RELATIVITÁSELMÉLET

Sailer Kornél

Egyetemi előadás

Elméleti Fizikai Tanszék
Kossuth Lajos Tudományegyetem
Debrecen
1997.

Contents

I. A SPECIÁLIS RELATIVITÁS ELMÉLETE

1 A speciális relativitási elv [1, 3, 4]

Ebben a fejezetben azt a kérdést tesszük fel, hogy a természet jelenségei mögött meghúzódó természeti törvények függenek-e attól, hogy milyen inerciális vonatkoztatási rendszerből figyeljük meg azokat? Ösztönösen azt várjuk, hogy amennyiben a természeti jelenségeket szabályozó törvények egyetemesek, akkor azok nem függhetnek attól, hogy az inerciarendszer, amelyben a megfigyelő nyugalomban van, milyen mozgást végez. Úgy is mondhatnánk, hogy csak akkor beszélhetünk arról, hogy a jelenségeket természeti törvények szabályozzák, ha azok függetlenek attól, hogy a megfigyelő milyen mozgást végez.

Máris előrebocsátom a választ: **a természet törvényei valamennyi inerciarendszerben azonosak.** Inerciarendszerekből végtelen sok van és azok egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek.

A jelenségek körét a fizikai jelenségekre szűkítve le, a világ azért olyan gazdag jelenségekben, mert a testek egymással kölcsönhatnak. Felvetődik az a kérdés, hogy egy test hogyan hat kölcsön egy máshol levő másik testtel? Ha az egyik megváltoztatja a helyét, sebességét, stb., akkor azt a másik test mikor észleli? Rögtön a változás pillanatában, avagy esetleg csak bizonyos idő eltelte után?

A tapasztalat által sok oldalról megerősített tény az, hogy **a kölcsönhatások véges sebességgel terjednek, amelynek maximális értéke a fény sebessége a vákuumban. A fénysebesség minden inerciarendszerben és minden irányban ugyanakkora.**

Meg fogjuk mutatni, hogy az elmondottaknak rendkívül súlyos következményei vannak világképünk alakulásában. **A fizikai történések (elemi események) a maguk egymásmellettiségében és egymásutánisáságában vonatkoztatási rendszertől független geometriai szerkezetet határoznak meg: ez a téridő.** Ha ezt a geometriai szerkezetet valamely megfigyelő valamely vonatkoztatási rendszerből nézi, akkor a történésekhez helyet és időt tud rendelni. Megtörténhet azonban, hogy két esemény, amely az egyik inerciarendszerben egyidejű, egy másikban már nem az. A hely és az idő az esemény vonatkoztatási rendszertől függő koordinátái. Ezek a koordináták azonban annak a téridőnek a pontjait jellemzik, amelynek a geometriai szerkezete független a vonatkoztatási rendszertől. Ezen független geometriai szerkezetben hely és idő nem válik külön, hanem egységet alkot.

A speciális relativitás elmélete szerint a tér és az idő szoros egységet alkot, a téridőt. Nem beszélhetünk a térről, mint eleve adott színpadról, amelyben az események zajlanak. Sokkal inkább az események a maguk sokaságával határozzák meg a téridőt. A hely és az idő, amit az egyes eseményekhez rendelünk esetleges, függ attól, hogy az események sokaságát mely inerciarendszerből figyeljük meg, azaz hogy melyik az az inerciarendszer, amelyben nyugalomban vannak a hely és az időméréséhez használt méterrudak és órák.

A speciális relativitás elve értelmében nincsen kitüntetett inerciarendszer. A fizikai törvények szempontjából minden inerciarendszer egyenértékű. Ennek köszönhetően nincsen abszolút nyugalomban levő inerciarendszer sem, mint amit a Newton-i mechanika feltételezett.

Ebben a fejezetben megtanuljuk, hogy a téridőnek milyen, vonatkoztatási rendszertől független jellemzői vannak, mi a kapcsolat azon hely- és időkoordináták között, amelyek egy eseményt különböző inerciarendszerekben jellemeznek, és a hely- és az időkoordináták viszonylagosságának néhány következményét.

1.1 Vonatkoztatási rendszerek, inerciarendszerek [1, 4]

A jelenségeket mindig valamilyen testhez, testek rendszeréhez rögzített mérőműszerek segítségével vizsgáljuk. Ezek együttese alkotja a **vonatkoztatási rendszer**t. Úgy képzelhetjük, hogy a vonatkoztatási rendszer minden pontjában áll egy megfigyelő kezében órával és mérőrúddal. Ezek a megfigyelők mérőrúdjaik segítségével térbeli koordinátarendszerrel tudják behálózni a teret. A térbeli koordinátarendszer kijelölésére természetesen végtelen sok lehetőség kínálkozik. A vonatkoztatási rendszer a választott tér-koordinátarendszer és az annak pontjaiban rögzített órák összességének is tekinthető.

A vonatkoztatási rendszerek között vannak olyanok, amelyekben az egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását, ha semmilyen test nem hat rá. Ezek az **inerciarendszerek**. Ha egy vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, akkor minden hozzá képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző rendszer is inerciarendszer. Következésképpen, végtelen sok inerciarendszer van. Inerciarendszerben az egyenes vonalú egyenletes mozgás leírása akkor a legegyszerűbb, ha Descartes-féle koordinátarendszert választunk.

1.2 A speciális relativitási elv [1, 3, 4]

A speciális relativitási elv azt a tapasztalatot mondja ki, hogy a természettörvények minden inerciarendszerben azonosak. Ez azt jelenti, hogy a természettörvények függetlenek a vonatkoztatási rendszertől, nem viszonylagosak, hanem egyetemesek. Később a speciális relativitási elvnek a matematikai leírásban használhatóbb megfogalmazását fogjuk adni, amely szerint **a természeti törvényeket leíró egyenletek valamennyi inerciarendszerben azonos alakúak**.

A speciális relativitási elv azt a tapasztalatot fogalmazza meg, hogy az inerciarendszerek között semmilyen fizikai kísérlettel nem lehet különbséget tenni. A különböző inerciarendszerek a fizika szempontjából teljesen egyenértékűek.

Itt jegyzem meg, hogy ennek a tapasztalatnak az első megfogalmazása Galileo Galilei nevéhez fűződik. Hadd álljon itt a „Párbeszédekből” vett idézet (ld. 1., 2., 3. és 4. ábra):

SALVIATI. A pillanat alkalmasnak látszik arra, hogy annak kimutatása során, hogy a felsorolt kísérletek nem érnek semmit, feltegyem a koronát azzal, hogy megmutatom, miképpen lehet azokat a lehető legkisebb fáradsággal kipróbálni. Zárkózzál be egy barátod társaságában egy nagy hajó fedélzete alatt egy meglehetősen nagy terembe. Vigyél oda szúnyogokat, lepkéket és egyéb röpködő állatokat, gondoskodjál egy apró halakkal telt vizesedényről is, azonkívül akassz fel egy kis vödröt, melyből a víz egy alája helyezett szűk nyakú edénybe csöpög. Most figyeld

Figure 1: Galilei: „Párbeszédek”, idézet.

A speciális relativitáselméletet Albert Einstein dolgozta ki.

1.3 Távolhatás – közelhatás [1]

A mechanika Newton-féle megfogalmazásában egy test megváltoztatja mozgásállapotát, ha másik testtel kölcsönhatásba lép és az erőt gyakorol rá. Az erőtörvény, ami az erő nagyságát adott pillanatban megadja, a Newton-i mechanika szerint olyan, hogy csak a testeknek a pillanatnyi helyzetétől, sebességétől, stb. függ. Ezért, ha az egyik test mozgásállapota megváltozik, akkor azt a másik test azonnal észreveszi, függetlenül attól, hogy milyen távolságban tartózkodik. Ezért azt mondjuk, hogy a Newton-i mechanika a kölcsönhatást távolhatásként kezeli. Sok mechanikai jelenségnél a kölcsönható testek egymással érintkeznek, s ilyenkor nem jelentkezik élesen az a kérdés, hogy hogyan is lehetséges távolhatás.

Nagyon fontos, már a Newton-i mechanikában is vizsgált jelenség, a szabadesés, meg gondosan, hogy a repülő állatok milyen sebességgel röpködnek a szobában minden irányba, míg a hajó áll. Meglátod azt is, hogy a halak egyformán úszkálnak minden irányban, a lehulló vízcseppek mind a vödör alatt álló edénybe esnek. Ha társad felé hajítasz egy tárgyat, mind az egyik, mind a másik irányba egyforma erővel kell hajítanod, feltéve, hogy azonos távolságokról van szó. Ha, mint mondani szokás, páros lábbal ugrasz, minden irányba ugyanolyan messzire jutsz. Jól vigyázz, hogy mindezt gondosan megfigyeld, nehogy bármi kétely támadhasson abban, hogy az álló hajón mindez így történik. Most mozogjon a hajó tetszés szerinti sebességgel: azt fogod tapasztalni — ha a mozgás egyenletes és nem ide-oda ingadozó —, hogy az említett jelenségekben semmiféle változás nem következik be. Azoknak egyikéből sem tudsz arra következtetni, hogy mozog-e a hajó, vagy sem. Ha ugrasz, ugyanakkora távolságra fogsz jutni, mint az előbb, és bármily gyorsan mozog a hajó, nem tudsz nagyobbat ugrani hátrafelé, mint előre: pedig az alattad levő hajópadló az alatt az idő alatt, míg a levegőben vagy, ugrásoddal ellenkező irányban elmozdul előre. Ha társad felé egy tárgyat hajítasz, nem kell nagyobb erővel hajítanod, ha barátod a hajó elején tartózkodik, mint akkor, amikor hátul van. A cseppek éppúgy bele fognak hullani az alsó edénybe, mint előbb, egyetlenegy sem fog az edény mögé esni, pedig az, míg a csepp a levegőben van, több hüvelyknyi utat

Figure 2: Galilei: „Párbeszédek", idézet folytatása.

tesz meg. A halaknak sem kell az edényben nagyobb erőt kifejteni, hogy az edény elejére úszhassanak, és ugyanolyan könnyedséggel fognak a táplálék után menni, ha az edény bármely részén van is. Végül a szúnyogok és a lepkék is különbség nélkül fognak bármely irányba repkedni. Sohasem fog előfordulni, hogy a hátsó falhoz nyomódnak, mintegy elfáradva a gyorsan haladó hajó követésétől, pedig míg a levegőben tartózkodnak, el vannak választva tőle. Ha egy szem tömjént elégetünk, egy kevés füst képződik, mely felszáll a magasba és kis felhő gyanánt lebeg ott, és nem mozdul el sem az egyik, sem a másik irányba. A jelenségek ez egyformaságának az az oka, hogy a hajó mozgásában minden rajta levő tárgy részt vesz, beleértve a levegőt is. Azért is mondtam, hogy a fedélzet alatt kell elhelyezkednetek, mert fent, a szabad levegőn, mely nem kíséri a hajó mozgását, az említett jelenségektől többé-kevésbé észrevehető eltéréseket tapasztalhatnátok. Így például a füst éppúgy elmaradna, mint a levegő. A szúnyogok és a lepkék sem tudnák követni a hajót a levegő ellenállása miatt, ha a hajótól jelentékeny távolságra kerülnének, de ha a közelben maradnak, minden akadály és erőfeszítés nélkül utolérhetnék a hajót, mert az mint szabálytalan építmény a szomszédos légrétegeket magával viszi. Hasonló okokból láthatjuk azt is, hogy a kellemetlen szúnyogok és bögölyök követni tudják a gyorsan vágtató lovakat, és majd az egyik, majd a másik test-

Figure 3: Galilei: „Párbeszédek", idézet folytatása.

részükön helyezkednek el. A lehulló cseppeknél azonban a különbség egészen csekély, az ugrásnál és súlyos testek hajításánál észrevehetetlen lenne.

SAGREDO. Bár még sohasem jutott eszembe a tengeren, hogy a felsorolt megfigyeléseket ebből a célból végrehajtsam, több mint bizonyos vagyok benne, hogy valóban az adott eredményre vezetnek. Így például arra is emlékszem, hogy fülkémben tartózkodva igen sokszor vetettem fel magamnak azt a kérdést, hogy mozog-e a hajó, vagy áll-e, és gondolataimba elmerülve sokszor hittem azt, hogy az egyik irányba megy, pedig éppen az ellenkező irányba haladt. Ezért teljesen meg vagyok most elégedve és szilárdan meg vagyok róla győződve, hogy *hiábavaló minden olyan kisérlet, amely a Föld forgása mellett vagy az ellen döntő módon szólna.* Még egyetlen ellenvetést kell elintézni, mely azon a tapasztalaton alapszik, hogy azok a tárgyak, amelyek egy forgó gépen vannak, a gyors forgás következtében lerepülnek-e róla. Ezért gondolták sokan, köztük Ptolemaiosz is, hogy ha a Föld akkora sebességgel forogna a tengelye körül, akkor a kövek és az állatok egészen a csillagokig repülnének, és az épületeket a mégoly erős malter sem tudná a talajhoz kötni, hogy megmentse ettől a pusztulástól.

Figure 4: Galilei: „Párbeszédek”, idézet folytatása.

amikor a Föld és a szabadon eső test nem érintkeznek. Itt már nem nyilvánvaló, hogy hogyan is fejt ki erőt a Föld a vele nem érintkező testre. Válaszként megfogalmazódott az a feltevés, hogy a kölcsönhatás nem távolhatásként, hanem közelhatásként valósul meg. Pl. a Föld gravitációs teret kelt és a Hold ebben szabadon esik. A szabadon eső testre, a Holdra a gravitációs erőtér fejt ki erőt közelhatás révén ott, ahol az éppen tartózkodik. A klasszikus mechanikában azonban feltételezzük, hogy a Föld mozgásállapotában bekövetkező bármilyen változásra a Föld által keltett gravitációs erőtér azonnal (időkésleltetés nélkül) hozzáidomul. A klasszikus mechanika közelhatásról alkotott képe szerint tehát végtelen nagy sebességgel terjed az a hatás, ami az egyik test mozgásállapotának megváltozásáról a másik testhez a testek közötti erőtérben ,,hírt visz". A Galilei nevével jelzett relativitási elvbe a kölcsönhatások végtelen nagy terjedési sebességét is hallgatólagosan bele szokás érteni.

Az elektromágneses hullámok felfedezése óta tudjuk, hogy a testek közötti kölcsönhatás valójában mindig úgy valósul meg, hogy az egyik test erőteret kelt, ami közelhatást gyakorol a benne elhelyezkedő másik testre. Azt is tudjuk, hogy az erőteret keltő test mozgásállapotának megváltozása nyomán az erőtérben ,,zavar", elegánsabb nevén hullám terjed tova, ami mindig energiát hordoz. Ez a zavar az a hatás, ami ,,hírül viszi" a teret keltő test mozgásállapotában bekövetkezett változást. **A kölcsönhatás** (a zavar, a jel) **terjedésének sebessége a tapasztalat szerint mindig véges.** Azt, hogy valahol egy fizikai történés (egy esemény) ment végbe, más testek csak időben megkésve ,,veszik észre". A kölcsönhatás terjedési sebességét úgy kapjuk, hogy a másik testnek az esemény helyétől mért távolságát osztjuk azzal az idővel, amelynél korábban nem figyelhetők meg rajta olyan folyamatok, amelyeket az adott esemény váltott ki.

1.4 A kölcsönhatás maximális terjedési sebessége: a fénysebesség [3, 4]

A tapasztalat szerint a kölcsönhatások terjedési sebességének létezik maximális értéke: ez a c fénysebesség, az elektromágneses hullámok terjedési sebessége vákuumban. Ha a kölcsönhatások maximális terjedési sebességének léte természeti törvény, akkor a speciális relativitás elve értelmében ennek a sebességnek minden inerciarendszerben azonosnak kell lenni. (Egyébként különbséget lehetne tenni az inerciarendszerek között.) Abból a feltevésből, hogy az inerciarendszerekben nincsenek kitüntetett irányok, következik, hogy a fény terjedési sebessége minden irányban azonos. Ezt nevezzük a fényterjedés izotrópiájának. **A fény terjedési sebessége tehát valamennyi inerciarendszerben és minden irányban azonos.**

Michelson és Morley kísérlete bizonyította [3, 4], hogy a fény terjedési sebessége csakugyan minden inerciarendszerben azonos. Amikor a kísérletet végezték, már tudták, hogy az inerciarendszerek között mechanikai kísérletekkel nem lehet különbséget tenni. Ismeretes volt továbbá az elektrodinamikának az az eredménye, hogy a fény a közegmentes térben minden irányban azonos sebességgel terjed. A kérdés csak az volt, milyen vonatkoztatási rendszerhez képest terjed a fény c sebességgel. Az volt a feltételezés a Newton-i mechanika hagyományos álláspontja szerint, hogy létezik egy abszolút nyugalomban levő inerciarendszer, az éter, és a fény ehhez képest terjed c sebességgel. A kísérlet célja az volt, hogy meghatározzák az interferométer $\vec{v}$ sebességét az éterhez képest (ld. [3]). Könnyű belátni, hogy az interferenciacsíkoknak el kellene tolódniuk, ha az interferométert abból a helyzetből, amikor egyik karja a $\vec{v}$ sebesség irányába mutat, elforgatjuk mondjuk 90 fokkal a síkjára merőleges tengely körül. Képzeljük magunk elé a Földet, amint a Nap körül kering. Tegyük fel, hogy a Nap sebessége az éterben $\vec{V}$, a Föld keringési sebessége pedig a Naphoz rögzített inerciarendszerben $\vec{w}$. Ekkor az interferométer feltételezett sebessége az éterhez képest $\vec{v} = \vec{V} + \vec{w}$. Ez a sebesség nem lehet a Föld keringése során mindig azonosan nulla. A Földön nyugvó interferométer elforgatásakor tehát jelentkezni kellene általában az interferenciacsíkok eltolódásának. A tapasztalat azonban az, hogy nem észleltek csíkeltolódást. Ez csak úgy érthető, ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy a fény az éterhez terjed, hanem elfogadjuk, bármely, az interferométerrel a kísérlet idején éppen együttmozgó inerciarendszerhez képest ugyanazzal a c sebességgel terjed. Ez azt jelenti viszont, hogy még a fény sem tünteti ki az inerciarendszerek valamelyikét. Akkor nincs is értelme arról beszélni, hogy létezik abszolút nyugvó inerciarendszer, hiszen semmilyen kísérlettel sem lehet megkülönböztetni egyik inerciarendszert a másiktól, a Michelson-kísérlettel sem. Ez vezette Einsteint a speciális relativitás elvének megfogalmazásához, azaz annak kimondásához, hogy nincsen kitüntetett inerciarendszer, s így abszolút nyugalomban levő inerciarendszer sincs.

