia-sűrűségének alakját, amiből látni fogjuk, hogy ebben az esetben a 21 anyagállandó 2 független anyagállandóra redukálódik. Az izotróp közegben nincsen kitüntetett irány, azaz az ilyen közeg forgásszimmetrikus. Ezért a szabadenergia-sűrűsége csak a deformációs tenzorból képezett skalároktól függhet, azonkívül a szabadenergia-sűrűségnek a deformációs tenzorban kvadratikus kifejezésnek kell lennie. Ezek a skalárok a deformációs tenzor spúrjának négyzete, $[\,\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{\epsilon}}]^2 = (\epsilon_{k,k})^2 = \Theta^2$, ill. $\epsilon_{i,j}\epsilon_{i,j} = \epsilon_{i,j}^2$, úgyhogy izotróp, rugalmas közeg szabadenergia-sűrűségének alakja:

$$f(\Theta^2, \epsilon_{i,j}^2) = f_0 + \frac{\lambda}{2}(\epsilon_{k,k})^2 + \mu\epsilon_{i,j}\epsilon_{i,j}, \tag{2.4.19}$$

ahol λ és μ rugalmas állandók, az úgynevezett Lamé-állandók. (Az egyszerűség kedvéért elhagytuk a hőmérséklet-függés jelölését.) A továbbiakban érdemes a szabadenergia sűrűségének kifejezését úgy alakítani, hogy szétválasszuk a tiszta nyírás és a térfogati deformáció járulékát:

$$\begin{aligned} f(\Theta^2, \epsilon_{i,j}^2) &= f_0 + \frac{\lambda}{2}\Theta^2 + \mu\Big[\Big(\epsilon_{i,j} - \frac{\Theta}{3}\delta_{i,j}\Big) + \frac{\Theta}{3}\delta_{i,j}\Big]^2 \\ &= f_0 + \mu\Big(\epsilon_{i,j} - \frac{\Theta}{3}\delta_{i,j}\Big)^2 + \Big(\frac{\mu}{9}\delta_{k,k} + \frac{\lambda}{2}\Big)\Theta^2 \\ &= f(\Theta^2, \epsilon_{i,j}^{\mathrm{ny}\ 2}), \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\Big(\epsilon_{i,j} - \frac{\Theta}{3}\delta_{i,j}\Big)\frac{\Theta}{3}\delta_{i,j} = 0. \tag{2.4.21}$$

A

$$\epsilon_{i,j}^{\mathrm{ny}} = \epsilon_{i,j} - \frac{\Theta}{3}\delta_{i,j} \tag{2.4.22}$$

nyírási deformáció négyzete melletti μ együtthatót szokás torziómodulusnak nevezni. Bevezetjük még a térfogati deformáció négyzete melletti együtthatóra a

$$\frac{K}{2} = \frac{\mu}{9}\delta_{k,k} + \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{3} + \frac{\lambda}{2}, \tag{2.4.23}$$

jelölést, ahol

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{2.4.24}$$

az úgynevezett izoterm kompressziómodulus,

$$K = \frac{1}{\Theta}\frac{\partial f(\Theta^2, \epsilon_{i,j}^{\mathrm{ny}\;2})}{\partial\Theta}\bigg|_{T=\text{áll.}} \tag{2.4.25}$$

Érdemes az alábbi termodinamikai megfontolásra kitérni. A szabadenergiának minimuma van a test deformálatlen állapotában (alapállapotában), ha nem hatnak külső erők. Ennek szükséges feltétele, hogy

$$\sigma_{i,j} = \frac{\partial f(\epsilon_{i,j})}{\partial \epsilon_{i,j}}\bigg|_{\text{alapáll.}} = 0, \tag{2.4.26}$$

ahonnan természettesen visszakapjuk, hogy a deformálatlan állapotot a mechanikai feszültségek eltűnése, ill. $\sigma_{i,j} = C_{i,j,k,l,}\epsilon_{k,l}$ miatt a deformációs tenzor komponenseinek eltűnése jellemzi, $\epsilon_{i,j}\Big|_{\text{alapáll.}} = 0$. Izotróp közeg esetén a szükséges feltételek,

$$\frac{\partial f(\Theta^2, \epsilon_{i,j}^{\mathrm{ny}\;2})}{\partial\Theta} = 0, \qquad \frac{\partial f(\Theta^2, \epsilon_{i,j}^{\mathrm{ny}\;2})}{\partial\epsilon_{i,j}^{\mathrm{ny}}} = 0. \tag{2.4.27}$$

A minimum elégséges feltétele pedig az, hogy az f szabadenergia-sűrűségnek a relatív térfogatváltozás és nyírási deformáció szerinti második parciális deriváltjai pozitívak legyenek (a vegyes parciális deriváltak azonosan eltűnnek):

$$\mu > 0, \qquad K > 0. \tag{2.4.28}$$

Ahhoz tehát, hogy a rugalmas közeg deformálatlan alapállapota termodinamikai egyensúlyi állapot legyen, ezeknek az állanóknak pozitívaknak kell lenniük.

Használjuk fel végül az izotróp rugalmas közeg szabadenergia-sűrűségének kifejezését arra, hogy meghatározzuk a feszültségi tenzor és a deformációs tenzor kapcsolatát:

$$\begin{aligned}
\sigma_{i,j} &= \frac{\partial f(\epsilon_{i,j})}{\partial\epsilon_{i,j}} \\
&= 2\mu\Big(\epsilon_{i',j'} - \frac{\Theta}{3}\delta_{i',j'}\Big)\Big(\delta_{i,i'}\delta_{j,j'} - \frac{1}{3}\delta_{i',j'}\delta_{i,j}\sum_{l=1}^{3}\delta_{i,l}\Big) + K\Theta\delta_{i,j}\sum_{l=1}^{3}\delta_{i,l} \\
&= 2\mu\Big(\epsilon_{i,j} - \frac{\Theta}{3}\delta_{i,j}\Big) + K\Theta\delta_{i,j} = 2\mu\epsilon_{i,j}^{\mathrm{ny}} + K\Theta\delta_{i,j}.
\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

Az inverz relációt is könnyen megkaphatjuk. Képezzük először mindkét oldal spúrját, és fejezzük ki abból a relatív térfoagtváltozást,

$$\sigma_{k,k} = 3K\Theta, \quad \Rightarrow \quad \Theta = \frac{\sigma_{k,k}}{3K}. \tag{2.4.30}$$

Fejezzük ki ezután $\epsilon_{i,j}$-t a feszültségi tenzorral, miközben felhasználjuk a feszültségi tenzor spúrja és a deformációs tenzor spúrja közti kapcsolatot:

$$\begin{aligned}\epsilon_{i,j} &= \frac{\sigma_{i,j}}{2\mu}+\frac{\Theta}{3}\delta_{i,j}-\frac{K\Theta}{2\mu}\delta_{i,j}\\ &= \frac{\sigma_{i,j}}{2\mu}+\frac{\sigma_{k,k}}{9K}\delta_{i,j}-\frac{\sigma_{k,k}}{6\mu}\delta_{i,j}\\ &= \frac{\sigma_{k,k}}{9K}\delta_{i,j}+\frac{1}{2\mu}\Big(\sigma_{i,j}-\frac{\sigma_{k,k}}{3}\delta_{i,j}\Big). \qquad (2.4.31)\end{aligned}$$

Itt az első tag a jobb oldalon a tiszta húzó-nyomó feszültségeket tartalmazza, a második tag pedig a tiszta nyírást jelentő nyírófeszültségeket. Izotróp közeg fenti anyagegyenleteit szokás Hook törvényének nevezni.

2.4.4 Izotróp rugalmas közeg mozgásegyenlete

Izotróp közegben a feszültségi tenzor részben a nyírási deformáció okozta nyírási feszültség, részben a térfogati deformáció okozta húzó-nyomó feszültség összege:

$$\sigma_{i,j} = 2\mu\Big(\epsilon_{i,j}-\frac{\epsilon_{k,k}}{3}\delta_{i,j}\Big)+K\epsilon_{k,k}\delta_{i,j}. \qquad (2.4.32)$$

Deriválással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{i,j}}{\partial x_j} &= 2\mu\Big(\frac{\partial\epsilon_{i,j}}{\partial x_j}-\frac{1}{3}\delta_{i,j}\frac{\partial\epsilon_{k,k}}{\partial x_j}\Big)+K\delta_{i,j}\frac{\partial\epsilon_{k,k}}{\partial x_j}\\ &= \frac{2\mu}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}+\frac{\partial s_j}{\partial x_i}\Big)+\Big(K-\frac{2\mu}{3}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial s_k}{\partial x_k}\Big)\\ &= \mu\Delta s_i+\mu\nabla_i(\vec{\nabla}\cdot\vec{s})+\Big(K-\frac{2\mu}{3}\Big)\nabla_i(\vec{\nabla}\cdot\vec{s}). \qquad (2.4.33)\end{aligned}$$

Itt bevezettük a vektormező komponenseire ható

$$\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (2.4.34)$$

Laplace-operátort. A feszültségi tenzor parciális deriváltját behelyettesítve a rugalmas közeg mozgásegyenletébe, és felhasználva, hogy az elmozdulás-vektormező idő szerinti deriváltja kis deformációs sebességek esetén az idő szerinti teljes deriválttal helyettesíthető, az alábbi mozgásegyenletet kapjuk:

$$\rho\frac{\partial^2\vec{s}}{\partial t^2} = \rho\vec{f}+\mu\Delta\vec{s}+(\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{s}), \qquad (2.4.35)$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$K+\frac{\mu}{3} = \lambda+\mu. \qquad (2.4.36)$$

A mozgásegyenletek megoldása egyértelmű, ha megfelelő kezdeti feltételeket és határfeltételeket rovunk ki. Mivel a mozgásegyenlet az elmozdulás-vektormező idő szerinti parciális deriváltjaiban másodrendű, a kezdeti feltételek $\vec{s}(t = t_0, \vec{r})$ és $\frac{\partial s_i(t_0,\vec{r})}{\partial x_j}$ a kezdeti $t = t_0$ időpillanatban. A határfeltételek pedig $\vec{s}$ és $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} s_i$ rögzített értékei a rugalmas test határfelületén ($\vec{n}$ a rugalmas test felületének külső normálisa), vagy ezekkel egyenértékű határfeltételek. Az egyértelmű megoldás létezésének bizonyításával nem foglalkozunk.

2.4.5 Izotróp közeg sztatikus deformációja

Deformált izotróp közeg sztatikus deformációjáról, vagy egyensúlyáról akkor beszélünk, ha a deformáció időben nem változik, azaz amikor azonosan zérus a test részecskéinek gyorsulása,

$$\frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = 0 \tag{2.4.37}$$

a tér minden pontjában minden időpillanatban, mert a belső feszültségekből származó erők és a tömegerők egyensúlyt tartanak. Ha az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a külső tömegerő sűrűsége is zérus, $\vec{f} = 0$, akkor a mozgásegyenlet az alábbi egyszerű alakot ölti:

$$\frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} = 0. \tag{2.4.38}$$

Felhasználva a feszültségi tenzor és a deformációs tenzor kapcsolatát, izotróp közeg esetén az egyensúlyi deformációt leíró egyenlet:

$$\mu \Delta \vec{s} + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{s}) = 0. \tag{2.4.39}$$

Érdemes észrevenni, hogy minden egyensúlyi deformációt leíró $\vec{s}(\vec{r})$ vektormező, amely a fenti parciális differenciálegyenlet megoldása, egyúttal megoldása a

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{s}) &= 0, \\ \Delta\Delta\vec{s} &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.40}$$

egyenleteknek is. Ugyanakkor az utóbbi egyenletek nem minden megoldása oldja meg az eredeti egyenletet, mert az alacsonyabb rendű differenciálegyenlet, mint az utóbbiak. Állításunk bizonyítására írjuk az eredeti egyenletet

$$\mu \frac{\partial^2 s_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial s_j}{\partial x_j}\right) = 0 \tag{2.4.41}$$

alakba. Hassunk erre először a $\frac{\partial}{\partial x_i}$, majd pedig a $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$ differenciáloperátorral, akkor rendre az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_i}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}\left(\frac{\partial s_j}{\partial x_j}\right) &= 0, \\ \Delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{s}) &= 0, \end{aligned} \tag{2.4.42}$$

ill.

$$
\begin{aligned}
\mu\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_j}\frac{\partial^2 s_i}{\partial x_k\partial x_k}+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}\frac{\partial s_j}{\partial x_j} &= 0,\\
\mu\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_j}\frac{\partial^2 s_i}{\partial x_k\partial x_k} &= 0,\\
\Delta\Delta\vec{s} &= 0. \qquad (2.4.43)
\end{aligned}
$$

Felhasználtuk, hogy $\Delta(\vec{\nabla}\cdot\vec{s})=0$.

Végezetül sok esetben kényelmes az egyenletet olyan alakba átírni, hogy abban a $\Theta=\vec{\nabla}\cdot\vec{s}$ relatív térfogatváltozás és a $\vec{\varphi}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{s}$ szögelfordulás szerepeljenek explicit módon. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$
\Delta\vec{s}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{s})-\text{ rot }\ \text{rot }\vec{s}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{s})-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{s}). \qquad (2.4.44)
$$

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$
(\lambda+2\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{s})-\mu\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{s})=0, \qquad (2.4.45)
$$

azaz

$$
(\lambda+2\mu)\vec{\nabla}\Theta-2\mu\vec{\nabla}\times\vec{\varphi}=0. \qquad (2.4.46)
$$

2.4.6 Sztatikus deformáció speciális esetei

A sztatikus deformáció számos, technikailag fontos példája közül csak néhány egyszerű esettel foglalkozunk. A példákat két nagy csoportra osztjuk. Az egyik esetben a deformációs tenzor az egész test minden pontjában azonos, azaz a deformáció homogén. A másik esetben a deformációs tenzor a test különböző pontjaiban különböző, ez az inhomogén deformáció esete.

1. **Homogén deformáció** Ebben az esetben a deformációs tenzor helytől független álló, amiből az is következik, hogy a deformálható test felületén ható feszültségek közvetlenül meghatározzák a deformációs tenzort. Ilyenkor nincsen szükség a mozgásegyenletekre a deformációs tenzor meghatározásához.

   (a) *Rúd húzása, ill. összenyomása.* Tegyük fel, hogy egy állandó A keresztmetszetű rudat két végénél ellentétes irányú, F nagyságú erővel húzunk úgy, hogy a rúd tengelyére merőleges oldallapok mentén a felület külső normálisa irányában az egységnyi felületre ható erő $\vec{P}_{\vec{n}}=(F/A)\vec{n}=p\vec{n}$ állandó, ugyanakkor a rúd tengelyével párhuzamos oldalfelületekre ható erő zérus. Legyen a rúd tengelye a z-tengely. Legyen a rúd hossza ℓ és legyen az origó a rúd középpontjában. A rúd végein a felületi erők:

$$\sigma_{i,j}(\pm\ell/2)n_j(\pm\ell/2) = \pm p\delta_{i,3}. \tag{2.4.47}$$

A véglapokon a normális vektor $n_i(\pm\ell/2) = \pm\delta_{i,3}$, úgyhogy

$$\sigma_{i,3}(\pm\ell/2) = p\delta_{i,3}. \tag{2.4.48}$$

Másrészt a rúd tengelyével párhuzamos oldallapokon ($n_3 = 0$)

$$\sigma_{i,j}n_j = 0, \tag{2.4.49}$$

ahonnan $\sigma_{i,1} = \sigma_{i,2} = 0$. Ezek a határfeltételek kielégíthetőek az egész test mentén homogén

$$\sigma_{i,j} = p\delta_{i,j}\delta_{i,3} \tag{2.4.50}$$

feszültségi tenzorral (itt i nem összegző index).
Felhasználva, hogy $\sigma_{k,k} = p$, a deformációs tenzorra az alábbi helyfüggetlen eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned}\epsilon_{i,j} &= \frac{\sigma_{k,k}}{9K}\delta_{i,j} + \frac{1}{2\mu}\Big(\sigma_{i,j} - \frac{\sigma_{k,k}}{3}\delta_{i,j}\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6\mu}\Big)p\delta_{i,j} + \frac{1}{2\mu}p\delta_{i,j}\delta_{i,3},\end{aligned} \tag{2.4.51}$$

(ahol i nem összegző index és) ahonnan

$$\epsilon_{i,j} = 0, \quad i \neq j, \quad \epsilon_{1,1} = \epsilon_{2,2} = \Big(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6\mu}\Big)p, \quad \epsilon_{3,3} = \Big(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3\mu}\Big)p \equiv \frac{p}{E}, \tag{2.4.52}$$

ahol bevezettük az

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \tag{2.4.53}$$

úgynevezett Young-moduluszt. Vegyük észre, hogy a rúd harántirányú relatív deformációja és a hosszirányú relatív deformációja között az

$$\epsilon_{1,1} = \epsilon_{2,2} = -\sigma\epsilon_{3,3} \tag{2.4.54}$$

arányosság áll fenn, ahol

$$\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{3K - 2\mu}{3K + \mu} \tag{2.4.55}$$

az úgynevezett Poisson-szám. A deformálatlan rugalmas közeg alapállapota termodinamikai egyensúlyának elégséges feltétele miatt K és μ pozitívak, úgyhogy $-1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$. A tapasztalat szerint azonban

$$0 < \sigma \leq \frac{1}{2} \tag{2.4.56}$$

minden rugalmas közegre. Ez azt jelenti, hogy a hosszirányú relatív megnyúlás (összehúzódás) mindig harántirányú összehúzódással (megnyúlással) jár együtt. Megjegyezzük, hogy összenyomás esetén a fenti képletekben értelemszerűen p-t $(-p)$-re kell cserélni.
A rúdban a relatív térfogatváltozás

$$\Theta = \epsilon_{k,k} = \frac{p}{3K}. \tag{2.4.57}$$

A rúd deformációból származó szabadenergia-sűrűsége pedig

$$f - f_0 = \frac{1}{2}\sigma_{i,j}\epsilon_{i,j} = \frac{1}{2}\sigma_{3,3}\epsilon_{3,3} = \frac{p^2}{2E}. \tag{2.4.58}$$

(b) *Mindenoldali egyenletes összenyomás.* Képzeljünk el egy tetszőleges alakú testet, amelynek a felülete mentén minden df felületelemre

$$(P_{\vec{n}})_i df = \sigma_{i,j} n_j df = -p n_i df \tag{2.4.59}$$

felületi erő hat, amelyik a felületelem külső normálisával ellentétes irányú és mindenütt azonos nagyságú. Ekkor a test határfelületének minden pontjában

$$\sigma_{i,j} = -p\delta_{i,j}. \tag{2.4.60}$$

Ez a határfeltétel kielégíthető olyan állandó feszültségi tenzorral, amelynek ugyanez az értéke a test minden pontjában. Ilyenkor mindenoldali egyenletes összenyomásról beszélünk. Ekkor

$$\sigma_{k,k} = -3p, \tag{2.4.61}$$

úgyhogy a deformációs tenzor

$$\begin{aligned} \epsilon_{i,j} &= \frac{\sigma_{k,k}}{9K}\delta_{i,j} + \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{i,j} - \frac{\sigma_{k,k}}{3}\delta_{i,j}\right) \\ &= \frac{-p}{3K}\delta_{i,j} + + \frac{1}{2\mu}\left(-p - \frac{-3p}{3}\right)\delta_{i,j} \\ &= -\frac{p}{3K}\delta_{i,j} \end{aligned} \tag{2.4.62}$$

diagonális, ami azt jelenti, hogy tetszőleges irányban ugyanolyan mértékű a relatív összenyomódás és nincsen nyírás. A relatív térfogatváltozás

$$\Theta = \epsilon_{k,k} = -\frac{p}{K}, \tag{2.4.63}$$

a deformációból származó járulék a szabadenergia-sűrűséghez

$$f - f_0 = \frac{1}{2}\sigma_{i,j}\epsilon_{i,j} = \frac{1}{2}(-p)\delta_{i,j}\left(-\frac{p}{3K}\right)\delta_{i,j} = \frac{p^2}{2K}. \tag{2.4.64}$$

Szokás bevezetni a kompresszibilitást a

$$\kappa = \frac{1}{K} = -\frac{1}{p}\,\frac{\Delta V}{V} \tag{2.4.65}$$

definícióval, amelyet izoterm kompresszibilitásnak (κ_T) nevezünk, ha a relatívtérfogatváltozás (a mindeoldali egyenletes összenyomás) állandó T hőmérsékleten valósul meg. Ha ugyanez a folyamat adiabatikusan megy végbe, azaz a rugalmas test a deformáció közben hőszigetelt és elhanyagolható a hővezetés a testen belül, akkor pedig adiabatikus kompresszibilitásról (κ_{ad}) beszélünk. Általában $\kappa_T \neq \kappa_{ad}$.

(c) *Homogén nyírási deformáció.* Képzeljünk el egy hasáb alakú testet, amelynek egyik csúcsa az origóban van és az origóból kiinduló 3 éle egy Descartes-koordinátarendszer tengelyein fekszik. Hassunk a hasáb lapjaira a lapokkal párhuzamos erőkkel. Pontosabban legyen az alap- és a fedlapon az egységfelületre ható erő rendre $\mp p\vec{E}_{(1)}$, az (y,z)-síkkal párhuzamos $x = 0$, ill. $x = L_x$ lapokon pedig rendre $\mp p\vec{E}_{(3)}$. Az egyszerűség kedvéért ne hasson erő az (x,z)-síkkal párhuzamos lapokra. Ez tiszta nyírófeszültségek felléptét jelenti. Az alap- és fedlapra ható felületi erő ugyanis

$$\mp p\vec{E}_{(1)} = \vec{E}_{(i)}\sigma_{i,j}(\mp)(\vec{E}_{(3)})_j = \mp\vec{E}_{(i)}\sigma_{i,3} \quad\Rightarrow\quad \sigma_{i,3} = p\delta_{i,1}, \tag{2.4.66}$$

az (y,z)-síkokkal párhuzamos oldalakon

$$\mp p\vec{E}_{(3)} = \vec{E}_{(i)}\sigma_{i,j}(\mp)(\vec{E}_{(1)})_j = \mp\vec{E}_{(i)}\sigma_{i,1} \quad\Rightarrow\quad \sigma_{3,i} = p\delta_{i,1}, \tag{2.4.67}$$

és az (x,z) síkokkal párhuzamos lapokon

$$0 = \vec{E}_{(i)}\sigma_{i,j}(\mp)(\vec{E}_{(2)})_j = \mp\vec{E}_{(i)}\sigma_{i,2} \quad\Rightarrow\quad \sigma_{i,2} = 0. \tag{2.4.68}$$

Ezek a határfeltételek kielégíthetők a

$$\sigma_{1,1} = \sigma_{2,2} = \sigma_{3,3} = 0, \quad \sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} = \sigma_{3,2} = \sigma_{2,3} = 0, \quad \sigma_{1,3} = \sigma_{3,1} = p \tag{2.4.69}$$

homogén feszültségi tenzorral. A feszültségi tenzor spúrja zérus, $\sigma_{k,k} = 0$, ezért a homogén deformációs tenzor

$$\epsilon_{i,j} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{i,j}, \tag{2.4.70}$$

ahonnan

$$\epsilon_{1,1} = \epsilon_{2,2} = \epsilon_{3,3} = \epsilon_{1,2} = \epsilon_{2,1} = \epsilon_{2,3} = \epsilon_{3,2} = 0, \quad \epsilon_{1,3} = \epsilon_{3,1} = \frac{p}{2\mu}. \tag{2.4.71}$$

Ez tiszta nyírási deformáció, a megfelelő nyírási szög az (x,z)-síkban

$$\gamma = 2\epsilon_{1,3} = \frac{p}{\mu} \tag{2.4.72}$$

A μ állandót szokás torziómodulusnak is nevezni, hiszen ez határozza meg, hogy adott egységnyi felületre ható p nyíróerő esetén mekkora lesz a nyírási szög az adott elrendezésben.

2. **Inhomogén deformáció.** Inhomogén deformációról akkor beszélünk, ha a deformációs tenzor helyről helyre más. Ennek egyszerű példáit vesszük alább sorra.

   (a) *Rúd csavarása.* Példánk a torziós szálak használatában nyer alkalmazást. Tegyük fel, hogy hengeres alakú rudat csavarunk, amelynek fedlapja az (x,y) síkon rögzítve van, a szimmetriatengelye pedig a z-tengely. Legyen az ℓ hosszúságú rúd alaplapjának elcsavarodása $\varphi(\ell)$ adott. A fedlaptól $\ell \geq z \geq 0$ távolságra levő keresztmetszet infinitezimális elcsavarodása legyen $\varphi(z)$. Ha bevezetjük a csavarodás szögének $\vec{\varphi} = (0, 0, \varphi(z))$ vektorát, akkor az elmozdulás vektormező

$$\vec{s} = \vec{\varphi} \times \vec{r}, \tag{2.4.73}$$

ahonnan

$$s_x = \varphi_y z - \varphi_z y = -\varphi(z) y, \quad s_y = \varphi_z x - \varphi_x z = \varphi(z) x, \quad s_z = 0. \tag{2.4.74}$$

Használjuk fel a deformációs tenzor definícióját:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{x,x} &= \frac{\partial s_x}{\partial x} = 0, \quad \epsilon_{y,y} = \frac{\partial s_y}{\partial y} = 0, \quad \epsilon_{z,z} = \frac{\partial s_z}{\partial z} = 0, \\
\epsilon_{x,y} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}\varphi(z) + \frac{1}{2}\varphi(z) = 0 \\
\epsilon_{x,z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2} y \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\
\epsilon_{y,z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2} x \frac{\partial \varphi}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.4.75}$$

Látjuk, hogy nincsen relatív térfoagtváltozás, $\Theta = \epsilon_{k,k} = 0$, a deformáció tiszta nyírási deformáció. A feszültségi tenzor,

$$\sigma_{i,j} = 2\mu\epsilon_{i,j}, \tag{2.4.76}$$

így csak tiszta nyírási feszültséget tartalmaz.

Ha nincsenek jelen külső tömegerők (pl. elhanyagolhatjuk a nehézségi erőt), akkor az deformációs egyensúly feltétele,

$$\frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} = 0, \tag{2.4.77}$$

a

$$\frac{\partial \epsilon_{i,j}}{\partial x_j} = 0 \tag{2.4.78}$$

egyenletre egyszerűsödik. Innen az $i = x$, y, ill. z választással rendre az alábbi egyenletekre jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_{x,z}}{\partial z} &= -\frac{1}{2} y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial \epsilon_{y,z}}{\partial z} &= \frac{1}{2} x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial \epsilon_{z,x}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{z,y}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{2.4.79}$$

Az utolsó egyenlet azonosságként teljesül, az első kettő pedig a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.4.80}$$

egyenletet eredményezi. A megfelelő határfeltételek ennek egyértelmű megoldásához: $\varphi(0) = 0$ és $\varphi(\ell)$ adott értéke. A határfeltételeket kielégítő megoldás:

$$\varphi(z) = \frac{\varphi(\ell)}{\ell} z. \tag{2.4.81}$$

Az elcsavarodás szöge tehát lineárisan nő a fedlaptól mért távolsággal a rúd tengelye mentén.

Tanulságos meghatározni, hogy milyen feszültségekre van szükség ahhoz, hogy ezt az elcsavarodást létrehozzuk. Az el nem tűnő nyírófeszültségek

$$\sigma_{x,z} = 2\mu\epsilon_{x,z} = -\mu y \frac{\varphi(\ell)}{\ell}, \quad \sigma_{y,z} = 2\mu\epsilon_{y,z} = \mu x \frac{\varphi(\ell)}{\ell}. \tag{2.4.82}$$

Ezek ismeretében ki tudjuk számolni, hogy a henger alaplapjára mekkora érintő irányú felületi erősűrűséget kell alkalmazni, hogy a szóban forgó elcsavarodást előidézzük. Jelölje ennek Descartes komponenseit P_x és P_y,

$$P_x = \sigma_{x,z} = -\mu y \frac{\varphi(\ell)}{\ell}, \quad P_y = \sigma_{y,z} = \mu x \frac{\varphi(\ell)}{\ell}. \tag{2.4.83}$$

Térjünk át az alaplapon síkbeli polárkoordinátákra az $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ összefüggésekkel, akkor

$$P_x = -\mu \frac{\varphi(\ell)}{\ell} r \sin\alpha, \quad P_y = \mu \frac{\varphi(\ell)}{\ell} r \cos\alpha. \tag{2.4.84}$$

Az érintő irányú erősűrűség a rúd tengelyének irányába mutató forgatónyomatékot eredményez,

$$
\begin{aligned}
M_z &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\alpha (xP_y - yP_x) \\
&= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\alpha (r^2 \cos^2\alpha + r^2 \sin^2\alpha) \mu \frac{\varphi(\ell)}{\ell} \\
&= \mu \frac{\pi}{2} \frac{\varphi(\ell)}{\ell} R^4. \qquad (2.4.85)
\end{aligned}
$$

Innen a rúd (torziós szál) végének teljes elcsavarodási szöge arányosnak adódik az alkalmazott forgatónyomtékkal:

$$
\varphi(\ell) = \frac{M_z}{D_t}, \qquad (2.4.86)
$$

ahol D_t az úgynevezett direkciós nyomaték:

$$
D_t = \frac{\mu\pi}{2} \frac{R^4}{\ell}. \qquad (2.4.87)
$$

Látjuk, hogy a torziós szál keresztmetszete lineáris méretének negyedik hatványával arányosan nő a direkciós nyomaték, vagyis hatványozottan nagyobb forgatónyomaték szükséges ugyanolyan elcsavarodás előidézéséhez, ha nő a torziós szál sugara. Az azonos forgatónyomatékkal előidézett szögelfordulást tehát hatványozottan növelni tudjuk, ha csökkentjük a torziós szál sugarát.

Az elforgatási szög sem nulla ebben az esetben, a rúd egyes anyagdarabkái nem csak nyírási alakváltozást szenvednek, hanem el is fordulnak a térben. Az elfordulási szögnek

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{s})_x &= \frac{1}{2}(\frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z}) = -\frac{1}{2} x \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}, \\
\frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{s})_y &= \frac{1}{2}(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x}) = -\frac{1}{2} y \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}, \\
\frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{s})_z &= \frac{1}{2}(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x}) = -\varphi(z) \qquad (2.4.88)
\end{aligned}
$$

a Descartes-komponensei. Ha kicsiny a szál keresztmetszete, akkor az elfordulás szögének x és y komponensei, mint m'sodrendűen kicsiny mennyiségek, elhanyagolhatóak, vagyis elhanyagolható a szál keresztmetszetében fekvő kicsiny síklapocskának a síkból történő kifordulása a deformáció során. A szögelfordulás z-irányú és éppen ellentétes értelmű a szál elcsavarodásának szögével.

(b) *Rúd hajlítása.* Képzeljünk el egy vízszintes rudat, amelynek egyik vége egy merev függőleges falhoz van rögzítve, másik vége pedig szabad. A szabad végre függőlegesen lefelé mutató irányú F erőt gyakorolunk, minek következtében a rúd lehajlik. A továbbiakban a nehézségi erőt elhanyagoljuk és feltesszük, hogy a lehajlás is kicsi.

Azzal a feltevéssel fogunk élni, hogy van egy olyan szál (pontosabban vízszintes réteg) a rúd mentén, amelyiknek a lehajlás során nem változik meg a hossza. Ezt neutrális szálnak (rétegnek) nevezzük. Válasszuk ezt a koordinátarendszer (x, y) síkjának. Ekkor a $z > 0$ rétegek megnyúlnak, a $z < 0$ rétegek pedig összenyomódnak. Feltesszük továbbá, hogy a rúdnak a neutrális rétegre merőleges keresztmetszetei a hajlítás után is merőlegesek maradnak a meghajlított neutrális szálra.

Jelöljünk ki a neutrális rétegben egy dx hosszúságú szakaszt. Legyen a hajlítás után ezen a helyen R a meghajlított rúd görbületi sugara, ami azt jelenti, hogy a dx hosszúságú réteget határoló, a neutrális rétegre merőleges keresztmetszetek síkjai $d\varphi = dx/R$ szöget zárnak be. Hasonló körívek összehasonlítása alapján, a $z \neq 0$ rétegekben ugyanezen a helyen a relatív megnyúlás

$$\epsilon(z) = \frac{\delta(dx)}{dx} = \frac{(R+z)d\varphi - Rd\varphi}{Rd\varphi} = \frac{z}{R}. \tag{2.4.89}$$

Ekkor a rúdban ébredő húzó-nyomó feszültség

$$\sigma(z) = E\epsilon(z) = E\frac{z}{R}. \tag{2.4.90}$$

Mivel az x és $x+dx$ helyen a neutrális rétegre merőleges keresztmetszetek átlagosan nem tolódnak el egymáshoz képest, azért az eredő felületi erő ezen keresztmetszetek bármelyikén zérus kell legyen:

$$P_x = \int_A df\ E\frac{z}{R}, \tag{2.4.91}$$

ahol az integrálás a rúd A keresztmetszetére történik. Ugyanakkor a feszültségek forgatónyomatékot gyakorolnak a keresztmetszetekre:

$$M_y = \int_A df\ z\sigma(z) = \frac{E}{R}\int_A df\ z^2 = \frac{E}{R}I, \tag{2.4.92}$$

ahol

$$I = \int_A df\ z^2 \tag{2.4.93}$$

a keresztmetszet úgynevezett tehetetlenségi nyomatéka. A neutrális rétegre merőleges keresztmetszetre ható eredő erő akkor és csak akkor lehet nulla, ha a keresztmetszet z_0 ,,tömegközéppontja" a neutrális rétegben van, azaz $z_0 = 0$:

$$\int_A df\ z = z_0 \int_A df = 0. \tag{2.4.94}$$

A neutrális szál tehát a keresztmetszetek ,,tömegközéppontjait" összekötő szál.