Végül néhány fontos megjegyzés, ami a kölcsönhatások véges terjedési sebességének jelentőségét mutatja:

- Az erőtér fogalma azért válik tulajdonképpen fizikaivá, mert benne a zavarok véges sebességgel tudnak terjedni. Ennek köszönhető ugyanis, hogy a távolhatás és az erőtérre alapozott közelhatás közül csak az utóbbival lehet a fizikai jelenségek közötti oksági kapcsolatot helyesen magyarázni.

- Nyilvánvaló az is, hogy a fénysebességnél nagyobb sebességű test nem létezhet, mert akkor ez a test olyan kölcsönhatást valósíthatna meg, amely a fénysebességnél gyorsabban terjed. Márpedig akkor a fénysebesség nem lehetne a kölcsönhatások maximális terjedési sebessége.

- Miután a fénysebesség valamennyi inerciarendszerben minden irányban azonos, a fényjeleket felhasználhatjuk, hogy adott inerciarendszerben az egymáshoz képest nyugvó órákat szinkronizáljuk. Legyen pl. O az origóban nyugvó óra. Amikor az $t_O = 0$ idt̋ mutat, akkor bocsássunk ki az origóból minden irányban fényjeleket. Amikor a fényjel az origótól ℓ távolságra levő O' órát eléri, akkor állítsuk azt $t_{O'} = \ell/c$-re. Ezzel az eljárással az összes, az adott inerciarendszerben nyugvó órát szinkronizálhatjuk. Ez azt jelenti, hogy valamennyi inerciarendszerben létezik egységes t rendszeridő, amelyet a szinkronizált órák mérnek.

- Ha formálisan a c fénysebességgel, mint a speciális relativitáselméletben szereplő paraméterrel a végtelenhez tartunk, akkor az annak felel meg, hogy a kölcsönhatások maximális terjedési sebességével végtelenhez tartunk. Ekkor vissza kell kapjuk a klasszikus mechanika határesetét. Ez a formális lépés akkor hordoz fizikai tartalmat, ha olyan rendszerek leírására törekszünk, amelyekben a részecskék a fénysebességhez képest lényegesen kisebb sebességgel mozognak.

1.5 Elemi események invariáns „távolsága": ívhossz [1]

Miután a kölcsönhatások mindig közelhatásként, lokálisan valósulnak meg, a fizikai történéseket gondolatban mindig felbonthatjuk pontszerű elemi események láncolatára. Hogy még egyszerűbb legyen gondolkoznunk, gondolatban minden pontszerű elemi eseményt azonosíthatunk egy fényjel (pl. egy foton) kibocsátásával ill. elnyelésével.

Gondolatban elképzelhetjük, hogy egy adott vonatkoztatási rendszerben minden helyen minden pillanatban történik egy elemi esemény. Ezen (lehetséges) elemi események sokasága az, ami meghatározza adott vonatkoztatási rendszerben a helyet és az időt. Az elemi események azonban, mint fizikai történések nem viszonylagosak, minden vonatkoztatási rendszerben lezajlanak. A pontszerű elemi eseményhez bármely inerciális vonatkoztatási rendszerben rendelhetünk Descartes-féle helykoordinátákat, $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$ (más jelölésben x^i $(i = 1, 2, 3)$), valamint a t időkoordinátát, amely megfelel az $\vec{r}$ pontban nyugvó óra által mutatott időnek. Ugyanazon elemi eseményt különböző vonatkoztatási rendszerekben jellemző koordináták között általában bonyolult kapcsolat van, amelyre még visszatérünk.

Feltehetjük azonban azt a kérdést, hogy vannak-e az elemi események sokaságának olyan tulajdonságai, amelyek függetlenek a vonatkoztatási rendszertől? A válasz az, hogy az elemi események sokasága vonatkoztatási rendszertől független geometriai szerkezettel rendelkezik. Az elemi események sokasága geometriai szerkezeténél fogva meghatározza a téridőt.

Vezessük be az invariáns ívhossz fogalmát. Tegyük fel, hogy két esemény infinitezimálisan közeli, az egyik egy fényjel emissziója, a másik ugyanennek a fényjelnek az abszorpciója. Ha ezen két esemény koordinátakülönbségei a tetszőleges K inerciarendszerben dx^i és az események között eltelt idő pedig dt, akkor a fénysebesség állandósága következtében a $(cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = 0$ egyenlőség áll fenn tetszőleges K inerciarendszerben.

Vegyünk most két tetszőleges, egymáshoz infinitezimálisan közeli eseményt és képezzük a

$$ds^2 \equiv (cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{1.1}$$

mennyiséget, amit az **ívhosszelem négyzetének** nevezünk. Ennek értéke általában nem zérus. Most azonban megmutatjuk, hogy **az ívhosszelem négyzetének értéke minden inerciarendszerben ugyanaz.** Tegyük fel, hogy a K_1 inerciarendszer $\vec{v}_1$, a K_2 inerciarendszer pedig $\vec{v}_2$ sebességgel mozog a K rendszerhez képest. Az ívhosszelem négyzete az egyik ill. a másik rendszerben azonos rendben kicsiny mennyiség, ezért $ds_1^2 \sim ds^2$ és $ds_2^2 \sim ds^2$, ahol ds^2 az ívhosszelem négyzete a K rendszerben. Az arányossági tényező a tér homogenitása és izotrópiája miatt csak a K és K_1 ill. a K és K_2 inerciarendszerek relatív sebességének nagyságától függhet, a helykoordinátáktól és az időkoordinátától és a sebesség irányától nem: $ds_1^2 = a(v_1)ds^2$, $ds_2^2 = a(v_2)ds^2$. Legyen a K_1 és a K_2 inerciarendszerek relatív sebessége $\vec{v}_{12}$. Ekkor a $\frac{ds_2^2}{ds_1^2}$ hányadost képezve látjuk, hogy fennáll az

$$a(v_{12}) = \frac{a(v_2)}{a(v_1)} \tag{1.2}$$

egyenlet. Itt azonban a baloldal általában függ a $\vec{v}_1$ és a $\vec{v}_2$ sebességek szögétől, míg a jobboldal nem. Az egyenlőség tetszőleges K_1, K_2 és K inerciarendszerek esetén csak úgy állhat fenn, ha az arányossági tényező állandó, de akkor $a = 1$. Ezzel beláttuk, hogy az ívhosszelem négyzete invariáns mennyiség, értéke tetszőleges inerciális vonatkoztatási rendszerben azonos.

Az infinitezimális távolságok invarianciájából a véges ívhossznégyzetek invarianciája is következik.

1.6 Téridő, fénykúp, eseményhorizont [1]

Az elemi események tehát (inerciarendszerekből nézve) olyan geometriai szerkezetet alkotnak, amelyben a közöttük levő négydimenziós távolságok vonatkoztatási rendszertől függetlenek. **Az elemi események által az invariáns ívhossz révén definiált geometriai struktúrát nevezzük téridőnek.** Az elnevezés kifejezi, hogy a téridő geometriai szerkezetében nem válik külön a hely és az idő. Tér és idő szoros egységet alkot. Azt a geometriát, amelyet a téridőben értelmezett invariáns ívhossz definiál, pszeudoeuklideszi geometriának nevezzük.

Vizsgáljuk meg egy tetszőleges O elemi eseményhez képest a téridő szerkezetét. Találunk olyan elemi eseményeket, amelyeknek az ívhossznégyzete zérus. Ezeket **fényszerűen elválasztott események**nek nevezzük. Ezek alkotják az ún. **fénykúpot**. Azok az események, amelyekre az O eseményhez viszonyított ívhossznégyzet pozitív, az **időszerűen elválasztott események**. Az időszerűen elválasztott események a fénykúp belsejében helyezkednek el. Csak a fénykúpon és a fénykúp belsejében elhelyezkedő események állhatnak az O eseménnyel oksági kapcsolatban. Ekkor ugyanis a kiszemelt esemény és az O esemény közötti térbeli távolság és a közöttük eltelt idő hányadosa semmilyen inerciarendszerben nem haladja meg a fénysebességet. Ezzel szemben a fénykúpon kívül elhelyezkedő eseményekre az ívhossz négyzete negatív. Ezek a **térszerűen elválasztott események**. Közöttük és az O esemény között nem lehetséges oksági kapcsolat, mert ehhez a fénysebességnél gyorsabban terjedő kölcsönhatást kellene feltételezni. Az eseményeknek ez az osztályozása (tetszőleges elemi eseményre vonatkoztatva) fényszerűen, időszerűen és térszerűen elválasztott eseményekre az invariáns ívhossz fogalmán alapul és így független a vonatkoztatási rendszertől és a téridő invariáns szerkezetének nagyon fontos jellemzője.

Itt jegyezzük meg, hogy az események egyhelyűsége és egyidejűsége a vonatkoztatási rendszertől függő fogalmak:

- Ha két esemény valamely inerciarendszerben egyhelyű és egyidejű, akkor minden inerciarendszerben az; a téridő egyazon pontja.
- Annak a szükséges feltétele, hogy létezzen olyan inerciarendszer, amelyben két esemény egyhelyű, az, hogy a két esemény legyen időszerűen elválasztott.
- Annak a szükséges feltétele, hogy létezzen olyan inerciarendszer, amelyben két esemény egyidejű, az, hogy az események legyenek térszerűen elválasztva.

A fénykúpon belüli eseményekről egyértelműen (vonatkoztatási rendszertől függetlenül) eldönthető, hogy azok korábbiak vagy későbbiek, múltbeliek vagy jövőbeliek az O eseményhez képest. Így az oksági viszonyok bármely inerciarendszerben változatlanok. Azok az események, amelyeknek O érezheti elvileg a következményeit, mind a múltbeli fénykúpon belül, ill. annak a felületén helyezkednek el. Másrészről az O eseményt csak azok a megfigyelők észlelhetik, akik megfigyelésüket valamely a jövőbeli fénykúpon belüli eseménnyel egyhelyűen és idejűleg végzik. Az O elemi történés szempontjából tehát a „világegyetem” a múltbeli és a jövőbeli fénykúpból áll. A fénykúp felülete az az eseményhorizont, amelyen kívül elhelyezkedő eseményeknek O-ra semmiféle hatása nem lehet és amelyekre O-nak sem lehet semmilyen hatása. Ezek az események az O esemény szempontjából olyanok, mintha nem is történtek volna meg, ill. nem is történnének meg.

1.7 Sajátidő. A müon élettartama. Ikerparadoxon [1, 3]

Azt a kérdést akarjuk megvizsgálni, hogy hogyan telik az idő az egymáshoz képest mozgó órákon. Ebből egyúttal az is kiderül, hogy az idő függeni fog a vonatkoztatási rendszertől, amelyben nyugvó órával mérjük.

Legyen K tetszőleges inerciarendszer, amelyben egy óra tetszőlegesen mozog. A K-ban felvett koordinátarendszer legyen (t, x^1, x^2, x^3). Legyen az óra sebessége a K rendszerben a t idő tetszőleges függvénye: $\vec{v}(t)$. Tegyük fel, hogy a mozgó óra a K rendszerből nézve dt idő alatt dx^i elmozdulást szenved. A t ill. dt időt a K-ban nyugvó (szinkronizált) órák mérik. Mennyi idő telik el a mozgó óra fenti elmozdulása alatt magán a mozgó órán? A mozgó órával az adott pillanatban együttmozgó inerciarendszer legyen K'. Mekkora tehát a K'-ben nyugvó órán eltelt dt' idő? Tudjuk, hogy az óra K'-ben nyugalomban van, tehát $(dx^i)' = 0$. Az ívhosszelem négyzete invariáns, tehát:

$$ds^2 \equiv (cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = (cdt')^2. \tag{1.3}$$

Innen a mozgó óra nyugalmi rendszerében eltelt idő:

$$dt' = dt\,\sqrt{1 - (v^2/c^2)} < dt \tag{1.4}$$

A K rendszerben mozgó óra tehát lassabban jár, mint a K rendszerben nyugvó órák. Az óra saját nyugalmi rendszerében eltelt időt **sajátidőnek** nevezzük és a későbbiekben $d\tau$-val fogjuk jelölni. A fenti példában az óra véges elmozdulásához tartozó sajátidő és a K inerciarendszerben eltelt idő között az összefüggés:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} < t_2 - t_1. \tag{1.5}$$

Az (1.3) képletből látjuk, hogy az óra által $d\tau$ sajátidő alatt befutott ívhossz $ds = cd\tau$.

Ha a mozgó óra $\vec{v}$ sebessége K-hoz képest állandó, akkor az óra nyugalmi rendszere, K' mindvégig inerciarendszer. Ekkor természetesen az óra τ sajátideje éppen a K' inerciarendszerben a t' rendszeridő. Ha K'-ben két egyhelyű esemény között $\Delta t'$ idő telik el, akkor eme két esemény között a K-ban nyugvó órán

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t' \tag{1.6}$$

idő telik el. A dolog azonban meg is fordítható: ha két, a K-ban egyhelyű esemény között K-ban mérve Δt idő telik el, akkor ugyanezen két esemény között eltelt időt a K'-ben nyugvó órák ugyancsak hosszabbnak mérik: $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t$. Az ún. idődilatáció tehát nem tünteti ki egyik inerciarendszert sem.

Ismeretes a következő jelenség [3]. A müonok a müonikus atomok belsejében kb. 10^{-6} s alatt bomlanak el. Ugyanakkor a Föld felszínétől kb. 10 km magasságban kozmikus sugárzás hatására keletkeznek müonok. Ezeknek a müonoknak a sebessége nagyságrendileg a fénysebességnél annak 1 %-ával kisebb. A tapasztalat szerint a magas légkörben keletkezett müonok elérik a Föld felszínét. Hogyan lehetséges ez? A magyarázat abban rejlik, hogy a nagy sebességgel mozgó müonok órája lassabban jár, s így az a kb. 10^{-4} s idő, amire a Földön nyugvó órán mérve szükségük van ahhoz, hogy lejussanak a Föld felszínére, az ő sajátidejükben mérve csak a 10^{-6} s élettartamnak felel meg (ld. [3]).

A mozgó órák lelassulása révén megfogalmazható az ikerparadoxon. Tegyük fel, hogy két óránk van: az egyik, O_1, nyugalomban van a K_1 inerciarendszerben, a másik, O_2, pedig zárt pályán mozogva elindul onnan, ahol O_1 tartózkodik, majd valamennyi idő múltán visszatér ugyanoda. A fentiek szerint az O_2 sajátidejében eltelt idő O_2 elindulása és visszatérése között kisebb, mint az O_1-en eközben eltelt idő. Ha az órákkal együttmozgó ikertestvéreket képzelünk el, akkor arra a paradoxonra jutunk, hogy az induláskor egykorú ikertestvérek közül az, amelyik az O_2 órával (pl. egy visszatérő űrhajóban) együtt mozgott, fiatalabb a visszatéréskor, mint a testvére, aki a K_1 inerciarendszerben nyugalomban volt. Ez paradoxon, ha feltesszük, hogy a vonatkoztatási rendszerekben a természeti törvények azonosak. A paradoxon feloldása nyilvánvalóan abban rejlik, hogy az O_2-vel együttmozgó K_2 vonatkoztatási rendszer nem inerciarendszer, így nem alkalmazható rá a speciális relativitás elve. A K_2 vonatkoztatási rendszer nem kell hogy egyenértékű legyen a K_1 inerciarendszerrel, amelyben O nyugszik.

1.8 A Poincaré- és a Lorentz-transzformációk [1, 4]

(Ebben a fejezetben az egyszerűség kedvéért többször az $x^1 = x$, $x^2 = y$ és $x^3 = z$ jelölést használom a térkoordinátákra.)

Amíg a relativitási elvet nem alkalmazták a fényre, hanem csak a mechanikai jelenségekre, addig meg lehetett maradni annál a szemléletnél, hogy az idő valamenyi inerciarendszerben azonos módon telik. A klasszikus mechanikában a K inerciarendszerben nyugvó órák által mutatott t időt és a hozzá képest tetszőleges $\vec{V}$ sebességgel mozgó K' inerciarendszerben nyugvó órákkal mért t' időt azonosnak tekintjük, $t = t'$. Ez azt jelenti, hogy a klasszikus mechanikában létezik az inerciarendszer megválasztásától független abszolút idő. Mindazok a mechanikai jelenségek, amelyek olyan rendszerekben lépnek fel, amelyekben a részecskék a fénysebességnél lényegesen kisebb sebességgel mozognak, a tapasztalat szerint helyesen írhatók le a klasszikus mechanika szerint.

Az egyik inerciarendszerről a másikra történő áttérést matematikai-

lag koordinátatranszformáció írja le. Ugyannak az elemi eseménynek keressük a koordinátáit az egyik ill. a másik inerciarendszerben és azt kérdezzük, hogy mi a kapcsolat közöttük. A klasszikus mechanikában ezt a **Galilei-transzformáció** adja meg. Tekintsük azt az esetet, amikor a K' inerciarendszer V sebességgel mozog a K inerciarendszerhez képest annak x tengelye irányában, a két rendszerben a megfelelő koordinátatengelyek a térben párhuzamosak, és az idő mérést akkor kezdtük, amikor a két rendszer origója egybeesett. (A későbbiekben, a speciális relativitáselméletről szóló fejezetekben a különböző mennyiségek transzformációit mindig erre a speciális esetre fogom konkréten megadni.) A K inerciarendszerben bevezetett (t, x, y, z) koordináták és a K' inerciarendszerben használt (t', x', y', z') koordináták kapcsolatát megadó Galilei-transzformáció:

$$t = t', \quad x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{1.7}$$

Megtanultuk ugyanakkor, hogy ha a fénysebesség végességét komolyan vesszük és a fény terjedésére is alkalmazzuk a speciális relativitás elvét, akkor abból többek között az is következik, hogy a különböző inerciarendszerekben nyugvó (fizikailag azonos) órák különbözőképpen járnak, vagyis $t' \neq t$ A fenti K és K' inerciarendszerekben felvett koordináták között azonban fennáll az ívhossz invarianciáját kifejező

$$s^2 \equiv (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 \tag{1.8}$$

összefüggés. A $(ct, x, y, z) = (x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ 4 darab téridő-koordinátát úgy tekinthetjük, mint egy olyan 4-dimenziós tér x^μ vektorának komponenseit, amelyben a vektorok hosszát az s^2 ívhossznégyzet adja meg. Az ilyen vektorteret Minkowski-térnek nevezzük.

Az egyik inerciarendszerről a másikra való áttérésnek megfelelő koordináta--transzformációkat tehát azok között a transzformációk között kell keresnünk, amelyek az x^μ vektorok hosszát invariánsan hagyják. Ezek a transzformációk az ún. **Poincaré-transzformációk**:

Eltolások	időirányú eltolások	1	
	eltolások a térben az x^1, x^2, x^3 irányokban	3	4
Lorentz-transzformációk	forgatások a térben az (x^1, x^2), (x^1, x^3), (x^2, x^3) síkban	3	
	Lorentz-lökések (boost): forgatások az (x^0, x^1), (x^0, x^2), (x^0, x^3) síkban	3	6

Az **eltolások** az időmérés kezdetének, ill. a térkoordinátarendszer origójának megváltoztatását jelentik. Rendre 1 ill. 3 független ilyen eltolás van. Az eltolások segítségével mindig elérhetjük, hogy a K és K' inerciarendszerben használt x^μ ill.

$x^{\mu'}$ 4-dimenziós koordinátarendszerek origója egybeessen, azaz hogy a két inerciarendszerben használt térkoordinátarendszerek origói a $t = t' = 0$ pillanatban essenek egybe. Ezt a Lorentz-transzformációk további vizsgálata során mindig feltételezzük. A **térbeli forgatások**ból 3 független van, ezek annak felelnek meg, hogy adott inerciarendszerben elforgatjuk a térbeli koordinátarendszerünket, miközben az idő változatlan, hiszen továbbra is ugyanazokkal; a nyugvó órákkal mérjük. Végül a **Lorentz-lökések**nek nevezett forgatások azok, amelyek egy térkoordinátát és az időkoordinátát összekeverik. Nyilván ezek felelnek meg az egyik inerciarendszerről a másikra történő áttérésnek. Belőlük 3 független van, hiszen a K' rendszer a K-hoz képest mozoghat annak x^1, x^2 ill. x^3 tengelye irányában, aminek rendre az (x^0, x^1), (x^0, x^2) és (x^0, x^3) síkban történő forgatások kell hogy megfeleljenek. A térbeli forgatások és az inerciarendszerek közötti áttérést leíró Lorentz-lökések együttesen alkotják a **Lorentz-transzformációkat**. Összesen 4 független eltolás és 6 független Lorentz-transzformáció, azaz 10 független Poincaré-transzformáció van. Mindegyiket egy folytonos paraméter jellemzi, ezek

1. az időbeli eltolás mértéke, a, $t' = t + a$;
2. a térbeli eltolásokat megadó $\vec{b}$ vektor 3 komponense, $x^{i'} = x^i + b^i$ $(i = 1, 2, 3)$;
3. az x, y és z tengely körüli térbeli forgatások szögei;
4. a Lorentz-lökéseket megadó 3 paraméter, ami a K rendszer és a K' rendszer $\vec{V}$ relatív sebességének a 3 komponense.

Emlékeztetőnek álljon itt a térbeli forgatásokra egy példa. Ha a K' koordinátarendszer a K-hoz képest az $x^3 = x^{3'}$ tengely körül φ szöggel van elforgatva (forgatás az (x^1, x^2) síkban), akkor

$$x^1 = x^{1'} \cos\varphi + x^{2'} \sin\varphi, \qquad x^2 = -x^{1'} \sin\varphi + x^{2'} \cos\varphi,$$
$$x^3 = x^{3'}, \qquad x^0 = x^{0'}. \tag{1.9}$$

Keressük most meg a Lorentz-lökést leíró transzformáció explicit alakját abban az esetben, amikor a K' inerciarendszer a K rendszerhez képest annak x^1 tengelye irányában V sebességgel mozog és megfelelő koordinátatengelyeik párhuzamosak. Mivel most is forgatásról van szó, a transzformáció, hasonlóan a térbeli forgatásokhoz, lineáris:

$$x^0 = ax^{0'} + bx^{1'}, \qquad x^1 = dx^{0'} + ex^{1'}.$$
$$x^2 = x^{2'}, \qquad x^3 = x^{3'}. \tag{1.10}$$

Itt az a, b, c és d együtthatókat kell meghatározzuk abból a feltételből, hogy a transzformáció során az ívhossz négyzete invariáns:

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2. \tag{1.11}$$

Az (1.10) képleteket behelyettesítve az azonosság baloldalába, leolvassuk, hogy az akkor és csak akkor teljesül, ha

$$e^2 - b^2 = 1, \qquad d^2 - a^2 = -1, \qquad ed - ab = 0. \tag{1.12}$$

Ezt az egyenletrendszert kielégíti, ha az állandókat az alábbi módon paraméterezzük:

$$a = e = \cosh\psi, \qquad b = d = \sinh\psi. \tag{1.13}$$

A ψ paraméternek nyilvánvalóan a transzformáció egyetlen fizikai paraméterétől, az inerciarendszerek V relatív sebességétől kell függenie. A keresett Lorentz-lökés

$$x^0 = x^{0'}\cosh\psi + x^{1'}\sinh\psi, \qquad x^1 = x^{0'}\sinh\psi + x^{1'}\cosh\psi \tag{1.14}$$

alakú. A pszeudo-euklideszi geometria következtében a trigonometrikus függvények helyett hiperbolikus függvények szerepelnek.

A ψ paraméter és a V sebesség kapcsolatát úgy kapjuk meg, hogy a K' rendszer origójának mozgását vizsgáljuk. Erre egyrészt $x^{1'} = 0$, másrészt

$$x^0 = x^{0'}\cosh\psi, \qquad x^1 = x^{0'}\sinh\psi. \tag{1.15}$$

A két egyenlet megfelelő oldalait elosztva egymással megkapjuk a keresett összefüggést:

$$\tanh\psi \;=\; \frac{x^1}{x^0} = \frac{x^1}{ct} = \frac{V}{c}, \tag{1.16}$$

azaz

$$\psi \;=\; \mathrm{ar}\ \tanh\frac{V}{c} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+(V/c)}{1-(V/c)}. \tag{1.17}$$

Végül a hiperbolikusfüggvényekre vonatkozó azonosságokat felhasználva:

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{x^{1'} + (V/c)x^{0'}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \\ x^0 &= \frac{x^{0'} + (V/c)x^{1'}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Ugyanezt az $x^1 = x$ és $x^0 = ct$ jelölésben írva:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \\ t &= \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ez tehát az x^1 irányú Lorentz-lökést leíró koordinátatranszformáció a téridőben.

Néhány fontos megjegyzés:

1. A Lorentz-transzformáció mindig két elemi esemény koordináta-különbségeinek a transzformációját adja meg [3]. Ha ezt nem jelöljük külön és a koordináták transzformációját írjuk fel, akkor hallgatólagosan az egyik elemi eseménynek a K és K' rendszerek origójának egybeesését tekintjük. Ez például abból látszik, hogy az ívhossz négyzete, (1.8), amelynek állandóságát megköveteltük a kiszemelt esemény és az origók egybeesése mint esemény közti invariáns távolság. A mondottak következtében a Δx^μ koordinátadifferenciák és a dx^μ koordinátadifferenciálok transzformációja is ugyanolyan alakú mint az x^μ koordinátáké.

2. Miután a fénysebességnél nagyobb sebességű részecske nem létezhet, azért az inerciarendszerek V sebessége sem lehet nagyobb mint a fénysebesség. A képleteink azonban azt mutatják, hogy fénysebességgel mozgó inerciarendszer sem lehetséges.

3. Ha a K' rendszer a fenti példában a K-hoz képest ellentétes irányban mozog, akkor az (1.18) és az (1.19) képletekben meg kell fordítani V előjelét.

4. A Lorentz-lökések a $V \ll c$ határesetben a Galilei-transzformációkba mennek át.

1.9 Hosszúság és időtartam

1.9.1 Távolságkontrakció [3]

A Lorentz-transzformációk ismeretében megvizsgáljuk, hogy milyen hosszúnak látszik a V sebességgel mozgó rúd.

Legyen a rúd a K rendszerben nyugalomban, és az abban nyugvó megfigyelők által mért hossza, a nyugalmi hossz, legyen $\Delta x = \ell_0$. Mozogjon a K' rendszer a K-hoz képest V sebességgel az x tengely irányában. Mérjük a rúd hosszát K'-ben. Ez két egyidejű esemény K'-ben, $\Delta t' = 0$, amikor azok a megfigyelők, akik mellett a rúd egyik ill. másik vége éppen elhalad, bemondják az x_1' és x_2' koordinátájukat. A (1.19) transzformáció szerint ez a két esemény a rúd nyugalmi rendszerében nem egyidejű, $\Delta t = \frac{V}{c^2}\Delta x = \frac{V}{c^2}\ell_0$. A mozgó rúd hossza tehát a K' rendszerben

$$\ell = x_2' - x_1' = \Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \ell_0\sqrt{1-(V/c)^2} < \ell_0. \tag{1.20}$$

Ezt a jelenséget, hogy a mozgó rúd a nyugalmi hosszánál rövidebbnek látszik, távolságkontrakciónak nevezik. A dolog fentihez képest fordított helyzetben is igaz, ha K-ból nézzük a K'-ben nyugvó rudakat, akkor azok is rövidebbnek látszanak a nyugalmi hosszuknál.

1.9.2 Térfogat

A távolságkontrakció következtében egy mozgó test $\mathcal{V}$ térfogata kisebbnek látszik a test $\mathcal{V}_0$ nyugalmi térfogatánál: $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0\sqrt{1-(V/c)^2}$.

1.9.3 Sajátidő

A sajátidőre vonatkozó eredményünket a Lorentz-transzformációk képletéből is kiolvashatjuk. Teljen el a K-ban nyugvó órán $\Delta t = \Delta\tau$ sajátidő. A mutató kezdeti és végső állása a K-ban két egyhelyű esemény, $\Delta x = 0$. Ennek a két eseménynek a K' rendszerben

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (V/c^2)\Delta x}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \tag{1.21}$$

az időkülönbsége.

1.9.4 Egyhelyűség, egyidejűség

A Lorentz-transzformációk segítségével beláthatjuk, hogy

1. két időszerűen elválasztott esemény esetén mindig található olyan inerciarendszer, amelyben a két esemény egyhelyű. (A $\Delta x = 0$ mindig kielégíthető, ha a K'-ről olyan K rendszerre térünk át, amelynek $-V_x$ sebessége $-V = -\Delta x'/\Delta t'$, hiszen ez a sebesség az események időszerű elválasztottsága miatt kisebb mint c.)
2. két térszerűen elválasztott esemény esetén mindig található olyan inerciarendszer, amelyben a két esemény egyidejű.

A két esemény időszerű (térszerű) elválasztottsága tehát nemcsak szükséges, hanem elégséges feltétele is annak, hogy létezzen olyan inerciarendszer, amelyben a két esemény egyhelyű (egyidejű).

Noha a speciális relativitáselmélet lényege az, hogy a természet törvényei minden inerciarendszerben azonosak, ,,melléktermékként" kiderül belőle, hogy **az időtartamok és a távolságok, ill. az egyhelyűség és az egyidejűség fogalmai vonatkoztatási rendszertől függőek, relatívak**. Ez annyira jelentős változás a térnek és az időnek a Newton-i mechanikában kialakult szemléletéhez képest, hogy az elmélet létrejöttekor ezt hangsúlyozták, amikor azt ,,relativitáselmélet"-nek nevezték el. Ez nem változtat azon, hogy **a relativitáselmélet a természet törvényeinek egyetemességét, általános érvényét foglamazza meg alapelvként**. Sajnálatos módon a köztudatban ez nem eléggé vált ismertté.

1.10 A sebességek összeadása. A Fizeau-kísérlet [1, 4, 3]

Mozogjon egy részecske a K' inerciarendszerben $\vec{v}'$ sebességgel, a K' inerciarendszer pedig a K inerciarendszer x tengelye irányában V sebességgel. Azt kérdezzük, hogy mi a részecske sebessége a K' rendszerben.

A Newton-i mechanikában tudjuk a választ: $v_x = V + v'_x$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$.

A speciális relativitáselméletben ez másképpen van. A két esemény, amelynek a koordinátáit vizsgáljuk, a részecske kezdeti és infinitezimálisan későbbi két helyzete. Ezek koordináta- és időkülönbségeinek hányadosa adja a sebességet az egyik és a másik inerciarendszerben is. A K' inerciarendszerben tehát $v'_x = dx'/dt'$, $v'_y = dy'/dt'$, $v'_z = dz'/dt'$, a K rendszerben pedig az (1.19) transzformáció differenciális alakját felhasználva:

$$
\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V\,dt'}{dt' + (V/c^2)dx'} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \\
v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt' + (V/c^2)dx'}\sqrt{1 - (V^2/c^2)} = \frac{v'_y\sqrt{1-(V^2/c^2)}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \\
v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt' + (V/c^2)dx'}\sqrt{1 - (V^2/c^2)} = \frac{v'_z\sqrt{1-(V^2/c^2)}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Fizeau kísérlete igazolja [3], hogy ezt a sebességösszeadási szabályt kell használni nagy sebességek esetén. A kísérlet lényege, hogy egy interferométer karjaiban víz áramlik, és az egyik karban a fény az áramlási sebességgel egyirányban halad, a másik karban ellentétes irányban. Ha az áramlást megszüntetjük, akkor az interferenciacsíkok eltolódnak. A csíkeltolódás azzal kapcsolatos, hogy a fény közegben a közeghez képest terjed c/n sebességgel (n a törésmutató), s ezért az egyik karban a laboratóriumhoz képest $c_+ = (c/n) + v$, a másikban $c_- = (c/n) - v$ sebességgel kellene terjednie a Newton-i mechanika szerint. Így nyilván különböző idők alatt futja be a fény a két kart, ha az áramlási sebesség nem nulla. A megfigyelt csíkeltolódást azonban nem lehetett így helyesen értelmezni. Ugyanakkor a tapasztalat összhangban van a sebességek relativisztikus összeadási szabályával, amely szerint a fény sebessége a laboratóriumi rendszerben

$$
\begin{aligned}
c_\pm &= \frac{(c/n) \pm v}{1 \pm (cv)/(nc^2)} \approx \left(\frac{c}{n} \pm v\right)\left(1 \mp \frac{v}{nc}\right) \\
&\approx \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \mathcal{O}(1/c).
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

1.11 Tenzorok [1, 4]

1.11.1 Négyes-helyzetvektor

Az elemi események sokaságának inerciarendszertől független geometriai struktúrája a téridő. Ha valamely K inerciarendszerben Descartes-féle térkoordinátarendszert jelölünk ki és a K-ban nyugvó órákat szinkronizáljuk, akkor minden elemi eseményhez, azaz a téridő minden pontjához 4 koordinátát rendelhetünk hozzá, amelyek a Lorentz-transzformáció szerint transzformálódnak. Ilymódon a téridő pontjaihoz

$$x^{\mu} \;=\; (x^0 = ct, x^i) = (ct, \vec{r}) \tag{1.24}$$

négyesvektorokat rendelhetünk hozzá. A három térkoordináta természetesen a háromdimenziós térben az esemény helyzetvektora. (A továbbiakban a görög indexek a 0, 1, 2, 3 értékeket futják be, a latin indexek pedig a hármasvektorok 1, 2, 3 értékeket befutó indexei.) A téridő ill. a kapott koordinátarendszer $4 = 3 + 1$ dimenziós, 3 térbeli és 1 idődimenziója van. Az x^{μ} helyzetvektort **kontravariáns négyes-helyzetvektor**nak nevezzük.