Legyen $z = z(x)$ a neutrális szál egyenlete. Ennek meghatározására differenciálegyenletet kapunk, ha megvizsgáljuk a rúd tetszőleges x koordinátájú belső keresztmetszete és az $x = \ell$ szabad végét határoló lapja közötti darabjának az egyensúlyát:

$$M_y(x) = \frac{EI}{R(x)} = F\ (\ell - x). \tag{2.4.95}$$

Másrészről a rúd görbülete a x helyen

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{\pm z''}{[1 + (z')^2]^{3/2}}, \tag{2.4.96}$$

ahol a negatív előjelet kell használni, mert $z'' < 0$. Továbbá a lehajlás kicsi, úgyhogy $|z'| \ll 1$ és a nevezőben elhanyagolhatjuk az első deriváltat tartalmazó tagot. Így a következő differenciálegyenletet kapjuk a neutrális réteg egyenletére:

$$z'' = -\frac{F}{EI}(\ell - x). \tag{2.4.97}$$

A megoldás a $z(x = 0) = 0$ és a $z'(0) = 0$ határfeltételekkel egyértelmű:

$$z = \frac{F}{6EI}x^3 - \frac{F}{2EI}\ell x^2 + C_1 x + C_2, \tag{2.4.98}$$

ahol $C_1 = C_2 = 0$. A rúd végének lehajlása:

$$-z(\ell) = \frac{\ell^3}{3EI}F. \tag{2.4.99}$$

Téglalap keresztmetszetű rúd esetén:

$$I = \int_A df\ z^2 = \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-a/2}^{a/2} dy z^2 = \frac{1}{12}ah^3. \tag{2.4.100}$$

Körlap keresztmetszetű rúd esetén:

$$I = \int_A df\ z^2 = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi\ r^2 \sin^2\varphi = \frac{R^4\pi}{4}. \tag{2.4.101}$$

2.4.7 Rugalmas hullámok

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a rugalmas közeg mozgásegyenleteinek vannak hullám-megoldásai, azaz hogy rugalmas közegben hullámok terjedhetnek. Foglalkozni fogunk végtelen kiterjedésű közegben terjedő rugalmas hullámokkal és véges hosszúságú rugalmas húron kialakuló állóhullámokkal, azaz a rugalmas húr rezgéseivel.

1. **Rugalmas hullámok végtelen kiterjedésű közegben.** Ha a külső tömegerők sűrűsége zérus, akkor a rugalmas közeg mozgásegyenlete:

$$\rho\frac{\partial^2 s_i(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \mu\Delta s_i(\vec{r},t) + (\mu+\lambda)\frac{\partial^2 s_j(\vec{r},t)}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{2.4.102}$$

Most megmutatjuk, hogy a mozgásegyenletnek van rugalmas hullám szabad terjedését leíró megoldása. Az egyszerűség kedvéért keressünk olyan megoldást, ami csak az egyik Descartes-koordinátától függ, pl. $s_i = s_i(x,t)$ alakú. Ekkor a következő egyenleteket kapjuk az elmozdulás-vektormező longitudinális (x-) és transzverzális (y- és z-) komponenseire:

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial t^2} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial x^2},\\ \rho\frac{\partial^2 s_i(x,t)}{\partial t^2} &= \mu\frac{\partial^2 s_i(x,t)}{\partial x^2}, \quad (i=y,z).\end{aligned} \tag{2.4.103}$$

Ezek az egyenletek rendre

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_\parallel^2}\frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial x^2} &= 0,\\ \frac{1}{c_\perp^2}\frac{\partial^2 s_i(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s_i(x,t)}{\partial x^2} &= 0\end{aligned} \tag{2.4.104}$$

alakba írhatók, ha bevezetjük a

$$c_\parallel = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \qquad c_\perp = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{2.4.105}$$

állandókat. Mivel $\lambda > 0$ és $\mu > 0$, azért $c_\parallel^2 > 0$, ill. $c_\perp^2 > 0$. Ekkor a kapott egyenletek úgynevezett homogén hullámegyenletek, amelyek síkhullámok x-tengely irányában történő szabad terjedését írják le rendre $c_\parallel$, ill. $c_\perp$ fázissebességgel. Az első esetben az s_x kitérés párhuzamos a síkhullám terjedési irányával, azaz longitudinális hullámról beszélünk, a másik két esetben az s_i ($i = y,z$) kitérés merőleges a hullám terjedési irányára, ekkor transzverzális hullámról beszélünk.

Állításunkról a következőképpen győződhetünk meg. Akármelyik egyenletet is vesszük, az

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{2.4.106}$$

alakú lineáris, homogén, mind az idő szerinti derivált, mind az helykoordináta szerinti derivált tekintetében másodrendű parciális differenciálegyenlet. Ennek két lineárisan független megoldása van:

$$\psi_+(x,t) = f_1(t-\frac{x}{c}), \qquad \psi_-(x,t) = f_2(t+\frac{x}{c}), \tag{2.4.107}$$

ahol $f_1(u)$ és $f_2(u)$ tetszőleges egy-változós valós függvények. A ψ_+, ill. a ψ_- megoldás rendre az x-tengely mentén jobbra, ill. balra haladó síkhullámot ír le. Ezt abból látjuk, hogy a t idő múlásával az $f_1(u)$, ill. $f_2(u)$ függvényalak („mintázat") c sebességgel változatlan alakban eltolódik jobbra, ill. balra. A lineáris homogén hullámegyenlet általános megoldása tehát balra haladó és jobbra haladó síkhullámok szuperpozíciója,

$$\psi(x,t) = f_1(t-\frac{x}{c}) + f_2(t+\frac{x}{c}). \tag{2.4.108}$$

A rugalmas közegben szabadon terjedő síkhullám általános alakja tehát jobbra és balra haladó longitudinális és transzverzális hullámok szuperpozíciója.

Az anyagállandók közti kapcsolatokat felhasználva a fázissebességeket kifejezhetjük a Young-modulusszal és a Poisson-számmal. Az E és σ értelmezésére szolgáló képleteket feloldva a Lamé-állandókra,

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \qquad \lambda = -\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(2\sigma-1)} \tag{2.4.109}$$

kapjuk, hogy

$$c_\parallel^2 = \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \qquad c_\perp^2 = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}. \tag{2.4.110}$$

A $-1 \leq \sigma < \frac{1}{2}$ intervallumba eső Poisson számok esetén a hullámok terjedési sebességeinek négyzete mindig pozitív szám.

Most megmutatjuk,

- hogy a longitudinális síkhullám egy relatív térfogatváltozási hullámot jelent. Ez fordítva is igaz, a relatív térfogatváltozási hullám mindig longitudinális síkhullám.
- hogy a transzverzális síkhullám torziós hullám, ill. hogy a torziós hullám transzverzális.

Longitudinális hullám esetén $\vec{s} = (s_x, 0, 0)$, úgyhogy a relatív térfogatváltozás $\Theta(x,t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{s} = \frac{\partial s_x(x,t)}{\partial x}$ és a csavrodási vektor $\vec{\varphi}(x,t) = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{s} = \vec{0}$. A longitudinális hullám tehát relatív térfogatváltozással jár együtt, de nem okoz csavarodást a közegben. A longitudinális hullámegyenlet mindkét oldalát deriválva parciálisan x-szerint, megkapjuk a relatív térfogatváltozásra vonatkozó hullámegyenletet:

$$\frac{1}{c_\|^2}\frac{\partial^2\Theta(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Theta(x,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{2.4.111}$$

Vegyük a transzverzális hullám esetét, legyen mondjuk $\vec{s}(x,t) = (0, s_y(x,t), 0)$. Ekkor $\Theta(x,t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{s} = 0$ és a csavarodási szög $\vec{\varphi}(x,t) = (0, 0, \varphi_z(x,t))$, ahol

$$\varphi_z(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial s_y(x,t)}{\partial x}. \tag{2.4.112}$$

A transzverzális hullám hullámegyenletének mindkét oldalát x szerint parciálisan deriválva homogén hullámegyenletet kapunk a csavarodási szögre:

$$\frac{1}{c_\perp^2}\frac{\partial^2\varphi_z(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi_z(x,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{2.4.113}$$

Határozzuk meg a deformációs és a feszültségi tenzort a longitudinális és a transzverzális hullámban. Az általunk vizsgált esetben ezeknek a tenzoroknak az egyedüli el nem tűnő komponensei a longitudinális hullámban

$$\begin{aligned}\epsilon_{x,x} &= \frac{1}{c_\|}[f_2'(t+\frac{x}{c}) - f_1'(t-\frac{x}{c})],\\ \sigma_{x,x} &= \Big(\frac{4\mu}{3} + K\Big)\epsilon_{x,x}, \quad \sigma_{y,y} = \sigma_{z,z} = \Big(K - \frac{2\mu}{3}\Big)\epsilon_{x,x}\end{aligned} \tag{2.4.114}$$

és a transzverzális hullámban

$$\begin{aligned}\epsilon_{x,y} &= \frac{1}{2c_\perp}[f_2'(t+\frac{x}{c_\perp}) - f_1'(t-\frac{x}{c_\perp})],\\ \sigma_{x,y} &= 2\mu\epsilon_{x,y}.\end{aligned} \tag{2.4.115}$$

A fenti összefüggések mutatják, hogy a rugalmas hullámban deformációs állapot és egyúttal feszültségi állapot is terjed. A rugalmas energiasűrűség a longitudinális, ill. a transzverzális hullámban rendre

$$\begin{aligned}\rho_{\epsilon\,\|} \equiv (f - f_0)_\| &= \frac{1}{2}\sigma_{x,x}\epsilon_{x,x} = \frac{1}{2}\Big(\frac{4\mu}{3} + K\Big)\epsilon_{x,x}^2,\\ \rho_{\epsilon\,\perp} \equiv (f - f_0)_\perp &= \sigma_{x,y}\epsilon_{x,y} = 2\mu\epsilon_{x,y}^2.\end{aligned} \tag{2.4.116}$$

A fentiekből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a rugalmas hullám deformációs, ill. feszültségi hullám is. A longitudinális hullámban húzó-nyomó feszültségi állapot, a transzverzális hullámban nyírófeszültség terjed. A rugalmas hullámok egyúttal energiasűrűség hullámok is, amelyekben az energiasűrűség a fázissebességgel terjed. Ha figyelembe vesszük, hogy a hullámok f_1, ill. f_2 komponensében az energiasűrűség szintén $\pm c_a$ ($a = \|, \perp$) sebességgel terjed, akkor értelmezhetjük azokban a $S_{\epsilon\ a} = \pm c_a \rho_{\epsilon\ a}$ energiaáram-sűrűséget, azaz az egységfelületen időegység alatt átáramló energiát. Érdemes észrevenni, hogy az energiasűrűség és az energiaáram-sűrűség kielégíti bármelyik részhullámban a

$$\frac{\partial \rho_{\epsilon\ a}}{\partial t} + \frac{\partial S_{\epsilon\ a}}{\partial x} = 0 \tag{2.4.117}$$

egyenletet. A lokális megmaradási törvények általános vizsgálata során be fogjuk látni, hogy ez az egyenlet differenciális alakban fejezi ki az energia lokális megmaradását a rugalmas síkhullámokban.

2. **Rugalmas húr rezgései.** Húrnak egy olyan, végtelen vékony rudat nevezünk, amely a hajlítással szemben semmilyen ellenállást nem fejt ki. Ezért ahhoz, hogy a húr transzverzálisan is tudjon rezegni, meg kell előzetesen feszíteni a húrt. A húr rezgésein valójában a húron terjedő transzverzális kitéréshullámokat értjük, ill. szűkebb értelemben a húron kialakuló transzverzális állóhullámokat nevezzük a húr rezgéseinek.

   (a) *A húr mozgásegyenlete.* A húron terjedő transzverzális kitéréshullámok mozgásegyenletét a rugalmasságtan alapjaiból újra le kell vezessük, mert a rugalmas közegekre vonatkozó korábbi mozgásegyenletünket azzal a feltevéssel kaptuk meg, hogy a feszültség a deformálatlan állapotban zérus. Most azonban a húr deformálatlan állapota csak annyit jelent, hogy a húr pontjainak azonosan zérus a transzverzális kitérése, de a húrnak van longitudinális deformációja, ami a húr előfeszítettségének következménye. Feküdjön a nyugvó előfeszített húr az x-tengely mentén. Tegyük fel, hogy a feszítő erő a húr két végén $\pm F$, úgyhogy a nyugvó húrban homogén $\sigma_{x,x} = p = F/A$ feszültség van jelen. (A Poisson-számot zérusnak vesszük, azaz a nyugvó húr harántirányú összehúzódását és az ezzel kapcsolatos $\sigma_{y,y}$, ill. $\sigma_{z,z}$ feszültségeket elhanyagoljuk. Ez összhangban van avval, hogy a húrt végtelen vékonynak tekintjük. Nyírófeszültségek pedig egyébként sem lépnek fel a hosszirányban megfeszített rúdban.) Tekintsük a nyugvó húr két szomszédos $A : (x, 0, 0)$, ill. $B : (x + dx, 0, 0)$ pontját. Ezek a húr rezgése során rendre elmozdulnak az A', ill. B' pontba, azaz

$$\begin{aligned} \vec{AA'} &= \vec{s}(x,0,0) = \Big(s_x(x), s_y(x), s_z(x)\Big), \\ \vec{BB'} &= \vec{s}(x+dx,0,0) \\ &= \left(s_x(x) + \frac{\partial s_x}{\partial x}dx, s_y(x) + \frac{\partial s_y}{\partial x}dx, s_z(x) + \frac{\partial s_z}{\partial x}dx\right) \end{aligned}$$

$$(2.4.118)$$

elmozdulást szenvednek. A nyugvó húr A és B pontjának távolsága $d\ell = dx$, a rezgő húr megfelelő A' és B' pontjainak távolsága pedig

$$d\ell' = \sqrt{(x_{B'} - x_{A'})^2 + (y_{B'} - y_{A'})^2 + (z_{B'} - z_{A'})^2}, \tag{2.4.119}$$

ahol a megfelelő koordináták

$$\begin{aligned} x_{A'} &= x + s_x(x), \quad y_{A'} = s_y(x), \quad z_{A'} = s_z(x), \\ x_{B'} &= x + dx + s_x(x) + \frac{\partial s_x}{\partial x}dx, \quad y_{B'} = s_y(x) + \frac{\partial s_y}{\partial x}dx, \\ z_{B'} &= s_z(x) + \frac{\partial s_z}{\partial x}dx. \end{aligned} \tag{2.4.120}$$

Ezeket felhasználva kapjuk, hogy a dx-ben elsőrendűen kicsiny tagokkal bezárólag

$$\begin{aligned} d\ell' &= \sqrt{(dx)^2\Big[\Big(1 + \frac{\partial s_x}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial s_y}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial s_z}{\partial x}\Big)^2\Big]} \\ &\approx dx\sqrt{1 + 2\frac{\partial s_x}{\partial x}} \approx dx\Big(1 + \frac{\partial s_x}{\partial x}\Big). \end{aligned} \tag{2.4.121}$$

Így a vizsgált húrdarabnak a rezgés miatti relatív megnyúlása

$$\frac{d\ell' - d\ell}{d\ell} = \frac{\partial s_x}{\partial x} = \frac{1}{E}\,\frac{F'}{A}, \tag{2.4.122}$$

ahol F' a rezgő húr $\vec{t}$ érintő-egységvektorával párhuzamosan fellépő, a rezgés miatti megnyúlásból származó többleterő nagysága. Az érintő-egységvektor az $\vec{A'B'}$ vektor irányát jelöli ki, s ennek Descartes-komponenseire:

$$\begin{aligned} \frac{t_x}{|\vec{t}|} &= t_x = \frac{x_{B'} - x_{A'}}{d\ell'} = \frac{dx\Big(1 + \frac{\partial s_x}{\partial x}\Big)}{dx\Big(1 + \frac{\partial s_x}{\partial x}\Big)} = 1, \\ \frac{t_y}{t_x} &= t_y = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} = \frac{dx\frac{\partial s_y}{\partial x}}{dx\Big(1 + \frac{\partial s_x}{\partial x}\Big)} = \frac{\partial s_y}{\partial x}, \\ \frac{t_z}{t_x} &= t_z = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} = \frac{dx\frac{\partial s_z}{\partial x}}{dx\Big(1 + \frac{\partial s_x}{\partial x}\Big)} = \frac{\partial s_z}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.4.123}$$

Az érintő ismeretében fel tudjuk írni az előfeszítést biztosító $\vec{F}$ feszítő erőt az A' és B' pontokban,

$$\vec{F}(A') = (-pt_x, -pt_y, -pt_z)A$$

$$
\begin{aligned}
&\approx \Big(-1, -\frac{\partial s_y}{\partial x}, -\frac{\partial s_z}{\partial x}\Big) pA, \\
\vec{F}(B') &= \Big(1, \frac{\partial s_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2} dx, \frac{\partial s_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 s_z}{\partial x^2} dx\Big) pA,
\end{aligned} \tag{2.4.124}
$$

ill. a többleterőt ugyanezekben a pontokban,

$$
\begin{aligned}
\vec{F}'(A') &= (-t_x, -t_y, -t_z) EA \frac{\partial s_x}{\partial x} \\
&\approx (-1, 0, 0) EA \frac{\partial s_x}{\partial x}, \\
\vec{F}'(B') &= (t_x, t_y, t_z) EA \Big(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} dx\Big) \\
&\approx (1, 0, 0) EA \Big(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} dx\Big).
\end{aligned} \tag{2.4.125}
$$

A húr infinitezimális $A'B'$ darabkájának mozgásegyenlete Newton második törvénye értelmében:

$$
\rho A d\ell' \frac{\partial^2 \vec{s}(x,t)}{\partial t^2} = (\vec{F} + \vec{F}')(B') + (\vec{F} + \vec{F}')(A'). \tag{2.4.126}
$$

A megfelelő Descartes-komponensekre a másodrendűen kicsiny tagok elhanyagolása után ekkor

$$
\begin{aligned}
\rho A dx \frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial t^2} &= EA dx \frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial x^2}, \\
\rho A dx \frac{\partial^2 s_y(x,t)}{\partial t^2} &= pA dx \frac{\partial^2 s_y(x,t)}{\partial x^2}, \\
\rho A dx \frac{\partial^2 s_z(x,t)}{\partial t^2} &= pA dx \frac{\partial^2 s_z(x,t)}{\partial x^2}.
\end{aligned} \tag{2.4.127}
$$

adódik. Az egyenletrendszer szétcsatolódik az x-irányú, azaz longitudinális hullámokat leíró

$$
\frac{1}{c_\parallel^2} \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} = 0 \tag{2.4.128}
$$

homogén hullámegyenletre, ill. az $i = y$, ill. z-irányú rezgéseket, azaz transzverzális hullámokat leíró

$$
\frac{1}{c_\perp^2} \frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s_i}{\partial x^2} = 0, \qquad i = y, z \tag{2.4.129}
$$

homogén hullámegyenletekre. Amíg a longitudinális hullámok sebességét a Young-modulusz határozza meg, addig a transzverzális hullámokét a p előfeszültség.

Akár a longitudinális, akár a transzverzális hullámok esetét vizsgáljuk, a hullámegyenlet alakja

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=0. \tag{2.4.130}$$

A homogén hullámegyenlet önmagában nem ,,tud" semmit arról, hogy hogyan keletkeznek a hullámok. A hullámok keltésére vonatkozó minden információt a kezdőfeltételekbe kell belefoglalnunk. Mivel az idő szerinti parciális deriváltak tekintetében másodrendű parciális differenciálegyenlet a hullámegyenlet, azért kezdőfeltételként meg kell adjuk a kezdeti $t=0$ időpillanatban a hullám ,, alakját", azaz a $\psi(x,t=0)=F(x)$ kezdeti kitérésmezőt, valamint a húr pontjainak kezdeti sebességét, azaz a $\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\Big|_{t=0}=G(x)$ kezdeti sebességmezőt. Ezenkívül a feladat matematikailag csak akkor válik egyértelművé, ha a térbeli határfeltételeket is rögzítjük. Végtelen hosszúságú húr végei a végtelenben vannak és ,,szabadok", ilyenkor nincsen térbeli határfeltétel. Véges ℓ hosszúságú húr esetén azzal az esettel foglalkozunk, amikor a húr végei mereven vannak rögzítve. Ekkor a végpontokban a kitérés minden t időpillanatban zérus, $\psi(x=0,t)=\psi(x=\ell,t)=0$.

(b) *A hullámegyenletek d'Alembert-féle megoldása.* A húron terjedő rugalmas hullámokra vonatkozó homogén hullámegyenlet általános megoldása felírható egy jobbra és egy balra haladó síkhullám lineáris szuperpozíciójaként:

$$\psi(x,t)=f_1(x-ct)+f_2(x+ct), \tag{2.4.131}$$

ahol $f_1(u)$ és $f_2(u)$ tetszőleges függvények. Ezek alakját a kezdeti és a határfeltételek határozzák meg egyértelműen. A kezdeti feltételek:

$$\begin{aligned} f_1(x)+f_2(x) &= F(x),\\ -cf_1'(x)+cf_2'(x) &= G(x), \end{aligned} \tag{2.4.132}$$

ahol $f_i'(x)=\frac{df_i(x)}{dx}$, $(i=1,2)$. A második azonosság minkét oldalának primitív függvényét véve

$$f_2(x)-f_1(x)=\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}G(x')dx', \tag{2.4.133}$$

ahol x_0 a húr egy tetszőleges pontjának oordinátája. Ezt és az első kezdeti feltételt összeadva, ill. kivonva rendre az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\Big[F(x)-\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}G(x')dx'\Big],\\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\Big[F(x)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}G(x')dx'\Big]. \end{aligned} \tag{2.4.134}$$

Végtelen hosszú húr esetén a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$\begin{aligned}
&\psi_\infty(x,t)\\
&= \frac{1}{2}\Big[F(x-ct) - \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x-ct} G(x')dx' + F(x+ct) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x+ct} G(x')dx'\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[F(x-ct) + F(x+ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(x')dx'\Big]. \qquad (2.4.135)
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a megoldásból kiesett a tetszőlegesen választott x_0 koordináta. Könnyű egy egyszerű példán szemléltetni, hogy mit is jelent a megoldás, ha pl. $G(x) = 0$. Ekkor úgy vehetjük, hogy a $t = 0$ időpillanatban jelenlevő $F(x)$ alakú zavar (transzverzális kitérés) egy balra és egy jobbra elinduló $f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2}F(x)$ alakú zavarnak a szuperpozíciója, amelyek c sebességgel mozognak jobbra, ill. balra, és mindenkori szuperpozíciójuk adja az kialakuló $\psi(x,t)$ hullámot. Ha a zavar a húr kis darabkájára lokalizált, azaz $F(x)$ csak a húr egy kicsiny darabján különbözik zérustól, akkor egy balra és egy jobbra c sebességgel haladó, lokalizált zavar szuperpozíciója a hullám, ahol a balra, ill. jobbra haladó zavar ,,alakja" nem más, mint az $\frac{1}{2}F(x)$,,mintázat" változatlan eltoltja az x-tengely mentén $\pm ct$ előjeles távolságra a $t = 0$ időpillantbeli helyzetéhez képest.

Némileg bonyolultabb a helyzet, ha a húr véges hosszúságú. Ekkor a rögzített végeknek megfelelő határfeltételek

$$\begin{aligned}
f_1(-ct) + f_2(ct) &= 0,\\
f_1(\ell - ct) + f_2(\ell + ct) &= 0 \qquad (2.4.136)
\end{aligned}$$

tetszőleges $t > 0$ időpillanatban. Az $x = ct$ átjelöléssel élve,

$$\begin{aligned}
f_1(-x) + f_2(x) &= 0,\\
f_1(\ell - x) + f_2(\ell + x) &= 0 \qquad (2.4.137)
\end{aligned}$$

adódik. Innen könnyen megállapíthatjuk, hogy $f_1(u)$-nak és $f_2(u)$-nak is az egész valós számegyenesen értelmezett függvényeknek kell lenniük, valamint 2ℓ szerint periódikus függvényeknek. Valóban, az $x \to x - \ell$ helyettesítéssel a második egyenletből kapjuk, hogy

$$0 = f_1(2\ell - x) + f_2(x) = f_1(2\ell - x) - f_1(-x), \qquad (2.4.138)$$

ahol felhasználtuk az első egyenletet. Hasonlóképpen $x \to \ell + x$ helyettesítéssel élve a második egyenletben és felhasználva utána az elsőt, azt kapjuk, hogy

$$0 = f_1(-x) + f_2(2\ell + x) = -f_2(x) + f_2(2\ell + x). \qquad (2.4.139)$$

Az $f_1(u)$ és $f_2(u)$ függvények $\Delta u = 2\ell$ szerinti periodikussága azt jelenti, hogy a húr bármely adott pontján $T = 2\ell/c$ periódusidővel ugyanaz a kitérésállapot ismétlődik.

A kezdeti feltételekből végtelen hosszú húr esetén kapott képleteink most is felhasználhatóak némi körültekintéssel az $f_1(u)$ és $f_2(u)$ függvények alakjának meghatározására. Vegyük először is észre, hogy véges hosszúságú húr esetén $F(x)$ és $G(x)$ értelmezési tartománya is az $x \in [0, \ell]$ intervallumra van korlátozva. Ezért $u \in [0, \ell]$ esetén a korábbi képleteink használhatóak:

$$\begin{aligned} f_1(u) &= \frac{1}{2}\Big[F(u) - \frac{1}{c}\int_{x_0}^{u} G(x')dx'\Big], \\ f_2(u) &= \frac{1}{2}\Big[F(u) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{u} G(x')dx'\Big], \qquad u \in [0, \ell]. \end{aligned} \tag{2.4.140}$$

Az $u \in [-\ell, 0]$ intervallumban az első határfeltételi egyenletből kapott

$$f_1(u) = -f_2(-u), \qquad f_2(u) = -f_1(-u) \tag{2.4.141}$$

összefüggések értelmezik a keresett $f_1(u)$ és $f_2(u)$ függvényeket. Végül a függvények 2ℓ szerinti periodikusságát használhatjuk fel, hogy kiterjesszük ezen függvények értelmezési tartományát az egész számegyenesre.

Tekinthetjük megint azt az egyszerű példát, amikor $G(x) = 0$ és $F(x)$ egy kis húrdarabra van lokalizálva:

$$\psi_\ell(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \tag{2.4.142}$$

ahol $u \in [0, \ell]$ esetén $f_1(u) = f_2(u) = \frac{1}{2}F(u)$, és az $f_1(u)$, ill. $f_2(u)$ függvények kiterjesztése a számegyenesre úgy történik, ahogy azt fentebb leírtuk. Ekkor egy-egy $\frac{1}{2}F(x)$ alakú zavar indul el rendre a húr két vége felé c nagyságú sebességgel, majd ott ellentétes előjellel, de változatlan alakban verődik vissza.

(c) *A hullámegyenletek Fourier-féle megoldása.* Keressük adott határ- és kezdeti feltételek mellett a hullámegyenlet megoldását

$$\psi(x, t) = \varphi(x)\phi(t) \tag{2.4.143}$$

alakban. Ilyen alakú megoldások akkor és csak akkor léteznek, ha

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2\phi(t)}{dt^2}\frac{1}{\phi(t)} = \frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \text{áll.} = -k^2, \tag{2.4.144}$$

hiszen itt az első egyenlet bal oldala csak t-től, jobb oldala csak x-től függ. A megoldás x-függő tényezője az alábbi probléma megoldása:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k^2\varphi(x) = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0. \tag{2.4.145}$$

Ha $k^2 < 0$ lenne, akkor a differenciálegyenlet megoldásai exponenciális függvények lennének, amelyek azonban sehol sem veszik fel a zérus értéket. Ezért ekkor a határfeltételek nem elégíthetők ki. Marad tehát a $k^2 \geq 0$ eset. Ekkor a differenciálegyenletnek

$$\cos(kx), \qquad \sin(kx) \tag{2.4.146}$$

a független megoldásai. A határfeltételeket azonban csak $\varphi(x) = \sin(kx)$ alakú megoldás tudja kielégíteni, az is akkor és csak akkor, ha $k\ell = \pi n$, ahol $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ egész szám. A határfeltételi-feladatnak a független megoldásai tehát

$$\varphi_n(x) = \sin(k_n x), \qquad k_n = n\frac{\pi}{\ell}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.4.147}$$

függvények. A lehetséges k_n hullámszámok tehát diszkrétek a húr véges hossza miatt. Az $n = 0$ esetet kizárhatjuk, mert azonosan nulla megoldást jelent, azaz amikor a húr nem rezeg. Hasonlóképpen a negatív k értékeket is kizártuk, hiszen a $\sin(-k_n x) = -\sin(k_n x)$ nem független megoldás a $\sin(k_n x)$ megoldáshoz képest, úgyhogy elég az egyik előjelet szerepeltetni. A lehetséges hullámhosszak olyanok, hogy a félhullámhossz éppen egész számszor fér rá a húr hosszára,

$$\ell = n\frac{\pi}{k_n} = n\frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_n}} = n\frac{\lambda_n}{2}. \tag{2.4.148}$$

Adott k_n diszkrét hullámszám esetén az időfüggő tényező eleget tesz a

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega_n^2\phi(t) = 0 \tag{2.4.149}$$

egyenletnek, ahol

$$\omega_n = k_n c. \tag{2.4.150}$$

Az egyenlet független megoldásai $\cos(\omega_n t)$ és $\sin(\omega_n t)$. A határfeltételi feladat általános megoldása tehát

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t) + b_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t)]. \tag{2.4.151}$$

Feltesszük, hogy ez a sor egyenletesen konvergens, azért a sorösszeg és a differenciálás, ill. az integrálás sorrendje felcserélhető, másképpen mondva a sor tagonként differenciálható, ill. integrálható. Ezt a sort nevezzük a megoldás Fourier-előállításának, az egyes tagok által reprezentált hullámokat módusoknak, a diszkrét frekvenciákat sajátfrekvenciáknak.

A sorfejtési együtthatókat a kezdeti feltételek határozzák meg:

$$\begin{aligned}
\psi(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) = F(x), \\
\left.\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin(k_n x) = G(x).
\end{aligned} \tag{2.4.152}$$

Fel fogjuk használni, hogy

$$\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} dx \sin(k_n x)\sin(k_m x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad n \neq m \\ 1 & \text{ha} \quad n = m \end{cases} \tag{2.4.153}$$

azaz, hogy a

$$\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin(k_n x), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.4.154}$$

függvények az $x \in [0, \ell]$ intervallumon ortonormáltak. Ekkor egy-egy ilyen függvénnyel rászorozva a kezdeti feltételi egyenletekre majd integrálva, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} dx F(x)\sin(k_n x), \\
b_n &= \frac{2}{\omega_n \ell}\int_0^{\ell} dx G(x)\sin(k_n x).
\end{aligned} \tag{2.4.155}$$

Itt feltettük, hogy $F(x)$ és $G(x)$ „kellően jó viselkedésű" függvények, azaz hogy előállíthatók Fourier-sorral, ami azt jelenti, hogy léteznek az a_n és b_n meghatározására szolgáló integrálok.

A megoldás fizikai jelentése világosabbá válik, ha az a_n, b_n együtthatókat

$$a_n = C_n \sin\alpha_n, \quad b_n = C_n \cos\alpha_n \tag{2.4.156}$$

alakba írjuk, $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\mathrm{tg}\ \alpha_n = a_n/b_n$, ($\alpha_n \in [-\pi/2, \pi/2]$). Ekkor a határ- és kezdeti feltételeket egyaránt kielégítő megoldás:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t + \alpha_n). \tag{2.4.157}$$

Ez az egyenlet állóhullámok szuperpozíciója. Az $n = 1$ megoldást alapmódusnak nevezzük. Az jellemzi, hogy a kialakuló állóhullámnak csak a húr két végén van csomópontja. Az $n > 1$ módusok az úgynevezett felharmonikusok, az alapfrekvencia egész számszorosával azonos frekvenciájú rezgések. Ezeknek az állóhullámoknak $n - 1$ darab további, belső csomópontjuk van. A csomópontok a húr azon x_m pontjaiban találhatók, amelyekre

$$\sin(k_n x_m) = 0, \qquad k_n x_m = m\pi, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1, n. \tag{2.4.158}$$

2.5 Rugalmasan deformálható közeg klasszikus térelméleti tárgyalása

A rugalmasan deformálható testek dinamikájának eddigi tárgyalásában nem használtuk a Lagrange-formalizmust, hanem közvetlenül Newton második törvényéből indultunk ki. Ez a dinamikai tárgyalás egyrészt könnyebben érthető a területtel ismerkedő Hallgató számára. Másrészt eljárásunkkal azt akartuk hangsúlyozni, hogy a rugalmas deformáció nem tisztán mechanikai probléma, ha figyelembe vesszük a deformáció okozta termikus effektusokat és a hővezetést, és ezért általában nem lehet egyszerűen a legkisebb hatás mechanikai elve alapján kimerítően tárgyalni. Bár a jelen előadásban nem vettük figyelembe sem a hőtágulást, sem a deformáció során bekövetkező esetleges energia-disszipációt, sem a hővezetést, és így a deformćiót tisztán mechanikai problémaként, Newton második törvénye alapján tárgyaltuk, mégis arra irányítottuk a figyelmet, hogy a deformáció hogyan változtatja meg a test termodinamikai tulajdonságait, nevezetesen a test szabadenergiáját. Ebben az esetben azonban megtehettük volna azt is, a rugalmas deformációt tisztán mechanikai jelenségként kezelve a legkisebb hatás elvéből indulunk ki, és Newton második törvényét, azaz a rugalmasan deformálható közeg mozgásegyenletét abból származtatjuk le. Most ezt fogjuk megmutatni.