Az x^{μ} négyes-helyzetvektor hossza az $s^2 = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2$ ívhossznégyzet, ami a 4-dimenziós koordinátarendszer origójának és az x^{μ} négyes-helyzetvektor hegye által jelölt eseménynek az invariáns távolsága. A helyzetvektor hosszát egyszerű alakban írhatjuk, ha bevezetjük a **kovariáns négyes-helyzetvektor**t:

$$x_{\mu} \;=\; \equiv (ct, -x^i) = (ct, -\vec{r}), \tag{1.25}$$

ezzel ugyanis

$$s^2 = \sum_{\mu=0}^{3} x^{\mu} x_{\mu}. \tag{1.26}$$

A továbbiakban használni fogjuk azt a konvenciót, hogy az egyező kontra- és kovariáns indexekre a képletekben összegezni kell. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$s^2 = x^{\mu} x_{\mu}, \qquad ds^2 = dx^{\mu} dx_{\mu}. \tag{1.27}$$

1.11.2 Négyesvektorok

Minden olyan A^{μ} mennyiséget, amelynek komponensei Lorentz-transzformációkor ugyanúgy transzformálódnak mint az dx^{μ} koordinátanövekmények, **kontravariáns négyesvektor**nak nevezünk. A négyesvektor A^0 komponense skalár a 3-dimenziós forgatásokkal szemben, az A^i térbeli komponensek pedig egy $\vec{a}$ 3-dimenziós vektort alkotnak: $A^{\mu} = (A^0, \vec{a})$. A megfelelő **kovariáns négyesvektor**, $A_{\mu} = (A^0, -\vec{a})$

komponensei úgy Lorentz-transzformáció hatására úgy transzformálódnak mint a dx_μ kovariáns koordinátanövekmények. A négyesvektor hossza invariáns a Lorentz-transzformációkkal szemben: $A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - \vec{a}^{\,2}$. Pl. a (1.18) Lorentz-lökés hatására az A^μ négyesvektor transzformációja:

$$A^0 = \frac{A^{0'} + (V/c)A^{1'}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad A^1 = \frac{A^{1'} + (V/c)A^{0'}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad A^2 = A^{2'}, \quad A^3 = A^{3'}. \tag{1.28}$$

Az A^μ és a B^μ vektorok skalárszorzata $A^\mu B_\mu$ alakban van értelmezve és Lorentz-invariáns.

A négyesvektorok komponenseit kényelmes néha oszlopvektorba rendezni:

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

1.11.3 Lorentz-skalár

Minden olyan Φ mennyiséget, amely a Lorentz-transzformációkkal szemben invariáns marad, **Lorentz-skalár**nak nevezünk. Ilyen például a ds ívhosszelem és általában két tetszőleges négyesvektor skalárszorzata.

1.11.4 Négyes-tenzorok

Azokat a $T^{\mu\nu\rho\dots}{}_{\kappa\lambda\sigma\dots}$ mennyiségeket, amelyeknek komponensei Lorentz-transzformációk során úgy transzformálódnak egymás között mint a $dx^\mu dx^\nu dx^\rho \cdots dx_\kappa dx_\lambda dx_\sigma \cdots$ szorzat, n-szer kontravariáns és m-szer kovariáns $n+m$-edrendű négyestenzornak nevezzük (n a kontravariáns, m a kovariáns indexek száma).

Pl. a kétszer kontravariáns másodrendű $T^{\mu\nu}$ tenzor komponenseinek transzformációját a következő séma szerint találhatjuk meg:

$$dx^0 dx^0 = \frac{dx^{0'}dx^{0'} + (V/c)dx^{1'}dx^{0'} + (V/c)dx^{0'}dx^{1'} + (V^2/c^2)dx^{1'}dx^{1'}}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}\sqrt{1-(V^2/c^2)}} \tag{1.30}$$

mintájára

$$T^{00} = \frac{T^{00'} + (V/c)T^{10'} + (V/c)T^{01'} + (V^2/c^2)T^{11'}}{1-(V^2/c^2)}, \tag{1.31}$$

stb.

1.11.5 Kontrakció

Tenzor rendjét csökkenthetjük 2-vel, ha egy kontravariáns és egy kovariáns indexét összeejtjük és összegzünk rá. Pl. a T^μ_μ kontrakció a T^μ_ν másodrendű tenzorból skalárt állít elő.

1.11.6 Egységtenzor

Az **egységtenzor** tetszőleges négyesvektorral szorozva azt önmagába viszi át: $\delta^\mu_\rho A^\rho = A^\mu$.

Ennek az elemei a

$$(\delta^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

alakba rendezhetők. Az egységtenzor spúrja $\delta^\mu_\mu = 4$. Az egységtenzor inverze önmaga: $\delta^\mu_\rho \delta^\rho_\nu = \delta^\mu_\nu$. Az egységtenzor Lorentz-transzformáció során önmagába megy át.

1.11.7 A metrikus tenzor

Bevezetjük a $g^{\mu\nu}$ **metrikus tenzor**t azzal a definícióval, hogy tetszőleges kovariáns vektorból állítsa elő a megfelelő kontravariáns vektort: $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$. A megfelelő kovariáns tenzor $g_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu$ tulajdonságú. **A metrikus tenzor tehát a tenzorindexek fel és lehúzására szolgál.**

A metrikus tenzor komponenseit mátrixalakba rendezve:

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.33}$$

A kovariáns metrikus tenzor a kontravariáns metrikus tenzor inverze: $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$. A metrikus tenzor determinánsa $g = \det (g^{\mu\nu}) = -1$.

A metrikus tenzor segítségével a ívhosszelem négyzete $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$. **A metrikus tenzor tehát megadja, hogy hogyan kell kiszámítani az ívhosszelem négyzetét a koordináta-differenciálokból.** A metrikus tenzor $(+,-,-,-)$ szignatúrája fejezi ki, hogy a téridő pszeudo-euklideszi geometriájú.

1.11.8 Másodrendű antiszimmetrikus tenzor

Az $F_{\mu\nu}$ másodrendű antiszimmetrikus tenzor F_{0i} komponensei egy $\vec{E}$ 3-dimenziós térbeli polárvektor E^i komponenseinek tekinthetők, ugyanakkor az F_{ij} komponensekből egy 3-dimenziós $\vec{B}$ axiálvektor alkotható: $B_z = -F_{12}$, $B_y = F_{13}$, $B_x = -F_{23}$. Az antiszimmetrikus tenzor elemeit mátrixalakba rendezve:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

1.11.9 Skalárfüggvény négyesgradiense

Legyen $\varphi(x)$ skalárértékű függvény, amely a Minkowski-téren van értelmezve. Ekkor $\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}$ kovariáns vektorként, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$ pedig kontravariáns vektorként transzformálódik. (Ez rögtön következik abból, hogy $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}dx^\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}dx_\mu$ skalár.) Formálisan a $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ill. a $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ operátorokat kovariáns ill. kontravariáns vektoroknak kell tekintenünk.

1.11.10 Vektormező négyesdivergenciája

Legyen A^μ tetszőleges, a Minkowski-téren értelmezett vektormező. Ennek négyesdivergenciája, $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A^\mu$ Lorentz-skalár.

Megjegyezzük, hogy tenzormező divergenciáját képezve, 2-vel alacsonyabb rendű tenzor az eredmény.

1.11.11 Térfogati integrál. Gauss tétele

A Lorentz-lökések (1.18) képletéből látszik, hogy a négyestérfogatelem,

$$d\Omega \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = cdtdV \tag{1.35}$$

Lorentz-invariáns.

A négydimenziós Minkowski-térben is érvényes **Gauss tétele**: négyesvektor négyes-divergenciájának tetszőleges véges négyestérfogatra vett integrálja egyenlő ezen négyesvektor érintőirányú komponensének a négyestérfogatot határoló zárt felületre vett integráljával. Jelölje dS_μ a felületelem vektorát (a felületelem területével arányos nagyságú, a felület külső normálisának irányába mutató vektort), akkor

$$\int_\Omega \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} d\Omega \;=\; \oint A^\mu dS_\mu. \tag{1.36}$$

1.12 A speciális relativitás elve: Lorentz-kovariancia.

A természet törvényei a speciális relativitás elve értelmében függetlenek attól, hogy mely inerciarendszerben fogalmazzuk meg azokat. Ez matematikailag azt jelenti, hogy a természet törvényeit leíró egyenletek alakjának minden inerciarendszerben azonosnak kell lennie. Ezt az biztosítja, ha **a törvényeket kifejező egyenletek Lorentz-kovariánsak, azaz**

$$\textbf{négyestenzor} = \mathbf{0}$$

alakúak. Ekkor ugyanis Lorentz-transzformáció során az adott típusú négyestenzor ugyanolyan típusú négyestenzorba transzformálódik és ezáltal megőrződik az egyenletek matematikai alakja.

1.13 A hatás Lorentz-skalár

A fizikai rendszerek mozgásegyenleteit **a legkisebb hatás elve** alapján származtatjuk. A legkisebb hatás elve kimondja, hogy létezik az általános koordinátáknak és az általános sebességeknek olyan funkcionálja, amely az adott kezdő- és végpont közötti valóságos mozgásra nézve extremális, ez a **hatásfunkcionál**. A hatásfunkcionálban az általános koordinátakat az idő függvényének tekintjük. A speciális relativitáselméletben megköveteljük, hogy **a hatás Lorentz-invariáns**, azaz Lorentz-skalár legyen. Ez természetes, hiszen a hatás az a mennyiség, amely a rendszer mozgására vonatkozó törvényt (törvényeket) fejezi ki, mégpedig a legáltalánosabban és a legtömörebben. A speciális reltivitás elve értelmében tehát ennek a mennyiségnek függetlennek kell lennie az inerciarendszer megválasztásától.

2 Pontrészecske mozgása [1, 4]

2.1 Négyessebesség, négyesgyorsulás

A pontrészecske mozgása során a téridőben egy vonalat rajzol ki, ezt nevezzük a részecske **világvonal**ának. Ha valamely K inerciarendszerben a részecske koordinátáit az x^μ koordináták adják meg, akkor a világvonalat paraméterezhetjük a világvonal s ívhosszával, amelyet a részecske „történetének" adott elemi eseményétől mérünk: $x^\mu(s)$. Ezzel egyenértékű természetesen az ugyanettől az elemi eseménytől mért τ sajátidő, hiszen $s = c\tau$.

Értelmezzük a részecske négyessebességét a világvonal s paraméterű pontjában az

$$u^\mu(s) \quad = \quad \frac{dx^\mu(s)}{ds} \tag{2.1}$$

definícióval, a négyesgyorsulását pedig a

$$w^\mu(s) \quad = \quad \frac{d^2x^\mu(s)}{ds} \tag{2.2}$$

definícióval. A definícióból következik, hogy u^μ a világvonal érintőegységvektora, $u^\mu u_\mu = 1$, hiszen $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$. Ennek viszont az a további következménye, hogy a négyesgyorsulás merőleges a négyessebességre:

$$w^\mu u_\mu = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}\,\frac{dx_\mu}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(u^\mu u_\mu) = 0. \tag{2.3}$$

Egyúttal azt is vegyük észre, hogy a részecske világvonalának érintője, a négyessebesség időszerű vektor és $u^0 > 0$, azaz a világvonal adott pontjának érintője mindig az ehhez a ponthoz tartozó, jövőbeli fénykúpon belül helyezkedik el. Ez a tény fejezi ki, hogy a részecske sebessége mindig kisebb mint a fénysebesség.

Nézzük meg, hogy mi az így bevezetett négyessebesség kapcsolata a részecske $\vec{v}$ sebességével. (Utóbbi a 3-dimenziós térben értelmezett vektor.) Ehhez áttérünk a világvonalnak a K inerciarendszer t rendszeridejével történő paraméterezésére. Ekkor $x^0(t) = ct$,

$$\begin{aligned} u^\mu \quad &= \quad \frac{dx^\mu(t)}{cdt\,\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = \left(\frac{cdt}{cdt\,\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}, \frac{dx^i(t)}{cdt\,\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\right) \\ &= \quad \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}, \frac{v^i(t)}{c\,\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2 Szabad részecske mozgásegyenlete

2.2.1 A hatás

A mozgásegyenletet a legkisebb hatás elve alapján kapjuk meg, amely kimondja, hogy létezik a pályagörbének olyan funkcionálja, a hatás, amely adott kezdő- és végpont között megvalósuló mozgás pályájára szélsőértéket vesz fel. Ha tehát a részecske világvonalát a valósághoz képest infinitezimálisan megváltoztatjuk, miközben a világvonal kezdő- és végpontját nem változtatjuk, akkor a hatásfunkcionál ennek megfelelő δS megváltozásának zérusnak kell lennie:

$$\delta S_{\text{rögzített végpontok}} = 0. \qquad (2.5)$$

Az első kérdés az, hogy mi a hatás, amely a szabad pontrészecske mozgását megadja. A hatástól megköveteljük, hogy Lorentz-invariáns, vagyis hogy Lorentz-skalár legyen. Az egyetlen Lorentz-skalár, ami a pontrészecske mozgását jellemzi, a ds elemi ívhossz, amit a részecske két infinitezimálisan közeli helyzete határoz meg, vagyis ami a részecske világvonala infinitezimális darabjának az ívhossza. A legegyszerűbb kifejezés, ami ebből képezhető, a lineáris. A hatást ezért

$$S = -\alpha \int_a^b ds \qquad (2.6)$$

alakban vesszük fel. Itt a és b a részecske világvonalának két tetszőleges pontja, az $\alpha > 0$ állandót pedig később fogjuk rögzíteni. A negatív előjelet azért választjuk, hogy a hatásnak minimuma (és ne maximuma) legyen a valóságos mozgás pályáján. (Megjegyezzük, hogy az invariáns ívhosszal teljesen egyenértékű paraméter a részecske τ sajátideje, amely az ívhosszal $ds = cd\tau$ összefüggésben áll.)

2.2.2 A mozgásegyenlet

Származtassuk most le a hatás fenti kifejezéséből a szabad részecske mozgásegyenleteit. Ehhez válasszunk egy tetszőleges K inerciarendszert. Legyen ebben a részecske világvonalának paraméteres alakja $x^\mu(s)$. A hatás kifejezése a K inerciarendszerben átírható az alábbi alakba:

$$S = -\alpha \int_{s_a}^{s_b} ds \sqrt{\frac{dx^\mu(s)}{ds}\frac{dx_\mu(s)}{ds}}. \qquad (2.7)$$

Képezzük ennek a δS megváltozását a világvonal **tetszőleges, elképzelt infinitezimális megváltozása, azaz variációja**,

$$x^\mu(s) \rightarrow x^\mu(s) + \delta x^\mu(s) \qquad (2.8)$$

esetén:

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\alpha\int_{s_a}^{s_b} ds \frac{\frac{dx^\mu(s)}{ds}\frac{d\delta x_\mu(s)}{ds}}{\sqrt{u^\mu u_\mu}} \\
&= -\alpha\int_{s_a}^{s_b} ds\left[\frac{d}{ds}\left(u^\mu\delta x_\mu\right) - \delta x_\mu\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\right] \\
&= -\alpha\left[u^\mu\delta x_\mu|_a^b - \int_{s_a}^{s_b} ds\delta x_\mu\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\right]. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Ha feltesszük, hogy a pálya kis változtatását úgy végezzük, hogy a kezdő- és a végpont ne változzon, és megköveteljük, hogy a hatás se változzon, ahogy azt a legkisebb hatás elve értelmében tenni kell, akkor azt kapjuk, hogy a hatás megváltozására (variációjára) a

$$\delta S_{\text{rögzített végpontok}} = \alpha\int_{s_a}^{s_b} ds\delta x_\mu\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = 0 \qquad (2.10)$$

egyenletnek kell tetszőleges δx^μ variáció esetén fennállni. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha az integrandusban a tetszőleges δx^μ variációt megszorzó kifejezés azonosan eltűnik, azaz

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = 0. \qquad (2.11)$$

Ez az egyenlet a szabadon mozgó, azaz semmilyen erő hatása alatt nem álló pontrészecske mozgásegyenlete. Szabadon mozgó részecske négyesgyorsulása zérus.

2.2.3 A mozgásegyenlet megoldása

Szabadon mozgó részecske négyesgyorsulása zérus. A szabadon mozgó részecske négyessebessége tehát a világvonal mentén állandó. A világvonal tehát egyenes. A négyessebesség állandósága azt jelenti, hogy a részecske $\vec{v}$ 3-dimenziós térben értelmezett sebessége tetszőleges inerciarendszerben állandó. A szabadon mozgó részecske tehát tetszőleges inerciarendszerben egyenesvonalú egyenletes mozgást végez.

2.3 A Poincaré-szimmetria és a megmaradó mennyiségek

2.3.1 Klasszikus mechanika. Megmaradó mennyiségek

Már a klasszikus mechanikában megtanultuk, hogy zárt fizikai rendszerben a jelenségek lefolyása nem függ attól, hogy az időmérést mikor kezdjük. A zárt fizikai rendszerek invariánsak az időbeli eltolással szemben. Ennek az a következménye, hogy a rendszer energiája megmarad.

Legyenek az N szabadsági fokú rendszer állapotát megadó független általános koordináták $q_a(t)$ és az általános sebességek $\dot{q}_a(t)$ $(a = 1, 2, \ldots, N)$. Írja le a klasszikus mechanikai rendszert az $L(q_a(t), \dot{q}_a(t))$ Lagrange-függvény, ill. az

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_a(t), \dot{q}_a(t)) \tag{2.12}$$

hatás. A hatás az időmérés kezdetének $t \to t' = t + \delta a$ infinitezimális eltolása esetén

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1+\delta a}^{t_2+\delta a} dt' L(q_a(t' - \delta a), \dot{q}_a(t' - \delta a)) \\ &= \delta a L|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt' L(q_a(t' - \delta a), \dot{q}_a(t' - \delta a)) \end{aligned} \tag{2.13}$$

lesz. A hatás megváltozása tehát:

$$\begin{aligned} \delta S &= S' - S = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta a \left[\frac{\partial L}{\partial t} - \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_a(t)} \dot{q}_a(t) - \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a(t)} \ddot{q}_a(t) \right]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

A valóságos mozgás pályáján

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a}. \tag{2.15}$$

Helyettesítsük ezt a hatás megváltozásában a második tagba, majd integráljunk parciálisan. Ekkor a valódi mozgás pályáján vett hatásnak az időbeli eltolás következtében bekövetkezett megváltozása:

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{valódi mozgás}} &= \left[L - \sum_{a=1}^{N} \dot{q}_a(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right]_{t_1}^{t_2} \delta a \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{a=1}^{N} \left[-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a(t) \right]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Itt a második sorban álló integrál azonosan zérus. A rendszer az időbeli eltolással szemben akkor és csak akkor invariáns, ha a hatás fenti megváltozása tetszőleges δa infinitezimális eltolás esetén zérus, vagyis ha a valódi mozgás során teljesül, hogy

$$\left[\sum_{a=1}^{N} \dot{q}_a(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - L \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{2.17}$$

Ez azt jelenti, hogy a $H = \sum_{a=1}^{N} \dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - L$ mennyiség értéke a valódi mozgás során állandó. Ez a megmaradó mennyiség pedig éppen a rendszer energiája (a Hamilton-függvény).

Nagyon hasonlóan lehet azt is belátni, hogy a klasszikus mechanikában az impulzus és impulzusmomentum megmaradása annak a következménye, hogy a rendszernek a térbeli eltolás, ill. elforgatás rendre a szimmetriája.

A klasszikus mechanikában tehát a tér és az idő szimmetriáinak megmaradási törvények a következményei. Az energia, az impulzus és az impulzusmomentum megmaradása annak a szimmetriának a következménye, hogy a rendszer invariáns rendre az időbeli eltolással, a térbeli eltolással és a térbeli forgatással szemben. Ennek alapján az energia, az impulzus és az impulzusmomentum fogalmát az alábbi módon általánosítjuk a speciális relativitáselméletben: azt a mennyiséget nevezzük energiának, impulzusnak ill. impulzusmomentumnak, amelynek megmaradása annak a következménye, hogy a rendszernek az időbeli eltolás, a térbeli eltolás és a térbeli forgatás rendre a szimmetriája. Azt a transzformációt nevezzük szimmetria-transzformációnak (röviden szimmetriának), amellyel szemben a hatás invariáns.

2.3.2 Négyesimpulzus

Határozzuk meg a pontrészecske energiáját és impulzusát. Legyen $x^\mu(s)$ a részecske világvonala a tetszőleges K inerciarendszerben. Nézzük meg, hogyan változik meg a hatásnak a valóságos mozgás pályáján felvett értéke, ha a koordinátarendszert a téridőben infinitezimálisan eltoljuk: $x^\mu \to x^\mu + \delta a^\mu$. A hatás megváltozása a (2.9) képlet alapján:

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{valódi pályán}} &= -\alpha \int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{d}{ds}(u^\mu \delta a_\mu) - \delta a_\mu \frac{d^2 x^\mu(s)}{ds^2} \right] \\ &= -\delta a_\mu \left. (\alpha u^\mu) \right|_{s_a}^{s_b} . \end{aligned} \tag{2.18}$$

A téridőbeli eltolás szimmetriája a pontrészecskének, ezért a hatás fenti megváltozása tetszőleges δa^μ eltolás esetén zérus:

$$\delta S_{\text{valódi pályán}} = 0. \tag{2.19}$$

Ekkor azt kapjuk, hogy a $p^\mu = \alpha u^\mu$ négyesvektor mozgásállandó. Miután ennek megmaradása a téridőbeli eltolási szimmetria következménye, azért a p^0 komponenst a pontrészecske energiájával, a p^i komponenst pedig a pontrészecske impulzusával fogjuk (állandó együtthatóktól eltekintve) definíció szerint azonosítani. A p^μ négyesvektort **négyesimpulzus**nak nevezzük. **Szabad mozgást végző pontrészecske négyesimpulzusa állandó:** $p^\mu =$áll.

A négyesimpulzus térszerű komponensei:

$$p^i \;=\; \alpha u^i = \frac{\alpha v^i}{c\sqrt{1-(v^2/c^2)}}. \tag{2.20}$$

A klasszikus mechanika $v \ll c$ határesetében p^i-nek át kell mennie az impulzus klasszikus definíciójába,

$$p^i \;\rightarrow\; \alpha v^i/c \equiv m_0 v^i, \tag{2.21}$$

ahol m_0 a részecske **nyugalmi tömege** (a saját nyugalmi rendszerében mért tömege). Innen az α állandó értékét rögzíthetjük: $\alpha = m_0 c$. A részecske **impulzusa** tehát

$$p^i \;=\; \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \equiv m v^i, \tag{2.22}$$

ahol

$$m \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \tag{2.23}$$

a részecske ún. **mozgási tömege**.

A négyesimpulzus időszerű komponense:

$$p^0 \;=\; \frac{m_0 c}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}. \tag{2.24}$$

Ennek értéke a klasszikus mechanika határesetében ($v \ll c$):

$$p^0 \;\rightarrow\; \frac{1}{c}\left(m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2}\right). \tag{2.25}$$

Ezt úgy értelmezzük, hogy a részecskének az $\frac{1}{2} m_0 v^2$ kinetikus energiája mellett a nyugalmi tömegéből adódóan még $m_0 c^2$ nyugalmi energiája is van. A határesetben felvett alak mutatja, hogy a részecske E energiája és a négyesimpulzus p^0 komponense arányos egymással: $p^0 = E/c$.

Szabad részecske négyesimpulzusának megmaradása azt jelenti tehát, hogy a részecske energiája és impulzusa megmarad.

Relativisztikus esetben a részecske energiája

$$E \;=\; c p^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = m c^2. \tag{2.26}$$

Ez Einstein híres képlete, amely az energia és a (mozgási) tömeg azonosságát fejezi ki.

További hasznos összefüggést kapunk, ha a négyesimpulzus nagyságát képezzük:

$$p^\mu p_\mu = \alpha^2 u^\mu u_\mu = \alpha^2 = m_0^2 c^2. \tag{2.27}$$

Egyrészt látjuk, hogy a négyesimpulzus hossza a nyugalmi tömeggel arányos. Másrészt az alábbi **Einstein-féle összefüggést kapjuk a részecske energiája és impulzusa között**:

$$E^2 \;=\; m_0^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2. \tag{2.28}$$

2.4 Pontrészecske impulzusmomentuma

A szabad mozgást végző pontrészecske hatásfunkcionálja invariáns a téridőbeli elforgatásokkal szemben (hiszen Lorentz-skalár). Ennek következtében találni fogunk egy megmaradó mennyiséget, amit definíció szerint a részecske négyes-impulzusmomentumának nevezünk.

Legyen a téridőbeli koordinátarendszer infinitezimális elforgatását leíró (lineáris) transzformáció $x^\mu \to x^\mu + x_\nu \delta\omega^{\mu\nu}$. Ez eleget kell hogy tegyen annak a követelménynek, hogy a tetszőleges x^μ négyesvektor hosszát változatlanul hagyja (a Lorentz-transzformációkat így definiáltuk):

$$(x^\mu + x_\nu \delta\omega^{\mu\nu})(x_\mu + x^\rho \delta\omega_{\mu\rho}) = x^\mu x_\mu. \tag{2.29}$$

Innen a transzformáció infinitezimális paramétereire az alábbi megszorítás adódik: $\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu}$. Azaz a transzformációnak csak 6 darab független infinitezimális paramétere van: $\delta\omega^{0i}$ (3 független Lorentz-lökés) és $\delta\omega^{12}$, $\delta\omega^{13}$, $\delta\omega^{23}$ (3 független, térbeli forgatás).

Képezzük a hatás megváltozását infinitezimális Lorentz-transzformációk során (ld. (2.9)):

$$\begin{aligned}
\delta S_{\text{valódi pályán}} &= -m_0 c \int_{s_a}^{s_b} ds \frac{d}{ds}(u^\mu \delta\omega_{\mu\nu} x^\nu) \\
&= -\, p^\mu x^\nu \delta\omega_{\mu\nu}|_{s_a}^{s_b} \\
&= -\frac{1}{2}\left(p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu\right)\delta\omega_{\mu\nu}\Big|_{s_a}^{s_b} = 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Azt kapjuk tehát, hogy a hatásnak az infinitezimális Lorentz-transzformációkkal szemben mutatott invarianciájából következik, hogy az antiszimmetrikus

$$J^{\mu\nu} \;=\; x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu = \text{ áll.} \tag{2.31}$$

négyestenzor megmarad. Ezt nevezzük **az impulzusmomentum négyestenzorának**.

Vizsgáljuk meg az impulzusmomentum-tenzor komponenseinek jelentését, és annak a jelentését, hogy azok mozgásállandók.

Az antiszimmetrikus másodrendű tenzornak 6 független komponense van. Közülük 3 komponens a háromdimenziós térben értelmezett $\vec{j}$ impulzusmomentum 3 komponense:

$$j^1 = J^{23} = x^2p^3 - x^3p^2,\ j^2 = -J^{13} = x^3p^1 - x^1p^3,\ j^3 = J^{12} = x^1p^2 - x^2p^1, \tag{2.32}$$

azaz $\vec{j} = \vec{r} \times \vec{p}$. Az impulzusmomentum-tenzor megfelelő J^{ij} komponenseinek megmaradása tehát azt jelenti, hogy a szabad részecske impulzusmomentuma megmarad.

Az impulzusmomentum-tenzor J^{0i} komponensei háromdimenziós polárvektort definiálnak:

$$(J^{0i}) \;=\; c\left(tp^i - (E/c^2)x^i\right). \tag{2.33}$$

Ennek állandósága a mozgás során,

$$\vec{r} \;=\; \text{áll.} + \frac{c^2}{E}\vec{p}t = \text{áll.} + \vec{v}t \tag{2.34}$$

azt jelenti, hogy a mozgás $\vec{r}(t)$ pályája tetszőleges inerciarendszerben egyenes, amelyen a részecske egyenletes mozgást végez, miután az E energia és a $\vec{p}$ impulzus megmaradása következtében a $\vec{v} = c^2\vec{p}/E = \vec{p}/m$ sebessége is állandó. Az impulzusmomentum-tenzor J^{0i} komponenseinek megmaradása tehát azt jelenti, hogy szabad részecske egyenesvonalú egyenletes mozgása megmarad.

Szabad részecske impulzusmomentum-tenzorának megmaradása azt jelenti tehát, hogy a részecske impulzusmomentuma és egyenesvonalú egyenletes mozgása megmarad.

3 Ponttöltés elektromágneses térben [1]

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk egy vektormezővel kölcsönható részecske mozgását. Meg fogjuk mutatni, hogy tudunk olyan kölcsönhatási tagot hozzáadni a szabad részecskére vonatkozó hatáshoz, hogy az pontosan a ponttöltés mozgását írja le az elektromágneses térben. Ezt onnan fogjuk felismerni, hogy a mozgásegyenletben megjelenik a Lorentz-erő, amelyet a tapasztalatból ismerünk. Egyúttal meg fogjuk mutatni, hogy Newton második törvénye a külső térben mozgó ponttöltésre érvényben marad.

3.1 A kölcsönhatás és a fizikai mező

Már a klasszikus mechanikában megfogalmazódott az a felismerés, hogy **két részecske kölcsönhatása fizikai tér, más néven mező közvetítésével történik.** Az egyik részecske valamilyen tulajdonságánál fogva, amelyet nevezhetünk általánosan **töltés**nek, fizikai teret kelt maga körül, amely a beléhelyezett másik részecskére erővel hat, ha annak ugyanilyen fajta töltése van. **A fizikai teret térmennyiség jellemzi, amely a három-dimenziós tér minden pontjában és minden időpillanatban jól meghatározott értékű. A tér a benne tartózkodó részecskére olyan erőt fejt ki, amely arányos a részecske töltésével és csak attól függ, hogy mekkora a térmennyiség értéke a részecske tartózkodási helyén az ott-tartózkodása pillanatában.**

A relativitáselmélet szerint **a kölcsönhatások véges sebességgel terjednek.** Ha a mezőt keltő valamelyik töltés kicsit elmozdul, akkor véges idő telik el, amíg ennek következtében az elmozdult töltéstől véges távolságra a fizikai mezőt jellemző térmennyiség értéke megváltozik. Véges idő telik el tehát addig, amíg egy részecske elmozdulását a másik, tőle véges távolságra levő részecske „észleli". Elektromágneses mező esetén a kölcsönhatás terjedési sebessége a fénysebesség. **A fizikai mező tehát maga is fizikai objektum, amelyben az azt keltő részecskék elmozdulása a térmennyiségben olyan lokális változást hoz létre, amely aztán a három-dimenziós térben véges sebességgel tovaterjed.**

Ezen felfogás szerint **a kölcsönhatás** mindig **lokális**: a részecske (ponttöltés) hat a mezőre a saját tartózkodási helyén, a mező bármely infinitezimális térfogateleme hat a szomszédos térfogatelemekre, és a mező hat a benne tartózkodó részecskére (ponttöltésre). Az erőhatás értéke adott helyen és pillanatban mindig csak attól függ, hogy mi a térmennyiség értéke az adott helyen és pillanatban.

A fizikai mezőket a fentiek szerint térmennyiség írja le, amely a téridő minden pontjában értelmezve van. Ahhoz, hogy a természettörvények

Lorentz-kovariáns matematikai alakot öltsenek, **a térmennyiségnek a Lorentz-transzformációk során vagy skalárként, vagy vektorként, vagy másodrendű tenzorként, stb. kell transzformálódnia.**

3.2 A hatás

Olyan hatást szerkesztünk, amely az elektromos ponttöltés mozgását írja le a külső elektromágneses térben. Feltesszük, hogy az elektromágneses teret vektormező jellemzi. **A kölcsönhatás konkrét alakjának megválasztásakor a Poincaré-szimmetria megőrzése és az egyszerűségre való törekvés vezet.**

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a fizikai mezőt négyesvektor írja le:

$$A^\mu(x) \;=\; \left(A^0(t,\vec{r}),\vec{A}(t,\vec{r})\right). \tag{3.1}$$

Nevezzük ezt a négyesvektort **vektorpotenciálnak**. A vektorpotenciál tehát a téridő minden pontjában értelmezve van. Ha adott inerciarendszerből nézzük a fizikai mezőt, akkor azt a $\phi(t,\vec{r}) \equiv A^0(t,\vec{r})$ skalárpotenciál és az $\vec{A}(t,\vec{r})$ hármas-vektorpotenciál adja meg, amelyek minden $\vec{r}$ helyen és minden t időpillanatban értelmezve vannak.