2.5.1 A rugalmasan deformálható test diszkrét és folytonos modelljének kapcsolata. Lagrange-sűrűség

A rugalmasan deformálható testekről szóló fejezet elején bemutattunk egy modellt, a kisrezgéseket végző pontrendszer modelljét. Azután részletesen foglalkoztunk a rugalmasan deformálható test azon modelljével, amely a testet folytonos tömegeloszlású közegnek tekinti. Valójában azonban nem részleteztük a diszkrét és a folytonos modell kapcsolatát. A két modell között az a lényegi különbség, hogy a diszkrét anyagi pontok rendszere véges szabadsági fokú mechanikai rendszer (véges térfogatú test esetén), míg a folytonos közeg végtelen sok szabadsági fokú mechanikai rendszer. Most a rugalmasan deformálható közeg Lagrange-függvényét le fogjuk származtatni a véges szabadsági fokú rugalmasan kölcsönható pontrendszer Lagrange-függvényéből. Eljárásunk lényege, hogy a folytonos közeget gondolatban kicsiny, b oldalélű, kocka alakú anyagdarabkákra daraboljuk olymódon, hogy elképzelünk egy b élű kockarácsot a térben. Úgy választjuk b-t, hogy a test méretéhez képest kicsiny legyen, de a b oldalélű kocka még makroszkopikus számú atomot tartalmazzon. Úgy vesszük fel a kockarácsot, hogy az origóból kiinduló $\vec{E}_{(i)}$ bázisvektorok alkotják az origóval jelölt kockaalakú elemi cellát. A többi elemi cellát ennek az origóhoz tartozó cellának a párhuzamos eltolásával kapjuk. Az egyes cellák egyik csúcsa ekkor az $\vec{r}_{(n_x,n_y,n_z)} = n_i\vec{E}_{(i)}$ pontokban van, és három élét az $\vec{E}_{(i)}$ vektorok ide történő párhuzamos eltoltja jelöli ki. Az n_i egész számok minden olyan értéket felvesznek, ami ahhoz szükséges, hogy az egész véges térfogatú testet ilyen cellákkal lefedjük. A deformáció során ezek az anyagdarabkák elmozdulnak eredeti helyzetükhöz képest az $\vec{s}_{\vec{r}_{n_x,n_y,n_z}}(t)$ vektorokkal. Az eredetileg $\vec{r}_{n_x,n_y,n_z}$ helyzetvektorú anyagdarabka kinetikus energiája

$$\frac{1}{2}\rho\Delta V\Big(\frac{\partial\vec{s}_{\vec{r}_{n_x,n_y,n_z}}(t)}{\partial t}\Big)^2, \tag{2.5.159}$$

ahol $\Delta V = b^3$. Feltesszük, hogy a szomszédos anyagdarabkák között rugalmas (kvázielasztikus) erők hatnak. Háromféle direkciós állandót értelmezünk, $D_\parallel$, $D_\perp^{(1)}$, ill. $D_\perp^{(2)}$ a direkciós állandó, ha a két szomszédos anyagdarabka az őket összekötő szakasszal párhuzamos elmozdulást szenved, ha a két anyagdarabka egyikének elmozdulása párhuzamos, másikának elmozdulása merőleges a relatív helyzetvektorukra, ill. ha mindkét anyagdarabka elmozdulása merőleges a relatív helyzetvektorukra. Ekkor a rugalmas kölcsönhatás potenciális energiája:

$$\sum_{(n_x,n_y,n_z)}\frac{1}{2}D_\parallel\sum_{i=1,2,3}\Delta_i s_i\Delta_i s_i+\frac{1}{2}D_\perp^{(1)}\sum_{i\neq j}\Delta_i s_i\Delta_j s_j+\frac{1}{2}D_\perp^{(2)}\sum_{i\not{j}}\Delta_j s_i\Delta_j s_i, \tag{2.5.160}$$

ahol $\Delta_j s_i = s_{\vec{r}_{n_x,n_y,n_z}+b\vec{E}_{(j)},i} - s_{\vec{r}_{n_x,n_y,n_z},i}$. A rugalmas állandók $D = m_{red}\omega^2$ alakban írhatók, ahol m_{red} a rugó két végén levő anyagi pontok redukált tömege, $m_{red} = \frac{1}{2}\rho\Delta V$, továbbá válasszuk speciálisan a rugók sajátfrekvenciáit az alábbiak szerint, $\omega_\parallel^2 = 2(\lambda+2\mu)/(\rho b^2)$, $\omega_\perp^{(1)\ 2} = 2(\lambda+\mu)/(\rho b^2)$, ill. $\omega_\perp^{(2)\ 2} = 2\mu/(\rho b^2)$. Ekkor a potenciális energia

$$\sum_{(n_x,n_y,n_z)}\frac{\Delta V}{b^2}\Big[\frac{1}{2}(\lambda+\mu)(\sum_i\Delta_i s_i)^2+\frac{1}{2}\mu\sum_i\sum_j\Delta_j s_i\Delta_j s_i\Big]. \tag{2.5.161}$$

Ha ezenkívül még $\vec{f}(\vec{r})$ tömegerő is hat a részecskékre, akkor a külső erőtérben a részecskék potenciális energiája

$$-\sum_{(n_x,n_y,n_z)}\rho\Delta V f(\vec{r}_{n_x,n_y,n_z})\cdot\vec{s}(\vec{r}_{n_x,n_y,n_z}). \tag{2.5.162}$$

A véges sok anyagdarabkából álló fenti pontrendszer Lagrange-függvénye:

$$\begin{aligned}L(\vec{s}(\vec{r}_{n_x,n_y,n_z},\dot{\vec{s}}_{\vec{r}_{n_x,n_y,n_z}}) \;=\; & \sum_{(n_x,n_y,n_z)}\Delta V\Big[\frac{1}{2}\rho\Big(\frac{\partial\vec{s}(\vec{r}_{n_x,n_y,n_z},t)}{\partial t}\Big)^2\\ & +\rho f(\vec{r}_{n_x,n_y,n_z})\cdot\vec{s}(\vec{r}_{n_x,n_y,n_z},t)\\ & -\frac{1}{2}(\lambda+\mu)(\sum_i\frac{\Delta_i s_i}{b})^2-\frac{1}{2}\mu\sum_i\sum_j\frac{\Delta_j s_i}{b}\frac{\Delta_j s_i}{b}\Big].\end{aligned} \tag{2.5.163}$$

Ha a $b\to 0$ határértéket képezzük, akkor a differenciahányadosok helyett parciális deriváltakat kapunk, a test anyagdarabkáira történő összegzés pedig a test térfogatára vett Riemann-integrállá alakul, mint a megfelelő integrálközelítő összeg határértéke. Ekkor a Lagrange-függvény térfogati integrál alakját ölti,

$$L = \int_V dV \mathcal{L}, \tag{2.5.164}$$

ahol $\mathcal{L}$ az úgynevezett Lagrange-sűrűség, ami az elmozdulás-vektormezőnek és első parciális deriváltjainak a függvénye,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\Big(\frac{\partial \vec{s}(\vec{r},t)}{\partial t}\Big)^2 + \rho \vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{s}(\vec{r},t) - \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\Big(\frac{\partial s_i(\vec{r},t)}{\partial x_i}\Big)^2 - \frac{1}{2}\mu \frac{\partial s_i(\vec{r},t)}{\partial x_j}\frac{\partial s_i(\vec{r},t)}{\partial x_j}. \tag{2.5.165}$$

A hatás természetesen most is a Lagrange-függvény idő szerinti integrálja rögzített kezdeti és végső időpont között,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV \mathcal{L}. \tag{2.5.166}$$

A hatás az $\vec{s}(\vec{r},t)$ vektormező funkcionálja. A rugalmasan deformálható test szabadsági fokainak időfüggését az $\vec{s}(\vec{r},t)$ vektormező időbeli változása írja le. Ahány $\vec{r}$ pont van a térnek a test álta elfoglalt térfogatában, ,, annyi darab" $\vec{s}$ vektor jelenti az általános koordinátákat. A szabadsáfgi fokok kontinuum számosságúak. Úgy tekinthetjük, hogy rögzített t időpillanatban az $s_i(\vec{r},t)$ általános koordinátákat az $\vec{r}$ helyzetvektor, mint folytonos index és a Decartes-koordinátarendszerbeli 3 darab vetületet jelentő $i = 1, 2, 3$ index indexeli. Az elmozdulás vektormező egy klasszikus fizikai mező: a geometriai tér minden pontjában értelmezve van egy fizikai mennyiség. A fizikai mező egy végtelen szabadsági fokú rendszer, ha a geometriai tér pontjai folytonosan töltik ki a teret. Az elméleti leírás, amit ebben a fejezetben bemutatunk, arra példa, hogy hogyan lehet egy klasszikus fizikai mező dinamikáját leírni. Amit csinálunk, klasszikus térelméletnek szokás nevezni.

A legkisebb hatás elve azt jelenti, hogy az elmozdulás-vektormező adott $\vec{s}(\vec{r},t_i)$ kezdeti és $\vec{s}(\vec{r},t_f)$ végső térkonfiguráció között az idő függvényében úgy változik, hogy a hatást minimálissá tegye az ugyanezen kezdő és végső térkonfigurációkat összekötő tetszőleges, elképzelt, időben változó térkonfigurációk halmazán. Alább megmutatjuk, hogy az Euler-Lagrange-egyenletek éppen a Newton második törvénye alapján korábban már levezetett mozgásegyenletek.

2.5.2 A hatás variációja

Célunk, hogy egyrészt leszármaztassuk a legkisebb hatás elvéből az izotróp, rugalmasan deformálható közeg Euler-Lagrange-féle mozgásegyenleteit, továbbá a rugalmas deformáció során érvényes lokális megmaradási törvényeket. Képezzük ehhez a hatás megváltozását elsőrendűen kicsiny mennyiségekkel bezárólag, ha olyan infinitezimális transzformációt végzünk, amikor a térkoordinátákat, az időt, és a fizikai mezőt jellemző térmennyiséget egyaránt transzformáljuk:

$$\begin{aligned} \vec{r} &\to \vec{r}' = \vec{r} + \vec{\epsilon}(\vec{r}), \\ t &\to t' = t + \epsilon_0, \qquad \epsilon_0 = \text{ const.} \\ s_i(\vec{r}, t) &\to s_i'(\vec{r}, t) = s_i(\vec{r}, t) + \eta_i(\vec{r}, t) \end{aligned} \tag{2.5.167}$$

ahol $\vec{\epsilon}(\vec{r})$, ϵ_0 és $\eta_i(\vec{r}, t)$ infinitezimális megváltozások. A térkoordináták és az idő transzformációja azt jelenti, hogy az eredeti adatokkal $(\vec{r}, t)$ és a transzformált adatokkal $(\vec{r}', t')$ ugyanazt az objektív térbeli pontot és időpillanatot jelenti. Ezért a térmennyiség teljes megváltozása adott térbeli pontban, adott időpontban

$$\Delta s_i(\vec{r}, t) = s_i'(\vec{r}', t') - s_i(\vec{r}, t) = \epsilon_j \partial_j s_i + \epsilon_0 \partial_t s_i + \eta_i. \tag{2.5.168}$$

Itt és az alábbiakban az egyszerűség kedvéért a parciális deriváltakat átjelöljük,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \partial_j, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \partial_t. \tag{2.5.169}$$

A koordinátatranszformáció során $dt' = dt$ és az infinitezimális térfogatelem transzformáltja

$$dV' = \det\left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\right) dV = \det\left(\delta_{i,j} + \partial_j \epsilon_i\right) dV = (1 + \partial_k \epsilon_k) dV. \tag{2.5.170}$$

Tegyük fel általánosan, hogy a Lagrange-sűrűség,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(s_i(\vec{r}, t), \partial_t s_i(\vec{r}, t), \partial_j s_i(\vec{r}, t), \vec{r}, t), \tag{2.5.171}$$

a fizikai mezőtől és annak parciális deriváltjaitól függ, valamint esetleg explicit módon is függ a helytől és az időtől. A (2.5.171) alakú Lagrange-sűrűség feltételezése azt jelenti, hogy a Lagrange-sűrűség lokális térben és időben, azaz a Lagrange-sűrűség értéke adott helyen és időpillanatban csak attól függ, hogy az adott helyen és időpillanatban milyen a fizikai mezőnek és első parciális deriváltjainak az értéke. Ez azt jelenti, hogy attól nem függ adott helyen a Lagrange-sűrűség, hogy más helyeken mi a fizikai mező értéke, és attól sem függ adott pillanatban a Lagrange-sűrűség értéke adott időpillanatban, hogy a fizikai mező milyen volt a korábbi időpillanatokban, vagy milyen lesz a későbbi időpillanatokban. Utóbbi azt feltételezi, hogy a fizikai mezőnek nincsen ,,emlékezete". A hatás megváltozása a (2.5.167) infinitezimális transzformáció során:

$$\delta S = \int_{t_i'}^{t_f'} dt' \int_{V'} dV' \mathcal{L}' - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV \mathcal{L}, \tag{2.5.172}$$

ahol

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(s_i'(\vec{r}', t'), \partial_{t'} s_i'(\vec{r}', t'), \partial_j' s_i'(\vec{r}', t'), \vec{r}', t') \tag{2.5.173}$$

és $\partial'_j = \partial/\partial x'_j$. Helyettesítsük be ide a transzformált koordináták és időváltozó explicit alakját, akkor

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(s'_i(\vec{r},t), \partial_t s'_i(\vec{r},t), \partial_j s'_i(\vec{r},t), \vec{r}, t) + \epsilon_0 \partial_t \mathcal{L} + \epsilon_j(\vec{r},t)\partial_j \mathcal{L} \tag{2.5.174}$$

írható az elsőrendűen kicsiny tagokkal bezárólag, ahol ezzel a pontossággal az utolsó két tagban minden argumentum vesszőtlen mennyiség. A hatás (2.5.172) megváltozásának első tagjában, azaz a transzformált hatás kifejezésében visszatérve az eredeti $\vec{r}$ és t integrálási változókra, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV[(1+\partial_k\epsilon_k)\mathcal{L}(s'_i(\vec{r},t), \partial_t s'_i(\vec{r},t), \partial_j s'_i(\vec{r},t), \vec{r}, t) \\ &\quad +\epsilon_0\partial_t\mathcal{L} + \epsilon_j(\vec{r},t)\partial_j\mathcal{L} - \mathcal{L}(s_i(\vec{r},t), \partial_t s_i(\vec{r},t), \partial_j s_i(\vec{r},t), \vec{r}, t)].\end{aligned} \tag{2.5.175}$$

Elsőrendűen kicsiny tagokkal bezárólag kapjuk továbbá, hogy

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(s'_i(\vec{r},t), \partial_t s'_i(\vec{r},t), \partial_j s'_i(\vec{r},t), \vec{r}, t) \\ &= \mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s_i(\vec{x},t)}\eta_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_t s_i(\vec{x},t)]}\partial_t\eta_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_j s_i(\vec{x},t)]}\partial_j\eta_i, \\ &(1+\partial_k\epsilon_k)\mathcal{L}(s'_i(\vec{r},t), \partial_t s'_i(\vec{r},t), \partial_j s'_i(\vec{r},t), \vec{r}, t) \\ &= (1+\partial_k\epsilon_k)\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s_i(\vec{x},t)}\eta_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_t s_i(\vec{x},t)]}\partial_t\eta_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_j s_i(\vec{x},t)]}\partial_j\eta_i,\end{aligned} \tag{2.5.176}$$

ahol az egyenlőségek jobb oldalán most már mindenütt a vesszőtlen mennyiségek szerepelnek. A fentiek segítségével, parciális integrálás után a hatás infinitezimális megváltozása:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV\Big[\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s_i(\vec{x},t)} - \partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_t s_i(\vec{x},t)]} - \partial_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_j s_i(\vec{x},t)]}\Big)\eta_i \\ &\quad +\partial_t\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_t s_i(\vec{x},t)]}\eta_i + \epsilon_0\mathcal{L}\Big) + \partial_j\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_j s_i(\vec{x},t)]}\eta_i + \epsilon_j\mathcal{L}\Big)\Big].\end{aligned} \tag{2.5.177}$$

A hatás infinitezimális transzformáció során bekövetkező megváltozásának elsőrendűen kicsiny tagokkal bezárólag vett (2.5.177) kifejezését nevezzük a hatás első variációjának. A hatás első variációjának segítségével tudjuk megfogalmazni matematikailag a legkisebb hatás elvét, és ugyancsak az első variáció ismeretében tudjuk értelmezni a fizikai mezőt jellemző megmaradó mennyiségeket.

2.5.3 A legkisebb hatás elve és az Euler-Lagrange-egyenletek

A fizikai mező Euler-Lagrange-egyenleteinek általános alakját a legkisebb hatás elvéből kapjuk meg. A legkisebb hatás elve értelmében a hatásnak szélsőértéke van a fizikai mező valóságos időbeli változása esetén a fizikai mező összes olyan elképzelt időbeli változásával összehasonlítva, amelyek a kezdeti t_i időpillanatban azonos $s_i(\vec{r}, t_i)$, a végső t_f időpillanatban azonos $s_i(\vec{r}, t_f)$ térkonfigurációt jelentenek és a fizikai mező által kitöltött V térbeli tartomány határain is azonosak. Matematikailag a hatásfunkcionál ilyen szélsőértékének szükséges feltétele, hogy a hatás első variációja tűnjön el, $\delta S = 0$, ha nem végzünk koordináta-transzformációt ($\epsilon_0 = 0$, $\epsilon_i = 0$) és rögzített a kezdeti és végső térkonfiguráció, $\eta_i(\vec{r}, t_i) = \eta_i(\vec{r}, t_f) = 0$, ill. ha a fizikai mező értéke is rögzített a V térbeli tartomány ∂V határán, $\eta_i(\vec{r}, t) = 0|_{\partial V}$. A megfogalmazott feltételekkel keresett szélsőérték szükséges feltétele így:

$$0 \ = \ \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i(\vec{r}, t)} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_t s_i(\vec{r}, t)]} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_j s_i(\vec{r}, t)]} \Big) \eta_i(\vec{r}, t). \tag{2.5.178}$$

A variációszámítás alaptétele értelmében a jobb oldalon álló integrál akkor és csak akkor tűnhet el azonosan az időbeli és térbeli határfeltételeknek eleget tevő, de egyébként tetszőleges $\eta_i(\vec{r}, t)$ infinitezimális megváltozás esetén, ha ezt a tetszőleges függvényt az integrandusban megszorzó tényező azonosan eltűnik:

$$0 \ = \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i(\vec{r}, t)} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_t s_i(\vec{r}, t)]} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_j s_i(\vec{r}, t)]}. \tag{2.5.179}$$

A kapott egyenlet a klasszikus fizikai mező Euler-Lagrange-egyenlete, vagy másképpen a klasszikus fizikai mező mozgásegyenlete, vagy még más szóhasználattal a fizikai mező változását leíró klasszikus téregyenlet.

Ha ide behelyettesítjük az izotróp, rugalmasan deformálható közeg korábban levezetett Lagrange-sűrűségét, akkor az Euler-Lagrange-egyenlet éppen a rugalmas közegre vonatkozó mozgásegyenletet eredményezi, amelyet közvetlenül is megkaptunk Newton második törvényéből kiindulva. Az $s_i(\vec{r}, t)$ általános koordinátákhoz kanonikusan konjugált impulzusok

$$\pi_i(\vec{r}, t) \ = \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_t s_i(\vec{r}, t)]} = \rho \partial_t s_i(\vec{r}, t), \tag{2.5.180}$$

továbbá

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_j s_i(\vec{r}, t)]} \ &= \ -\mu \partial_j s_i - (\lambda + \mu) \delta_{i,j} \partial_k s_k, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i(\vec{r}, t)} \ &= \ \rho f_i(\vec{r}), \end{aligned} \tag{2.5.181}$$

úgyhogy valóban a mozgásegyenlet:

$$\rho \partial_t^2 s_i - \mu \partial_j \partial_j s_i - (\lambda + \mu) \partial_i \partial_k s_k - \rho f_i \ = \ 0, \tag{2.5.182}$$

avagy vektoralakban:

$$\rho \partial_t^2 \vec{s} - \mu \Delta \vec{s} - (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{s}) = \rho \vec{f}. \tag{2.5.183}$$

2.5.4 Noether tétele. Lokális megmaradási törvények

Megmaradó mennyiségekhez Noether tétele alapján jutunk. Noether tétele kimondja, hogy a fizikai mező minden folytonos szimmetriájához tartozik pontosan egy megmaradó mennyiség. Ilyen folytonos szimmetriák lehetnek:

1. Az időszámítás kezdetének eltolásával szemben mutatott szimmetria. Az időmérés kezdetének eltolása 1 darab folytonos paraméterrel, az eltolás mértékével jellemezhető transzformáció. Ha a fizikai mezőnek az időbeli eltolás szimmetriája, azaz az S hatás invariáns az időbeli eltolással szemben, akkor létezik 1 darab megmaradó mennyiség, amit definíció szerint a fizikai mező energiájának nevezünk.

2. A vonatkoztatási rendszer eltolása a térben. Az eltolás egy állandó vektorral jellemezhető, amelynek 3 független komponense van, így a térbeli eltolások 3 darab folytonos paraméterrel jellemezhetők, az egyes tengelyek irányában történő eltolások mértékével. Következésképpen ha a fizikai mezőnek a térbeli eltolások szimmetriái, azaz a hatás invariáns a térbeli eltolásokkal szemben, akkor létezik egy megmaradó vektormennyiség, amit definíció szerint a fizikai mező impulzusának nevezünk.

3. A vonatkoztatási rendszer elforgatása a térben. Az elforgatásokat is 3 adat jellemzi, a 3 Euler-szög, vagy az elforgatás tengelyének iránya (egy egységvektor 2 független adata) és az adott irány körüli elforgatás szöge. Ennek megfelelően, ha a térbeli elforgatások szimmetriái a fizikai mezőnek, akkor létezik egy megmaradó (axiál)vektor, amelyet a fizikai mező impulzusmomentumának nevezünk.

Alább bebizonyítjuk Noether tételét ezen speciális szimmetriák esetén. Fejezzük ki ehhez a hatás (2.5.177) első variációját a térmennyiség teljes megváltozásával,

$$\Delta s_i = \eta_i + \epsilon_j \partial_j s_i + \epsilon_0 \partial_t s_i. \tag{2.5.184}$$

Feltételezve, hogy a valóságos (azaz a téregyenleteknek eleget tevő) térkonfigurációt módosítjuk infinitezimálisan η_i-vel, ekkor

$$\begin{aligned}\delta S|_{\text{valóságos térkonf.}} &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV \Big\{ \partial_t \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)} (\Delta s_i - \epsilon_k \partial_k s_i - \epsilon_0 \partial_t s_i) + \epsilon_0 \mathcal{L} \Big] \\ &\quad + \partial_j \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j s_i)} (\Delta s_i - \epsilon_k \partial_k s_i - \epsilon_0 \partial_t s_i) + \epsilon_j \mathcal{L} \Big] \Big\}.\end{aligned} \tag{2.5.185}$$

Ha szimmetriatranszformációt hajtunk végre, akkor a valóságos térkonfiguráción számolt hatás invariáns marad, azaz az első variációja zérus,

$$\delta S|_{\text{valóságos térkonf.}} = 0. \tag{2.5.186}$$

Ebből a feltételből tudjuk majd kiolvasni az egyes folytonos szimmetriákból következő megmaradási törvényeket. Vegyük sorra a fentebb felsorolt eseteket.

1. Ha a

$$\Delta s_i = 0, \qquad \epsilon_k = 0, \qquad \epsilon_0 = \text{ áll.} \tag{2.5.187}$$

időbeli eltolási transzformáció tetszőleges infinitezimális ϵ_0 =áll. esetén szimmetria, akkor

$$0 = \epsilon_0 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV \Big[\partial_t\Big(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)}\partial_t s_i\Big) - \partial_j\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j s_i)}\partial_t s_i\Big)\Big]. \tag{2.5.188}$$

Tetszőleges ϵ_0 állandó esetén a jobb oldal akkor és csak akkor tűnik el, ha az integrál értéke zérus:

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV \Big[\partial_t\Big(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)}\partial_t s_i\Big) - \partial_j\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j s_i)}\partial_t s_i\Big)\Big]. \tag{2.5.189}$$

Gauss tétele segítségével a második integrált, egy vektormező divergenciájának térfogati integrálját, átírjuk ezen V térfogatot határoló ∂V felületre vett integrállá,

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV \partial_t\Big(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)}\partial_t s_i\Big) - \int_{\partial V} df\ n_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j s_i)}\partial_t s_i, \tag{2.5.190}$$

ahol $\vec{n}$ a ∂V határfelület külső normálisa. Az (2.5.189), ill. (2.5.190) egyenleteket az energiára vonatkozó kontinuitási egyenlet integrális alakjának nevezzük. Ebből kiolvashatjuk az energia globális megmaradásának, ill. az energia lokális megmaradásának a törvényét.

   (a) Az (2.5.190) egyenletből először kiolvasunk egy globális megmaradási törvényt. Ha a V tartomány kiterjed az egész (végtelen) geometriai térre, akkor annak a határai a végtelenben vannak, ahol eltűnik a térmennyiség és deriváltjai. Ekkor a felületi integrál eltűnik, azaz

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} dt \int dV \partial_t\Big(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)}\partial_t s_i\Big), \tag{2.5.191}$$

   úgyhogy

$$\int dV\Big(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)}\partial_t s_i\Big)_{t_f} = \int dV\Big(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)}\partial_t s_i\Big)_{t_i} \tag{2.5.192}$$

   Mivel azonban az idő szerinti integrálás határai is tetszőlegesek, ez azt jelenti, hogy a

$$H = \int dV\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)}\partial_t s_i - \mathcal{L}\Big) \tag{2.5.193}$$

mennyiség az időbeli eltolási szimmetria következtében megmarad. Ezt a mennyiséget a fizikai mező energiájának nevezzük. Ha az integrandust kifejezzük az s_i általános koordinátákkal, azok térkoordináták szerinti parciális deriváltjaival és a hozzájuk kanonikusan konjugált $\pi_i = \partial\mathcal{L}/[\partial(\partial_t s_i)]$ impulzusokkal, akkor az integrandust a fizikai mező $\mathcal{H}$ Hamilton-sűrűségének, az integrálját pedig a fizikai mező Hamilton-függvényének nevezzük,

$$H = \int dV\mathcal{H}, \qquad \mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)}\partial_t s_i - \mathcal{L}. \tag{2.5.194}$$

Ez a fogalom diszkrét anyagi pontok rendszerének mechanikájából ismert $H = \sum_i p_i\dot{q}_i - L$ Hamilton-függvény általánosítása kontinuum számosságú szabadsági fokkal rendelkező fizikai rendszerre, a fizikai mezőkre. Ha tehát az egész teret kitöltő fizikai mezőnek az időbeli eltolás szimmetriája, akkor a fizikai mező energiát hordoz, amire megmaradási törvény érvényes. Ez globális megmaradási törvény, az egész geometriai térben jelenlevő fizikai mező teljes energiájának megmaradását jelenti. Mivel a Lagrange-sűrűség térben és időben lokális volt, azért a Hamilton-sűrűség is térben és időben lokálisnak adódott. Mivel a fizikai mező teljes energiájához így az egyes térfogatelemek egymástól függetlenül járulnak hozzá annak megfelelően, hogy ott éppen mi az adott pillanatban a fizikai mező értéke, azért a $\mathcal{H}$ Hamilton-sűrűség úgy tekinthető, mint a térfogategység energiája, azaz mint energiasűrűség, $\rho_\epsilon = \mathcal{H}$.

(b) Térjünk most vissza az egyenlet eredeti (2.5.189) alakjára, amikor V tetszőleges véges térfogatot jelöl. Mivel az integrálási tartomány úgy az időben, mint a térben tetszőleges, az integrál akkor és csak akkor lehet minden esetben zérus, ha az integrandus zérus. Az integrandus eltűnése az alábbi egyenletre vezet:

$$\partial_t\rho_\epsilon + \partial_j S_j = 0, \tag{2.5.195}$$

vagy vektori alakban

$$\partial_t\rho_\epsilon + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0, \tag{2.5.196}$$

ahol

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)}\partial_t s_i - \mathcal{L} = \pi_i\partial_t s_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}, \\ S_j &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j s_i)}\partial_t s_i. \end{aligned} \tag{2.5.197}$$

Itt $\rho_\epsilon = \mathcal{H}$ a fizikai mező energiasűrűsége. A kapott parciális differenciálegyenlet az energia lokális megmaradását kifejező kontinuitási egyenlet. Ezt láthatjuk abból, ha a korábbi (2.5.189) integrális alakot nézzük, ami véges térfogat esetén a Gauss-tétel alkalmazása után

$$\frac{d}{dt}\int_V dV \rho_\epsilon = -\int_{\partial V} df\ \vec{n}\cdot\vec{S} \tag{2.5.198}$$

alakot ölt. Az egyenlet bal oldalán szereplő térfogati integrál a fizikai mező energiája a V térfogatban,

$$E_V = \int_V dV \rho_\epsilon, \tag{2.5.199}$$

úgyhogy egyenletünk azt jelenti, hogy a V térfogatban található fizikai mező energiájának megváltozását a jobb oldali felületi integrál határozza meg,

$$\frac{dE_V}{dt} = -\int_{\partial V} df\ \vec{n}\cdot\vec{S}. \tag{2.5.200}$$

Utóbbinak a járuléka negatív, ha az $\vec{S}$ vektor a V tartomány határán kifelé mutat a V tartományból, ill. pozitív, ha befelé. Az $\vec{S}$ vektort úgy értelmezhetjük, mint az $\vec{S}$ vektorra merőleges egységfelületen időegység alatt átáramló energiát, az $\vec{n}\cdot\vec{S}$ vetületet, mint az $\vec{n}$ normálisú felületen időegység alatt átáramló energiát (előjelesen, ha S_n pozitív, ill. negatív, akkor ki- ill. beáramló energiáról beszélünk). Az egyenlet azt fejezi ki, hogy a V térfogatban azért változik csak a fizikai mező energiája, mert oda a határfelületen energia áramlik be, vagy onnan a határfelületen energia áramlik ki. Ha tehát a fizikai mezőnek szimmetriája az időbeli eltolás, akkor az energia lokálisan megmarad. A lokális energiamegmaradás azt fejezi ki, hogy a fizikai mező energiája nem keletkezik a semmiből és nem vész el, hanem azért változik egy adott térfogatban, mert oda be- ill. onnan kiáramlik.

2. A vonatkoztatási rendszer eltolása a térben a

$$\Delta s_i = 0, \qquad \epsilon_j = \text{ áll. }, \epsilon_0 = 0 \tag{2.5.201}$$

transzformációt jelenti. Ha a mozgásegyenleteket kielégítő térkonfigurációhoz tartozó hatást transzformáljuk ilyen módon, akkor a hatás megváltozása:

$$0 \;=\; \epsilon_k \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV \Big[\partial_t\Big(-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)}\partial_k s_i\Big) + \partial_j\Big(-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j s_i)}\partial_k s_i + \mathcal{L}\delta_{j,k}\Big)\Big]. \tag{2.5.202}$$

Ha bevezetjük a g_k vektormezőt és a $\Pi_{k,j}$ tenzormezőt a

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)}\partial_k s_i = \pi_i(\partial_k s_i), \\ \Pi_{k,j} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j s_i)}\partial_k s_i - \mathcal{L}\delta_{j,k} \end{aligned} \tag{2.5.203}$$

definícióval, akkor felhasználva, hogy ϵ_k tetszőleges állandó infinitezimális vektor, azt kapjuk, hogy

$$0 \;=\; \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV[\partial_t g_k + \partial_j \Pi_{k,j}]. \qquad (2.5.204)$$

Mivel az időintervallum, amelyre integrálunk tetszőleges lehet, s az egyenlőségnek mégis fenn kell állnia, ezért az következik, hogy

$$0 \;=\; \int_V dV[\partial_t g_k + \partial_j \Pi_{k,j}] \qquad (2.5.205)$$

minden t időpillanatban és tetszőleges V térfogat esetén. Alakítsuk most át a második integrált a jobb oldalon Gauss tétele segítségével felületi integrállá. Ha $\vec{n}$ jelöli a V tartományt határoló ∂V felület külső normálisát, akkor

$$\frac{d}{dt}\int_V dV g_k = -\int_V dV \partial_j \Pi_{k,j} = -\int_{\partial V} df n_j \Pi_{k,j}. \qquad (2.5.206)$$

(a) Először megint globális megmaradási törvényt tudunk kiolvasni az egyenletből. Terjesszük ki a V térfogatot a teljes térre, akkor annak a végtelenben levő felszínén a térmennyiség és így $\Pi_{k,j}$ is eltűnik, úgyhogy a

$$\frac{d}{dt}\int dV g_k = 0 \qquad (2.5.207)$$

egyenletet kapjuk, ami azt jelenti, hogy a

$$P_k = \int dV g_k \qquad (2.5.208)$$

vektor értéke időben állandó (itt a térfogati integrálás tartománya az egész tér), hiszen

$$\frac{dP_k}{dt} = 0 \qquad (2.5.209)$$

miatt $P_k(t)$ =áll. Másrészt tudjuk, hogy ez a vektormennyiség azért marad meg, mert feltételeztük a térbeli eltolással szembeni szimmetriáját a fizikai mezőnek. A $\vec{P}$ fizikai mennyiség tehát a fizikai mező impulzusa. Mivel azonban ehhez a fizikai mező térfogatelemenként függetlenül járul hozzá $\vec{g}dV$ impulzusadaggal, azért azt kell mondjuk, hogy $\vec{g}$ a fizikai mező impulzusa a térfogategységben, más néven a fizikai mező impulzussűrűsége.

(b) Miután ismerjük $\vec{g}$ fizikai jelentését, most már visszatérhetünk az (2.5.205), ill. (2.5.206) egyenletek jelentéséhez, ahol a V térfogat tetszőleges, véges térfogat. Ekkor a (2.5.205) egyenletből következik, az alábbi differenciális összefüggés:

$$\partial_t g_k + \partial_j \Pi_{k,j} = 0, \qquad (2.5.210)$$

ami szerkezetében pontosan olyan alakú, mint az energiára vonatkozó kontinuitási egyenlet. Hasonló érveléssel, mint amit ott követtünk, beláthatjuk, hogy az impulzus lokális megmaradási törvényének differenciális alakja áll előttünk, az impulzusra vonatkozó kontinuitási egyenlet. Valóban az (2.5.210) egyenlet (2.5.206) integrális alakjából az következik, hogy a tér V térfogatú tartományában a fizikai mező impulzusa, $\int_V \vec{g} dV$ azért és csak azért változik időben, mert a tartomány felületén a tartományból impulzus áramlik ki, vagy impulzus áramlik be a tartományba. A $\Pi_{k,j}$ mennyiség az impulzusáram sűrűsége. Ez másodrendű tenzorként transzformálódik a térbeli elforgatások során, a jelentése, hogy mekkora a j irányba mutató normálisú egységfelületen időegység alatt átáramló impulzus k-irányú komponense.

3. A vonatkoztatási rendszer térbeli elforgatását $\vec{n}$ =áll. irány körül az infinitezimális $d\alpha$ =áll. szöggel az alábbi transzformáció írja le:

$$\Delta s_i = (d\alpha\ \vec{n} \times \vec{s})_i = \epsilon_{i,j,k} n_j s_k d\alpha, \quad \epsilon_i(\vec{r}) = (d\alpha\ \vec{n} \times \vec{r})_i = \epsilon_{i,j,k} n_j x_k d\alpha, \quad \epsilon_0 = 0. \tag{2.5.211}$$

A térmennyiség teljes megváltozása (adott objektív időpillanatban és helyen a megváltozása) nem zérus, mert ha elforgatjuk a vonatkoztatási rendszert (a térbeli koordinátarendszert), akkor a térmennyiségvektor komponensei is transzformálódnak ugyanúgy, mint a helyzetvektorok komponensei. Fizikai térkonfigurációkon nézve a hatás megváltozása:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV \Big\{ \partial_t \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)} (\delta_{i,l}\epsilon_{l,j,k} n_j s_k - \epsilon_{l,j,k} n_j x_k \partial_l s_i) \Big] \\ &\quad + \partial_n \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_n s_i)} (\delta_{i,l}\epsilon_{l,j,k} n_j s_k - \epsilon_{l,j,k} n_j x_k \partial_l s_i) + \delta_{l,n}\epsilon_{n,j,k} n_j x_k \mathcal{L} \Big] \Big\} d\alpha. \end{aligned} \tag{2.5.212}$$

Ha figyelembe vesszük, hogy ennek az egyenlőségnek tetszőleges infinitezimális $d\alpha$ elforgatási szög esetén fenn kell állnia, és kihasználjuk, hogy az elforgatás iránya térben és időben állandó $\vec{n}$ egységvektor, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon_{l,j,k} n_j \int_{t_i}^{t_f} dt \int_V dV \Big\{ \partial_t \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)} (\delta_{i,l} s_k - x_k \partial_l s_i) \Big] \\ &\quad + \partial_n \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_n s_i)} (\delta_{i,l} s_k - x_k \partial_l s_i) + \delta_{l,n} x_k \mathcal{L} \Big] \Big\}. \end{aligned} \tag{2.5.213}$$

Mivel az $\epsilon_{j,k,l}$ teljesen antiszimmetikus harmadrendű tenzor bármely két indexének felcserélésével szemben antiszimmetrikus, így $\epsilon_{j,k,l} = -\epsilon_{j,l,k}$ is teljesül. Az $\epsilon_{j,k,l} A_{k,l}$ típusú kifejezésben az első tényező antiszimmetriája miatt az A

tenzor az antiszimmetrizáltjával helyettesíthető (hiszen szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzor kontrakciója mindig nulla): $\epsilon_{j,k,l}A_{k,l} = \epsilon_{j,k,l}A^{(a)}_{k,l}$, ahol $A^{(a)}_{k,l} = \frac{1}{2}(A_{k,l} - A_{l,k})$. Mivel az egyenletünk szerkezete $0 = n_j\epsilon_{j,k,l}A_{k,l} = n_j\epsilon_{j,k,l}A^{(a)}_{k,l}$ alakú, és a jobb oldal nem tartalmazza az A tenzor szimmetrikus részét, azért ez az egyenlet csak az A tenzor antiszimmetrikus részéről mond valamit. Mivel az n_j-k tetszőlegesek, $0 = \epsilon_{j,k,l}A^{(a)}_{k,l}$ következik, ami viszont azt vonja maga után, hogy az antiszimmetrikus tenzor valamennyi lineárisan független $A^{(a)}_{k,l} = -A^{(a)}_{l,k}$ komponense eltűnik:

$$A^{(a)}_{k,l} = 0, \quad \text{ahol } (k,l) = (1,2),(1,3),(2,3) \text{ rendezett párok.} \tag{2.5.214}$$

Ha bevezetjük a

$$\begin{aligned} J_{k,l} &= -J_{l,k} \\ &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t s_i)}(\delta_{i,l}s_k - \delta_{i,k}s_l - x_k\partial_l s_i + x_l\partial_k s_i) \\ &= \pi_k s_l - \pi_l s_k + x_k g_l - x_l g_k \end{aligned} \tag{2.5.215}$$

antiszimmetrikus másodrendű tenzormezőt, és a

$$\begin{aligned} \Pi^{(J)}_{n,k,l} &= -\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_n s_i)}(\delta_{i,l}s_k - \delta_{i,k}s_l - x_k\partial_l s_i + x_l\partial_k s_i) + (\delta_{l,n}x_k - \delta_{k,n}x_l)\mathcal{L}\Big) \\ &= x_k\Pi_{l,n} - x_l\Pi_{k,n} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_n s_k)}s_l - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_n s_l)}s_k \end{aligned} \tag{2.5.216}$$

harmadrendű tenzormezőt, amely a második és harmadik indexének felcserélésében antiszimmetrikus, $\Pi^{(J)}_{n,k,l} = -\Pi^{(J)}_{n,l,k}$, akkor egyenletünk újra kontinuitási egyenlet alakját ölti:

$$\frac{d}{dt}\int_V dV\, J_{k,l} = -\int_{\partial V} df\; n_n\Pi^{(J)}_{n,k,l}, \tag{2.5.217}$$

avagy differenciális alakban

$$\partial_t J_{k,l} + \partial_n\Pi^{(J)}_{n,k,l} = 0. \tag{2.5.218}$$

Hasonlóan , mint az előző esetekben kiolvashatjuk, hogy végtelen térfogatú rendszer esetén

$$\int dV\, J_{k,l} = \text{ áll.} \tag{2.5.219}$$

megmaradó mennyiség. Mivel ez 3 darab független mennyiséget jelent, ami a forgásszimmetria miatt marad meg, ezért ennek az impulzusmomentummal kell kapcsolatban állnia definíció szerint. Valóban, tudjuk, hogy az antiszimmetrikus másodrendű tenzor komponenseiből egy axiálvektor képezhető,

$$J_i = \int dV \frac{1}{2}\epsilon_{i,k,l}J_{k,l}, \tag{2.5.220}$$

ami tehát megmaradó, és amit a fizikai mező impulzusmomentumának kell nevezzünk. A kifejezések részletes alakját nézve látjuk, hogy

$$\vec{J} = \int dV(\vec{r} \times \vec{g} + \vec{\pi} \times \vec{s}). \tag{2.5.221}$$

Ez azt mutatja, hogy az elmozdulás vektormezőnek az impulzusmomentuma részben pályaimpulzusmomentum, az első tag az integrandusban az egyes térfogatelemekben található fizikai mező pályaimpulzusmomentumainak vektori összege. Másrészt az integrandus második tagja olyan járulék az impulzusmomentumhoz, ami tisztán abból származik, hogy a fizikai mező vektormező. Ezt a járulékot nevezhetjük a fizikai mező saját impulzusmomentumának, vagy spinjének. Látjuk, hogy a teljes impulzusmomentum a pályaimpulzusmomentum és a sajátimpulzusmomentum vektori összege. Azt kaptuk tehát eredményül, hogy ha a fizikai mező a térbeli elforgatásokkal szemben invariáns, akkor a fizikai mező teljes impulzusmomentuma (az egész geometriai térre számolva) megmarad.

Természetesen, miután értelmeztük a $J_{k,l}$ tenzort, mint az impulzusmomentum sűrűségének tenzorát, az (2.5.217), ill. (2.5.218) egyenleteknek lokális megmaradási törvény értelmet kell tulajdonítanunk, nevezetesen a teljes impulzusmomentum lokális megmaradását. A fizikai mező adott térfogatában azért és csak azért változik meg a fizikai mező impulzusmomentuma, mert oda impulzusmomentum áramlik be, ill. onnan impulzusmomentum áramlik ki. Az impulzusmomentum áramsűrűségének tenzora $\Pi^{(J)}_{n,k,l}$, pontosabban $\frac{1}{2}\epsilon_{i,k,l}\Pi^{(J)}_{n,k,l}$ adja meg az n irányú egységfelületen időegység alatt átáramló impulzusmomentum i irányú komponensét.

2.5.5 Energia- és impulzusáramlás izotróp rugalmas közegben

Végül számítsuk ki az energiaáramlás és az impulzusáramlás jellemzőit rugalmasan deformálható izotróp közegben, külső tömegerők jelenléte nélküli esetben. Ekkor ugyanis végtelen kiterjedésű közegben fennáll az időbeli eltolási szimmetria és a térbeli eltolási szimmetria is. A Lagrange-sűrűség és a térmennyiséghez kanonikusan konjugált impulzus kifejezéseit felhasználva kapjuk, hogy:

$$\rho_\epsilon = \mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho(\partial_t\vec{s})^2 - \frac{1}{2}\mu\vec{s}\cdot\Delta\vec{s} + \frac{1}{2}(\lambda+\mu)(\vec{\nabla}\cdot\vec{s})^2 \tag{2.5.222}$$

az energiasűrűség,

$$S_j = -\mu(\partial_t s_i)(\partial_j s_i) - (\lambda+\mu)(\partial_t s_j)(\partial_k s_k) \tag{2.5.223}$$

az energiaáram-sűrűség,

$$g_k = -\rho(\partial_t s_i)(\partial_k s_i) \tag{2.5.224}$$

az impulzussűrűség és

$$\begin{aligned}\Pi_{k,j} &= \mu(\partial_j s_i)(\partial_k s_i) + (\lambda+\mu)(\partial_k s_j)(\partial_l s_l) \\ &+\delta_{j,k}[\frac{1}{2}\rho(\partial_t s_i)^2 - \frac{1}{2}\mu(\partial_l s_i)^2 - \frac{1}{2}(\lambda+\mu)(\partial_l s_l)^2]\end{aligned} \tag{2.5.225}$$

az impulzusáramsűrűség.

Tanulságos a fenti mennyiségek explicit hely- és időfüggésének kiszámítása harmonikus rugalmas hullám esetében. Példaként tekintsünk egy ,,monokromatikus" longitudinális síkhullámot:

$$\vec{s} = (A\sin(\omega t - kx), 0, 0), \tag{2.5.226}$$

ahol $k = \omega/c_{\|}$, $c_{\|}^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$. Azért nevezzük ,,monokromatikusnak", mert jól definiált a hullám körfrekvenciája. Ekkor

$$\rho_\epsilon(x,t) = \rho\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx), \tag{2.5.227}$$

ami jobbra haladó energiasűrűség-hullámot jelent, az állandó energiasűrűségű felületek a fázissebességgel azonos sebességgel haladnak az x-tengely irányában. Az energiáramsűrűség x-irányú, $\vec{S} = (S_x, 0, 0)$, ahol

$$S_x(x,t) = c_{\|}\rho\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) = c_{\|}\rho_\epsilon(x,t). \tag{2.5.228}$$

Az impulzussűrűség is x-irányú, $\vec{g} = (g_x, 0, 0)$, ahol

$$g_x = -\rho(\partial_t s_x)(\partial_x s_x) = \frac{1}{c_{\|}^2} S_x, \tag{2.5.229}$$

vagyis az impulzussűrűség és az energiaáramsűrűség arányosak egymással,

$$\vec{S} = c_{\|}^2 \vec{g}. \tag{2.5.230}$$

Az impulzusáramsűrűség tenzorának egyetlen komponense nem azonos zérussal,

$$\Pi_{x,x} = \rho\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx). \tag{2.5.231}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a rugalmasan deformálható testről alkotott modellünkben a hullámok terjedési sebessége független a hullámok frekvenciájától. Ezért a monokromatikus hullám frekvenci
'aja és hullámszáma közötti összefüggés, az úgynevezett diszperziós reláció lineáris. Ha elindítunk egy olyan hullámcsomagot, ami x-irányba haladó, különböző frekvenciájú hullámok lineáris szuperpozíciója, akkor a hullámcsomag minden komponense ugyanazzal a fázissebességgel terjed, s ezért maga a hullámcsomag térbeli alakja változatlan marad, csak odább tolódik a térben. A hullámcsomag haladási sebességét csoportsebességnek nevezzük, ami a jelen modellben megegyezik a fázissebességgel. A csoport- és fázissebesség azonossága annak köszönhető a modellünkben, hogy a rugalmas állandók (a Lamé-állandók) függetlenek a frekvenciától.

3 FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK ÁRAMLÁSA: HIDRODINAMIKA

3.1 Hidrodinamikai leírás alapjai

3.1.1 Folyadék. Folyadékelem

Először is állapodjunk meg abban, hogy a folyadék szót általános értelemben használjuk, mint a gázok és a folyékony közegek közös megjelölését.

Vezessük be továbbá a folyadékelem fogalmát. Folyadékelemen a folyadék olyan Δm tömegű darabkáját értjük, amely makroszkopikus méretű (lineáris mérete sokkal nagyobb, mint a benne található atomok átlagos szabad úthossza), de amelynek lineáris kiterjedése mégis kicsiny az áramló folyadék egészének tetszőleges irányú lineáris kiterjedéséhez képest. Gondolatban a folyadékot feldaraboljuk ilyen (páronként diszjunkt, de a folyadék egész térfogatát lefedő) folyadékelemek halmazára. Fel fogjuk továbbá tenni, hogy a folyadék úgy mozog, hogy a folyadékelemek a mozgás során homogén termodinamikai testeknek tekinthetők. Ezen azt értjük, hogy a folyadékelemek termodinamikai egyensúlyi állapotban vannak, amelyet jól definiált termodinamikai mennyiségek jellemeznek, mint pl. a sűrűség, a nyomás, a hőmérséklet, stb., amelyek értéke természetesen folyadékelemről folyadékelemre más és más lehet ugyanúgy, mint ahogy az egyes folyadékelemek sebessége és gyorsulása is általában különböző. A jól definiált sűrűség egyúttal azt jelenti, hogy a folyadékelemekre történő felosztást formálisan olyan határérték-képzési utasítással kell kiegészíteni, amikor a folyadékelemek tömegével és térfogatával úgy tartunk zérushoz, hogy a sűrűség véges maradjon, $\Delta m \to 0$, $\Delta V \to 0$, de $\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ =áll. Ez azt jelenti, hogy a folyadék, mint a teret folytonosan kitöltő közeg, kontinuum végtelen sok anyagi pontból álló mechanikai rendszer.

3.1.2 Lagrange-féle leírás

A folyadék mozgását leírhatjuk a Lagrange által javasolt módon. A Lagrange-féle leírás lényege, hogy az egyes folyadékelemek mozgását követjük nyomon, vagyis a folyadék mozgását a folyadékelemek pályagörbéivel jellemezzük. Ekkor a folyadékot lényegében pontrendszernek tekintjük. Ehhez osszuk fel gondolatban a t_0 kezdeti pillanatban a folyadékot kicsiny Δm tömegű folyadékelemekre. Indexeljük az egyes folyadékelemeket azzal az $\vec{r}_0$ helyzetvektorral, ahol azok éppen tartózkodnak a kezdeti t_0 időpillanatban. Az egyes folyadékelemek pályáját jelölje $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$, mint az idő és a kezdeti helyzet függvényét. Ez az „$\vec{r}_0$ nevű" folyadékelem pályája. Ennek a folyadékelemnek a sebessége

$$\vec{u}(\vec{r}_0, t) = \frac{\partial \vec{r}(\vec{r}_0, t)}{\partial t}, \qquad (3.1.232)$$

az adott folyadékelem pályagörbéjének érintője. A tárgyalás nehézsége abból fakad, hogy a közeg kontinuum sok anyagi pontból (folyadékelemeből) álló fizikai rendszer.

3.1.3 Euler-féle leírás

A kontinuum számosságú szabadsági fokkal rendelkező mechanikai rendszer leírásának létezik egy másik módja, amikor nem követjük nyomon az egyes folyadékelemek pályáját, hanem Euler felfogását követve a mechanikai rendszert fizikai mezőkkel jellemezzük. A fizikai mező azt jelenti, hogy valamilyen fizikai mennyiség a geometriai tér minden $\vec{r}$ pontjában, adott t időpillanatban jól meghatározott értéket vesz fel. Aszerint, hogy a szóban forgó fizikai mennyiség a tér adott pontjában a térbeli elforgatásokkal szemben skalárként, vektorként, vagy tenzorként viselkedik, skalármezőről, vektormezőről, ill. tenzormezőről beszélünk.

Térjünk most rá az áramló folyadék, mint kontinuum szabadsági fokú fizikai rendszer Euler-féle leírására. A folyadék áramlásának leírására a folyadék sűrűségét, $\rho(\vec{r},t)$, a folyadék áramlási sebességét, $\vec{v}(\vec{r},t)$, valamint a folyadékban uralkodó nyomást, $p(\vec{r},t)$ használjuk, mint a hely és az idő függvényét. Ezeknek a fizikai mezőknek a segítségével fogjuk megfogalmazni a dinamikai alapegyenleteket, amelyek leírják a folyadék áramlását. Az Euler-féle szemlélettel elveszítjük azt a közvetlen információt, hogy az egyes folyadékelemek hogyan mozognak. Ez azonban a gyakorlat számára sokszor valóban érdektelen is. Ugyanakkor az áramló folyadék állapotáról, ill. annak időbeli változásáról kapunk képet. Tudni fogjuk, hogy tetszőleges térbeli pontban éppen mekkora az éppen ott tartózkodó folyadékelem áramlási sebessége, sűrűsége, nyomása, stb. ill. hogy ezek a mennyiségek tetszőleges térbeli pontban hogyan változnak az idő függvényében.

Hasonlóan, mint a rugalmasan deformálható testek esetén a tömegsűrűség és az áramlási sebesség a folyadékot alkotó közeg átlagos tulajdonságai, amelyek atomisztikus értelmezésével most nem foglalkozunk részletesen. Ennek ellenére azt azonban világosan kell látnunk, hogy ezen, az értelmezésük lényegénél fogva átlagos tulajdonságot kifejező fizikai mezők létezésének fizikai feltételei vannak, s ennélfogva a hidrodinamikai leírásnak vannak korlátai. Az egyik feltétel az, hogy a rendszer elég homogén legyen, azaz a bevezetett fizikai mezők térben ne változzanak lényegesen a folyadékot alkotó atomok átlagos szabad úthosszán belül. Hasonlóan azt is meg kell követelni, hogy a fizikai mezők esetleges időbeli változásainak karakterisztikus ideje sokkal nagyobb legyen, mint az atomok közegen belüli mozgásának karakterisztikus ideje (pl. átlagos szabad repülési idő). Általában azt is fel fogjuk tételezni, hogy a folyadék áramlása közben a fizikai mezők olyan lassan változnak, hogy a folyadék-részecskék, azaz a kicsiny, de még makroszkopikus számú atomot tartalmazó folyadékdarabkák lokálisan mindig termodinamikai egyensúlyi állapotba tudnak kerülni, azaz jellemezhetők olyan termodinamikai tulajdonságokkal, mint hőmérséklet, nyomás, belsőenergia-sűrűség, entalpiasűrűség, stb. Ez teszi lehetővé, hogy az utóbbiakat is használhassuk a folyadékok hidrodinamikai leírásában, mint térben és időben változó fizikai mezőket.

3.1.4 Áramvonalak

A folyadék áramlását leíró sebességmezőt áramvonalakkal szokás szemléltetni egy adott t időpillanatban. A sebességmezőről készült pillanatfelvételt úgynevezett áramvonalakkal ábrázolhatjuk, amelyek olyan $\vec{r}(\ell, t)$ irányított görbék, hogy minden pontban érintik az adott pontban uralkodó áramlási sebességet és sűrűségük olyan, hogy a rájuk merőleges *df* felületelemen átahaladó áramvonalak száma arányos az áramlási sebesség nagyságával. (Itt ℓ az áramvonal ívhossz-paramétere.) Egy zárt görbére illeszkedő felületen áthaladó erővonalak együttesét (nyalábját) áramcsőnek szokás nevezni, az infinitezimális keresztmetszetű áramcsővet pedig áramfonalnak nevezzük.

Az áramvonalak olyan $\vec{r}(\ell)$ irányított görbék, amelyek tetszőleges pontjában az érintő a tér adott pontján uralkodó áramlási sebességgel párhuzamos egységvektor. Ha ℓ az áramvonal ívhossz-paramétere, akkor az áramvonal differenciálegyegyenlete:

$$\frac{x'(\ell)d\ell}{v_x(\vec{r}(\ell))} = \frac{y'(\ell)d\ell}{v_y(\vec{r}(\ell))} = \frac{z'(\ell)d\ell}{v_z(\vec{r}(\ell))}, \tag{3.1.233}$$

ahol bevezettük az $x'(\ell) = \frac{dx(\ell)}{d\ell}$, stb. jelölést. Az erővonalak sűrűségét úgy szokás választani, hogy arányos legyen az áramlási sebesség nagyságával.

Az áramvonalak és a folyadékelemek pályagörbéi általában nem azonosak. Ha kiszemelünk egy áramvonalat, az az időben változó alakú görbe a térben, amelyet minden időpillanatban más és más folyadékelemek lánca alkot.

Van azonban kapcsolat a folyadékelemek $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$ pályái és a $\vec{v}(\vec{r}, t)$ sebességmező között. Az „$\vec{r}_0$ nevű" folyadékelem sebessége ugyanis

$$\frac{\partial \vec{r}(\vec{r}_0, t)}{\partial t} = \vec{v}(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t), \tag{3.1.234}$$

ami a sebességmező ismeretében közönséges elsőrendű differenciálegyenlet az „$\vec{r}_0$ nevű" folyadékelem $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$ pályagörbéjére. A megoldás 3 darab integrációs állandót tartalmaz, amelyeket az

$$\vec{r}(\vec{r}_0, t_0) = \vec{r}_0 \tag{3.1.235}$$

kezdeti feltételekből lehet meghatározni. A sebességmező ismeretében tehát elvileg leszármaztathatók az egyes folyadékelemek pályagörbéi. Ez teremt kapcsolatot az Euler-féle és a Lagrange-féle leírás között.

3.1.5 Fizikai mennyiség állandósága áramvonal mentén

A későbbiekben fontos lesz annak a ténynek a matematikai kifejezése, hogy valamilyen fizikai mező értéke egy-egy áramvonal mentén állandó. Jelölje az áramvonal érintő egységvektorát $\vec{t} = \vec{v}/|\vec{v}|$ és legyen az áramvonal ívhossz-paramétere ℓ. Ekkor bevezetjük az f skalármező áramvonalmenti (iránymenti) deriváltját a

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \vec{t} \cdot \vec{\nabla} f \tag{3.1.236}$$

definícióval. Az f skalármező akkor és csak akkor állandó az egyes áramvonalak mentén, ha

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = 0 \tag{3.1.237}$$

minden egyes áramvonal mentén. Ekkor $f(\vec{r}(\ell))$ =áll. , de az állandó értéke más és más lehet az egyes áramvonalakon. Hasonlóan kapjuk rendre a vektor-, ill. a tenzormennyiségek áramvonalak menti állandóságának feltételét,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial \ell} = (\vec{t} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}, \\ 0 &= \frac{\partial T_{i,j}}{\partial \ell} = t_k \frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{3.1.238}$$

az egyes áramvonalak mentén, ami azt jelenti, hogy az egyenlőségek jobb oldalában $\vec{r}$ helyére a parciális deriválás elvégzése után az áramvonal $\vec{r}(\ell, t)$ egyenletét kell behelyettesíteni, s úgy kell az egyenlőségek jobb oldalának azonosan nulláá válni az áramvonal ℓ ívhossz-paraméterének tetszőleges értékére.

3.1.6 Adott folyadékelemet jellemző fizikai mennyiségek megváltozása

A folyadék áramlási sebességének adott helyen mindig az aktuálisan éppen ott mozgó folyadékelem sebessége, nem pedig egy kiszemelt folyadékelem sebessége. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy hogyan változik meg annak a kiszemelt folyadékelemnek a sebessége dt idő alatt, amelyik a t pillanatban az $\vec{r}$ helyen tartózkodott, akkor ezt a sebességmező ismeretében a következőképpen tudjuk maghatározni. Ha adott $\Delta m = \rho \Delta V$ tömegű folyadékelem dt idő alatt az $\vec{r}$ helyzetvektorú P pontból az $\vec{r} + d\vec{r}$ helyzetvektorú Q pontba kerül, akkor sebességének megváltozása

$$\begin{aligned} v_i(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - v_i(\vec{r}, t) &= \frac{\partial v_i(\vec{r}, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \\ &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dt. \end{aligned} \tag{3.1.239}$$

Ezért a $\rho \Delta V$ tömegű folyadékelem gyorsulása:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}. \tag{3.1.240}$$

Természetesen ez ugyanaz az összefüggés a folyadékelem gyorsulása és a sebességmező között, mint amit rugalmasan deformálható közeg esetén kaptunk.

Általánosan is feltehetjük a kérdést, a ha ismerjük rendre az $f(\vec{r},t)$, $\vec{V}(\vec{r},t)$, ill. $T_{i,j}$ skalár-, vektor-, ill. tenzormezőket, akkor hogyan változik meg egy kiszemelt folyadékelemet jellemző f, $\vec{V}$, ill. $T_{i,j}$ mennyiség értéke dt idő alatt, miközben a folyadékelem a t pillanatbeli $\vec{r}$ tartózkodási helyéről a $t+dt$ pillanatbeli $\vec{r}+d\vec{r}$ helyre mozdul el. A válasz a sebesség megváltozásának mintájára, rendre:

$$\begin{aligned} Df &= f(\vec{r}+d\vec{r},t+dt) - f(\vec{r},t) = \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)dt, \\ DV_i &= V_i(\vec{r}+d\vec{r},t+dt) - V_i(\vec{r},t) = \Big(\frac{\partial V_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\Big)dt, \\ DT_{i,j} &= T_{i,j}(\vec{r}+d\vec{r},t+dt) - T_{i,j}(\vec{r},t) = \Big(\frac{\partial T_{i,j}}{\partial t} + v_k \frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_k}\Big)dt. \end{aligned} \tag{3.1.241}$$

A folyadékelemmel együtthaladó megfigyelő az f, $\vec{V}$, ill. $T_{i,j}$ mennyiségek időbeli változási sebességét rendre a következőnek látja:

$$\begin{aligned} \frac{Df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} f, \\ \frac{D\vec{V}}{dt} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}, \\ \frac{DT_{i,j}}{dt} &= \frac{\partial T_{i,j}}{\partial t} + v_k \frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_k}. \end{aligned} \tag{3.1.242}$$

Ha a folyadék áramlása során valamely fizikai mennyiségnek az egyes folyadékelemeket jellemző értéke állandó marad, azt matematikailag a $\frac{Df}{dt}=0$, $\frac{D\vec{V}}{dt}=0$, ill. $\frac{DT_{i,j}}{dt}=0$ alakú egyenlettel kell kifejezni.

3.1.7 Relatív térfogatváltozás

Tegyük fel, hogy adott t időpillanatban kijelöljük gondolatban a folyadék infinitezimális téglatest alakú $dV = dx\ dy\ dz$ térfogatelemét, az infinitezimális téglatest éleit a laboratóriumi Descartes-koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamosnak választjuk. Azok a pontok (folyadékelemek), amelyek a kijelölt infinitezimális téglatest csúcsait képezik a tér adott helyén a t időpillanatban uralkodó áramlási sebességgel odább mozdulnak $\vec{s} = \vec{v}\delta t$ elmozdulásvektorral, amely minden csúcspontra kicsit más, hiszen az áramlási sebesség általában helyfüggő. Így az eredeti dV térfogateleme dV'-re változik infinitezimális δt idő alatt. Az infinitezimális elmozdulásból a relatív térfogatváltozást ugyanúgy számolhatjuk ki, mint azt a rugalmasan deformálható testek esetében tettük. Nevezetesen képezzük a

$$\epsilon_{i,j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\Big) = \frac{1}{2}\delta t\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big) \tag{3.1.243}$$

deformációs tenzort és annak vesszük a spúrját,

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta(dV)}{\delta t}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{dV'-dV}{\delta t}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\epsilon_{k,k}}{\delta t}=\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=\ \mathrm{div}\ \vec{v}. \tag{3.1.244}$$

Azt kaptuk tehát, hogy az időegységre eső relatív térfogatváltozás a sebességmező divergenciájával egyenlő.

3.1.8 Örvénymező

Értelmezhetjük a folyadékelemek infinitezimális δt idő alatt bekövetkező infinitezimális elmozdulását leíró $\vec{s}(\vec{r},t)$ elmozdulás-vektormezőt, mint $\vec{s}(\vec{r},t)=\vec{v}(\vec{r},t)\delta t$. A rugalmasan deformálható testek vizsálata során megtanultuk, hogy az elmozdulás-vektormező arról is tartalmaz információt, hogy mekkora a folyadékelemek infinitezimális $\delta\vec{\varphi}(\vec{r},t)$ szögelfordulása infinitezimális δt idő alatt:

$$\delta\vec{\varphi}(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{r},t)\delta t=\vec{\omega}(\vec{r},t)\delta t. \tag{3.1.245}$$

Ezzel értelmeztük a folyadékelemek forgását jellemző lokális szögsebességeket, az $\vec{\omega}(\vec{r},t)$ szögsebességmezőt, más nevén örvénymezőt:

$$\vec{\omega}(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{r},t). \tag{3.1.246}$$

Az örvénymezőt örvényvonalakkal szemléltethetjük. Az örvényvonalak olyan irányított görbék, amelyek a tér minden pontjában érintőlegesek az ott uralkodó szögsebességhez és sűrűségük arányos a szögsebesség nagyságával. Egy zárt görbére illeszkedő felületen áthaladó örvényvonalak nyalábját örvénycsőnek nevezzük. Az infinitezimális keresztmetszetű örvénycsővet örvényfonalnak szokás nevezni.

Definíciójából következően az örvénymező mindig forrásmentes, ugyanis vektormező rotációjának divergenciája mindig zérus. Valóban

$$\partial_k\omega_k=\frac{1}{2}\partial_k\epsilon_{k,i,j}\partial_j v_i=\frac{1}{2}\epsilon_{i,j,k}\partial_j\partial_k v_i=0, \tag{3.1.247}$$

mivel $\epsilon_{i,j,k}$ bŕmaly két indexének felcserélésével szemben antiszimmetrikus, $\partial_j\partial_k$ pedig szimmetrikus, és egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor kontrakciója mindig zérus.

3.1.9 A sebességmező és az örvénymező kapcsolata.

Látjuk, hogy az örvénymező az áramlási sebességből rotációképzéssel leszármaztatott vektormező, vagyis az áramlási sebességből egyértelműen megkapható. Fordítva azonban ez nem érvényes, az örvénymezőből nem rekonstruálható egyértelműen a sebességmező, hanem csak egy tetszőleges skalármező gradiensének erejéig. Ennek az az oka, hogy tetszőleges skalármező gradiensének rotációja zérus.

3.1.10 Cirkuláció

Azáramlás cirkulációján a

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} \tag{3.1.248}$$

görbementi integrált értjük, ahol C tetszőleges zárt görbe lehet. Természetesen a cirkuláció különböző zárt görbékre vonatkoztatott értéke különbözőlehet.