Próbáljuk meg kitalálni, hogy mi a hatásnak az a tagja, ami a ponttöltésnek a vektorpotenciállal való kölcsönhatását leírja. Mozogjon a ponttöltés az $x^\mu(s)$ világvonalon. Miután **a kölcsönhatás lokális,** a kölcsönhatási tagban a vektorpotenciálnak azon $x^\mu(s)$ pontban felvett $A^\mu(x(s))$ értéke kell szerepeljen, amely megadja a ponttöltés helyzetét a világvonalán. **A tapasztalat szerint érvényes a lináris szuperpozició elve**, azaz két különböző töltéstől származó elektromágneses tér által a próbatöltésre kifejtett erő olyan, mintha azokat az erőket adnánk vektorilag össze, amelyek akkor lépnének fel, ha csak az egyik ill. csak a másik töltés keltené a teret. Ahhoz, hogy ezt a hatás biztosítsa, az elektromágneses mező és a töltés kölcsönhatásának a vektorpotenciált lineárisan kell tartalmaznia. Ezután feltehetjük a kérdést, hogy milyen másik négyesvektorral kell megszorozzuk a vektorpotenciált? Utóbbinak nyilván a részecske jellemzői közül kell kikerülni. A részecskét jellemző négyesvektorok: $x^\mu(s)$, $u^\mu(s) = dx^\mu(s)/ds$, $w^\mu(s) = d^2x^\mu(s)/ds^2$, ... A négyes-helyzetvektor nem szerepelhet szorzóként, mert az elrontaná a hatásnak azt a szimmetriáját, hogy az invariáns legyen a téridőbeli eltolásokkal szemben. A legegyszerűbb eset tehát, amikor szorzóként a ponttöltés négyessebessége szerepel: $A^\mu(x(s))u_\mu(s)$. A vektorpotenciáltérben mozgó ponttöltésre tehát az alábbi hatásfunkcionált kapjuk:

$$S \;=\; -m_0c\int_{s_a}^{s_b} ds - \lambda e\int_{s_a}^{s_b} dsA^\mu(x(s))u_\mu(s). \tag{3.2}$$

Itt explicit módon szerepeltetjük az e töltést, ami megmutatja, hogy milyen erős a kölcsönhatás a mező és a ponttöltés között. Esetleges további állandók is szerepelhetnek, amelyeket a λ tényezővel jelöltünk. Ennek értékét később határozzuk meg úgy, hogy a hatásból levezetett mozgásegyenlet csakugyan az elektromos ponttöltés mozgásegyenlete legyen külső elektromágneses térben.

3.3 A hatás variációja

Láttuk a szabad pontrészecske mozgásának vizsgálata során, hogy a mozgásegyenletek és a megmaradó mennyiségek leszármaztatásához egyaránt szükségünk van arra, hogy ismerjük a hatásfunkcionál infinitezimális megváltozását a részecske pályájának tetszőleges, elképzelt, infinitezimális megváltoztatása (variációja) esetén. Ezt számoljuk most ki.

A hatás első tagjának, a szabad mozgáshoz tartozó hatásnak a variációját már ismerjük (ld. a (2.9) egyenletet). Ezért most határozzuk meg a hatás

$$S_{kh} = -\lambda e \int_{s_a}^{s_b} ds A^{\mu}(x(s)) \frac{dx_{\mu}(s)}{ds} \tag{3.3}$$

kölcsönhatási tagjának a megváltozását a téridő-koordináták elképzelt infinitezimális $\delta x^{\mu}(s)$ megváltozása esetén. Ehhez szükségünk lesz a vektorpotenciál infinitezimális megváltozására:

$$A^{\mu}(x+\delta x) = A^{\mu}(x) + \partial_{\nu} A^{\mu} \cdot \delta x^{\nu} + \mathcal{O}(\delta x^2). \tag{3.4}$$

A hatás kölcsönhatási tagjának infinitezimális megváltozása:

$$\delta S_{kh} = -\lambda e \int_{s_a}^{s_b} ds \left[\partial_{\nu} A^{\mu} \frac{dx_{\mu}}{ds} \delta x^{\nu} + A^{\mu} \frac{d}{ds} \delta x_{\mu} \right]. \tag{3.5}$$

Integráljunk a jobb oldalon a második tagban parciálisan és használjuk fel, hogy

$$\frac{d}{ds} A^{\mu}(x(s)) = \partial_{\nu} A^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{ds}, \tag{3.6}$$

ekkor

$$\begin{aligned} \delta S_{kh} &= -\lambda e \int_{s_a}^{s_b} ds \left[\partial_{\nu} A^{\mu} \frac{dx_{\mu}}{ds} \delta x^{\nu} - \partial_{\nu} A^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{ds} \delta x_{\mu} \right] \\ &\quad -\lambda e \left[A^{\mu}(x(s)) \delta x_{\mu} \right]_{s_a}^{s_b} \\ &= -\lambda e \int_{s_a}^{s_b} ds \partial_{\nu} A_{\mu} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds} \delta x^{\nu} - \frac{dx^{\nu}}{ds} \delta x^{\mu} \right) \\ &\quad -\lambda e \left[A_{\mu}(x(s)) \delta x^{\mu} \right]_{s_a}^{s_b}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

A jobb oldalon az első tag integrandusában a zárójeles kifejezés antiszimmetrikus a μ és a ν indexekben. Ezért az előtte álló kifejezés helyébe írhatjuk annak antiszimmetrikus részét,

$$\partial_\nu A_\mu \quad \to \quad \frac{1}{2}\left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right), \tag{3.8}$$

majd ezután az antiszimmetrikus

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^\mu}{ds}\delta x^\nu - \frac{dx^\nu}{ds}\delta x^\mu\right) \tag{3.9}$$

kifejezést lecserélhetjük a $\frac{dx^\mu}{ds}\delta x^\nu$ kifejezésre. Bevezetve az

$$F_{\mu\nu} \quad = \quad \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.10}$$

másodrendű antiszimmetrikus tenzort a vektormező jellemzésére, a hatás kölcsönhatási tagjának a variációja:

$$\delta S_{kh} \quad = \quad -\lambda e \int_{s_a}^{s_b} ds F_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu - \lambda e \left[A_\mu \delta x^\mu\right]_{s_a}^{s_b}. \tag{3.11}$$

Adjuk ehhez hozzá a szabad részecskéhez tartozó hatásnak a (2.9) alakú megváltozását. Ekkor megkapjuk az S hatás keresett variációját:

$$\begin{aligned} \delta S \quad = \quad & m_0 c \int_{s_a}^{s_b} ds \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}\delta x^\mu - m_0 c \left[u_\mu \delta x^\mu\right]_{s_a}^{s_b} \\ & -\lambda e \int_{s_a}^{s_b} ds F_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu - \lambda e \left[A_\mu \delta x^\mu\right]_{s_a}^{s_b}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Most már készen állunk arra, hogy megkeressük a ponttöltés mozgásegyenletét és a mozgás során megmaradó mennyiségeket.

3.4 A mozgásegyenlet

A legkisebb hatás elve értelmében a hatás δS variációja eltűnik a mozgás valóságos $x^\mu(s)$ világvonalán, ha a variációt rögzített kezdő- és végpontokkal képezzük. Legyen ezért $\delta x^\mu(s)$ olyan tetszőleges variáció, amelyre $\delta x^\mu(s_a) = \delta x^\mu(s_b) = 0$ teljesül. A $\delta S = 0$ feltételt ilyen variációkra megkövetelve a (3.12) egyenletben a szögletes zárójelekben szereplő tagok eltűnnek. Az el nem tűnő tagokat közös integrál alá írjuk:

$$0 \quad = \quad \int_{s_a}^{s_b} ds \left[m_0 c \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} - \lambda e F_{\mu\nu} u^\nu\right] \delta x^\mu \tag{3.13}$$

Ez akkor és csak akkor áll fenn tetszőleges $\delta x^\mu(s)$ variáció esetén, ha a szögletes zárójelben szereplő kifejezés azonosan eltűnik, azaz ha

$$m_0 c \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} \;=\; \lambda e F_{\mu\nu} u^\nu \tag{3.14}$$

teljesül. **Ez a ponttöltés mozgásegyenlete a vektormezőben.**

Ha nincs jelen külső tér, azaz $A^\mu(x) \equiv 0$, akkor természetesen $F_{\mu\nu} = 0$ és visszakapjuk a szabad részecske mozgásegyenletét. Az egyenlet bal oldalán a részecske $p_\mu = m_0 c u_\mu$ négyesimpulzusának az ívhossz szerinti deriváltja áll. Newton második törvényével összhangban kell maradjunk a klasszikus mechanikai határesetben, ha a részecske sebessége sokkal kisebb mint a fénysebesség, $v \ll c$. Ezért a mozgásegyenlet jobboldalát úgy kell értelmeznünk mint a részecskére ható négyeserő erőtörvényét. A kérdés tehát az, hogy mi ez az erőtörvény, ami az általunk konstruált hatásból következik. Alább belátjuk, hogy a λ állandó alkalmas megválasztása esetén a Lorentz-erő erőtörvényét kapjuk meg. Miután a részecskére ható négyeserő arányos az $F_{\mu\nu}$ tenzorral, nevezzük ezt **a térerősség tenzorának**.

Vizsgáljuk a ponttöltés mozgását tetszőlegesen választott K inerciarendszerben. Ebben az inerciarendszerben a négyespotenciálnak az $\vec{r}$ helyvektortól és a t rendszeridőtől függő $\phi(t,\vec{r}) = A^0(x)$ skalárpotenciál és az $A^i(t,\vec{r})$ hármas-vektorpotenciál adják a négy komponensét. Mint már erről szó volt, az $F_{\mu\nu}$ másodrendű antiszimmetrikus négyestenzor komponensei definiálnak egy $\vec{E}$ hármas-vektort és egy $\vec{B}$ hármas-axiálvektort: $E^i = F_{0i}$, $B^3 = -F_{12}$, $B^2 = F_{13}$ és $B^1 = -F_{23}$. Ezeket az összefüggéseket a térerősségtenzor (3.10) definíciója alapján részletesen is kiírhatjuk a tetszőlegesen választott K inerciarendszerben:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{ grad } \phi, \qquad \vec{B} = - \text{ rot } \vec{A}. \tag{3.15}$$

A térerősségtenzor komponenseit mátrixalakban a következőképpen rendezhetjük el (ld. (1.34)):

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Írjuk fel a K inerciarendszerben a mozgásegyenletet a négyesimpulzus térkomponenseire:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p^i &= \lambda e \left(E^i u_0 + F^{ij} u_j \right) c\sqrt{1 - (v^2/c^2)} \\ &= \lambda\, c\, e \left(E^i + \frac{1}{c} F^{ij} v_j \right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ha a $\lambda = 1/c$ választással élünk, akkor **a mozgásegyenlet** az alábbi alakot ölti:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{B}. \tag{3.18}$$

Az egyenlet jobb oldalán felismerjük az elektromágneses térben mozgó ponttöltésre ható Lorentz-erő erőtörvényét.

Végül olvassuk ki a ponttöltés kovariáns alakban felírt mozgásegyenletéből a négyesimpulzus $p^0 = E/c = (mc^2)/c$ időkomponensére vonatkozó egyenletet:

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{e}{c}F^{0\nu}u_\nu c\sqrt{1-(v^2/c^2)}, \tag{3.19}$$

azaz

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d(mc^2)}{dt} = e\vec{E}\vec{v}. \tag{3.20}$$

A bal oldalon a ponttöltés $E = mc^2$ „mechanikai” energiájának időegységre eső megváltozása áll, a jobb oldalon pedig az elektromágneses tér által a ponttöltésen időegység alatt végzett munka. Az egyenlet kifejezi, hogy **a ponttöltés mc^2 „mechanikai” energiája külső elektromos térben nem marad meg, időegységre eső megváltozása egyenlő a ponttöltésen a tér által időegység alatt végzett munkával.**

3.5 A megmaradó négyesimpulzus

Az előzőekből már kiderült, hogy **a ponttöltés „mechanikai” $p^\mu = m_0 c u^\mu$ négyesimpulzusa külső elektromágneses térben történő mozgás esetén nem marad meg.** Keressük meg a külső elektromágneses térben mozgó ponttöltés megmaradó P^μ négyesimpulzusát. Ez definíció szerint az a négyesvektor, amelynek megmaradása a hatásnak a téridőbeli koordinátarendszer eltolásaival szemben mutatott invarianciájából következik.

Tekintsük tehát a hatás (3.12) megváltozását a mozgás valóságos pályáján tetszőleges $\delta x^\mu(s) = \delta a^\mu =$áll. infinitezimális eltolás esetén:

$$\delta S_{\text{valódi mozgás}} = -\left(m_0 c u^\mu + \frac{e}{c}A^\mu\right)\Big|_{s_a}^{s_b}\delta a_\mu. \tag{3.21}$$

Az eltolási szimmetria következtében ez zérus tetszőleges δa^μ eltolás esetén. A zárójeles kifejezés tehát mozgásállandó, **a megmaradó négyesimpulzus**:

$$P^\mu = p^\mu + \frac{e}{c}A^\mu = \text{áll.} \tag{3.22}$$

Tetszőlegesen választott K inerciarendszerben a ponttöltés

$$H = cP^0 = cp^0 + e\phi = mc^2 + e\phi \tag{3.23}$$

megmaradó energiája (Hamilton-függvénye) és megmaradó

$$\vec{P} = \vec{p} + (e/c)\vec{A} \tag{3.24}$$

impulzusa között az alábbi összefüggés áll fenn a $p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$ egyenlőség következtében:

$$\left(\frac{H - e\phi}{c}\right)^2 - \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = m_0^2 c^2. \tag{3.25}$$

Ezt átrendezve megkapjuk **a ponttöltés megmaradó energiáját**:

$$H = \sqrt{m_0^2 c^4 + \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\phi. \tag{3.26}$$

A megmaradó energia tehát a megmaradó $\vec{P}$ impulzussal számolt mc^2 „mechanikai" energiának és a ponttöltés $e\phi$ potenciális energiájának az összege. A vektorpotenciált és a skalárpotenciált a fenti képletben adott t pillanatban azon az $\vec{r}(t)$ helyen kell venni, ahol a részecske éppen tartózkodik.

4 Az elektromágneses mező

4.1 Az elektromos térerősség és a mágneses indukció transzformációja

Az előző előadásokon megtanultuk, hogy a ponttöltésre elektromágneses térben ható négyeserő az $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ térerősség-tenzorral adható meg:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu, \tag{4.1}$$

ahol e a részecske elektromos töltése, u^ν pedig a négyessebessége.

Az $\vec{E}$ elektromos térerősség és a $\vec{B}$ mágneses indukció a térerősség-tenzor megfelelő komponenseiből alkotott, 3-dimenziós térben értelmezett polár- ill. axiálvektor:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Ismétlés! A 3-dimenziós térben az $\vec{r} \to -\vec{r}$ transzformációt **tértükrözés**nek nevezzük. Azokat a három-komponensű mennyiségeket, amelyek a három-dimenziós tér forgatásaikor és tértükrözéskor úgy transzformálódnak, mint az $\vec{r}$ helyzetvektor, **polárvektorok**nak nevezzük. Azokat a 3-komponensű mennyiségeket, amelyek tértükrözéskor változatlanok maradnak, és a koordinátarendszer forgatásaikor vektorokként transzformálódnak, **axiálvektorok**nak nevezzük. Két polárvektor vektori szorzata axiálvektor. A helyzetvektor, a sebesség, az impulzus, az erő polárvektorok, az impulzusmomentum pedig axiálvektor. Az $\vec{E}$ elektromos térerősség polárvektor, a $\vec{B}$ mágneses indukció pedig axiálvektor.

Lorentz-transzformáció során a térerősség-tenzor komponensei egymás lineáris kombinációiba transzformálódnak. Ezért ha ugyanazt az elektromágneses mezőt különböző inerciarendszerekből figyeljük meg, akkor az elektromos térerősséget és a mágneses indukciót inerciarendszerenként különbözőnek találjuk.

Tegyük fel pl., hogy a K' inerciarendszer a K inerciarendszerhez képest az egymással párhuzamos x és x' tengelyek irányában állandó V sebességgel mozog. Legyenek a megfelelő koordinátatengelyek párhuzamosak. A térerősségek transzformációs képleteit könnyen megkaphatjuk, ha

- felhasználjuk a megfelelő Lorentz-lökés képleteit:

$$dx = \frac{dx' + \frac{V}{c} dx^{0\prime}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad dx^0 = \frac{dx^{0\prime} + \frac{V}{c} dx'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz'; \tag{4.3}$$

- felhasználjuk, hogy az $F^{\mu\nu}$ tenzorkomponensek úgy transzformálódnak mint a $dx^\mu dx^\nu$ rendezett szorzatok.