A rotáció művelete és a cirkuláció között szoros kapcsolat van. Definíció szerint a $\vec{v}(\vec{r})$ vektormező rotációja

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) = \lim_{F \to \vec{r}} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s}, \tag{3.1.249}$$

ahol F a C zárt görbére fektetett tetszőleges felület, a határérték azt jelenti, hogy a C zárt görbét összehúzzuk az $\vec{r}$ helyzetvektorú pontba.

3.1.11 Anyagmegmaradás lokális törvénye

A folyadékok áramlásának egyik törvénye a lokális anyagmegmaradás, pontosabban a lokális tömegmegmaradás törvénye. A tömeg lokális megmaradásának törvénye kimondja, hogy a tér tetszőleges tartományában található folyadék tömege azért és csak azért változhat meg, mert a tartományba annak határán folyadék, azaz tömeg áramlik be, ill. a tartományból annak határán keresztül folyadék, azaz tömeg áramlik ki. Ennek a törvénynek a matematikai megfogalmazásához jelöljünk ki egy tetszőleges V térfogatú, nem mozgó tartományt a térben. Legyen a V tartomány határfelülete ∂V, és a határfelület külső normálisa $\vec{n}$. A V tartományban található folyadék tömege $\int_V dV \rho(\vec{r}, t)$. A tartomány felületén dt idő alatt átáramló tömeg

$$\int_{\partial V} \vec{n} df \cdot \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) dt, \tag{3.1.250}$$

ahol az integrandus járuléka pozitív (negatív), ha folyadék áramlik ki a tartományból, ill. áramlik be a tartományba. Ezért a tömeg lokális megmaradása értelmében a V tartományban található tömeg időegységre eső megváltozása:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = -\int_{\partial V} \vec{n} df \cdot \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t). \tag{3.1.251}$$

Ez az egyenlet a kontinuitási egyenlet integrális alakja, és kifejezi a tömeg lokális megmaradását, azaz hogy a V térfogatban található folyadék tömege csak a tömeg kiáramlása, ill. beáramlása miatt változhat, de nem keletkezhet, vagy tűnhet el.

Gauss tételének felhasználásával a jobb oldali integrált, egy vektormező zárt felületre vett integrálját átírhatjuk ezen vektormező divergenciájának térfogati integráljává:

$$-\int_{\partial V} \vec{n} df \cdot \rho \vec{v} = -\int_V dV \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}). \tag{3.1.252}$$

(A továbbiakban az egyszerűség kedvéért nem jelöljük mindig explicit módon a fizikai mezők hely- és időfüggését.) Ennek felhasználása után átrendezve a kontinuitási egyenlet integrális alakjának tagjait egy oldalra,

$$\int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_V dV \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \tag{3.1.253}$$

és felhasználva, hogy tetszőleges V térfogat esetén fennáll az egyenlőség, kapjuk a kontinuitási egyenlet differenciális alakját:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \tag{3.1.254}$$

Ezzel ekvivalens alakot kapunk, ha a bal oldal második tagjában alkalmazzuk a Leibnitz-szabályt,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \tag{3.1.255}$$

Be szokás vezetni a tömegáram sűrűségét,

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \tag{3.1.256}$$

amelynek tetszőleges $\vec{n}$ irányú vetülete, $j_n = \vec{j} \cdot \vec{n}$ határozza meg az $\vec{n}$ normálisú df felületen dt idő alatt a normális irányában átáramló $j_n df dt$ tömeg nagyságát. (Negatív előjel a normálissal ellentétes irányú áramlást jelent.) Segítségével a tömegmegmaradás lokális törvénye

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{3.1.257}$$

alakot ölt.

A (3.1.254) kontinuitási egyenletből látjuk, hogy mi a sűrűség lokális változása a tér adott $\vec{r}$ helyzetvektorú pontjában:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot [\rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)]. \tag{3.1.258}$$

Egyúttal az is kiolvasható azonban innen, hogy egy tetszőlegesen kiszemelt folyadékelemben mekkora a sűrűségváltozás. Az úgynevezett ,,szubsztanciális" derivált határozza meg, hogy mekkora a sűrűség időbeli változási gyorsasága abban a folyadékelemben, amelyik a t időpillanatban a tér $\vec{r}$ helyzetvektorú pontjában tartózkodott:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho(\vec{r}, t)}{dt} &= \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \rho(\vec{r}, t) = -\rho(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) \\ &= -\rho(\vec{r}, t) \frac{\partial \Theta(\vec{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.1.259}$$

Adott folyadékelemben a dt idő alatt bekövetkező relatív sűrűségváltozás tehát a folyadékelem relatív térfogatváltozásának mínusz egyszerese.

3.1.12 Folyadékok osztályozása

A folyadékok legfontosabb jellemzője, hogy nyugvó, magára hagyott folyadékban nincsen kitüntetett irány. Ez azt jelenti, hogy a folyadék belső (atomos, vagy másszóval mikroszkopikus) szerkezete nem tüntet ki a folyadékon belül semmilyen irányt.

1. Összenyomhatóság alapján történő osztályozás. A folyadékokat szokás aszerint osztályozni, hogy a sűrűségük térben és időben állandónak tekinthető-e vagy sem. Amennyiben a folyadék sűrűsége

   $$\rho(\vec{r},t) = \text{áll.}, \tag{3.1.260}$$

   akkor a folyadékot összenyomhatatlan, azaz idegen szóval inkompresszibilis folyadéknak nevezzük. A legtöbb cseppfolyós folyadék jó közelítéssel ilyen. Ellenkező esetben a folyadékot összenyomhatónak, azaz kompresszibilisnek nevezzük. A gázok sorolhatók a kompresszibilis folyadékok közé, és szigorúan véve kis mértékben minden cseppfolyós közeg is kompresszibilis.

   A ρ sűrűség reciproka a $v_s = 1/\rho$ fajtérfogat. Képzeljük el, hogy a folyadék anyagából veszünk egy homogén darabot és azt minden oldali egyenletes p nyomásnak vetjük alá. Aztán a T hőmérsékletet állandó értéken tartva a nyomás infinitezimálisan, Δp-vel megváltoztatjuk. Az összenyomhatóságot az egységnyi nyomásváltozásra bekövetkező relatív fajtérfogatváltozással szokás jellemezni:

   $$\kappa_T = -\lim_{\Delta p \to 0, T=\text{const.}} \frac{1}{v_s}\frac{\Delta v_s}{\Delta p} = -\frac{1}{v_s}\frac{\partial v_s(p,T)}{\partial p}. \tag{3.1.261}$$

   A κ_T mennyiséget a folyadék izoterm kompresszibilitásának nevezzük. Az anyagok fajtérfogata csökken, ha nő a nyomás (állandó hőmérsékleten), úgyhogy a negatív előjel az izoterm kompresszibilitás értelmezés szerinti pozitív előjelét biztosítja, $\kappa_T \geq 0$. Az inkompresszibilis folyadékok a $\kappa_T \to 0$ határesetnek felelnek meg.

   A kompresszibilitást kifejezhetjük a sűrűségnek, mint a nyomás és a hőmérséklet függvényének a parciális deriváltjaként is:

   $$\kappa_T = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho(p,T)}{\partial p}, \tag{3.1.262}$$

   ami az egységnyi nyomásváltozásra bekövetkező relatív sűrűségváltozás állandó hőmérsékleten. Szokás még az összenyomhatóságot a

   $$K_T = \frac{1}{\kappa_T} = \rho\frac{\partial p(\rho,T)}{\partial \rho} \tag{3.1.263}$$

izoterm kompresszió-modulussal jellemezni. Általában $K_T > 0$ és $K_T \to \infty$ inkompresszibilis folyadék esetén.

Ha a fenti gondolatkísérletet a folyadékdarab minden oldali egyenletes összenyomására nem állandó hőtartályba helyezett folyadékon végezzük, hanem hőszigetelt edénybe heleyezett folyadékon, akkor az összenyomhatóság jellemzésére az adiabatikus kompresszibilitást kapjuk:

$$\kappa_{ad} = -\frac{1}{v_s}\frac{\partial v_s(p,s)}{\partial p}, \tag{3.1.264}$$

ahol a fajtérfogatot, mint a nyomás és az entrópia-sűrűség függvényének kell tekintsük, ugyanis a hőszigetelés azt jelenti, hogy a folyamat adiabatikus, azaz az entrópia állandó marad. A κ_{ad} adiabatikus kompresszibilitás reciprokát a

$$K_{ad} = \frac{1}{\kappa_{ad}} = \rho\frac{\partial p(\rho,s)}{\partial \rho} \tag{3.1.265}$$

adiabatikus kompresszió-modulusnak nevezzük. Általában a kétféle kompresszibilitás értéke nem egyezik meg.

2. Ideális és viszkózus folyadék. A folyadékok hidrodinamikai viselkedése lényegesen különböző aszerint, hogy elhanyagolható vagy nem a folyadékon belüli hővezetés, diffúzió, belső súrlódás, stb. avagy nem. Az említett jelenségek közös néven úgynevezett transzport-folyamatok, amelyek oka a folyadékot alkotó atomok véletlenszerű mozgása. A hővezetés, ill. a diffúzió következtében a nem áramló, de inhomogén folyadékban is ki tud egyenlítődni rendre a hőmérséklet, ill. a sűrűség. A hőmérséklet-kiegyenlítődés annak a következménye, hogy a szomszédos folyadékelemek atomjai az érintkezési felület mentén véletlenszerűen ütköznek és energiát adnak át egymásnak. A diffúzió (vagy sűrűség-kiegyenlítődés) azért lehetséges, mert a szomszédos folyadékelemek határán véletlenszerűen atomok léphetnek át egyik folyadékelemből a másikba. A belső súrlódás pedig annak a következménye, hogy az egymás mellett mozgó folyadékelemek a relatív mozgásuk sebességével párhuzamos irányú impulzust adnak át egymásnak (a relatív mozgás sebességére merőleges irányban), s így érintkezési felületükön súrlódási erőt fejtenek ki egymásra. A hatás-ellenhatás törvénye értelmében az egyik folyadékelem által a másikra kifejtett súrlódási erő pontosan ellentettje a másik által az egyikre kifejtett súrlódási erőnek.

   Az olyan folyadékokat, amelyeknek mozgása során elhanyagoljuk, ill. elhanyagolhatjuk a fenti (vagy a fentiekhez hasomló) transzport-folyamatokat, ideális folyadékoknak nevezzük. Ez nyilván mindig idealizáció. Az idealizáció legfontosabb előnye, hogy az ideális folyadék szomszédos folyadékelemei között nem lépnek fel súrlódási erők. Képzeljük el, hogy gondolatban ráülünk egy folyadékelemre. Ha ennek a felületére a felülettel párhuzamos súrlódási erő hat, akkor az azt jelenti, hogy nyíró feszültség lép fel a folyadékelemmel együtthaladó lokális vonatkoztatási rendszerben. Ezért azt mondhatjuk, hogy ideális az a folyadék, amelyben a mechanikai feszültség tetszőleges folyadékelemmel együtthaladó lokális vonatkoztatási rendszerben izotróp, azaz

$$\sigma_{i,j} = -p\delta_{i,j} \tag{3.1.266}$$

alakú, ahol p az adott folyadékelemmel együtthaladó lokális vonatkoztatási rendszerben a folyadékelemben uralkodó nyomás.

A viszkózus, vagy más néven súrlódó folyadékokban uralkodó feszültség jellemzésével később foglalkozunk.

Természetesen a kétféle osztályozás nem zárja ki egymást, így beszélhetünk rendre ideális inkompresszibilis, ideális kompresszibilis, súrlódó inkompresszibilis és súrlódó kompresszibilis folyadékokról.

3.1.13 Áramlások osztályozása

Az áramlásokat kétféle szempontból is osztályozhatjuk.

1. *Stacionárius és nem stacionárius áramlás.* Az egyik osztályozás a sebességmező időfüggése szempontjából történik. Az áramlást stacionáriusnak nevezzük, ha a sebességmező nem függ explicit módon az időtől, és nem stacionáriusnak, ha a sebességmező függ az időtől. Stacionárius áramlás esetén a nyomás- és a sűrűségmező sem függ az időtől. Ekkor a folyadékelemek pályái megegyeznek az áramvonalakkal. Ez akkor azt is jelenti, hogy az áramfonal mindig ugyanazokból a folyadékelemekből áll. Nem stacionárius áramlás esetén az áramlást jellemző fizikai mezők függenek explicit módon az időtől. Nem stacionárius áramlásban a folyadékelemek pályái és az áramvonalak általában különböznek.

2. *Potenciiáláramlás és örvényes áramlás.* A másik osztályozási szempont, hogy az örvénymező azonosan zérus, vagy sem. Ha a sebességmező rotációja azonosan zérus, akkor örvénymentes áramlásról beszélünk. Ha az örvénymező nem azonosan zérus, akkor pedig örvényes az áramlás. Örvénymentes áramlás esetén mindig létezik olyan $\phi(\vec{r},t)$ sebességpotenciál, amelynek gradiense a sebességmező:
$$\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\phi(\vec{r},t). \tag{3.1.267}$$
Ez annak a tételnek a következménye, hogy örvénymentes vektormező mindig előállítható egy skalármező gradienseként. Az örvénymentes áramlást szokás a fentiek alapján potenciiáláramlásnak is nevezni.

   Potenciiáláramlás esetén érdemes megkülönböztetni a cirkuláció mentes áramlást és a cirkulációs áramlást. Ehhez a megkülönböztetéshez szükségünk van az egyszeresen, ill. a többszörösen összefüggő térbeli tartományok fogalmára. Egy térbeli tartományt egyszeresen összefüggőnek nevezünk, ha a tartomány belsejében felvett tetszőleges zárt görbe a tartomány belsejében folytonosan összehúzható egy tetszőleges pontra. Amennyiben ez nem tehető meg tetszőleges zárt görbe esetén, akkor a tartományt többszörösen összefüggőnek nevezzük. Például, ha kijelölünk a síkban egy C (önmagát nem metsző) zárt görbével határolt tartományt, akkor ez egyszeresen összefüggő. Ha azonban a C által határolt tartomány belsejéből „kivágunk" egy C_1 zárt (önmagát nem metsző) zárt görbével határolt tartományt, akkor a megmaradt tartomány, amelyet C és C_1 határolnak, már nem egyszeresen összefüggő. A zárt görbéknek ekkor két osztálya létezik, az egyik osztályba tartozó görbék nem járják „körbe" a kivágott részt, míg a másik osztályba tartozó görbék igen. Az utóbbiak nem húzhatók össze a C és C_1 által határolt tartomány semelyik belső pontjára sem úgy, hogy a zárt görbe mindig a tartomány belsejében maradjon.

(a) *Cirkulációmentes potenciáláramlás.* Ha az áramlás cirkuláció mentes, azaz tetszőleges (a laboratóriumi vonatkoztatási rendszerben) nyugvó zárt görbére vonatkozóan zérus a cirkuláció, akkor az áramlás örvénymentes. Ez a rotáció (3.1.249) definíciójának közvetlen következménye. A fordított állítás azonban általánosan nem igaz, azaz ha az áramlás örvénymentes, vagyis potenciáláramlás, abból még nem következik, hogy cirkulációmentes. Ha a potenciáláramlás egyszeresen összefüggő térbeli tartományban valósulmeg, azaz ha az áramló folyadék által kitöltött térbeli tartomány egyszeresen összefüggő, akkor és csak akkor jelenti az örvénymentesség a cirkulációmentességet. Ekkor ugyanis a tetszőleges C zárt görbére felírt cirkuláció Stokes tételének értelmében átírható, mint a sebességmező rotációjának C görbe által határolt tetszőleges F felületre vonatkozó fluxusa,

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_F d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 2 \int_F d\vec{f} \cdot \vec{\omega}, \tag{3.1.268}$$

ahol $d\vec{f} = \vec{n} df$ az irányított felületelem, df a felületelem területe, $\vec{n}$ pedig az F felület df felületelemének normális-egységvektora, amelynek irányítását a C görbe irányításához a jobbkéz-szabály szerint kell illeszteni. Mivel azonban potenciáláramlás esetén $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ az áramlási tér minden pontjában, azért $\Gamma_C = 0$.

(b) *Cirkulációs potenciáláramlás.* Ha a potenciáláramlás nem egyszeresen összefüggő tartományban valósul meg, akkor a fenti érvelés nem működik, mert Stokes tételét csak akkor lehet alkalmazni, ha a C zárt görbére illesztett F felület teljes egészében az áramlási térben fekszik. A probléma nemcsak elvi érdekességű, mert a bonyolult csőrendszerekben történő potenciáláramlás általában ilyen.

Példaként tekintsük azt a síkbeli potenciáláramlást, amikor a C zárt görbével határolt tartomány belsejéből ki van „vágva" a C_1 és C_2 (egymást és C-t nem metsző) zárt görbék által határolt tartomány. Legyen C, C_1 és C_2 irányítása azonos értelmű. Akkor beláthatjuk, hogy

$$\Gamma_C = \Gamma_{C_1} + \Gamma_{C_2}. \tag{3.1.269}$$

Ahhoz, hogy Stokes tételét alkalmazhassuk, gondolatban fel kell vágjuk a C, C_1 és C_2 görbékkel határolt tartományt úgy, hogy a C-ről az első vágás (L_1) mentén eljussunk C_1-hez, azon ellentétes értelemben haladjunk végig (C_1') majd a vágás mentén (L_1') menjünk vissza C-re haladjunk azon tovább a következő vágásig (L_2), amelynek mentén elmegyünk C_2-höz, s azon ellentétes irányítással végigmegyünk (C_2'), aztán a vágás mentén (L_2') visszamegyünk C-re, s azon továbbhaladunk kiindulási pontunkig. Az így kapott $\mathcal{C} \equiv C \cup L_1 \cup C_1' \cup L_1' \cup L_2 \cup C_2' \cup L_2'$ zárt görbe már egyszeresen összefüggő tartományt határol, úgyhogy alkalmazhatjuk Stokes tételét:

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot \vec{\omega} = 0, \tag{3.1.270}$$

ahol $\mathcal{F}$ a $\mathcal{C}$ zárt görbe által határolt egyszeresen összefüggő tartomány felülete. Másrészt viszont

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = \Gamma_C + \Gamma_{C_1'} + \Gamma_{C_2'} = \Gamma_C - \Gamma_{C_1} - \Gamma_{C_2}, \tag{3.1.271}$$

hiszen az ellentétes irányú haladás miatt $\Gamma_{L_1'} = -\Gamma_{L_1}$, $\Gamma_{C_1'} = -\Gamma_{C_1}$, stb. Végül a (3.1.270) és (3.1.271) egyenleteket összevetve, kapjuk, hogy

$$\Gamma_C = \Gamma_{C_1} + \Gamma_{C_2}, \tag{3.1.272}$$

amit bizonyítani akartunk. Síkbeli példánkban a teljes tartományt határoló görbére számolt cirkuláció egyenlő az egyes kivágott tartományokat határoló zárt görbékre számolt cirkulációk összegével, ahol valamennyi görbét azonos módon, mondjuk az óramutató járásával ellentétes irányban kell irányítani.

3.2 Ideális folyadékok

3.2.1 Ideális folyadék fogalma

Ebben a fejezetben ideális folyadékok mozgását tárgyaljuk. A folyadékot ideális folyadéknak nevezzük, ha a folyadékkal lokálisan együttmozgó vonatkoztatási rendszerben a mechanikai feszültség $\sigma_{i,j} = -p\delta_{i,j}$, azaz nem lépnek fel nyírófeszültségek, valamint elhanyagolható a folyadékelemek közötti hő- és részecskecsere (a hővezetés és a diffúzió).

3.2.2 Mozgásegyenletek: Euler-egyenletek, adiabatikus áramlás

Ebben a fejezetben levezetjük azokat az egyenleteket, amelyek az ideális folyadékok mozgásának, áramlásának leírására szolgálnak. A folyadékot egyrészt a sebességmező jellemzi kinematikailag, ezért szükségünk van egy vektori mozgásegyenletre, amiből a sebességmező meghatározható. Ugyanakkor a folyadékelemek, mint lokális termodinamikai egyensúlyi rendszerek termodinamikai állapotát két (intenzív) állapothatározó jellemzi, amelyeket a hidrodinamikai leírásban legkényelmesebb a sűrűségnek és a nyomásnak választani. Látni fogjuk, hogy a sebességmezőre vonatkozó mozgásegyenlet általában tartalmazni fogja a folyadékelemek termodinamikai állapotának jellemzőit. Ezért a hidrodinamikai leíráshoz még további két skaláris egyenletre is szükség van ahhoz, hogy az 5 darab fizikai mező (az áramlási sebesség 3 komponense, a sűrűség és a nyomás) meghatározható legyen.

A hidrodinamikai leíráshoz szükséges egyenletek közül egyet már ismerünk, a tömeg lokális megmaradását kifejező (3.1.254) kontinuitási egyenletet. Ezt úgy tekinthetjük, mint a sűrűségmező meghatározására alkalmas egyenletet, ha ismert a sebességmező.

Az alábbiakban először levezetjük a sebességmezőre vonatkozó mozgásegyenletet, az ideális folyadék áramlására vonatkozó Euler-egyenletet. Ezután megmutatjuk, hogy kaphatunk egyenletet a nyomásra a folyadékelemek lokális termodinamikai egyensúlyi állapotát figyelembe véve, a folyadékra vonatkozó termodinamikai állapotegyenlet felhasználásával.

1. *Ideális folyadék áramlására vonatkozó Euler-egyenlet.* Az ideális folyadékok áramlására vonatkozó Euler-egyenlet nem más, mint Newton második törvényének alkalmazása adott, infinitezimális $\Delta m = \rho \Delta V$ tömegű folyadékelemre. A Δm tömegű folyadékelemre a szomszédos folyadékelemek felületi erőt fejtenek ki,

$$-\int_{\partial(\Delta V)} p\vec{n} df = -\int_{\Delta V} dV \vec{\nabla} p, \tag{3.2.273}$$

ahol $\vec{n}$ a kiszemelt folyadékelem térfogatát határoló $\partial(\Delta V)$ felület külső normálisa. Az egyenlőség jobb oldalán álló kifejezést Gauss tételének alkalmazásával kaptuk. Végül felhasználhatjuk, hogy $\Delta V \to 0$ esetben az integrálközépérték-tétel értelmében a jobb oldal közelítőleg

$$-\vec{\nabla} p \, \Delta V \tag{3.2.274}$$

alakot ölt. Ehhez a felületi erőhöz hozzá kell adni a folyadékelemre ható tömegerőt,

$$\vec{f} \rho \Delta V, \tag{3.2.275}$$

hogy megkapjuk a folyadékelemre ható eredő erőt. Ilyen tömegerő jelenik meg pl. akkor, ha a folyadék nehézségi erőtérben mozog, akkor a térfogati erősűrűség éppen a nehézségi erőtér térerőssége, $\vec{f} = \vec{g}$. A Δm tömegű folyadékrészecskére tehát Newton második törvénye a következő alakot ölti:

$$\rho \Delta V \vec{a} = -\vec{\nabla} p \, \Delta V + \rho \vec{f} \Delta V. \tag{3.2.276}$$

Osztva ΔV-vel és kifejezve a folyadékelem $\vec{a}$ gyorsulását a folyadék áramlását jellemző $\vec{v}$ sebességmezővel (ld. (3.1.240)), az alábbi mozgásegyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{f}. \tag{3.2.277}$$

Ez az ideális folyadék áramlását leíró Euler-féle egyenlet. Vektorkomponensekben kiírva ez 3 darab egyenletet jelent a sebességmező 3 ismeretlen komponensének, mint a hely és az idő függvényének a meghatározására. A feladat azonban így nem zárt, mert az (3.2.277) Euler-egyenletben szerepel a folyadék sűrűsége és nyomása is, mint a hely és az idő egyelőre ismeretlen függvénye. Mint korábban már említettük, hozzávéve az (3.2.277) Euler-egyenlethez a tömeg lokális megmaradására vonatkozó (3.1.254) kontinuitási egyenletet, már csak egy további egyenletre van szükség, hogy a nyomás is meghatározható legyen.

2. *Az adiabatikus áramlás feltétele.Állapotegyenlet* Ha a folyadékot ideálisnak tekintjük, akkor nemcsak a nyíró feszültségeket hanyagoljuk el az egyes folyadékelemekkel együtthaladó lokális vonakoztatási rendszerekben, hanem a hővezetést is elhanyagoljuk. Következésképpen az ideális folyadék áramlása során feltesszük, hogy nincsen hőcsere az egyes folyadékelemek között és a folyadék és környezete (pl. az folyadékot körülvevő edény fala) között. Az ideális folyadék áramlását tehát termodinamikai szempontból adiabatikus folyamatnak tekintjük. Ekkor a folyadékelemek entrópiája állandó az áramlás során. Legyen $s\rho\Delta V$ a $\Delta m = \rho\Delta V$ tömegű folyadékrészecske entrópiája, azaz s az entrópiasűrűség, azaz az egységnyi tömegű folyadékdarab entrópiája, akkor

$$s(\vec{r}(t), t) = \text{ áll.} \tag{3.2.278}$$

ha a folyadékdarab az $\vec{r}(t)$ pályán mozog. Másképpen ezt a (3.1.241) deriváltakat felhasználva

$$0 = \frac{Ds(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial s(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} s(\vec{r}, t) \tag{3.2.279}$$

alakba írhatjuk az $s(\vec{r}, t)$ entrópiamező segítségével.

Ha felhasználjuk a tömeg lokális megmaradását kifejező (3.1.254) kontinuitási egyenletet, akkor az (3.2.279) egyenletből az entrópia lokális megmaradását kifejező kontinuitási egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho s \vec{v}) = 0, \tag{3.2.280}$$

ahol $\vec{j}_s = \rho s \vec{v}$ az entrópiaáram sűrűsége.

A kapott egyenletből meghatározhatjuk az entrópia-sűrűséget a sebességmező ismeretében. Mivel abból indulunk ki, hogy a folyadékelemek mindvégig termodinamikai egyensúlyi állapotban vannak, ezért eleget tesznek a termodinamikai állapotegyenletnek, amely egyik lehetséges megfogalmazásában azt fejezi ki, hogy az entrópia-sűrűség a nyomás és a sűrűség meghatározott függvénye:

$$s = s(\rho, p). \tag{3.2.281}$$

Az fenti függvénykapcsolat, azaz az állapotegyenlet explicit alakja jellemző a folyadékra és átírható $p = p(\rho, s)$ függvény-kapcsolat alakjába is (aminek bizonyítása meghaladja ezen kurzus kereteit). Ha tehát meghatároztuk a sűrűséget és az entrópia-sűrűséget, akkor a nyomást a termodinamikai állapotegyenlet egyértelműen meghatározza. Ezért úgy tekinthetjük, hogy az (3.2.277) Euler-egyenlet, a sűrűségre vonatkozó (3.1.254) kontinuitási egyenlet, az entrópiára vonatkozó (3.2.279) kontinuitási egyenlet és a (3.2.281) termodinamikai állapotegyenlet együttesen az egyenletek olyan matematikailag zárt rendszerét jelentik, amelyek megoldása a hidrodinamikai feladat megoldását szolgáltatja.

A mozgásegyenletek fenti rendszere nem lineáris, csatolt parciális differenciálegyenletek rendszere, amelyek megoldásához határ- és kezdeti feltételek megadására van szükség. Az egyenletek nem lineárisak, ezért a megoldások egyértelműségéről általában nem mondhatunk semmit. A kapott parciális differenciálegyenletek a keresett fizikai mezők idő szerinti és helykoordináták szerinti parciális deriváltjai tekintetében egyaránt elsőrendűek. A legfontosabb határfeltétel, hogy a folyadék áramlási sebessége merev, nem mozgó falnál párhuzamos kell legyen a fallal, azaz az áramlási sebesség falra merőleges komponense eltűnik a falnál, $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, ahol $\vec{n}$ a folyadék felületének külső normálisa. A kezdeti feltétel a keresett fizikai mezők kezdeti értéke a teljes áramlási térben. (Ennek természetesen öszhangban kell lennie a határfeltételekkel is.)

3.2.3 Izentropikus áramlás

Az áramlást izentropikusnak nevezzük, ha az áramlás során az entrópiasűrűség térben és időben állandó, $s(\vec{r}, t)$ =áll. Ez akkor következik be, ha a kezdeti időpillanatban az entrópiasűrűség homogén, azaz állandó a térben, $s(\vec{r}, t_0)$ =áll. Ekkor ugyanis kezdetben az entrópiasűrűség gradiense is zérus, de akkor az entrópiára vonatkozó (3.2.279) egyenlet értelmében az entrópiasűrűség idő szerinti parciális deriváltja is zérus, azaz az entrópiasűrűség nem kezd el változni.

Izentropikus áramlás esetén a termodinamikai összefüggések leegyszerűsödnek.

1. Izentropikus áramlás esetén az (3.2.280) és (3.2.281) egyenletek helyett a sokkal egyszerűbb $p = p(\rho, s = \text{const.}) = p(\rho)$ adiabatikus állapotegyenlettel helyettesíthetők.

Ideális folyadék izentropikus áramlását az (3.2.277) Euler-egyenlet, a tömeg lokális megmaradását leíró (3.1.254) kontinuitási egyenlet és a $p = p(\rho)$ adiabatikus állapotegyenlet írják le.

2. A folyadék entalpiasűrűsége a tér tetszőleges pontján tetszőleges időpillanatban

$$h = \epsilon + \frac{p}{\rho}, \tag{3.2.282}$$

ahol ϵ a belsőenergia sűrűsége. Ennek megváltozása a termodinamika szerint

$$dh = Tds + \frac{dp}{\rho}, \tag{3.2.283}$$

ahol $T(p, s)$, ill. $\rho(p, s)$ rendre a folyadék hőmérséklete, ill. sűrűsége, mint a nyomás és entrópia-sűrűség függvénye. Ezt az egyenletet úgy is olvashatjuk, hogy ha két szomszédos folyadékelem entrópia-sűrűsége és nyomása rendre ds-sel, ill. dp-vel különbözik, akkor (3.2.283) határozza meg az entalpia-sűrűségük különbözőségét, Izentropikus áramlás esetén a folyadékelemek entrópiasűrűsége azonos, azaz $ds = 0$, úgyhogy

$$dh = \frac{dp}{\rho}. \tag{3.2.284}$$

Ha tehát két szomszédos folyadékelem relatív helyzetvektora $\delta\vec{r}$, akkor $dh = \vec{\nabla}h \cdot \delta\vec{r}$, $dp = \vec{\nabla}p \cdot \delta\vec{r}$, úgyhogy

$$\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} = \vec{\nabla}h. \tag{3.2.285}$$

3. Felhasználva az előző két pontban talált összefüggéseket, behelyettesíthetjük az adiabatikus $p = p(\rho)$ állapotegyenletet, ill. az azzal egyenértékű $\rho = \rho(p)$ állapotegyenletet a (3.2.284) összefüggésbe,

$$dh = \frac{dp}{\rho(p)}. \tag{3.2.286}$$

Mivel s állandó, az entalpia csak a nyomás függvénye, $h = h(p, s = \text{const.}) = h(p)$, amelynek növekményét (3.2.286) határozza meg. Ezért meghatározhatjuk az entalpiasűrűséget, mint a nyomás függvényét:

$$h(p) = h(p_0) + \int_{p_0}^{p} \frac{dp'}{\rho(p')}, \tag{3.2.287}$$

ahol p_0 valamilyen referencia-nyomás, amelyhez tartozó entalpia-sűrűség a $h(p_0)$ additív állandó.

Ha a tömegerő konzervatív és az áramlás izentropikus, akkor az Euler-egyenletekből leszármaztathatunk olyan parciális differenciálegyenleteket, amelyekben csak a sebességvektormező szerepel. Ehhez felhasználjuk a

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}^{\,2}) = \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \tag{3.2.288}$$

azonosságot, amit könnyen beláthatunk:

$$\begin{aligned}
[\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})]_i &= \epsilon_{i,j,k}v_j(\vec{\nabla}\times\vec{v})_k \\
&= \epsilon_{i,j,k}v_j\epsilon_{k,l,m}\partial_l v_m = \epsilon_{i,j,k}\epsilon_{l,m,k}v_j\partial_l v_m \\
&= (\delta_{i,l}\delta_{j,m} - \delta_{i,m}\delta_{j,l})v_j\partial_l v_m \\
&= v_j\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - v_j\frac{\partial v_m}{\partial x_l}, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_k v_k) &= v_k\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = v_k\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \\
&= [\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})]_i + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.
\end{aligned} \tag{3.2.289}$$

Az (3.2.288) azonosság segítségével a vektoralakban felírt (3.2.277) Euler-egyenletet azonosan átalakítjuk:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}^{\,2}) - \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{f}, \tag{3.2.290}$$

A konzervatív tömegerő a φ potenciálból származtatható,

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}\varphi, \tag{3.2.291}$$

továbbá az izentróp áramlásra vonatkozóan érvényes a (3.2.285) egyenlőség. Utóbbiakat felhasználva az egyenlet jobb oldalán, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}^{\,2}) - \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = -\vec{\nabla}(h+\varphi). \tag{3.2.292}$$

Képezzük az így kapott egyenlet mindkét oldalának rotációját, és használjuk fel, hogy tetszőleges skalárfüggvény gradiensének rotációja zérus. Ekkor a sebességmezőre az alábbi egyenlet adódik:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\nabla}\times[\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})], \tag{3.2.293}$$

amelyben nem szerepel sem a sűrűség, sem a nyomás. Ha a (3.2.293) egyenlet megoldásaként meghatároztuk a sebességmezőt, akkor a tömegre vonatkozó kontinuitási egyenletből meghatározzuk a sűrűségmezőt és utána a $p = p(\rho)$ állapotegyenletből megkapjuk a nyomásmezőt. Mivel a (3.2.293) egyenlet másodrendű parciális deriváltakat tartalmaz, azért nem biztos, hogy minden megoldás megoldása az eredeti, elsőrendű Euler-egyenletnek. Fizikai megoldásként csak olyan megoldás fogadható el, ami az Euler-egyenletnek is megoldása.