Például írhatjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
-E_x = F^{01} \quad &\sim \quad dx^0 dx = \frac{\left(dx^{0\prime} + \frac{V}{c} dx'\right)\left(dx' + \frac{V}{c} dx^{0\prime}\right)}{1-(V/c)^2} \\
&\sim \quad \frac{F^{01\prime} + \frac{V}{c}\left(F^{11\prime} + F^{00\prime}\right) + \frac{V^2}{c^2} F^{10\prime}}{1-(V/c)^2} = -E'_x, \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

Ugyanezen séma szerint kapjuk a többi összefüggést is. Végül tehát a vizsgált x irányú Lorentz-lökés során az $\vec{E}$ térerősség és a $\vec{B}$ mágneses indukció transzformációja:

$$
\begin{aligned}
E_x &= E'_x, \qquad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} B'_z}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} B'_z}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \\
B_x &= B'_x, \qquad B_y = \frac{B'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

A transzformációs képletekből azt a tanulságot szűrhetjük le, hogy az elektromos térerősségnek és a mágneses indukciónak a $\vec{V}$ sebességgel párhuzamos komponensei a $\vec{V}$ irányú Lorentz-lökés során nem változnak meg, ugyanakkor a sebességre merőleges síkban az elektromos térerősség és a mágneses indukció komponensei egymással „keverednek". Ez explicit módon mutatja, hogy az elektromágneses mező olyan fizikai „test", amelynek az elektromos és a mágneses tulajdonsága függ attól, hogy a mezőt melyik inerciarendszerben állva figyeljük meg.

4.2 Invariánsok

A kölcsönhatások véges terjedési sebességének köszönhetően az elektromágneses mező dinamikai változásokra képes, valódi fizikai objektum. Kontinuum végtelen sok szabadsági foka van, az $\vec{A}^\mu$ vektorpotenciál értékei a tér pontjaiban, egy tetszőleges adott pillanatban.

Az elektromágneses mező dinamikáját, „mozgását" leíró egyenleteket a legkisebb hatás elve alapján fogjuk megkapni. Ehhez a hatás kifejezését kell megsejtenünk. A hatás legfontosabb tulajdonsága, hogy Lorentz-skalár. A hatás megszerkesztéséhez segítséget fog jelenti, ha előzőleg megkeressük azokat a Lorentz-invariáns kifejezéseket, amelyeket a térerősségtenzorból tudunk készíteni.

A térerősségtenzorból két invariáns kifejezés készíthető:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \text{skalár} , \\ \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda} &= \text{pszeudoskalár} . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Itt $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$ a teljesen antiszimmetrikus negyedrendű tenzor, komponenseinek értéke $+1$ (-1), ha $(\mu\nu\kappa\lambda)$ a (0123) indexsorozat páros (páratlan) permutációja, és nulla egyébként (vagyis amikor legalább két index értéke megegyezik). A pszeudoskalár olyan egy-komponensű mennyiség, amely Lorentz-transzformációkkal szemben invariáns, de a (3-dimenziós) tértükrözéskor előjelet vált. A skalár, ezzel szemben, nem vált tértükrözéskor előjelet.

Felhasználva a térerősség tenzorának $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ definícióját, és az $\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}A^0$, $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$ összefüggéseket, az invariánsokat tetszőleges K inerciarendszerben ki tudjuk fejezni, az ott uralkodó $\vec{E}$ elektromos térerősséggel és $\vec{B}$ mágneses indukcióval:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 2\left(\vec{B}^{\,2} - \vec{E}^{\,2}\right) = \text{skalár}, \\ \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda} &\sim \vec{E}\vec{B} = \text{pszeudoskalár} . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Az invariánsokból még a hatás megszerkesztése előtt sok érdekeset olvashatunk ki az elektromágneses mezőre vonatkozóan. Ha létezik olyan inerciarendszer, amelyben az elektromos térerősség és a mágneses indukció merőlegesek egymásra, akkor azok minden inerciarendszerben merőlegesek egymásra. Ha létezik olyan inerciarendszer, amelyben az elektromos térerősség és a mágneses indukció nagysága egyenlő, akkor azok minden inerciarendszerben egyenlő nagyságúak. (Az utóbbi állítás Gauss-egységekben igaz. SI mértékrendszerben a skalár-invariáns a $c^2B^2 - E^2$ kifejezéssel arányos és ezért, ha $E = cB$ teljesül valamely inerciarendszerben, akkor $E' = cB'$ minden inerciarendszerben.) Csak érdekességként említem itt meg, hogy az elektromágneses hullámban (így a fényben is) a térerősség és a mágneses indukció tetszőleges inerciarendszerben merőlegesek és egyenlő nagyságúak.

4.3 A szabad elektromágneses mező. A hatás

Miután az elektromágneses mező saját dinamikával rendelkező fizikai objektum, azért létezik olyan hatás, amelyből az elektromágneses mező mozgásegyenletei a legkisebb hatás elve alapján leszármaztathatók. Találjuk ki, hogy milyen alakú lehet ez a hatás.

A hatásnak Lorentz-skalárnak kell lennie. Azt sem engedjük meg, hogy a hatás előjelet váltson, ha a térkoordinátáknak megfelelő tengelyek irányítását ellentétesre változtatjuk, hiszen ez a koordinátarendszer önkényes megváltoztatása csupán, amitől a fizika nem függhet. Ezért csak a térerősség tenzorából alkotott skalár-invariáns jöhet szóba. A hatás kifejezésében tehát a téridő egyes pontjaiban vett $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ kifejezésnek kell állnia. Adott t pillanatban a fizikai mezőt úgy lehet megadni, hogy a tér minden $\vec{r}$ helyzetvektorú pontjában megadjuk az A^{μ} négyespotenciál értékét, azaz ezáltal az $F^{\mu\nu}$ mennyiség és a belőle képezett skalárinvariáns értékét. Ha feltesszük, hogy a 3-dimenziós tér egyes pontjaiban vett vektorpotenciálok független szabadsági fokok, akkor

1. a mező infinitezimális térfogatelemeinek járulékai a Lagrange-függvényhez arányosak a dV térfogatelemmel (a független szabadsági fokok számával),
2. és akkor az egyes térfogatelemektől származó $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}dV$ járulékokat a Lagrange-függvényben egyszerűen össze kell adni. Ez, infinitezimális térfogatelemekről lévén szó, térfogati integrálást jelent.

A szabad elektromágneses mező Lagrange-függvénye tehát:

$$L = -a \int dV F_{\mu\nu}(\vec{r},t) F^{\mu\nu}(\vec{r},t), \tag{4.8}$$

ahol a a állandót később választjuk meg. A hatást ebből az idő szerinti integrálással kapjuk rögzített kezdeti t_k és végső t_v időpillanatok között:

$$S = -a \int_{t_k}^{t_v} dt \int dV F_{\mu\nu}(\vec{r},t) F^{\mu\nu}(\vec{r},t). \tag{4.9}$$

Vegyük figyelembe, hogy a $dV cdt = d\Omega$ négyes térfogatelem Lorentz-skalár. Ekkor a hatást

$$S = -\frac{a}{c} \int d\Omega F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \tag{4.10}$$

alakba írhatjuk. A térerősség mértékegységének alkalmas megválasztásával: $a = \frac{1}{4}$. Végül tehát **a szabad elektromágneses mezőt leíró hatás:**

$$S = -\frac{1}{4c} \int d\Omega F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \int dt \int dV \left(\vec{E}^{\,2} - \vec{B}^{\,2} \right). \tag{4.11}$$

A negatív előjelet a hatás kovariáns alakjában az indokolja, hogy a hatásnak legyen minimuma. Az $\vec{E}^2$ kifejezés tartalmaz ugyanis a legmagasabb hatványon időderiváltat, $(\partial\vec{A}/\partial t)^2$. Tetszőlegesen gyorsan változó térben ennek értéke tetszőlegesen naggyá válhat. Ezért a negatív előjel elhagyása esetén a hatásnak nem lenne minimuma.

4.4 Töltésrendszer és elektromágneses tere

4.4.1 Diszkrét ponttöltések rendszere

Vegyük most azt az esetet, amikor a vizsgált rendszerbe beleértjük az elektromágneses teret keltő töltéseket is. Ennek a rendszernek a hatáskifejezése három tagból áll:

1. a töltésekre, mint szabad pontrészecskékre vonatkozó S_r tagból,
2. a ponttöltések és az elektromágneses tér közötti S_{kh} kölcsönhatásból,
3. a szabad elektromágneses teret leíró S_{em} tagból.

Tehát **a hatás:**

$$\begin{aligned} S &= S_r + S_{kh} + S_{em} \\ &= -\sum_a \left(m_0 c \int ds \right)_a - \sum_a \left(\frac{e}{c} \int ds u^\mu(x(s)) A_\mu(x(s)) \right)_a - \frac{1}{4c} \int d\Omega F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x), \end{aligned} \tag{4.12}$$

ahol $\sum_a$ a ponttöltésekre végzett összegzés, a $(\ldots)_a$ jelölés azt jelenti, hogy a zárójelben levő mennyiségeket az a-adik ponttöltés $x_a^\mu(s)$ világvonalán, az a-adik ponttöltés jellemzőivel kell kiszámolni.

4.4.2 Folytonos tölteseloszlás. Négyes-áramsűrűség

Ha valamely térfogatban makroszkopikus számú töltés van jelen, akkor a töltéseket nem érdemes egyesével, külön-külön számbavenni. Ehelyett adott inerciarendszerben álló megfigyelő az ottani $\vec{j}$ áram- és ρ töltéssűrűséget szokta használni. A **kovariáns áramsűrűség**et a következőképpen tudjuk bevezetni. Induljunk ki abból, hogy **a tetszőleges infinitezimális térfogatelemben található dQ töltés minden inerciarendszerben azonos, Lorentz-skalár.** Ez azért van így, mert **a tapasztalat szerint az elektron töltése minden inerciarendszerben ugyanakkora.** Tetszőleges K inerciarendszerben $dQ = \rho dV$, ha dV ott az anyagdarabka térfogata.

Szorozzuk meg a dQ invariáns töltésmennyiséget azzal a dx^μ kovariáns elmozdulással, amelyet ezek a töltések a K rendszerben mért dt infinitezimális idő alatt (átlagosan) elszenvednek:

$$\rho dV dx^\mu = \rho dV \frac{dx^\mu}{dt} dt. \tag{4.13}$$

A kapott mennyiség, egy skalár és egy négyesvektor szorzata, maga is négyesvektor. Írjuk ezt a négyesvektort az alábbi alakba:

$$\frac{1}{c}\rho\frac{dx^\mu}{dt}dV cdt = \frac{1}{c}\left(\rho\frac{dx^\mu}{dt}\right)d\Omega. \tag{4.14}$$

Miután $d\Omega = dV cdt$, az invariáns térfogatelem skalár, a zárójelben szereplő

$$j^\mu \ = \ \rho\frac{dx^\mu}{dt} \tag{4.15}$$

mennyiség négyesvektor. **Ezt a négyesvektort nevezzük az áramsűrűség négyesvektorának**, mert a komponensei

$$j^\mu \ = \ \left(\rho c, \vec{j} = \rho\vec{v}\right) \tag{4.16}$$

a 3-dimenziós térben értelmezett ρ töltéssűrűség (c faktortól eltekintve) és $\vec{j}$ áramsűrűség.

Folytonos eloszlású töltések esetén a hatásnak a töltések és az elektromágneses tér kölcsönhatását leíró S_{kh} tagja az egyes térfogatelemekben levő$dQ(\vec{r},t) = \rho dV$ töltésmennyiségekre tartalmaz összegzést (ami térfogati integrálást jelent):

$$\begin{aligned} S_{kh} &= -\frac{1}{c}\int ds \int dV\ \rho\ A_\mu\frac{dx^\mu}{ds} = -\frac{1}{c}\int dt\int dV\ \rho\ A_\mu\frac{dx^\mu}{dt} \\ &= -\frac{1}{c^2}\int d\Omega\ j^\mu A_\mu. \end{aligned} \tag{4.17}$$

A kölcsönhatást tehát a négyes-áramsűrűség és a vektorpotenciál szorzata írja le.

4.4.3 Mértékszimmetria. Töltésmegmaradás. Kontinuitási egyenlet

Vegyük észre, hogy a hatás nemcsak a Poincaré-transzformációkkal szemben invariáns, hanem egy további szimmetriával is rendelkezik. Végezzük el az

$$A^\mu(x) \ \rightarrow \ A^\mu(x) + \partial^\mu f(x) \tag{4.18}$$

transzformációt, amelyet **mértéktranszformáció**nak nevezünk. Nem nehéz belátni, hogy mértéktranszformáció esetén a térerősség tenzora változatlan marad:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \ \rightarrow \ \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + (\partial^\mu\partial^\nu f - \partial^\nu\partial^\mu f) = F^{\mu\nu}. \tag{4.19}$$

Ennek következtében **a szabad elektromágneses térre vonatkozó hatás is invariáns a mértéktranszformációval szemben.**

Induljunk ki abból a feltevésből, hogy nemcsak a szabad elektromágneses térre vonatkozó hatás mértékinvariáns, hanem, **a mértékszimmetria az elektromágneses tér és a töltött részecskék kölcsönhatásának is tulajdonsága.** Megmutatjuk, hogy **a mértékszimmetria következtében a töltésre lokális megmaradási törvény, úgynevezett kontinuitási egyenlet érvényes: tetszőleges térfogatban a töltés csak annak árán tud megváltozni, hogy a térfogatot határoló zárt felületen töltés áramlik ki vagy be.** (Töltés nem keletkezhet ill. tűnhet el.)

Induljunk ki a hatás (4.17) kölcsönhatási tagjából és követeljük meg annak mértékszimmetriáját, azaz hogy

$$-\frac{1}{c^2}\int d\Omega j^\mu A_\mu = -\frac{1}{c^2}\int d\Omega j^\mu \left(A_\mu + \partial_\mu f\right) \tag{4.20}$$

álljon fenn tetszőleges $f(x)$ függvénnyel adott mértéktranszformáció esetén. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha

$$\int d\Omega j^\mu \partial_\mu f \;=\; 0 \tag{4.21}$$

tetszőleges $f(x)$ függvényre fennáll. Hajtsunk végre parciális integrálást,

$$\int d\Omega \partial_\mu \left(j^\mu f\right) - \int d\Omega f \partial^\mu j_\mu \;=\; 0, \tag{4.22}$$

és írjuk át az első tagban a térfogati integrált Gauss tételének alkalmazásával felületi integrállá. A teljes téridő-tartományt határoló zárt felület térben végtelen távoli felületdarabjain (azaz $|\vec{r}| \to \infty$ esetén) az áramsűrűség nulla. Legyen továbbá $f(x)$ olyan tetszőleges függvény, amely $t \to \pm\infty$ esetén eltűnik. Ekkor a felületi integrál eltűnik és

$$-\int d\Omega f(x) \partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{4.23}$$

azaz

$$\partial_\mu j^\mu(x) \;=\; 0 \tag{4.24}$$

adódik. **Ez az egyenlet a kontinuitási egyenlet kovariáns alakja.**

A következőket olvashatjuk ki belőle:

1. Integráljuk a (4.24) egyenlet mindkét oldalát az $x^0 = ct_k$ és az $x^0 = ct_v$, kezdeti ill. végső időpontoknak megfelelő hipersíkok közötti téridő- tartományra. Az áramsűrűség négyesdivergenciájának négyes-térfogati integrálját Gauss tétele értelmében át lehet írni a négyes-áramsűrűség külső normális irányú komponensének a határfelületekre vett integráljává. Felhasználva, hogy az áramsűrűség a térben végtelen távoli határfelületeken eltűnik, a felületi integrálhoz

csak az $x^0 = ct_k$ és $x^0 = ct_v$ hipersíkok adnak járulékot. Mivel az $x^0 = ct_k$ hipersík külső normálisa az x^0 tengellyel párhuzamos negatív irányba mutat, ennek a síknak a járuléka negatív. Az állandó x^0 értékhez tartozó hipersíkokon a négyes-felületelem éppen a dV térfogatelem. Mindezeket felhasználva:

$$\int d\Omega \partial_\mu j^\mu = \int dV j^0(\vec{r}, t_v) - \int dV j^0(\vec{r}, t_k) = 0. \quad (4.25)$$

Ez azt jelenti, hogy **a térben levő teljes töltés időben állandó, azaz a rendszer össztöltése megmaradó mennyiség. Ez a globális töltésmegmaradás törvénye.**

2. Írjuk fel a kontinuitási egyenletet tetszőlegesen választott K inerciarendszerben:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (4.26)$$

Integráljuk a kontinuitási egyenlet mindkét oldalát tetszőleges (időtől független) V 3-dimenziós térfogatra, és használjuk fel Gauss-tételét:

$$\frac{d}{dt} \int_V dV \rho = - \oint_F df j_n, \quad (4.27)$$

ahol F a V térfogatot határoló zárt felület, j_n a 3-dimenziós $\vec{j}$ áramsűrűségnek az F felület külső normálisa irányába mutató komponense. Az egyenlet jelentése az, hogy **tetszőleges V térfogatban levő $\int_V dV \rho$ töltés időegység alatt bekövetkező megváltozása egyenlő a térfogatot határoló zárt felületen időegység alatt átáramlott töltések előjeles összegével.** Beáramló (kiáramló) töltés járuléka pozitív (negatív), mert ekkor $-j_n > 0$ ($-j_n < 0$). **Ez a töltés lokális megmaradásának törvénye.** Az utóbbiból a globális töltésmegmaradás is következik minden olyan rendszerre, amelynek felületén nem áramlik ki és be töltés.