3.2.4 Inkompresszibilis folyadék

Különösebb nehézség nélkül felírhatjuk az ideális folyadék áramlására vonatkozó (3.1.254), (3.2.277) és (3.2.279) ill. (3.2.281) egyenleteket inkompresszibilis folyadék esetén. Mivel ekkor $\rho = \text{const.}$ miatt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad \vec{\nabla}\rho = 0, \tag{3.2.294}$$

a (3.1.254) kontinuitási egyenletből

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{3.2.295}$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy inkompresszibilis folyadék áramlása forrásmentes. Az áramvonalak nem végződhetnek el az áramlási tér semelyik pontjában. Az áramvonalak vagy zárt görbék, vagy az áramlási tartomány határán végződnek.

Mivel az $s = s(\rho, p)$ állapotegyenletben most $\rho =$áll., azért a entrópia-sűrűség csak a nyomás függvénye $s = s(p)$. Invertálva ezt a függvénykapcsolatot, a nyomást kapjuk mint az entrópia függvényét (az állandó sűrűségű folyadékban), $p = p(s)$. Ennek birtokában az entalpia-sűrűség is csak az entrópia-sűrűség függvénye, $h = h(s, p(s)) = h(s)$. Ekkor

$$\vec{\nabla} h = \frac{\partial h(s)}{\partial s} \vec{\nabla} s, \tag{3.2.296}$$

és az Euler-egyenlet

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\partial h(s)}{\partial s} \vec{\nabla} s + \vec{f}. \tag{3.2.297}$$

Ehhez hozzávéve az entrópiára vonatkozó (3.2.279) kontinuitási egyenletet, a matematikai feladat pontosan annyi darab (4) differenciálegyenlet negoldása, mint ahány keresett függvényünk van (az áramlási sebesség 3 kompinense és az entrópis-sűrűség). A megoldás birtokában a $p = p(s)$ állapotegyenlet szolgáltatja a nyomást, mint a hely és idő függvényét.

Ha az inkompresszibilis folyadék áramlása izentropikus, akkor $s = s(\rho = \text{const.}, p) =$const. azt jelenti, hogy a nyomás is állandó. Ekkor a $h = h(p)$ entalpia-sűrűség is állandó, úgyhogy az Euler-egyenlet tovább egyszerűsödik:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{f}, \tag{3.2.298}$$

amelynek a $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ feltételt kielégítő forrásmentes megoldását kell megkeresni.

3.2.5 Lokális megmaradási törvények

Az anyagmegmaradás, pontosabban a tömegmegmaradás lokális törvénye mellett további lokális megmaradási törvények állnak fenn az ideális folyadékok mozgása során. Az egyik ilyen törvény az entrópia lokális megmaradásának (3.2.280) törvénye, ami abból következik, hogy az ideális folyadék áramlása adiabatikus termodinamikai folyamat. Ez azért van így, mert elhanyagoljuk az energia-disszipációval járó transzport-folyamatokat (diffuzió, hővezetés, belső súrlódás), amelyek a folyadékelemek entrópiáját tudnák növelni.

További lokális megmaradási törvény, pontosabban mérlegegyenlet áll fenn az energiára, az impulzusra és az impulzusmomentumra. Alább az energiára és az impulzusra vonatkozó lokális megmaradási törvénnyel, ill. mérlegegyenlettel foglalkozunk.

1. *Energiaáramlás.* A térfogategység energiája

$$\rho_\epsilon = \frac{1}{2}\rho\vec{v}^{\,2} + \rho\epsilon, \tag{3.2.299}$$

ahol ϵ a folyadék tömegegységre vonatkoztatott belsőenergiája. Számoljuk ki az energiasűrűség időbeli változását adott helyen, azaz a

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^{\,2} + \rho\epsilon\Big) \tag{3.2.300}$$

parciális deriváltat. Kezdjük az áramlásból származó kinetikus energia sűrűségének idő szerinti deriváltjával:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^{\,2}\Big) &= \frac{1}{2}\vec{v}^{\,2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho\frac{\partial\vec{v}^{\,2}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2}\vec{v}^{\,2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}.\end{aligned} \tag{3.2.301}$$

Használjuk fel a második tagban az (3.2.277) Euler-egyenletet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^{\,2}\Big) = -\frac{1}{2}\vec{v}^{\,2}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) + \rho\vec{v}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 + \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{f}\Big). \tag{3.2.302}$$

A $h(s,p)$ entalpiasűrűség az entrópiasűrűség és a nyomás függvényének tekinthető, amit a

$$dh = Tds + \frac{dp}{\rho} \tag{3.2.303}$$

termodinamikai összefüggés fejez ki. Ha az egyenletben szereplő differenciálokat két, $\delta\vec{r}$ relatív helyzetvektorú folyadékelem állapotjellemzőinek különbségként fogjuk fel, akkor írhatjuk, hogy

$$\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} = \vec{\nabla}h - T\vec{\nabla}s, \tag{3.2.304}$$

aminek a segítségével

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^{\,2}\Big) = -\frac{1}{2}\vec{v}^{\,2}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) + \rho\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Big(\frac{1}{2}v^2 + h\Big) + \rho\vec{v}\cdot T\vec{\nabla}s + \rho\vec{f}\cdot\vec{v}. \tag{3.2.305}$$

A térfogategységre eső belsőenergia idő szerinti deriváltját, a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) \tag{3.2.306}$$

parciális deriváltat a belsőenergia megváltozására vonatkozó

$$d\epsilon = Tds - pd\Big(\frac{1}{\rho}\Big) = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho \tag{3.2.307}$$

termodinamikai összefüggés és az entalpiasűrűség

$$h = \epsilon + \frac{p}{\rho} \tag{3.2.308}$$

definíciójából adódó

$$\begin{aligned} d(\rho\epsilon) &= \epsilon d\rho + \rho d\epsilon = \Big(h - \frac{p}{\rho}\Big)d\rho + \rho\Big(Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho\Big) \\ &= hd\rho + \rho Tds \end{aligned} \tag{3.2.309}$$

összefüggés segítségével határozzuk meg:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) &= h\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} \\ &= -h\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) - \rho T\vec{v}\cdot\vec{\nabla}s, \end{aligned} \tag{3.2.310}$$

ahol az utolsó egyenlet felírásakor felhasználtuk a tömeg és az entrópia lokális megmaradását. A fenti részeredmények alapján az energiasűrűség idő szerinti parciális deriváltja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_\epsilon}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\Big) \\ &= -\Big(\frac{1}{2}v^2 + h\Big)\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) - \rho\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Big(\frac{1}{2}v^2 + h\Big) + \rho\vec{f}\cdot\vec{v} + \rho T\vec{v}\cdot\vec{\nabla}s \\ &\quad -\rho T\vec{v}\cdot\vec{\nabla}s \\ &= -\vec{\nabla}\cdot\Big[\rho\vec{v}\Big(\frac{1}{2}v^2 + h\Big)\Big] + \rho\vec{f}\cdot\vec{v} \\ &= -\vec{\nabla}\cdot\Big[\rho\vec{v}\Big(\frac{1}{2}v^2 + \epsilon\Big)\Big] - \vec{\nabla}\cdot(p\vec{v}) + \rho\vec{f}\cdot\vec{v}. \end{aligned} \tag{3.2.311}$$

Ha a ρ_ϵ energiasűrűség mellett bevezetjük az

$$\vec{S} = \rho_\epsilon \vec{v} = \rho \vec{v}\Big(\frac{1}{2}v^2 + \epsilon\Big) \tag{3.2.312}$$

energiaáram-sűrűséget, akkor az energiaáramlásra a

$$\frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{\nabla}\cdot(p\vec{v}) + \rho\vec{f}\cdot\vec{v} \tag{3.2.313}$$

egyenletet kapjuk. A jobb oldalon most nem nulla áll, mint a kontinuitási egyenlet esetében, ami azt jelenti, hogy az energiának forrása van. Ha integráljuk az egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges V térfogatra, akkor az

$$\frac{d}{dt}\int_V dV\rho_\epsilon = -\int_V dV\vec{\nabla}\cdot\vec{S} - \int_V dV\vec{\nabla}\cdot(p\vec{v}) + \int_V dV\rho\vec{f}\cdot\vec{v} \tag{3.2.314}$$

egyenletet kapjuk. A jobb oldal első két tagját írjuk át felületi integrállá,

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_\epsilon dV = -\int_{\partial V} df\vec{n}\cdot\vec{S} - \int_{\partial V} dfp\vec{n}\cdot\vec{v} + \int_V dV\rho\vec{f}\cdot\vec{v}. \tag{3.2.315}$$

Az egyenlet az fejezi ki, hogy a V térfogatban található folyadék energiája azért változik, mert a térfogat határán energia áramlik ki, ill. be (ld. a jobb oldal első tagját), továbbá, mert a térfogatban levő folyadékon a környező folyadék a p nyomás révén mechanikai munkát végez (ld. a jobb oldal második tagját), és a tömegerő is munkát végez a térfogatban levő folyadékon (a jobb oldal harmadik tagja). Az egyenlet a lokális energiamérleg egyenlete, ami lokális megmaradást fejez ki abban az értelemben, hogy a folyadékban kijelölt térfogatban az energia nem keletkezik a semmiből, vagy tűnik el, hanem csak ki- és beáramlás révén, ill. külső erők munkavégzése révén változik.

2. *Impulzusáramlás.* Vezessük be a

$$\vec{g} = \rho\vec{v} \tag{3.2.316}$$

impulzussűrűséget, mint a térfogategység impulzusát. Képezzük ennek idő szerinti parciális deriváltját:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) \;=\; \frac{\partial\rho}{\partial t}\vec{v} + \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}. \tag{3.2.317}$$

Az Euler-egyenlet felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= -v_i\partial_k(\rho v_k) + \rho\Big(-v_j\partial_j v_i - \frac{\partial_i p}{\rho} + f_i\Big)\\ &= -v_i\partial_j(\rho v_j) - (\partial_j v_i)\rho v_j - \partial_i p + \rho f_i\\ &= -\partial_j(\rho v_i v_j + p\delta_{i,j}) + \rho f_i.\end{aligned} \tag{3.2.318}$$

Ha nem lenne jelen külső tömegerő, akkor ez az egyenlet kontinuitási egyenlet alakját öltené, ami azt írja le fizikailag, hogy az impulzussűrűség (az egységtérfogat impulzusa) azért és csak azért változik, mert impulzus áramlik ki, ill. be az egységtérfogat határfelületén, és a

$$\Pi_{i,j} = \rho v_i v_j + p\delta_{i,j} \tag{3.2.319}$$

tenzort az impulzusáram sűrűségének kell tekintenünk, amely megadja a $\vec{E}_{(j)}$ normálisú egységfelületen az $\vec{E}_{(j)}$ normális irányában időegység alatt átáramló impulzus $\vec{E}_{(i)}$ irányú komponensét. A ρf_i térfogategységre ható tömegerő dt idő alatt $\rho dV f_i dt$ impulzust ad át a dV térfogatelemben tartózkodó folyadéknak, így ez a tag forrásként szerepel az impulzusáramlásra vonatkozó egyenletben, amit az impulzusáramlásra vonatkozó mérlegegyenletnek nevezünk:

$$\partial_t g_i + \partial_j \Pi_{i,j} = \rho f_i. \tag{3.2.320}$$

Integráljuk az egyenletet egy tetszőleges, térben rögzített V térfogatra, akkor Gauss tételét felhasználva,

$$\frac{d}{dt}\int_V dV g_i \;\; = \;\; -\int_{\partial V} df n_j \Pi_{i,j} + \int_V dV \rho f_i. \tag{3.2.321}$$

A V térfogatban található anyag impulzusa azért változik, mert egyrészt a ∂V határfelületen impulzus áramlik be a V térfogatba, ill. ki a V térfogatból, továbbá, mert a tömegerő hatása impulzusátadást eredményez. Az impulzussűrűség első tagja ad számot az anyag be-, ill. kiáramlása révén történő impulzusáramlásról, míg a második tag a V térfogat felületére ható nyomás (felületi erő) által átadott impulzus járulékát írja le.

Definíció szerint $\Pi_{i,j} n_j$ az $\vec{n}$ normálisú egységfelületen a normális irányában időegység alatt átáramlott impulzus $\vec{E}_{(i)}$ irányú komponense. Legyen a $\vec{t}$ egységvektor az áramvonal érintője, az $\vec{n}$ pedig tetszőleges, az áramvonalra merőleges egységvektor. Ekkor az áramvonalra merőleges ($\vec{t}$ normálisú) egységfelületen időegység alatt átadott longitudinális ($\vec{t}$ irányú) impulzus

$$\Pi_{\|,\|} = t_i \Pi_{i,j} t_j = \rho v^2 + p, \tag{3.2.322}$$

míg az áramvonalra merőleges ($\vec{t}$ normálisú) egységfelületen időegység alatt átadott transzverzális ($\vec{n}$ irányú) impulzus

$$\Pi_{\perp,\|} = n_i \Pi_{i,j} t_j = 0 \tag{3.2.323}$$

(vagyis az áramvonalak irányában nem áramlik transzverzális impulzus), továbbá az áramvonalat érintő bármely ($\vec{n}$ norm
alisú) egységfelületen időegység alatt átadott impulzus longitudinális ($\vec{t}$ irányú) komponense

$$\Pi_{\|,\perp} = t_i \Pi_{i,j} n_j = 0, \tag{3.2.324}$$

(vagyis az áramvonalra merőleges irányban nem adódik át az áramvonal irányába eső impulzus), és az áramvonalat érintő bármely ($\vec{n}$ normálisú) egységfelületen időegység alatt átadott impulzus transzverzális ($\vec{n}$ irányú) komponense,

$$\Pi_{\perp,\perp} = n_i \Pi_{i,j} n_j = p \tag{3.2.325}$$

(azaz az áramvonalakra merőlegesen csak áramvonalra merőleges irányú impulzus átadása történik a nem zérus nyomásnak köszönhetően). Az itt elmondottak az ideális folyadék áramlásának tipikus jellemzői, amikor az áramvonalakra merőlegesen nem történik az áramlás következtében további impulzusátadás ahhoz képest, mint amennyi a nyugvó folyadékban is megtörténik a nem zérus nyomás miatt. Súrlódó folyadékokban a belső súrlódás az áramvonalakra merőleges irányban történő longitudinális impulzus átadásának a következménye.

Mivel valamely részecskére kifejtett $F_i dt$ erőlökés az erő definíciója értelmében azt jelenti, hogy $dp_i = F_i dt$ impulzus adódik át a részecskének, azért a $\Pi_{i,j}$ impulzusáram-sűrűséget mechanikai feszültségnek kell tekintenünk. Megkülönböztetésül a nem mozgó folyadékban uralkodó, sztatikus $p\delta_{i,j}$ feszültségtől, az áramló folyadékban uralkodó $\Pi_{i,j}$ feszültséget dinamikai feszültségnek nevezzük.

3.2.6 Hidrosztatika

Hidrosztatikáról akkor beszélünk, ha olyan folyadékot írunk le, amely nem áramlik, azaz amelynek a sebességmezeje azonosan zérus,

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = 0. \tag{3.2.326}$$

Ez nyilván akkor és csak akkor következhet be, ha a külső tömegerők sűrűsége időben állandó, $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r})$. Ilyenkor a kontinuitási egyenlet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3.2.327}$$

alakot ölt, ami azt jelenti, hogy a sűrűségmező sem változik az idő függvényében, $\rho = \rho(\vec{r})$. Természetesen ettől még lehet inhomogén, azaz helyről helyre más értékű. Az Euler-egyenlet vektori alakja is leegyszerűsödik:

$$\vec{\nabla} p = \rho(\vec{r}) \vec{f}(\vec{r}), \tag{3.2.328}$$

ahonnan látható, hogy a nyomásmező sem függ az időtől. Végül az adiabatikusság feltétele

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0 \tag{3.2.329}$$

alakot ölt, ami azt jelenti, hogy az entrópiasűrűség sem függ az időtől, csak a helytől, $s = s(\vec{r})$. A helyfüggés valójában az állapotegyenletet is figyelembe véve a sűrűség és a nyomás $s(\vec{r}) = s(\rho(\vec{r}), p(\vec{r}))$ helyfüggésén keresztül jelenik meg.

Azokat a felületeket, amelyek mentén a p nyomás állandó, izobár felületeknek nevezzük. Az izobár felületek mindenütt merőlegesek a $\vec{\nabla} p$ vektorra a gradiens definíciója következtében. Ugyancsak a gradiens definíciójából adódik, hogy $\vec{\nabla} p$ vektor irányában infinitezimálisan elmozdulva a nagyobb nyomáshoz tartozó izobár felület felé haladunk. A hidrosztatikai Euler-egyenlet (3.2.328) következménye, hogy az izobár felületek mindenütt merőlegesek az $\vec{f}$ tömegerő sűrűségére. Ennek az a fontos gyakorlati következménye, hogy a folyadék szabad felszíne nehézségi erőtérben merőleges a nehézségi erőre, azaz a nehézségi erőtérben ekvipotenciális felület. Valóban a folyadék szabad felszínén mindenütt ugyanaz a légköri $p = p_0$ nyomás uralkodik, tehát a szabad felszín izobár felület, akkor pedig merőleges mindenütt az adott helyen uralkodó $\vec{g}$ nehézségi térerősségre.

Inkompresszibilis folyadék esetén a sűrűség $\rho(\vec{r}) = \rho_0$ állandó az egész folyadéktérfogatban. Ekkor az Euler-egyenlet megoldása adott tömegerősűrűség esetén közvetlenül szolgáltatja a nyomást. Ilyenkor nincsen szükség további termodinamikai összefüggésekre.

Kompresszibilis folyadék esetén két esetet érdemes megkülönböztetni.

1. *A hőmérsékleteloszlás homogén.* A termodinamikai egyensúlyi állapot a $T = T(\rho, p)$ állapotegyenlettel is jellemezhető, hiszen ρ és p értéke egyértelműen meghatározza egy adott folyadékelem minden termodinamikai tulajdonságát. Mivel a sűrűség és a nyomás csak a helytől függ, azért a hidrosztatikában a hőmérséklet is csak a helytől függhet. Ha feltesszük, hogy a folyadék egész térfogatában ugyanaz a hőmérséklet uralkodik, akkor a $T = T(\rho, p)$ =áll. egyenlet az izoterma $\rho = \rho(p)|_T$ egyenlete. Ha ezt behelyettesítjük a (3.2.328) hidrosztatikai Euler-egyenletbe, akkor a nyomásmezőre vonatkozó elsőrendű parciális differenciálegyenletet kapunk, amely megoldható, ha valamely referenciafelületen megadjuk a nyomás értékét.

2. Az entrópia-sűrűség homogén. Ha a folyadékban az entrópia-sűrűség homogén, azaz $s = s(\rho\vec{r}, p(\vec{r})$ =áll., ami az izentropikus eset, akkor az állapotegyenlet a $\rho = \rho(p)|_s$ adiabata egyenletébe írható át. Ezt behelyettesítve a (3.2.328) hidrosztatikai Euler-egyenletbe, megint csak a nyomásra kapunk egy elsőrendű parciális differenciálegyenletet. A határfeltétel ismét a nyomás értéke valamilyen referencia-felületen.

3.2.7 Speciális hidrosztatikai problémák

1. *Inkompresszibilis folyadék nehézségi erőtérben. Hidrosztatikai nyomás.* Ilyenkor a sűrűség a foladék egész térfogatában állandó, $\rho = \rho_0$ és a tömegerősűrűség is állandó, $\vec{f} = \vec{g}$. Válasszuk úgy a Descartes-koordinátarendszert, hogy az (x, y) síkja a folyadék szabad felszíne legyen, ahol a nyomás adott $p(z = 0) = p_0$. A z-tengely mutasson függőlegesen felfelé. Az Euler-egyenletek vektorkompo-

nensekben:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \tag{3.2.330}$$

Az első két egyenletből következik, hogy a nyomás csak a z-koordinátától függ. A harmadik egyenletet a $p(z=0) = p_0$ kezdőfeltétellel integrálva azt kapjuk, hogy

$$p(z) = p_0 - \rho g z. \tag{3.2.331}$$

Ez azt jelenti, hogy a folyadék szabad felszíne alatt h mélységben ($z = -h$) a nyomás

$$p(-h) = p_0 + \rho g h. \tag{3.2.332}$$

A szabad felszínen uralkodó p_0 nyomáshoz h mélységben hozzáadódik a $\rho g h$ hidrosztatikai nyomás.

Érdemes megjegyezni, hogy a nyomás csak a mélységtől függ, és nem függ az edény alakjától, amelyben a folyadék nyugszik. Az edény falának $\vec{n}$ külső normálisú df felületelemére h mélységben

$$df \sigma_{i,j} n_j = p(-h)\delta_{i,j} n_j df = p(-h) n_i df = (p_0 + \rho g h) n_i df \tag{3.2.333}$$

erő hat, amely tehát merőleges a felületre.

A felületi erő mélységfüggésének egyik fontos következménye, hogy egy víztározó gátjára forgatónyomaték hat. Képzeljük el, hogy a H mélységű folyadékot egyik oldalról függőleges, téglalap alakú merev fal határolja, amelynek szélessége b. Akkor – korábbi jelöléseinkkel és feltételezve, hogy a fal síkja az (y,z)-sík – a folyadék a falra

$$\begin{aligned} M_y^{(1)} &= \int_{-H}^{0} b dz [\vec{r} \times (p_0 - \rho g z)(-\vec{E}_{(1)})]_y \\ &= b \int_{-H}^{0} dz [-z(p_0 - \rho g z)(-1)] = b \int_0^H dh (p_0 h + \rho g h^2) \\ &= \frac{1}{2} b p_0 H^2 + \frac{1}{3} b \rho g H^3 \end{aligned} \tag{3.2.334}$$

forgatónyomatékot gyakorol. A fal másik oldalán uralkodó légköri nyomástól is származik $M_y^{(2)} = -\frac{1}{2} b p_0 H^2$ forgatónyomaték. A gátat tehát mechanikailag úgy kell megépíteni, hogy a hidrosztatikai nyomásból származó $M_y^{(1)} + M_y^{(2)} = \frac{1}{3} b \rho g H^3$ forgatónyomaték-többletet ellensúlyozni tudja.

2. *Inkompresszibilis, állandó hőmérsékletű folyadék nehézségi erőtérben. Barometrikus magasságképlet.* Amennyiben a folyadék nem cseppfolyós anyag, hanem gáz, pl. a levegő, akkor nem jó közelítés a sűrűség állandóságát feltételezni. Ha nem túl magas levegőrétegben akarjuk meghatározni a hidrosztatikai nyomást,

akkor feltehetjük jó közelítéssel, hogy a levegő hőmérséklete állandó, és alkalmazhatjuk az ideális gáz $pV = mRT$ állapotegyenletét, ahonnan az izotermák $\rho = \rho(p)|_T$ egyenlete

$$\frac{p}{\rho} = RT = C = \text{ áll. }, \tag{3.2.335}$$

alakban, ahol T az állandó hőmérséklet, m a folyadék tömeg, $\rho = m/V$ a tömegsűrűség, R pedig a gázállandó. Válasszuk a Descartes-koordinátarendszer (x, y) síkját a Föld felszínén, a z-tengely mutasson függőleges felfelé. Vegyük adottnak a Föld felszínén a $p(x, y, z = 0) = p_0$ nyomást (és a $\rho(x, y, z = 0) = p_0/C = \rho_0$ sűrűséget). Az Euler-egyenletek most

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -pg/C \tag{3.2.336}$$

alakot öltik. Innen és a $z = 0$ helyen megadott határfeltételekből látszik, hogy a p nyomás csak a z koordináta függvénye, $p = p(z)$ és akkor $\rho = \rho(z) = p(z)/C$ is. A nyomás z-függésére vonatkozó differenciálegyenlet ekkor közönséges elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenlet, amelyet a változók szétválasztásának módszerével oldahtunk meg:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(z)}\frac{dp(z)}{dz} &= -\frac{g}{C}, \\ \frac{d\ln[p(z)/p_0]}{dz} &= -\frac{g}{C}, \end{aligned} \tag{3.2.337}$$

ahol a logaritmus argumentumát dimenziótlan alakban írtuk. A megfelelő primitív függvények:

$$\ln[p(z)/p_0] = -\frac{gz}{C} + C_1. \tag{3.2.338}$$

ahol a C_1 integrációs állandó értéke a $p(0) = p_0$ határfeltételből $C_1 = 0$. A nyomás magasságfüggése tehát

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{gz}{C}} = p_0 e^{-\frac{\rho_0 gz}{p_0}}. \tag{3.2.339}$$

Ez az úgynevezett barometrikus magasság-képlet, ami megadja a légköri nyomás változását a magasság függvényében. Két fontos feltétellel érvényes, (1) hogy a légkör nyugalomban van, és (2) hogy a légréteg hőmérséklete nem változik a magassággal.

3. *Inkompresszibilis, adiabatikus állapotegyenletű folyadék nehézségi erőtérben.* Azt az esetet vizsgáljuk, amikor a folyadékréteg vastagsága olyan nagy, hogy a hőmérsékletet nem lehet jó közelítéssel állandónak feltételezni. Például, amikor a légköri nyomást a Föld felszínén és nagy magasságokban akarjuk összehasonlítani, akkor még mindig ideálisnak tételezhetjük fel a folyadékot, és feltehetjük, hogy adiabatikus folyamat állítja be a mechanikai egyensúlyt,

de nem tehetjük fel, hogy a hőmérséklet homogén eloszlású. Ekkor a nyomás és a sűrűség közti összefüggést az adiabaták $\rho = \rho(p)|_s$ egyenlete határozza meg. Ha a folyadékot gáznak tekintjük, akkor az adiabaták egyenlete

$$p\rho^{-\gamma} = \text{áll.} = C, \qquad \gamma \neq 1 \tag{3.2.340}$$

ahol γ a gázra jellemző állandó. Ezt helyettesítve a

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{3.2.341}$$

egyenletbe,

$$p^{-1/\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} = -C^{-1/\gamma} g \tag{3.2.342}$$

közönséges elsőrendű differenciálegyenlet adódik a nyomás magasságfüggésére. Ennek megoldása a $p(0) = p_0$ határfeltétellel:

$$p(z) = p_0^{-\frac{1}{\gamma-1}}\Big[p_0 - \Big(1 - \frac{1}{\gamma}\Big)\rho_0 g z\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{3.2.343}$$

ahol a sűrűség a Föld felszínén $\rho_0 = (p_0/C)^{\frac{1}{\gamma}}$.

3.2.8 A Bernoulli-egyenlet

A hidrodinamikai egyenleteinek megoldása általában még ideális folyadék áramlása esetén sem egyszerű matematikai feladat. Sokat egyszerűsödhet a hidrodinamikai probléma tárgyalása, ha rögtön az Euler-egyenletek integráljával indulunk. Erre szolgál a Bernoulli-egyenlet, amelyet most először stacionárius áramlás esetére vezetünk le, majd a (nem stacionárius és stacionárius) potenciáláramlás esetére. Végül bemutatjuk a Bernoulli-egyenlet néhány alkalmazását.

1. *Stacionárius áramlás. Bernoulli-egyenlet*

   A stacionárius áramlásról akkor beszélünk, ha a folyadékot jellemző fizikai mezők nem függnek az időtől és a sebességmező nem azonosan zérus,

   $$\frac{\partial \vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t} = 0, \quad \vec{v}(\vec{r}) \not\equiv 0. \tag{3.2.344}$$

   Az áramvonalak időben állandó irányított görbék, amelyek egyenlete $\vec{r} = \vec{r}(\ell) = (x(\ell), y(\ell), z(\ell))$ eleget tesz az alábbi egyenleteknek,

   $$\frac{x'(\ell)d\ell}{v_x(\vec{r}(\ell))} = \frac{y'(\ell)d\ell}{v_y(\vec{r}(\ell))} = \frac{z'(\ell)d\ell}{v_z(\vec{r}(\ell))}, \tag{3.2.345}$$

ahol $x' = \frac{dx(\ell)}{d\ell}$, stb. és ℓ az áramvonal ívhossz-paramétere. Stacionárius áramlás során az áramvonalak egyúttal az egyes folyadékrészecskék pályái.

Induljunk ki az Euler-egyenlet (3.2.277) vektoriális alakjából, szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát az áramvonalak érintő egységvektorával, a $\vec{t}(\ell) = \vec{v}(\vec{r}(\ell))/|\vec{v}(\vec{r}(\ell))|$ vektorral,

$$\vec{t}(\ell) \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\ell)} = \vec{t}(\ell) \cdot [-\vec{\nabla} h + \vec{f}]|_{\vec{r}=\vec{r}(\ell)}, \tag{3.2.346}$$

azaz

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\ell)} = \vec{f}(\vec{r}(\ell)) \cdot \vec{t}(\ell), \tag{3.2.347}$$

ahol $\frac{\partial}{\partial l} = \vec{t}(\ell) \cdot \vec{\nabla}$ az úgynevezett iránymenti derivált. Itt felhasználtuk, hogy $\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ merőleges a $\vec{v}$ vektorra, vagyis a $\vec{t}$ érintővektorra, ezért $\vec{t} \cdot [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})] = 0$. Vizsgáljunk két esetet:

(a) Ha nincsen jelen külső tömegerő, $\vec{f} = 0$, akkor a fenti egyenletet egy tetszőleges áramvonal mentén integrálva azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\ell)} = \text{áll.} \tag{3.2.348}$$

Természetesen az állandó értéke a különböző áramvonalakon más és más lehet. Ez az egyenlet a stacionárius áramlásra vonatkozó Bernoulli-egyenlet, ha nincsen jelen tömegerő. Ha az áramlás izentropikus, akkor az entalpia-sűrűség úgy írható be a Bernoulli-egyenlet bal oldalába, mint a nyomás függvénye (ld. (3.2.287)):

$$h(p(\vec{r}(\ell))) = h(p_0) + \int_{p_0}^{p(\vec{r}(\ell))} \frac{dp'}{\rho(p')}, \tag{3.2.349}$$

ahol p_0 a referencianyomás az áramvonal valamilyen tetszőlegesen választott ℓ_0 paraméterű pontjában, $p_0 = p(\vec{r}(\ell_0))$. Az (3.2.349) egyenlet jobb oldalán az integrandusban az adiabata $\rho = \rho(p)$ egyenlete szerepel. Inkompresszibilis folyadék izentropikus áramlása esetén az entalpia-sűrűségre az (3.2.349) egyenletből a még egyszerűbb

$$h(p(\vec{r}(\ell))) = \frac{p(\vec{r}(\ell))}{\rho} + const. \tag{3.2.350}$$

összefüggés adódik. Az állandónak nincsen jelentősége a Bernoulli-egyenlet szempontjából, el is hagyható.

(b) Vizsgáljuk most a folyadék stacionárius áramlását konzervatív tömegerő jelenlétében. Ekkor létezik olyan $\varphi(\vec{r})$ potenciál, hogy $\vec{f}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$, úgyhogy

$$\vec{t}(\ell) \cdot \vec{f}(\vec{r}(\ell)) = -\frac{\partial}{\partial l} \varphi(\vec{r}(\ell)) \tag{3.2.351}$$

bármely kiszemelt áramvonal mentén. Ezt felhasználva, a (3.2.347) egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}v^2 + h + \varphi\right)\bigg|_{\vec{r}=\vec{r}(\ell)} = 0 \tag{3.2.352}$$

alakot ölt, amit integrálva a tetszőlegesen kiszemelt áramvonal mentén, az alábbi Bernoulli-egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{1}{2}v^2 + h + \varphi\right)\bigg|_{\vec{r}=\vec{r}(\ell)} = \text{áll.} \tag{3.2.353}$$

Ha összehasonlítjuk a (3.2.348) és a (3.2.353) egyenleteket, akkor látjuk, hogy a Bernoulli-egyenlet annyiban módosult a konzervatív tömegerő jelenléte miatt, hogy az egyenlet bal oldalához hozzá kell adni az egységnyi tömeg potenciális energiáját. Pl. ha a tömegerő a nehézségi erő, azaz $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{g} =$áll. a nehézségi gyorsulás, azaz a nehézségi erőtér térerőssége, akkor a potenciál $u = gz$ (ha a Descartes-koordinátarendszer z-tengelyét függőlegesen felfelé irányítjuk) és a Bernoulli-egyenlet

$$\left(\frac{1}{2}v^2 + h + gz\right)\bigg|_{\vec{r}=\vec{r}(\ell)} = \text{áll.} \tag{3.2.354}$$

alakot ölt. Izentropikus áramlás esetén, ill. inkompresszibilis folyadék izentróp áramlása esetén most is használhatjuk rendre az (3.2.349), ill. az (3.2.350) összefüggést az entalpia-sűrűségre.

A Bernoulli-egyenlet matematikai szempontból az Euler-egyenletek első integrálja. Egyaránt érvényes kompresszibilis és inkompresszibilis folyadék stacionárius áramlása esetén.

2. *Bernoulli-egyenlet potenciáláramlás esetén*

Most megvizsgáljuk általában a potenciáláramlást és megmutatjuk, hogy a Bernoulli-egyenlet stacionárius potenciáláramlás esetén még szigorúbb alakban igaz, mint azt az előző fejezetben megkaptuk, nevezetesen az egyenletben szereplő állandó az egész térben azonos, azaz minden áramvonalra ugyanaz az értéke.

Vizsgáljuk ideális folyadék nem stacionárius potenciáláramlását konzervatív tömegerő jelenlétében. Legyen $\phi(\vec{r}, t)$ a sebességpotenciál, amelyre

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t). \tag{3.2.355}$$

Induljunk ki az Euler-egyenlet vektori alakjából:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(h + \varphi), \tag{3.2.356}$$

ahol φ a tömegerő potenciálja, $\vec{f} = -\vec{\nabla}\varphi$. Ha kihasználjuk, hogy potenciáláramlás esetén $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ a tér minden pontjában, akkor

$$(v_j\partial_j)v_i = v_j(\partial_j v_i - \partial_i v_j) + v_j\partial_i v_j = v_j\partial_i v_j = \frac{1}{2}\partial_i v^2 \tag{3.2.357}$$

miatt az Euler-egyenlet

$$\vec{\nabla}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + h + \varphi\Big) = 0 \tag{3.2.358}$$

alakot ölt. Ezt integrálva azt kapjuk, hogy a kerek zárójelben szereplő skalármező az egész térben állandó egy tetszőleges adott pillanatban, az állandó értéke azonban függhet az időtől:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + h + \varphi = C(t). \tag{3.2.359}$$

Ez a nem stacionárius potenciáláramlásra vonatkozó Bernoulli-egyenlet.

Szorítkozzunk most a stacionárius potenciáláramlás esetére, amikor a sebességpotenciál és így a sebességmező sem függ az időtől, $\partial_t\phi = 0$, ill. $\partial_t\vec{v} = 0$. Akkor a Bernoulli-egyenletben szereplő állandó értéke sem függhet az időtől, $C(t) = C_0$. Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges időpillanatban a tér tetszőleges pontjában

$$\frac{1}{2}v^2 + h + \varphi = C_0. \tag{3.2.360}$$

Itt a C_0 állandó értékét a határfeltételek határozzák meg. Ez lényegében ugyanolyan alakú egyenlet, mint a (3.2.353) egyenlet, amit korábban kaptunk a stacionárius potenciáláramlás esetén, azzal a különbséggel, hogy a (3.2.353) egyenlet a $\frac{1}{2}v^2+h+\varphi$ kifejezés értékeről csak annyit mond, hogy értéke egy-egy áramvonal mentén állandó. Most azonban azt is beláttuk, hogy a $\frac{1}{2}v^2 + h + \varphi$ mennyiség értéke ugyanaz az állandó az egész áramlási térben.

Megjegyezzük, hogy ideális folyadék izentróp stacionárius potenciáláramlása, ill. inkompresszibilis ideális folyadék izentróp stacionárius potenciáláramlása esetén az entalpia alakjára rendre az (3.2.349), ill. (3.2.350) kifejezést használhatjuk.

3. *Ideális folyadék stacionárius áramlása csőben*

   Alább a Bernoulli-egyenlet fontos és egyszerű alkalmazását mutatjuk meg ideális folyadék csőben történő stacionárius potenciáláramlása esetén. Később be fogjuk látni, hogy ideális folyadékban örvények nem keletkezhetnek, ill. tűnhetnek el. Ezért, ha az áramlást úgy hoztuk létre, hogy nem keletkeztek örvények, és a folyadék jó közelítéssel ideális, akkor az áramlás örvénymentes lesz, azaz potenciáláramlás.

   Tegyük fel, hogy ideális folyadék áramlik stacionáriusan vékony csőben nehézségi erőtérben és az áramlás örvénymentes, azaz potenciáláramlás, valamint hogy az áramlás izentróp. Tegyük fel továbbá, hogy az áramlást a cső A és B merőleges keresztmetszetén alkalmasan választott, a keresztmetszet mentén homogén határfeltételek biztosítják. Válasszuk a csőhöz rögzített Descartes-koordinátarendszer (x, y)-síkját vízszintesen, a z tengelyt pedig függőlegesen felfelé. Tekintsük a cső két tetszőleges, az A és B keresztmetszetek közötti csőrészben elhelyezkedő 1-es és 2-es merőleges keresztmetszetét, ezek helyezkedjenek el z_1 ill. z_2 magasságban. Feltevésünk szerint a határfeltételek a cső A és B keresztmetszetei mentén homogének, úgyhogy a hidrodinamikai egyenletek olyan megoldásait keressük, amelyekben a fizikai mezők homogének a cső bármely merőleges keresztmetszete mentén. Ha a cső elég vékony, akkor a helykoordináták változását is elhanyagolhatjuk a cső keresztmetszete mentén. Legyen a választott keresztmetszeteknél az áramlás sebessége, a nyomás és a sűrűség rendre v_1, p_1 és ρ_1, ill. v_2, p_2 és ρ_2. Akkor a (3.2.360) Bernoulli-egyenlet értelmében:

$$\int^{p_1} \frac{dp'}{\rho(p')} + \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 = \int^{p_2} \frac{dp'}{\rho(p')} + \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2, \tag{3.2.361}$$

ahol felhasználtuk az entalpia-sűrűség (3.2.349) alakját benne az adiabaták $\rho = \rho(p)$ egyenletével. Másrészt stacionárius áramlás esetén $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, úgyhogy a (3.1.254) kontinuitási egyenlet

$$0 = \vec{\nabla}(\rho v) \tag{3.2.362}$$

alakot ölt. Integráljuk az (3.2.362) egyenlet mindkét oldalát az 1-es és 2-es keresztmetszet közötti, a cső által határolt V térfogatra. Gauss tételét felhasználva:

$$0 = \int_V \vec{\nabla}(\rho v) = \int_{\partial V} df \ \rho\vec{v} \cdot \vec{n} = -A_1\rho_1 v_1 + A_2\rho_2 v_2 \tag{3.2.363}$$

ahol $\vec{n}$ a V térfogatot határoló ∂V zárt felületnek a külső normálisa, A_1 ill. A_2 rendre a cső két kiszemelt keresztmetszetének területe. Mivel az áramlási sebesség eleget tesz a cső ∂V falánál a $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ határfeltételnek, csak a cső két kiszemelt keresztmetszete ad el nem tűnő járulékot a felületi integrálhoz. A (3.2.361) Bernoulli-egyenlet és a (3.2.363) kontinuitási egyenlet együttesen alkalmasak arra, hogy meghatározzuk a csőben az áramlási viszonyokat. Az 1 és 2 keresztmetszetek bármely két keresztmetszetet jelenthetnek az A és B keresztmetszetek közti csőrészben, ill. speciálisan egybe is eshetnek rendre az A, ill. B keresztmetszetekkel.

Annak érdekében, hogy összefüggéseink még egyszerűbbek legyenek és figyelmünket a stacionárius potenciáláramlás lényegi vonásaira összpontosíthassuk, tegyük fel a továbbiakban, hogy a folyadék inkompresszibilis. Ekkor a sűrűség állandó, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ és az entalpiasűrűség

$$h(p) = \int^p \frac{dp'}{\rho} = \text{ const. } + \frac{p}{\rho}, \tag{3.2.364}$$

úgyhogy egyenleteink az alábbi alakot öltik:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = C_1, \qquad Av = C_2, \tag{3.2.365}$$

ahol C_1 és C_2 állandók, amelyek értékét a határfeltételek rögzítik. A Bernoulli-egyenlet ezen alakjának szemléletes jelentése van: a mechanikai nyomás, a $\frac{1}{2}\rho v^2$ úgynevezett torlónyomás és a $\rho g z$ hidrosztatikai nyomás összege állandó a cső mentén. A kontinuitási egyenlet következtében, ahol megnő a keresztmetszet, ott lecsökken az áramlási sebesség, hogy a kettő szorzata állandó maradjon.

Diszkutáljuk most a határfeltételeket. Válasszuk a koordinátarendszert úgy, hogy a cső A végén $z_A = 0$ legyen. Ekkor az A végen a sebesség és a nyomás eleget tesz a

$$A_A v_A = C_2, \qquad p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = C_1 \tag{3.2.366}$$

összefüggéseknek. Fizikailag a határfeltételt például az biztosíthatja, hogy a csövet adott sebességgel mozgatjuk adott nyomású homogén folyadékban. Ha a határfeltétel rögzíti v_A áramlási sebességet a cső egyik végén, akkor a kontinuitási egyenletből a cső bármely pontján egyértelműen meghatározható az áramlási sebesség. Ha a határfeltétel azt is rögzíti, hogy p_A nyomású folyadék áramlik be a csőbe, akkor a Bernoulli-egyenletben szereplő másik állandó is rögzítve van. Fizikailag ezeket a határfeltételeket például az biztosíthatja, hogy a csövet adott sebességgel mozgatjuk adott nyomású homogén folyadékban. Ez valósul meg pl. amikor a repülőgép sebességének meghatározására szolgáló vízszintes Venturi-cső a repülőgép v_A vízszintes sebességével mozog a p_0 nyomású levegőben. A cső két szélső darabja $A_A = A_B$ azonos keresztmetszetű, válasszuk itt az 1 keresztmetszetet ($A_1 = A_A$,, $v_1 = v_A$, $p_1 = p_A = p_0$, de középső darabja, ahol a 2 keresztmetszetet választjuk, keskenyebb, $A_2 < A_1$. Ekkor

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \qquad p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{3.2.367}$$

adódik, ahonnan, ha megmérjük nanométerrel (hidrosztatikai nyomásmérővel) az 1 és a 2 keresztmetszeteknél uralkodó p_1, ill. p_2 nyomást, akkor kiszámolhatjuk a Venturi-cső, azaz a repülőgép $v_1 = v_A$ sebességét az A_1 és A_2 keresztmetszetek ismeretében.

A (3.2.365) egyenletek alapján meghatározhatjuk cseppfolyós folyadék kiömlési sebességét, amikor nagy tartályból folyadék folyik ki a tartály alján elhelyezkedő kis nyíláson. Válasszunk ki ekkor egy tetszőleges, vékony áramcsövet és arra alkalmazzuk a (3.2.365) egyenleteket. Az áramcső A vége a tartályban levő folyadék szabad felszínén van, ahol a nyomás $p_A = p_0$ a külső (légköri) nyomás. Ha a tartály nagy és a nyílás a tartály alján kicsi, akkor folyadék felszínén az áramlási sebesség közel zérusnak tekinthető, $v_A = 0$. Válasszuk a koordinátarendszerünk (x, y) síkját vízszintes síknak, a z-tengelyt függőlegesen felfelé, és legyen $z_A = h$ a szabad felszín, $z_B = 0$ pedig a nyílásszintje. Ekkor

$$p_0 + \rho g h = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2, \tag{3.2.368}$$

ahol azonban a kiáramlás helyén ugyancsak a külső nyomás uralkodik, $p_B = p_0$, így azt kapjuk, hogy

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_B^2, \tag{3.2.369}$$

ahonnan a kiáramló folyadék sebessége:

$$v_B = \sqrt{2gh}. \tag{3.2.370}$$

Ez az összefüggés Torricelli törvénye. Szemléletesen azt fejezi ki, hogy ha a folyadék szabad felszínétől a nyílásig húzódó áramlási csőben található folyadék elmozdul az áramlási csőben, akkor csökken az áramlási csőben található folyadék potenciális energiája, s ez a veszteség alakul át a kiömlő folyadék kinetikus energiájává. Valóban a nyílásnál a kiszemelt áramcsövön δm tömegű folyadék lép ki, amelynek kinetikus energiája $\frac{1}{2}\delta m\ v_B^2$. A tömegmegmaradás miatt viszont ehhez az áramlási csőben található folyadéknak olymértékben kellett „lejjebb csúsznia”, hogy az áramlási cső A végén „ hiányozzon egy ugyancsak δm tömegű folyadékelem. Mivel utóbbinak közel nulla volt a sebessége, ezért ez azt jelenti, hogy az áramlási csőben található folyadék kinetikus energiát nem vesztett csak $\delta m\ gh$ potenciális energiát. Akkor az energiamegmaradás törvénye értelmében:

$$\frac{1}{2}\delta m\ v_B^2 = \delta m\ gh. \tag{3.2.371}$$

Az áramcsőben található folyadék A és B határfelületén a mechanikai nyomás munk
aja éppen kiejti egymást, mert a felületi erő egyik esetben egyirányú, másik esetben ellentétes irányú az e;mozdulással, de mindkét helyen azonos nagyságú a nyomás.

Végül a folyadék tartályból való kiömlésére kapott (3.2.368) egyenlet alkalmazható gázokra is, ha figyelembe vesszük, hogy a tartályban a nyomás $p_A = p$ nagyobb, mint a nyílásnál a $p_B = p_0$ külső nyomás, valamint elhanyagoljuk a gáz hidrosztatikai nyomását (ami kis tartály esetén megengedhető). Ekkor

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_B^2, \tag{3.2.372}$$

ahonnan a kiömlési sebesség

$$v_B = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}, \tag{3.2.373}$$

ami Bunsen törvénye. Levezetésekor a gázt inkompresszibilisnek tekintettük.

4. *Stacionárius cirkulációs áramlás*

Ebben a fejezetben arra mutatunk példát, hogy ideális inkompresszibilis folyadék örvénymentes áramlása (potenciiáláramlása) lehet cirkulációs áramlás. Ez az ideális folyadék olyan áramlása, amikor vannak olyan zárt görbék az áramlási térben, amelyek mentén a cirkuláció nem nulla, noha az áramlás örvénymentes.

Tegyük fel, hogy r_1 és $r_2 > r_1$ sugarú koncentrikus körök közötti tartományban ideális inkompresszibilis folyadék áramlik egy síkban úgy, hogy az áramvonalak koncentrikus körök. Legyen a Descartes-koordinátarendszer origója a koncentrikus körök középpontja, és feküdjön az áramlás síkja az $(x, y))$ síkban. Legyenek a sebességmező Descarte-komponensei:

$$v_x(\vec{r}) = -\frac{a}{r}\sin\alpha, \qquad v_y(\vec{r}) = \frac{a}{r}\cos\alpha, \qquad v_z = 0, \tag{3.2.374}$$

ahol $a > 0$ állandó, α az $\vec{r}$ helyzetvektornak az x-tengellyel bezárt szöge. A $\vec{v}(\vec{r})$ sebesség az áramvonalak érintője, úgyhogy merőleges szárú háromszögek miatt a $\vec{v}$ sebesség az y-tengellyel szintén α szöget zár be:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3.2.375}$$

Könnyen beláthatjuk, hogy az örvénymező azonosan zérus:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}(\partial_y v_z - \partial_z v_y) = 0, \\ \omega_y &= \frac{1}{2}(\partial_z v_x - \partial_x v_z) = 0, \\ \omega_z &= \frac{1}{2}(\partial_x v_y - \partial_y v_x) = \frac{a}{2}\left(\partial_x \frac{x}{x^2+y^2} + \partial_y \frac{y}{x^2+y^2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.2.376}$$

Az áramlás örvénymentes, ezért létezik olyan sebességpotenciál $\phi(\vec{r})$, hogy

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{r}). \tag{3.2.377}$$

Számoljuk ki ezután a cirkulációt különböző típusú zárt görbékre. Ha olyan C_0 zárt görbét veszünk, amelyik nem csavarodik körbe az r_1 sugarú kör körül, akkor a C_0 zárt görbe mentén a $\phi(\vec{r})$ sebességpotenciál egyértékű és

$$\Gamma_{C_0} = \oint_{C_0} d\vec{s}\cdot\vec{v} = -\oint_{C_0} d\vec{s}\cdot\vec{\nabla}\varphi = 0. \tag{3.2.378}$$

Ugyanakkor vegyük az $r_1 < r < r_2$ sugarú C_1 zárt görbét, amelyik egyszer körbecsavarodik az áramlási térből kizárt r_1 sugarú belső tartomány körül:

$$\Gamma_{C_1} = \oint d\vec{s}\cdot\vec{v} = \oint ds v_s = \int_0^{2\pi} d\varphi\; r\frac{a}{r} = 2\pi a. \tag{3.2.379}$$

Nem nehéz belátni, hogy a cirkuláció értéke tetszőleges olyan zárt görbére ugyanennyi, amelyik egyszer csavarodik körbe az origó körül és benne van az áramlási térben.

3.2.9 A cirkuláció megmaradásának törvénye

A cirkuláció megmaradásának törvénye (Thomson törvénye) szerint ideális inkompresszibilis folyadék konzervatív erőtérben történő áramlása esetén a folyadékkal együttmozgó zárt görbéhez tartozó cirkuláció megmarad. Ha C görbe a folyadékelemek olyan zárt görbét alkotó lánca, amely az áramlás során mindvégig zárt görbe marad (annak ellenére, hogy alakja az áramlás során változhat), akkor Thomson törvénye szerint a C görbéhez tartozó Γ_C cirkuláció értéke állandó marad:

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \text{ const. }, \tag{3.2.380}$$

ahol $\Gamma_C = \oint_C d\vec{s} \cdot \vec{v}$.

A törvényt az alábbi módon láthatjuk be. Legyen a tetszőleges t időpillanatban C a folyadékelemek alkotta zárt görbe, és $d\vec{s}$ a C zárt görbe irányított íveleme, amely a görbe P_1 pontjából a görbe hozzá infinitezimálisan közeli P_2 pontjába mutat. Legyen továbbá F_c a C görbere illeszkedő tetszőleges felület, amelynek $\vec{n}$ normálisa a görbe körüljárási irányához a jobbkéz-szabály szerint illeszkedik. Legyen továbbá infinitezimális δt idővel később az ugyanezen folyadékelemek zárt lánca által alkotott görbe C', megfelelő pontjai rendre P_1' és P_2' és a megfelelő irányított ív hosszelem $d\vec{s}'$. Mivel a görbe a folyadékkal együtt változtatja az alakját, a cirkuláció deriváltjának kiszámításakor az irányított ívelemek időbeli változását és a sebességmező időbeli változását egyaránt figyelembe kell venni:

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Gamma_{C'} - \Gamma_C}{\delta t} = \oint_C \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} + \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} d\vec{s} \right). \tag{3.2.381}$$

Határozzuk meg először az irányított ívhosszelem deriváltját. A C görbe P_1, ill. P_2 pontjaiban az áramás sebessége rendre $\vec{v}_1$, ill. $\vec{v}_2$ a t időpillanatban, és közöttük a

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (d\vec{s} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1 \tag{3.2.382}$$

reláció áll fenn. A t, ill. a $t + \delta t$ időpillanatban az irányított ívhosszelem $d\vec{s}$, ill. $d\vec{s}'$, amelyek között pedig a

$$d\vec{s}' = d\vec{s} + (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\delta t = d\vec{s} + (d\vec{s} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1 \delta t \tag{3.2.383}$$

kapcsolat van. A $\vec{v}_1 = \vec{v}$ átjalöléssel figyelembe véve, hogy P_1 a C görbe tetszőleges pontja lehet, adódik, hogy

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} d\vec{s} &= \vec{v} \cdot \lim_{\delta t} \frac{d\vec{s}' - d\vec{s}}{\delta t} = \vec{v} \cdot (d\vec{s} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \\ &= v_i \; ds_j \; \partial_j v_i = \frac{1}{2} ds_j \; \partial_j v^2 \\ &= d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right). \end{aligned} \tag{3.2.384}$$

Stokes tételét alkalmazva a cirkuláció deriváltjának második tagjára azt kapjuk, hogy eltűnik:

$$\oint_C d\vec{s}\cdot\vec{\nabla}\Big(\frac{v^2}{2}\Big) = \int_{F_C} df\ \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Big(\frac{v^2}{2}\Big) = 0, \qquad (3.2.385)$$

hiszen skalármező gradiensének rotációja mindig zérus.

Vizsgáljuk most a cirkuláció deriváltjának másik tagját. Konzervatív tömegerő terében létezik olyan φ skalárpotenciál, hogy $\vec{f} = -\vec{\nabla}\varphi$. Az ideális folyadék áramlását leíró Euler-egyenletből pedig tudjuk, hogy a sebességmező idő szerinti teljes deriváltja

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}(\varphi + \frac{p}{\rho}), \qquad (3.2.386)$$

ahol $\rho =$áll. az inkompresszibilis folyadék sűrűsége. Gradiens mező zárt görbe menti integrálja viszont zérus (mint az Stokes tételének alkalmazásával is adódik), úgyhogy

$$\oint_C d\vec{s}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = -\oint_C d\vec{s}\cdot\vec{\nabla}(\varphi+\frac{p}{\rho}) = \int_{F_C} df\ \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}(\varphi+\frac{p}{\rho}) = 0. \qquad (3.2.387)$$

Ezzel beláttuk, hogy ideális inkompresszibilis folyadék potenciáltérben történő áramlása esetén a folyadékkel együttmozgó zárt görbére vett cirkuláció zérus. Megjegyezzük, hogy ugyanezt az eredményt kaptuk volna akkor is, ha nem azt tesszük fel, hogy a folyadék inkompresszibilis, hanem azt, hogy a folyadék áramlása izentropikus. Ekkor az Euler-egyenletben $\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}$ helyett az entalpia-sűrűség $\vec{\nabla}h$ gradiense szerepel, és a bizonyítás ugyanúgy végigvihető, mint inkompresszibilis folyadék esetén.

3.2.10 Örvényes áramlás. Helmholtz-féle örvénytételek

Ebben a fejezetben ideális folyadékok örvényes áramlásával foglalkozunk, amikor az $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{v}$ örvénymező nem tűnik el azonosan. Az egyszerűség kedvéért fel fogjuk tenni, hogy a folyadék inkompresszibilis. Az alábbiakban megfogalmazunk néhány fontos állítást az örvénymentes áramlásra vonatkozóan.

1. Az örvénymező forrásmentes. Ez közvetlenül következik abból, hogy az örvénymező definíció szerint a sebességmező rotációjával arányos, $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{v}$, viszont vektormező rotációjának divergenciája mindig zérus, úgyhogy

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0. \qquad (3.2.388)$$

Ebből természetesen az is következik, hogy az örvényvonalak vagy zártak, vagy az áramlási tér határán végződnek, viszont semmiképpen sem végződhetnek el az áramlási tér valamely belső pontjában.

2. Az örvénycső örvényfluxusa állandó az örvénycső mentén. Tekintsük az örvénycső egy tetszőleges, V térfogatú véges darabkáját, amelyet az F_1 és F_2 keresztmetszetek és az örvényfonál M palástja határolnak. A keresztmetszeteket válasszuk minden pontjukban merőlegeseknek az adott pontban átahaladó örvényvonalra. Írjuk fel az örvénymező ezen tartományára Gauss tételét,

$$0 = \int_V dV\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = \int_{\partial V} df\ \vec{n} \cdot \vec{\omega}. \tag{3.2.389}$$

A jobb oldalon álló felületi integrálhoz az örvényfonál M palástja nem ad járulékot, mert a palást külső normálisa mindenütt merőleges a palásthoz érintő irányú $\vec{\omega}$ örvényvektorra. Az F_1, ill. az F_2 keresztmetszetek adnak járulékot a felületi integrálhoz:

$$0 \;\; = \;\; \int_{F_1} df \vec{n} \cdot \vec{\omega} + \int_{F_2} df \vec{n} \cdot \vec{\omega} \tag{3.2.390}$$

Ha megegyezünk abban, hogy az örvénycső F keresztmetszetén áthaladó örvényfluxust

$$\Phi = \int_F df\ \vec{\omega} \cdot \vec{n} \int_F df \omega_n \tag{3.2.391}$$

definiálja, ahol $\vec{n}$ az örvényvonalakkal azonos irányítású normális, akkor az (3.2.390) egyenlet kifejezi a Φ örvényfluxus állandóságát az örvénycső mentén. Valóban, az F_1, ill. F_2 keresztmetszetek mentén a V taromány külső normálisa rendre az $\vec{\omega}$ örvényvektorral ellentétes, ill. avval azonos irányú, úgyhogy az (3.2.390) egyenlet a

$$\Phi_{F_1} = \Phi_{F_2} \tag{3.2.392}$$

alakba írható, ahol Φ_{F_1}, ill. Φ_{F_2} rendre az F_1, ill. F_2 keresztmetszeten az örvényfluxus.

Az örvényfonál egy olyan vékony örvénycső, amelynek tetszőleges F keresztmetszete mentén az $\vec{\omega}$ örvényvektor állandónak tekinthető. Ekkor az örvényfluxus

$$\Phi_F = \int_F df\ \omega_n = |\vec{\omega}|F, \tag{3.2.393}$$

úgyhogy az (3.2.392) egyenlet az

$$\omega_1 F_1 = \omega_2 F_2 \tag{3.2.394}$$

alakot ölti. Innen látszik, hogy az örvényfonál mentén az örvényvektor nagysága az örvényfonál keresztmetszetével fordítottan arányos.

3. Örvénycső (ill. örvényfonál) tetszőleges F keresztmetszetét határoló C zárt görbére számolt cirkuláció állandó az örvénycső mentén. Ez az állítás az előző pontban megfogalmazott állítás közvetlen következménye. Ha ugyanis

felhasználjuk Stokes tételét, akkor az örvénycső tetszőleges keresztmetszetén áthaladó örvényfluxus

$$\begin{aligned}\Phi_F &= \int_F df\ \vec{n}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}\int_F df\ \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v}) \\ &= \frac{1}{2}\oint_C d\vec{s}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\Gamma_C. \end{aligned} \tag{3.2.395}$$

Ha tehát az örvényfluxus állandó az örvénycső mentén, akkor a cirkuláció is az.

4. Az $\vec{\omega}(\vec{r},t)$ örvénymezőre mozgásegyenlet származtatható le az Euler-egyenletből, amely számot ad az örvénymező időbeli változásáról. Ideális inkompresszibilis folyadék potenciáltérben történő áramlása, ill. ideális folyadék potenciáltérben történő izentróp áramlása esetén fennáll a már korábban az Euler-egyenletből levezetett (3.2.293) egyenlet, amely átírható

$$\partial_t\vec{\omega} - \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{\omega}) = 0 \tag{3.2.396}$$

alakba. Alakítsuk tovább a bal oldalon álló második tagot felhasználva, hogy az örvénymező forrásmentes, $\partial_j\omega_j = 0$:

$$\begin{aligned}[\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{\omega})]_i &= \epsilon_{i,j,k}\partial_j(\vec{v}\times\vec{\omega})_k = \epsilon_{i,j,k}\epsilon_{k,l,m}\partial_j(v_l\omega_m) \\ &= (\delta_{i,l}\delta_{j,m} - \delta_{i,m}\delta_{j,l})\partial_j(v_l\omega_m) = \partial_j(v_i\omega_j) - \partial_j(v_j\omega_i) \\ &= \omega_j\partial_j v_i - v_j\partial_j\omega_i - \omega_i\partial_j v_j. \end{aligned} \tag{3.2.397}$$

A kapott azonosság segítségével a (3.2.396) egyenletet

$$\partial_t\vec{\omega} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} = (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \tag{3.2.398}$$

alakra hozhatjuk. Mint mondottuk, ebben a fejezetben csak az inkompresszibilis folyadék esetét vizsgáljuk, amikor a (3.2.398) egyenlet jobb oldalának utolsó tagja eltűnik, mert az inkompresszibilis folyadék áramlási tere forrásmentes, $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$. Vegyük továbbá észre, hogy az egyenlet bal oldalán az örvénymező „szubsztanciális" deriváltja áll, azaz a t pillanatban az $\vec{r}$ térbeli pontban tartózkodó folyadékelem szögsebességének idő szerinti első deriváltja a folyadékelemmel együtt haladó lokális vonatkoztatási rendszerben, azaz

$$\frac{D\vec{\omega}(\vec{r},t)}{dt} = (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}. \tag{3.2.399}$$

További vizsgálódásunk alapja ez az egyenlet.

5. Örvények nem keletkeznek és nem szűnnek meg ideális folyadékban. A (3.2.399) egyenletből kiolvashatjuk, hogy amennyiben kezdetben a folyadékelem nem forog, akkor a szögsebességének idő szerinti első deriváltja is zérus, azaz akkor

a folyadékelem nem is kezd el forogni. Ez azt jelenti, hogy ideális folyadékban nem keletkezhetnek örvények, ha a megfigyelésünk kezdetén nincsenek jelen. Természetesen fordítva is igaz, ogy ha kezdetben jelen vannak örvények, akkor azok az ideális folyadékban nem szűnhetnek meg.

6. Az örvényfonál mozgása során mindig ugyanazokból a folyadékelemekből áll, azaz az örvényfonalak hozzá vannak ,,tapadva" az áramló folyadékhoz. Ennek megmutatásához tekintsünk egy L örvényfonalat a t időpillanatban, amely a $t+\delta t$ infinitezimálisan későbbi időpillanatban az L' görbe mentén heleyzkedik el. Legyen az L örvényfonál $\vec{r}_1$ helyzetvektorú P_1 pontjából az infinitezimálisan közeli $\vec{r}_2$ helyzetvektorú P_2 pontjába mutató irányított ívhosszelem $d\vec{s}=\vec{\omega}d\xi$, ahol ξ az L görbe (affin) paramétere. Az infinitezimális δt idő alatt az örvényfonal ezen darabkájához tartozó folyadékelemek a $d\vec{s}'$ irányított ívhosszelem mentén fognak elhelyezkedni, amely a $\vec{r}_1+\vec{v}(\vec{r}_1,t)\delta t$ pontból mutat a $\vec{r}_2+\vec{v}(\vec{r}_2,t)\delta t$ pontba. Az L örvényfonalat alkotó folyadékelemek olyan L' görbe mentén helyezkednek el a $t+\delta t$ időpillanatban, amelyet ilyen $d\vec{s}'$ ívhosszelemek lánca alkot. Kérdés, hogy az így kapott görbe örvénymező-e, azaz írható-e a $d\vec{s}'$ irányított ívhosszelem $d\vec{s}'=\vec{\omega}'d\xi$ alakba? Vegyük figyelembe, hogy

$$\vec{v}_2(\vec{r}_2,t)=\vec{v}(\vec{r}_1,t)+d\xi\ (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}_1})\vec{v}(\vec{r}_1,t), \tag{3.2.400}$$

és hogy akkor

$$\begin{aligned} d\vec{s}' &= d\vec{s}+[\vec{v}(\vec{r}_2,t)-\vec{v}(\vec{r}_1,t)]\delta t \\ &= d\vec{s}+d\xi\ (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}_1})\vec{v}(\vec{r}_1,t)\delta t \\ &= d\xi\ [\vec{\omega}+(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}_1})\vec{v}(\vec{r}_1,t)\delta t]. \end{aligned} \tag{3.2.401}$$

Itt azonban felhasználhatjuk a (3.2.399) egyeneletet, azaz hogy adott, a t időpillanatban az $\vec{r}_1$ helyen tartózkodó folyadékelem szögsebességének megváltozása δt idő alatt

$$\frac{D\vec{\omega}}{dt}=\partial_t\vec{\omega}+[\vec{v}(\vec{r}_1,t)\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}_1}]\vec{\omega}(\vec{r}_1,t)=[\vec{\omega}(\vec{r}_1,t)\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}_1}]\vec{v}(\vec{r}_1,t), \tag{3.2.402}$$

és ezért

$$d\vec{s}'=d\xi\ \vec{\omega}' \tag{3.2.403}$$

alakra hozható, ahol

$$\omega'=\omega+D\vec{\omega}. \tag{3.2.404}$$

Ezzel beláttuk, hogy $d\vec{s}'$ újra egy örvényfonál irányított ívhosszeleme, s ezért az ilyen típusú irányított ívhosszelemek lánca által alkotott L' görbe örvényfonál.

Mellékesen azt is látjuk, hogy az örvényvektor nagysága megnő, ha az örvényfonál mozgása során igyekszik kiegyenesedni, hiszen

$$\frac{|d\vec{s}'|}{|d\vec{s}|}=\frac{|\vec{\omega}'|}{|\vec{\omega}|}. \tag{3.2.405}$$

7. Az előző pontban beláttuk, hogy az örvényfonál mindig ugyanazokból a folyadékelemekből épül fel. Ennek következménye, hogy az örvényfonál fluxusa nemcsak az örvényfonál mentén, hanem időben is állandó. Ha az örvényfonalat mozgása során mindig ugyanazok a folyadékelemek alkotják, akkor az örvényfonál palástján felvett, az örvényfonalat körülvevő C görbe is együtt mozog a folyadékelemekkel, s a Γ_C cirkuláció sem változik időben az áramlás során.

3.3 Súrlódó folyadékok

3.3.1 Nyírófeszültségek

Az ideális folyadékok több tekintetben nem felelnek meg a valóságos folyadékoknak. Utóbbiakban olyan jelenségek lépnek fel, mint a diffúzió, a hővezetés és a belső súrlódás, amelyek a folyadékok mozgását irreverzibilis folyamattá teszik. Hogy csak egy példát említsek, ha megkavarunk egy csésze teát, aztán magára hagyjuk, akkor kezdetben a folyadék áramlik a csészében, majd a belső súrlódás miatt az áramlás idővel megszűnik és a folyadék nyugalomba kerül. Ha veszünk egy csésze nyugalomban levő teát, akkor hiába várunk, az magától nem jön áramlásba. A kezdetben áramló folyadékban a belső súrlódás révén energiadisszipáció jött létre. Az áramlásból származó kinetikus energia a folyadék atomjainak szabadsági fokain szétoszlik, a folyadék belsőenergiáját növeli. Az ilyen folyamatokban általában nem marad meg az egyes folyadékelemek entrópiája, hanem növekszik a termodinamika második főtétele értelmében. Korábban már említettük, hogy a diffúzió, a hővezetés és a belső súrlódás a folyadék atomos szerkezetének szintjén zajló transzport-folyamatok következménye. A diffúziót az atomok véletlenszerű átlépése okozza egyik folyadékelemből a szomszédos folyadékelembe, ha különböző a szomszédos folyadékelemekben a sűrhűség. A hővezetést az okozza, hogy a szomszédos folyadékelemek atomjai a folyadékelemek felülete közelében véletlenszerűen ütköznek, és ha különböző a folyadékelemekben az atomok átlagos energiája, akkor energia adódik át a magasabb hőmérsékletű folyadékelemről az alacsonyabb hőmérsékletű folyadékelemre. A belső súrlódás pedig az érintkező folyadékelemek érintkezési felületén fellépő súrlódási erő, másszóval nyíró feszültség megjelenése annak következtében, hogy a felületen az egymással véletlenszerűen ütköző atomok érintőirányú impulzust adnak át, ha a folyadékelemek érintkezési felületei egymáshoz képest nem nulla relatív sebességgel mozognak, mégpedig a nagyobb áramlási sebességű folyadékelemről a kisebb áramlási sebességű folyadékelem irányában.

A jelen fejezetben a belső súrlódást fogjuk figyelembe venni az áramlás során. Az érintkező folyadékelemek felületén az érintő irányú impulzusnak a felületre merőleges irányban történő átadása nyíró feszültség megjelenését eredményezi bármely kiszemelt folyadékelemmel együtthaladó lokális vonatkoztatási rendszerben. Az áramló ideális folyadék impulzusáram-sűrűsége, $\Pi_{i,j} = -\sigma_{i,j} + \rho v_i v_j$. Ez az az impulzusközlés, ami a folyadékra ható nyomóerők által a folyadékelemnek átadott impulzust, $\sigma_{i,j} = -p\delta_{i,j}$, és a folyadékelem egyik helyről másikra történő elmozdulásával kapcsolatosan fellépő $\rho v_i v_j$ impulzusáramlást írja le. Ezek a mikroszkopikusan zajló reverzibilis impulzusátadási folyamatok. Emellett a súrlódó folyadékban működik egy másik impulzusátadási mechanizmus. A nagyobb áramlási sebességű folyadékelem atomjai amikor véletlenszerűen ütköznek a szomszédos kisebb áramlási sebességű folyadékelem atomjaival, akkor átlagosan impulzust veszítenek. Megvalósul tehát egy impulzusátadási folyamat, amely a nagyobb áramlási sebességű hely felől a kisebb áramlási sebességű hely felé történő impulzusáramlást eredményez és az áramlási sebesség térbeli kiegyenlítődése irányában hat. Ez egy irreverzibilis mikroszkopikus dinamikai folyamat. Ezt úgy vehetjük figyelembe, hogy feltételezzük a folyadékelemmel lokálisan együtthaladó vonatkoztatási rendserben a $\sigma_{i,j}$ feszültség megváltozását,

$$\sigma_{i,j} = -p\delta_{i,j} + \sigma'_{i,j}, \tag{3.3.406}$$

ahol a tisztán húzó-nyomó feszültséget leíró $\sigma_{i,j}$ tenzor mellett mejelenik a $\sigma'_{i,j}$ úgynevezett viszkozitási tenzor. Utóbbi ad számot az irreverzibilis impulzusátadásról, amely az áramlási sebesség térbeli inhomogenitásától függ. Ezért azt feltételezzük, hogy a $\sigma'_{i,j}$ viszkozitási tenzor a sebességmező térkoordináták szerinti első deriváltjainak függvénye. Feltesszük továbbá, hogy a viszkozitási tenzor eltűnik, ha ezek deriváltak eltűnnek, azaz a szomszédos folyadékelemek azonos sebességgel mozognak. Ha abból indulunk ki, hogy a sebességmező inhomogenitása kicsiny, akkor jó közelítés azt feltételezni, hogy a viszkozitási tenzort a sebességmező első deriváltajai szerint Taylor-sorba fejtve, megállhatunk az első el nem tűnő tagoknál, azaz a sebességmező helykoordináták szerinti $\partial v_i/\partial x_j$ deriváltjaiban lineáris tagoknál. A sorfejtés nulladrendű tagja zérus. Mint minden feszültségmezőnek, a viszkozitási tenzornak is szimmetrikus tenzornak kell lennie, ezt követeli meg az impulzusmomentum lokális megmaradási törvényének fennállása,

$$\sigma'_{i,j} = \sigma'_{j,i}. \tag{3.3.407}$$

Még azt is kikövetkeztethetjük, hogy a viszkozitási tenzor csak a szimmetrikus $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ kifejezéstől függhet. Valóban, ha az egész folyadék állandó szögsebességű forgást végez, $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, akkor ugyanúgy nem léphet fel belső súrlódás, minha a sebességmező homogén lenne. Ekkor a sebességmező Descartes-komponensei $v_i = \epsilon_{i,k,l}\Omega_k x_l$, és annak deriváltjai,

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \epsilon_{i,k,l}\Omega_k \delta_{l,j} = \epsilon_{j,i,k}\Omega_k, \tag{3.3.408}$$

antiszimmetrikus másodrendű tenzort alkotnak. A legáltalánosabb szimmetrikus másodrendű tenzor, ami a szimmetrikus másodrendű $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ tenzor lineáris kifejezése:

$$\sigma'_{i,j} = a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + b\delta_{i,j}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}. \tag{3.3.409}$$

Ezt szokásosabb egy zérus spúrú és egy diagonális tenzor összegeként felírni:

$$\sigma'_{i,j} = \eta\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{i,j}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\Big) + \zeta\delta_{i,j}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \tag{3.3.410}$$

ahol η és ζ úgynevezett viszkozitási állandók, amelyek a tapasztalat szerint nem negatívak.

3.3.2 Navier-Stokes-egyenlet

A súrlódó folyadékok mogásegyenleteivel foglalkozunk ebben a fejezetben. A kontinuitási egyenlet most is változatlan,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \tag{3.3.411}$$

alakban érvényes és kifejezi a tömegmegmaradás lokális törvényét. Az ideális folyadékokra érvényes

$$\rho\partial_t v_i + \rho(v_j\partial_j)v_i = \partial_j\sigma_{i,j} + \rho f_i \tag{3.3.412}$$

Euler-egyenlet, ahol $\sigma_{i,j} = -p\delta_{i,j}$ (ld. (3.2.277)), azonban módosul, helyette az úgynevezett Navier-Stokes-egyenlet írja le az áramlást. A Navier-Stokes-egyenletet szintén Newton második törvényének egy kiszemelt, tetszőleges folyadékelemre történő alkalmazása szolgáltatja,

$$\rho\partial_t v_i + \rho(v_j\partial_j)v_i = \partial_j\sigma_{i,j} + \rho f_i, \tag{3.3.413}$$

hasonlóan, mint az ideális folyadék mozgására vonatkozó Euler-egyenletet. A különbség az, hogy most a $\sigma_{i,j} = -p\delta_{i,j}$ feszültségi tenzor helyett a viszkozitási tenzort is tartalmazó $\sigma_{i,j} = -p\delta_{i,j} + \sigma'_{i,j}$ tenzort kell behelyettesítenünk az egyenlet jobb oldalába. A viszkozitási tenzor deriválása során általában jogos az az egyszerűsítés, hogy a viszkozitási együtthatókat állandónak tekintjük. Szigorúan véve a viszkozitási együtthatók függnek a nyomástól és a hőmérséklettől, és ha azok helyről helyre változnak a folyadékban, akkor a viszkozitási együtthatók is függenek a helytől. A valóságos áramlási problémák többségében azonban ez a változás nagyon kicsi és elhanyagolható. Ebben az esetben

$$\begin{aligned}\partial_j\sigma'_{i,j} &= \eta\Big(\partial_j\partial_j v_i + \partial_i\partial_j v_j - \frac{2}{3}\partial_i\partial_j v_j\Big) + \zeta\partial_i\partial_j v_j + \rho f_i \\ &= \eta\Delta v_i + \Big(\zeta + \frac{\eta}{3}\Big)\partial_i(\partial_j v_j) + \rho f_i\end{aligned} \tag{3.3.414}$$

Ezért Newton második törvényének vektori alakja:

$$\rho\Big(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\Big) = -\vec{\nabla}p + \eta\Delta\vec{v} + \Big(\zeta + \frac{\eta}{3}\Big)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \rho\vec{f}. \tag{3.3.415}$$

Ez a súrlódó folyadék áramlásának Navier-Stokes-féle mozgásegyenlete.

Inkompresszibilis folyadék esetén ρ =áll. miatt a kontinuitási egyenletből

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \tag{3.3.416}$$

adódik, azaz inkompresszibilis folyadék sebességtere forrásmentes. A forrásmentesség miatt a Navier-Stokes-egyenlet jobb oldalán a sebességtér divergenciájának gradiensét tartalmazó tag zérus, úgyhogy inkompresszibilis folyadékra vonatkozóan az alábbi formában érvényes a Navier-Stokes-egyenlet:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}, \tag{3.3.417}$$

ahol bevezettük a

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{3.3.418}$$

úgynevezett kinematikai viszkozitást. Az inkompresszibilis súrlódó folyadékot egyetlen viszkozitási együttható, η, ill. a belőle leszármaztatható ν jellemzi:

$$\sigma'_{i,j} = \eta(\partial_j v_i + \partial_i v_j). \tag{3.3.419}$$

Gázok esetében $\eta = \eta(T)$ általában csak a hőmérséklet függvénye és független a nyomástól.

Hasznos lehet észrevenni, hogy konzervatív tömegerő jelenlétében a Navier-Stokes-egyenletből mindkét oldal rotációját véve olyan egyenletet származtathatunk le inkompresszibilis folyadék áramlására, amelyben csak a sebességmező szerepel,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \times [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})] + \nu \Delta (\vec{\nabla} \times \vec{v}). \tag{3.3.420}$$

Ehhez azt a határfeltételt kell hozzávenni – a tapasztalat szerint,– hogy a folyadékot határoló falakon a folyadék megtapad, azaz az áramlási sebesség a falak mentén megegyezik a falak mozgási sebességével. Amennyiben a fal nyugalomban van, akkor az áramlási sebesség a falnál $\vec{v} = 0$. Ez lényegi változás a határfeltételben az ideális folyadék viselkedéséhez képest, ahol a határfeltétel az volt, hogy a folyadék nem tud a falra merőlegesen áramolni, vagyis hogy $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, ahol $\vec{n}$ a folyadék külső normálisa a falnál. A határfeltételek kiegészülése azzal, hogy a nyugalomban levő falaknál a sebességmező tangenciális komponense is eltűnik, nem jelent matematikai képtelenséget, mert a Navier-Stokes-egyenletek a helykoordináták szerinti parciális deriváltakban másodrendűek, ellentétben az Euler-egyenlettel, amely a sebességmező helykoordináták szerinti parciális deriváltjaiban elsőrendű.

3.3.3 Az áramlás energiamérlege. Energiadisszipáció

Ebben a fejezetben felállítjuk az inkompresszibilis súrlódó folyadékok áramlásának energiamérlegét. Induljunk ki a $\frac{1}{2}\rho v^2$ kinetikus energia sűrűségének időfüggéséből:

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) &= \rho v_i \partial_t v_i \\
&= \rho v_i\left(-v_k\partial_k v_i - \frac{1}{\rho}\partial_i p + \frac{1}{\rho}\partial_k \sigma'_{i,k} + f_i\right) \\
&= -\rho v_i v_k \partial_k v_i - v_i\partial_i p + v_i \partial_k \sigma'_{i,k} + \rho v_i f_i \\
&= -\rho v_i v_k \partial_k v_i - v_i\partial_i p + \partial_k (v_i \sigma'_{i,k}) - \sigma'_{i,k}\partial_k v_i + \rho v_i f_i \\
&= -\partial_k\left(\frac{1}{2}\rho v^2 v_k + p v_k\right) + \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p\right)\partial_k v_k + \partial_k (v_i \sigma'_{i,k}) - \sigma'_{i,k}\partial_k v_i + \rho v_i f_i \\
&= -\partial_k\left(\frac{1}{2}\rho v^2 v_k + p v_k - (\vec{v}\sigma')_k\right) - \sigma'_{i,k}\partial_k v_i + \rho v_i f_i. \qquad (3.3.421)
\end{aligned}$$

Itt a második egyenlőség felírásakor felhasználtuk a (3.3.415) Navier-Stokes-egyenletet, továbbá a negyedik és ötödik egyenlet felírásakor azonos átalakításokat végeztünk, hogy kihasználhassuk az utolsó egyenlőség felírásakor, hogy az inkompresszibilis folyadék áramlási tere forrásmentes, $\partial_k v_k = 0$. Végül bevezettük a

$$(\vec{v}\sigma')_k = \sigma'_{i,k} v_i \qquad (3.3.422)$$

jelölést. A kapott egyenlet inkompresszibilis, súrlódó folyadék energiamérlegének egyenlete:

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) + \partial_k\left[\rho v_k \frac{1}{2}\rho v^2 - (\vec{v}\sigma')_k\right] = -\partial_k(p v_k) - \sigma'_{i,k}\partial_k v_i + \rho v_i f_i. \qquad (3.3.423)$$

Valóban az egyenlet kontinuitási egyenlet alakját öltötte, amelynek jobb oldalán forrástagok szerepelnek. Ha a jobb oldal zérus lenne, akkor az egyenlet az áramlásból származó kinetikus energia lokális megmaradási törvénye lenne. A bal oldalon a szögletes zárójelben az kinetikus energia áramsűrűsége,

$$S_k^{kin} = \rho v_k \frac{1}{2}\rho v^2 - (\vec{v}\sigma')_k \qquad (3.3.424)$$

szerepel. Az első tag az energiaáram-sűrűség ideális folyadékban is jelenlevő tagja. A kinetikus energia áramsűrűségének a második tagja azért jelenik meg, mert a belső súrlódást okozó $\sigma'_{i,j}$ impulzusáram-sűrűség kinetikus energiaáramlással is együttjár. A forrástagok jelentését könnyebben megérthetjük a (3.3.423) egyenlet integrális alakja alapján. Integráljuk ezért az kinetikus energia mérlegegyenletét egy tetszőleges, a térben rögzített V térfogatra. A teljes divergenciák térfogati integrálját tartalmazó tagokban alkalmazzuk Gauss-tételét. Ekkor a következő egyenletet kapjuk a

V térfogatban található folyadék $E_k = \int_V dV \frac{1}{2}\rho v^2$ kinetikus energiájának idő szerinti első deriváltjára:

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = -\oint_{\partial V} df \vec{n}\vec{S} - \oint_{\partial V} df n_k p v_k - \int_V dV \sigma'_{i,k}\partial_k v_i + \int_V dV \rho v_i f_i, \tag{3.3.425}$$

ahol $\vec{n}$ a V térfogatot határoló ∂V zárt felület külső normálisa. Az egyenlet jobb oldalának első tagja azt fejezi ki, hogy adott V térfogatban a folyadék kinetikus energiája részben azért változik, mert oda kinetikus energia áramlik be, vagy onnan kinetikus energia áramlik ki. A negyedik tag a külső tömegerő munkáját fejezi ki, ami forrása a V térfogatban található folyadék kinetikus energiájának. Hasonló a második tag értelme, ez a kiszemelt tartomány ∂V felületére merőleges felületi erőknek az áramló folyadékon végzett munkája. Végül a harmadik forrástag írja le a belső súrlódás miatti energiadisszipációt. Ezt úgy láthatjuk be, hogy a forrástagot azonosan átalakítjuk, felhasználva, hogy a sebességmező az inkompresszibilis folyadékban divergenciamentes és, hogy a σ' tenzor szimmetrikus:

$$\begin{aligned} -\int_V dV \sigma'_{i,k}\partial_k v_i &= -\frac{1}{2}\int_V dV \sigma'_{i,k}(\partial_k v_i + \partial_i v_k) \\ &= -\frac{1}{2}\eta \int_V dV (\partial_k v_i + \partial_i v_k)(\partial_k v_i + \partial_i v_k) \\ &< 0. \end{aligned} \tag{3.3.426}$$

Ez a forrástag mindig negatív, ami kifejezi, hogy a súrlódási erő munkája mindig negatív.

3.3.4 Lamináris áramlás

Az áramlást laminárisnak nevezzük, amikor vékony folyadékrétegek egymás mellett mozognak különböző sebességgel. Most itt csak egy speciális geometriai elrendezésben szemléltetjük a lamináris áramlást, amikor viszkózus és inkompressszibilis folyadék stacionáriusan áramlik két párhuzamos fal között. Legyen az egyik fal nyugalomban és válasszuk a Descartes-koordinátarendszert úgy, hogy a nyugalomban levő fal az (x, z) síkban, azaz az $y = 0$ síkban feküdkön. A másik fal feküdjön az $y = h > 0$ síkban és sebessége legyen $\vec{u} = (u, 0, 0)$, ami a fal síkjába esik, úgyhogy a falak távolsága állandó. Inkompresszibilis folyadék stacionárius áramlása ($\partial_t \vec{v} = 0$) esetén, külső tömegerő hiányában ($\vec{f} = 0$) a (3.3.417) Navier-Stokes-egyenlet a

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v} \tag{3.3.427}$$

alakot ölti. Az (3.3.427) Navier-Stokes-egyenlethez tartozó határfeltétel azt a tapasztalati tényt fogalmazza meg, hogy a folyadék a falaknál megtapad, azaz a falaknál a folyadék áramlási sebessége megegyezik a fal mozgási sebességével. A falak mintegy magukkal húzzák a velük érintkező folyadékréteget. Ezért esetünkben az áramlási sebesség rendre $\vec{v}(x,0,z) = \vec{0}$, ill. $\vec{v}(x,h,z) = \vec{u} = (u,0,0)$ az $y = 0$ és az $y = h$ falaknál. A határfeltétel, – végtelen kiterjedésű falakat feltételezve, – invariáns a z-irányú (a falak síkjával párhuzamos, de az $\vec{u}$ sebességre merőleges) irányú eltolásokkal szemben. Ez indokolja, hogy a (3.3.427) Navier-Stokes-egyenlet olyan megoldását keressük, amely ugyanezzel a szimmetriával rendelkezik. Ezért feltesszük, hogy az áramlási sebességnek csak az x-irányú komponense nem zérus és az is csak az x és y koordinátáktól függ, $v_x(x,y)$, továbbá hogy a nyomás is csak ezen koordináták függvénye, $p(x,y)$. Ekkor a (3.3.427) egyenlet bal oldala zérus $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = 0$ az egész áramlási térben, úgyhogy az egyenlet alakja leegyszerűsödik, a sebességmezőben lineárissá válik:

$$0 = -\vec{\nabla}p + \eta\Delta\vec{v}. \tag{3.3.428}$$

Inkompresszibilis folyadék stacionárius áramlása esetén a sebességmező egyúttal forrásmentes is a kontinuitási egyenlet következtében:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0. \tag{3.3.429}$$

A (3.3.428) egyenletet vektorkomponensekre kiírva, az alábbi csatolt parciális differenciálegyenletrendszernek az adott határfeltételekhez tartozó megoldását kell megkeresnünk:

$$\begin{aligned} 0 &= -\partial_x p + \eta(\partial_x^2 + \partial_y^2)v_x, \\ 0 &= -\partial_y p, \\ 0 &= \partial_x v_x. \end{aligned} \tag{3.3.430}$$

A két utolsó egyenletből rendre következik, hogy a sebességmező nem függ x-től, $v_x(y)$, a p nyomás pedig nem függ y-tól, $p(x)$. Ezt kihasználva az első egyenlet

$$\frac{dp(x)}{dx} = \eta\frac{d^2v_x(y)}{dy^2} \tag{3.3.431}$$

alakot ölt, ahol a bal oldali kifejezés csak x-től, a jobb oldali csak y-tól függ. Az egyenlet akkor és csak akkor állhat fenn az áramlási tér tetszőleges pontjában, ha mindkét oldal értéke ugyanaz az a C állandó. Ekkor

$$\frac{dp(x)}{dx} = C, \qquad \frac{d^2v_x(y)}{dy^2} = C/\eta, \tag{3.3.432}$$

ahonnan integrálással:

$$\begin{aligned} p(x) &= Cx + A, \\ v_x(y) &= \frac{C}{2\eta}y^2 + By + D, \end{aligned} \tag{3.3.433}$$

ahol A, B, D további integrációs állandók. Az állandók értékét a határfeltételekből kell meghatározni. Ezek egy része a falaknál kirótt

$$v_x(0) = 0 = D, \qquad v_x(h) = \frac{C}{2\eta}h^2 + Bh = u \tag{3.3.434}$$

feltételek, másik részük az áramlást az x-tengelyre merőleges két tetszőleges keresztmetszeten jellemző adatok, például

$$p(0) = p_1, \qquad p(\ell) = p_2. \tag{3.3.435}$$

Ekkor

$$A = p_1, \qquad C = \frac{p_2 - p_1}{\ell}, \qquad B = \frac{u}{h} - \frac{p_2 - p_1}{\ell}\frac{h}{2\eta}, \qquad D = 0, \tag{3.3.436}$$

úgyhogy a megoldás:

$$\begin{aligned} v_x(y) &= \frac{p_2 - p_1}{2\eta\ell}y^2 + \Big(\frac{u}{h} - \frac{p_2 - p_1}{\ell}\frac{h}{2\eta}\Big)y, \\ p(x) &= \frac{p_2 - p_1}{\ell}x + p_1. \end{aligned} \tag{3.3.437}$$

Vizsgáljunk meg a fenti áramlás két speciális esetét:

1. Ha a nyomáskülönbség zérus, $p_2 - p_1 = 0$, de az $y = h$ síkban elhelyezkedő fal sebessége $u \neq 0$, akkor
$$v_x(y) = \frac{u}{h}y \tag{3.3.438}$$
lineáris sebességprofil alakul ki a keresztmetszet mentén y-irányban, a nyomás pedig
$$p(x) = p_1 \tag{3.3.439}$$
állandó.

2. Ha mindkét fal nyugalomban van, $u = 0$, de nyomáskülönbséget hozunk létre az x-tengely mentén, akkor parabolikus sebességprofil jön létre,
$$v_x(y) = \frac{p_2 - p_1}{2\eta\ell}(y^2 - hy) = \frac{p_2 - p_1}{2\eta\ell}\Big[\Big(y - \frac{1}{2}h\Big)^2 - \frac{h^2}{4}\Big], \tag{3.3.440}$$
amely tükörszimmetrikus az $y = \frac{1}{2}h$ középsíkra nézve. Az áramlási sebesség középen maximális és a falak felé közeledve nullára csökken. Ha $p_2 - p_1 = p(\ell) - p(0) < 0$, akkor $v_x(y) \geq 0$ minden $y \in [0, \ell]$ pontban, azaz a folyadék a nagyobb nyomású hely felől a kisebb nyomású hely felé áramlik. Az is nyilvánvaló, hogy az áramlás fenntartásához nyomáskülönbségre van szükség (ha $p_2 - p_1 = 0$, akkor $v_x(y) = 0$).

Tanulságos végül megvizsgálni, hogy milyen erők (feszültségek) ébrednek a fenti körülmények között áramló súrlódó folyadékban és meghatározni a disszipálódott teljesítmény sűrűségét. A folyadék $\vec{r}$ helyzetvektorú pontjában felvett tetszőleges $\vec{n}$ normálisú infinitezimális df felületelemre a normális felőli oldalról $\mathcal{P}_i(\vec{r},\vec{n})df$ erő hat, ahol

$$\mathcal{P}_i(\vec{r},\vec{n}) = \sigma_{i,j}(\vec{r})n_j = -p(\vec{r})n_i + \sigma'_{i,j}(\vec{r})n_j. \tag{3.3.441}$$

A normális felőli oldalról a felületelemre ható erő nem más, mint a normálissal átellenes oldalon elhelyezkedő folyadékelem felületére a normális felőli oldalon elhelyezkedő folyadékelem által kifejtett felületi erő. Az első tag a mechanikai nyomásból származó felületi erő, ami ideális folyadékban is fellépne, és ami minden irányú felületen ugyanolyan nagyságú és a normálissal ellentétes irányú, kifejezve azt, hogy a szomszédos folyadékelemek egy kiszemelt folyadékelemet minden oldalról nyomnak. A második tag a belső súrlódás miatt fellépő felületi erő. Felhasználva, hogy esetünkben

$$\sigma'_{i,j}(y) = \eta[\partial_j v_i(y) + \partial_i v_j(y)] = \begin{pmatrix} 0 & \eta\partial_y v_x(y) & 0 \\ \eta\partial_y v_x(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.442}$$

az alábbi eredményt kapjuk a viszkozitási tenzor el nem tűnő elemeinek értékére:

1. Ha $p_2 - p_1 = 0$, $u \neq 0$:
$$\sigma'_{x,y}(y) = \eta\frac{u}{h} = \text{ áll.}, \tag{3.3.443}$$

2. Ha $p_2 - p_1 \neq 0$, $u = 0$:
$$\sigma'_{x,y}(y) = \frac{p_2 - p_1}{\ell}\Big(y - \frac{1}{2}h\Big). \tag{3.3.444}$$

Innen egyrészt meghatározhatjuk a folyadék által az $y = 0$, ill. $y = h$ falak infinitezimális df felületelemére kifejtett erőt, ami rendre:

$$\mathcal{P}_i(0) = \sigma_{i,j}n_j(0), \text{ ill. } \mathcal{P}_i(h) = \sigma_{i,j}n_j(h), \tag{3.3.445}$$

ha $\vec{n}(0)$, ill. $\vec{n}(h)$ rendre ezen falak belső normálisa. Bontsuk ezeket fel a falra merőleges és a fallal párhuzamos komponensekre. A két vizsgált esetben rendre:

1. Ha $p_2 - p_1 = 0$, $u \neq 0$:
$$\begin{aligned} &\vec{\mathcal{P}}_\perp(0) = p\vec{n}(0), \quad \vec{\mathcal{P}}_\perp(h) = p\vec{n}(h), \\ &(\vec{\mathcal{P}}_\parallel)_x(0) = \sigma'_{x,y}(0) = \eta\frac{u}{h}, \quad (\vec{\mathcal{P}}_\parallel)_x(h) = -\sigma'_{x,y}(h) = -\eta\frac{u}{h}. \end{aligned} \tag{3.3.446}$$

2. Ha $p_2 - p_1 < 0$, $u = 0$:

$$\vec{\mathcal{P}}_\perp(0) = p\vec{n}(0), \quad \vec{\mathcal{P}}_\perp(h) = p\vec{n}(h),$$
$$(\vec{\mathcal{P}}_\parallel)_x(0) = \sigma'_{x,y}(0) = -\frac{p_2 - p_1}{\ell}\,\frac{h}{2} > 0, \quad (\vec{\mathcal{P}}_\parallel)_x(h) = -\sigma'_{x,y}(h) = -\frac{p_2 - p_1}{\ell}\,\frac{h}{2} > 0. \tag{3.3.447}$$

Tanulságos még meghatározni a kinetikus energia mérlegegyenletének tagjait. Ha az áramlás stacionárius, akkor a falak közti adott $z \in [0, L]$, $x \in [0, \ell]$, $y \in [0, h]$ tartományban található folyadék kinetikus energiája állandó marad. A súrlódó folyadék (3.3.415) mozgásegyenletében és a kinetikus energiájára vonatkozó (**??**) mérlegegyenletben eseteünkben

$$[(\vec{v}\sigma')_x(y), (\vec{v}\sigma')_y(y), (\vec{v}\sigma')_z(y)] = (v_x, 0, 0)\begin{pmatrix} 0 & \eta\partial_y v_x & 0 \\ \eta\partial_y v_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [0, \eta v_x(y)\partial_y v_x(y), 0]. \tag{3.3.448}$$

1. Ha $p_2 - p_1 = 0$, $u \neq 0$, akkor a belső súrlódás a folyadék kinetikus energiáját csökkenti (súrlódási munka révén), a mozgó falnál a fal által a folyadékra kifejtett súrlódási erő pozitív mechanikai munkát végez a folyadékon, és a folyadékréteg $x = 0$ és $x = \ell$ síkjában uralkodó azonos nyomások miatt a folyadékrétegre ható oldalirányú felületi erők munkája zérus. A stacionárius áramlás, azaz az $x = 0$ és $x = \ell$ síkok közti folyadéktérfogat E_k kinetikus energiájának állandósága úgy valósul meg, hogy a mozgó falnál fellépő súrlódási munka kompenzálja a kinetikus energiának a belső súrlódási munka miatti veszteségét:

$$\begin{aligned}
\frac{dE_k}{dt} &= -\oint_{\partial V} df\vec{n}\cdot\vec{v}\Big(\frac{1}{2}\rho v^2 + p\Big) + \oint_{\partial V} df n_k \sigma'_{i,k}(y) v_i(y) - \frac{1}{2}\eta\int_V (\partial_y v_x)^2 \\
&= -L\int_0^h dy(-1)\rho v_x(y)\frac{1}{2}\rho v_x^2(y)\Big|_{x=0} - L\int_0^h dy(+1)\rho v_x(y)\frac{1}{2}\rho v_x^2(y)\Big|_{x=\ell} \\
&\quad +L(+1)\int_0^\ell dx u\frac{y}{h}\eta\frac{u}{h}\Big|_{y=h} + L(-1)\int_0^\ell dx u\frac{y}{h}\eta\frac{u}{h}\Big|_{y=0} \\
&\quad -L\int_0^h dy(-1)p v_x(y)\Big|_{x=0} - L\int_0^h dy(+1)p v_x(y)\Big|_{x=\ell} \\
&\quad -\frac{1}{2}\eta\int_0^L dz\int_0^h dy\int_0^\ell dx 2\frac{u^2}{h^2} \\
&= +L\ell\frac{u^2}{h^2}\eta h - \eta L h\ell\frac{u^2}{h^2} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.3.449}$$

Látjuk a részletes számítás során, hogyan esik ki a kinetikus energia longitudinális áramlásából származó járulék, valamint a p mechanikai nyomás munkája. Ugyanakkor a longitudinális impulzus transzverzális (x-irányú impulzus y-irányú) áramlásából származik az az pozitív munka, amit a mozgáo fal végez a folyadékon, s ez várakozásunknak megfelelően éppen egyenlőnek adódik a belső súrlódás okozta munka minusz egyszeresével.

2. Ha $p_2 - p_1 < 0$ ($v_x(y) > 0$), $u = 0$: Ekkor a belső súrlódás a folyadék kinetikus energiáját csökkenteni igyekszik, a falak nem végeznek munkát a folyadékon, mert a folyadék nem mozog a falakhoz képest, ugyanakkor a nyomáskülönbség fenntartásához mechanikai munkát kell végezni a folyadékon. A folyadék E_k kinetikus energiája úgy maradhat állandó, hogy a nyomáskülönbség fenntartásához szüks
eges mechanikai munka éppen visszapótolja a belső súrlódás miatt disszipálódott energiát. Utóbbi – itt nem részletezett módon, – a folyadék belső energiáját növeli. A vizsgált folyadékdarab kinetikus energiájának idő szerinti első deriváltja (ld. az (3.3.425) egyenletet):

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_k}{dt} &= -\oint_{\partial V} df \vec{n}\cdot\vec{v}\Big(\frac{1}{2}\rho v^2 + p\Big) - \frac{1}{2}\eta\int_V (\partial_y v_x)^2 \\
&= -\int_0^L dz\int_0^h dy v_x(y)\Big(\frac{1}{2}\rho v_x^2(y) + p(\ell)\Big) + \int_0^L dz\int_0^h dy v_x(y)\Big(\frac{1}{2}\rho v_x^2(y) + p(0)\Big) \\
&\quad -\frac{1}{2}\eta\int_0^L dz\int_0^h dy\int_0^\ell dx 2(\partial_y v_x)^2 \\
&= +Lh\ell\frac{(p_2-p_1)^2h^2}{12\eta\ell^2} - \frac{1}{2}\eta L\ell\Big(\frac{p_2-p_1}{\eta\ell}\Big)^2 2\int_0^h dy\Big(y-\frac{1}{2}h\Big)^2 \\
&= V\frac{(p_2-p_1)^2h^2}{12\eta\ell^2} - V\frac{(p_2-p_1)^2h^2}{12\eta\ell^2} \\
&= 0. \qquad (3.3.450)
\end{aligned}
$$

FÜGGELÉK

A A közeget jellemző térmennyiségek értelmezése

B Tenzorok

References

[1] Budó Á., *Mechanika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.)

[2] Bába Á., *Mechanika I., II.* (KLTE, Debrecen, 1985.)

[3] L.D. Landau, E.M. Lifsic, *Elméleti fizika I.*, *Mechanika.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.)

[4] Dede M., Demény A., *Kísérleti fizika I.-II.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.)

[5] Tél T., Gruiz M., *Kaotikus dinamika*, (Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.)