4.4.4 A Maxwell-egyenletek

Az elektromágneses térrel kölcsönható töltések rendszerére megsejtettük szimmetriaelvek alapján a hatást. Most **a legkisebb hatás elve alapján leszármaztatjuk a hatásból az elektromágneses mező mozgásegyenleteit. Eredményül a Maxwell-egyenleteket fogjuk kapni. Miután a Maxwell-egyenleteket ill. azok következményeit a kísérletek teljes mértékben igazolták, ezért igazolt az is, hogy a felírt hatás csakugyan az elektromágneses teret írja le az azt keltő és benne mozgó ponttöltésekkel együtt.**

4.4.5 A térerősség-tenzorra érvényes azonosságok

Kezdjük azzal, hogy **a térerősség-tenzor definíciójából azonnal következnek az alábbi egyenletek,** mint azonosságok:

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} \;=\; 0. \tag{4.28}$$

Erről az $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ definíciót behelyettesítve közvetlenül meggyőződhetünk.

A (4.28) egyenletek 4 független egyenletet jelentenek, mert a 4 Lorentz-index közül 3 páronként különbözőt 4-féleképpen lehet kiválasztani:$(\rho\mu\nu) = (012)$, (013), (023), (123). Az első három lehetőség a

$$\mathrm{rot}\;\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} \;=\; 0, \tag{4.29}$$

egyenletet, a negyedik lehetőség pedig a

$$\mathrm{div}\;\vec{B} \;=\; 0 \tag{4.30}$$

egyenletet jelenti. Azt látjuk tehát, hogy **két Maxwell-egyenlet közvetlenül a térerősségtenzor definíciójából következik.**

4.4.6 A legkisebb hatás elve

A másik két Maxwell-egyenlet valóban igazi dinamikai egyenlet, amelyek a legkisebb hatás elve alapján vezethetők le.

Keressük ehhez a hatás megváltozását a mező ,,általános koordinátáinak", azaz a térmennyiségeknek elképzelt, infinitezimális $A^\mu \to A^\mu + \delta A^\mu(x)$ megváltozása (variációja) esetén. Követeljük meg, hogy ez a variáció a hatásban szereplő téridő-tartományt határoló zárt felületen tűnjön el. A térerősség-tenzor variációja:

$$\delta F^{\mu\nu} \;=\; \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu, \tag{4.31}$$

aminek következtében:

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \;=\; 4F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu. \tag{4.32}$$

Így a hatás szabad elektromágneses térre vonatkozó S_{em} tagjának megváltozása:

$$\begin{aligned} \delta S_{em} &= -\frac{1}{4c}\int d\Omega 4F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu \\ &= \frac{1}{c}\int d\Omega \partial^\mu F_{\mu\nu} \cdot \delta A^\nu + \{\text{ felületi integrál },\end{aligned} \tag{4.33}$$

ahol a második sort parciális integrálás és Gauss (matematikai) tételének alkalmazásával kaptuk. A felületi integrál eltűnik, mert a vektorpotenciál variációját úgy választottuk, hogy az a téridőtartományt határoló zárt felületen eltűnjön.

A hatás kölcsönhatási tagjának a variációja:

$$\delta S_{kh} = -\frac{1}{c^2}\int d\Omega j^\mu \delta A_\mu. \tag{4.34}$$

A töltésrendszerből és annak elektromágneses teréből álló fizikai rendszerre vonatkozó hatás variációja: $\delta S = \delta S_{kh} + \delta S_{em}$. A legkisebb hatás elve értelmében ennek a „valódi mozgás", azaz az elektromágneses mezőt ténylegesen megadó $A^\mu(x)$ térkonfiguráció esetén el kell tűnnie: $\delta S = 0$, azaz

$$\int d\Omega \left(\frac{1}{c}\partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}j_\nu\right)\delta A^\nu = 0, \tag{4.35}$$

ami akkor és csak akkor állhat fenn tetszőleges δA^ν variáció esetén, ha a kerek zárójelben álló kifejezés azonosan zérus. Innen az alábbi mozgásegyenletek adódnak:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c}j^\mu. \tag{4.36}$$

A (4.28) és a (4.36) egyenletek együttesen a kovariáns alakban felírt Maxwell-egyenletek.

A (4.36) egyenleteket is átírjuk nem kovariáns alakba. A $\mu = 0$ komponenst véve

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \tag{4.37}$$

adódik, a $\mu = i = 1, 2, 3$ komponenseket véve pedig az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{j}. \tag{4.38}$$

Az (4.29), (4.30), (4.37) és (4.38) egyenletek a Maxwell-egyenletek nem kovariáns alakban.

Ezeket, mint az elektromágneses mező mozgásegyenleteit, a tapasztalat messzemenően igazolta. Ezért most már biztosak vagyunk, hogy az S_{em} hatás, amelyet a Lorentz-szimmetriát és az egyszerűséget szem előtt tartva konstruáltunk, helyes.

4.4.7 Az energiaimpulzus-tenzor

Ha a mozgásegyenleteket ismerjük, akkor minden fizikai rendszer esetén azt szoktuk kérdezni, hogy melyek a megmaradó mennyiségek. Tudjuk, hogy azok megmaradása általános szimmetria-elvek következménye. Az a célunk, hogy keressük meg, mi a töltésrendszerből és annak elektromágneses teréből álló fizikai rendszerben a megmaradó négyesimpulzus. Mi az a mennyiség, ami a rendszernek a téridőben végzett konstans eltolásokkal szembeni szimmetriája miatt marad meg?

Külön vizsgáljuk a hatás

$$S_{em} + S_{kh} \;=\; \int d\Omega \left(-\frac{1}{4c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} A^\mu j_\mu \right) \equiv \int d\Omega \mathcal{L} \tag{4.39}$$

tagjainak és a részecskék (töltések) mechanikai mozgásából származó S_r tagjának a megváltozását az infinitezimális $x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \delta a^\mu$ eltolás következtében. Az egyszerűbb áttekinthetőség kedvéért bevezettük az $\mathcal{L}$ Lagrange-sűrűséget.

Kezdjük az (4.39) tagok megváltozásával:

$$\begin{aligned}
&\delta \left(S_{em} + S_{kh} \right) = \\
&= \int d\Omega \left(\delta a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \delta A^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\rho A^\nu)} \delta \partial^\rho A^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial j_\nu} \delta j_\nu \right).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Az egyes tagok jelentése és előjele analóg módon adódik, mint a (2.14) egyenlet levezetésekor. Az infinitezimális eltolás következtében:

$$\begin{aligned}
\delta A^\nu &= \partial_\mu A^\nu \cdot \delta a^\mu, \\
\delta \partial^\rho A^\nu &= \partial^\rho \partial_\mu A^\nu \cdot \delta a^\mu, \\
\delta j^\nu &= \partial_\mu j_\nu \cdot \delta a^\mu.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Ezeket behelyettesítve adódik:

$$\begin{aligned}
&\delta \left(S_{em} + S_{kh} \right) = \\
&= \int d\Omega \left[\partial_\mu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \partial_\mu A^\nu \right. \\
&\qquad \left. - \partial^\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\rho A^\nu)} \partial_\mu A^\nu \right) + \partial^\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\rho A^\nu)} \partial_\mu A^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial j_\nu} \delta j_\nu \right] \delta a^\mu \\
&= \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\rho A^\nu)} \partial_\mu A^\nu \right) \delta a^\mu \\
&\qquad + \int d\Omega \left(\partial^\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\rho A^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \right) \partial_\mu A^\nu \; \delta a^\mu \\
&\qquad - \int d\Omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial j_\nu} \partial_\mu j_\nu \; \delta a^\mu.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Számoljuk ki most az $\mathcal{L}$ Lagrange-sűrűség parciális deriváltjait:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \;=\; -\frac{1}{c^2} j_\nu,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\rho A^\nu)} &= -\frac{1}{c}F_{\rho\nu}, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial j_\nu} &= -\frac{1}{c^2}A^\nu.
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

Ezeket behelyettesítve a következőket kapjuk:

$$
\begin{aligned}
&\delta\left(S_{em}+S_{kh}\right) = \\
&= \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L} + \frac{1}{c}F_{\rho\nu}\partial_\mu A^\nu\right)\delta a^\mu \\
&+ \int d\Omega \left(-\frac{1}{c}\partial^\rho F_{\rho\nu} + \frac{1}{c^2}j_\nu\right)\delta a^\mu \\
&+ \int d\Omega \frac{1}{c^2}A^\nu \partial_\mu j_\nu \; \delta a^\mu.
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

Tekintsük ezt a valódi mozgásnak megfelelő térkonfiguráció esetén. A valóságos térkonfiguráció eleget tesz a Maxwell-egyenleteknek, következésképpen a fenti kifejezés jobb oldalán a második integrál zérus. Egészítsük ki az első integrál integrandusának második tagját úgy, hogy abban csak a térerősség-tenzor szerepeljen. Ezután bontsuk fel a Lagrange-sűrűséget a szabad elektromágneses tértől származó $\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4c}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ és az $\mathcal{L}_{kh} = -\frac{1}{c^2}A^\nu j_\nu$ kölcsönhatási tag összegére. Azonos átalakításokkal kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\delta\left(S_{em}+S_{kh}\right) = \\
&= \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L} + \frac{1}{c}F_{\rho\nu}F_\mu^{\ \nu} + \frac{1}{c}F_{\rho\nu}\partial^\nu A_\mu\right)\delta a^\mu \\
&\quad + \int d\Omega \frac{1}{c^2}A^\nu \partial_\mu j_\nu \; \delta a^\mu \\
&= \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L}_{em} + \frac{1}{c}F_{\rho\nu}F_\mu^{\ \nu}\right)\delta a^\mu \\
&\quad + \int d\Omega \partial^\rho \left(-g_{\rho\mu}\frac{1}{c^2}j_\nu A^\nu\right)\delta a^\mu + \int d\Omega \left(\frac{1}{c}\partial^\rho F_{\rho\nu}\; \partial^\nu A_\mu + \frac{1}{c}F_{\rho\nu}\partial^\rho\partial^\nu A_\mu\right)\delta a^\mu \\
&\quad + \int d\Omega \frac{1}{c^2}A^\nu \partial_\mu j_\nu \; \delta a^\mu \\
&= \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L} + \frac{1}{c}F_{\rho\nu}F_\mu^{\ \nu} + \frac{1}{c}F_{\rho\nu}\partial^\nu A_\mu\right)\delta a^\mu \\
&\quad + \int d\Omega \frac{1}{c^2}A^\nu \partial_\mu j_\nu \; \delta a^\mu \\
&= \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L}_{em} + \frac{1}{c}F_{\rho\nu}F_\mu^{\ \nu}\right)\delta a^\mu \\
&\quad + \int d\Omega \partial^\rho \left(-g_{\rho\mu}\frac{1}{c^2}j_\nu A^\nu\right)\delta a^\mu + \int d\Omega \left(\frac{1}{c^2}j_\nu\; \partial^\nu A_\mu\right)\delta a^\mu \\
&\quad + \int d\Omega \frac{1}{c^2}\left[\partial_\mu\left(A^\nu j_\nu\right) - j_\nu \partial_\mu A^\nu\right]\; \delta a^\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L}_{em} + \frac{1}{c} F_{\rho\nu} F_\mu^{\ \nu} \right) \delta a^\mu \\
& + \int d\Omega \frac{1}{c^2} j_\nu F^\nu_{\ \mu} \delta a^\mu .
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

Ezekután vizsgáljuk meg a ponttöltések szabad mozgásának megfelelő S_r hatástagot. A szabad pontrészecskére vonatkozó hatás variációját egyetlen pontrészecske esetén már kiszámoltuk. Azt a (2.9) kifejezés adja meg a világvonal tetszőleges δx^μ megváltoztatása esetén. Ilyen kifejezéseket kell most összegezni az összes ponttöltésre, $\sum_a \ldots$, valamint el kell végezzük a $\delta x^\mu = \delta a^\mu =$áll. helyettesítést:

$$
\delta S_r = \sum_a \left(\int ds \frac{dp_\mu}{ds} \right)_a \delta a^\mu - \sum_a (p_\mu)_a \delta a^\mu \Big|_{s_k}^{s_v} . \tag{4.46}
$$

Ezt hozzáadjuk a hatás többi tagjának a megváltozásához és az eredményt a valóságos mozgás esetében vesszük. Annak érdekében, hogy a tagok összehasonlíthatók legyenek, a $\delta(S_{em} + S_{kh})$ kifejezésében az áramsűrűséget tartalmazó tagot átírjuk diszkrét töltésekre:

$$
\begin{aligned}
\int d\Omega \frac{1}{c^2} j_\nu F^\nu_{\ \mu} \delta a^\mu &= \frac{1}{c} \int dt \int dV \rho \, \frac{dx^\nu}{dt} F_{\nu\mu} \delta a^\mu \\
&= \sum_a \frac{e_a}{c} \left(\int ds u^\nu F_{\nu\mu} \right)_a \delta a^\mu .
\end{aligned} \tag{4.47}
$$

Ezt a kifejezést a (4.46) kifejezés első tagjához adva zérust kapunk a ponttöltések valóságos mozgása esetén, mert akkor a (3.14) mozgásegyenlet teljesül minden egyes ponttöltésre:

$$
\left(\frac{dp_\mu}{ds} \right)_a = \left(\frac{e}{c} u^\nu F_{\nu\mu} \right)_a . \tag{4.48}
$$

Ezt figyelembe véve a töltésrendszert és az elektromágneses terét együttesen leíró S hatás megváltozása infinitezimális δa^μ téridőbeli eltolás során és a töltésekből és az elektromágneses mezőből álló fizikai rendszer valóságos mozgása esetén:

$$
\begin{aligned}
& \delta \left(S_r + S_{em} + S_{kh} \right)_{\text{valódi mozgás}} = \\
& = \left[\int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L}_{em} + \frac{1}{c} F_{\rho\nu} F_\mu^{\ \nu} \right) - \sum_a (p_\mu)_a \Big|_{\text{kezdet}}^{\text{vég}} \right] \delta a^\mu .
\end{aligned} \tag{4.49}
$$

Vezessük be a kerekzárójelben álló kifejezés jelölésére a $T^{(em)}_{\rho\mu}$ tenzort:

$$
\begin{aligned}
T^{(em)}_{\rho\mu} &= -c g_{\rho\mu}\mathcal{L}_{em} - F_{\rho\nu} F_\mu^{\ \nu} \\
&= g_{\rho\mu} \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} - F_{\rho\nu} F_\mu^{\ \nu} .
\end{aligned} \tag{4.50}
$$

Ez a tenzor az elektromágneses teret jellemzi, szimmetrikus másodrendű tenzor.

Ha a töltésrendszerből és az elektromágneses teréből álló fizikai rendszernek a téridőbeli eltolások szimmetriái, akkor

$$\delta\left(S_r + S_{em} + S_{kh}\right)_{\text{valódi mozgás}} \;=\; 0, \tag{4.51}$$

tetszőleges infinitezimális δa^μ eltolás esetén, azaz

$$\left[-\frac{1}{c}\int d\Omega\partial^\rho T^{(em)}_{\rho\mu} - \sum_a \left(p_\mu\right)_a\Big|^{\text{vég}}_{\text{kezdet}}\right]\delta a^\mu = 0. \tag{4.52}$$

Alkalmazzuk a fenti kifejezésben a négyesdivergencia térfogati integráljára Gauss tételét. Ekkor a $T^{(em)}_{\rho\mu}\delta a^\mu$ vektor felületi integrálját kapjuk az Ω téridőtartományt határoló zárt felületre. Ω az a tartomány, amelyre a hatásban integrálunk. Legyen ez a térirányokban végtelen, akkor ezen irányokban a határfelület végtelen távol van, ahol a térerősség eltűnik, ezért ezek a határfelületek nem adnak járulékot a felületi integrálhoz. Idő (x^0) irányban válasszuk az $x^0 = ct_k$ és az $x^0 = ct_v$ „síkokat" a tartomány határainak. Ezeken a (3-dimenziós) határfelületeken a „felületelem" a dV térfogatelem, és a vektorunk külső normális irányába mutató komponense rendre $-T^{(em)}_{0\mu}\delta a^\mu\Big|_{t_k}$ és $T^{(em)}_{0\mu}\delta a^\mu\Big|_{t_v}$. Az eltolási szimmetria következtében tehát:

$$\left[\frac{1}{c}\int dV T^{(em)}_{0\mu} + \sum_a \left(p_\mu\right)_a\right]^{t_v}_{t_k}\delta a^\mu \;=\; 0 \tag{4.53}$$

tetszőleges δa^μ négyesvektor esetén. Ez azt jelenti, hogy a

$$P_\mu \;\equiv\; \sum_a \left(p_\mu\right)_a + \frac{1}{c}\int dV T^{(em)}_{0\mu} \tag{4.54}$$

négyesvektor megmaradó, nem változik a mozgás során. A P_μ vektort nevezzük **az elektromágneses tér és a töltésrendszer négyes-impulzusának**. Ez két tagból tevődik össze: a töltések „mechanikai" mozgásából származó négyesimpulzusból és **az elektromágneses mező**

$$P^{(em)\,\mu} \;=\; \frac{1}{c}\int dV T^{(em)\,0\mu} \tag{4.55}$$

négyes-impulzusából. **Az elektromágneses mező tehát négyes-impulzust, azaz adott K inerciarendszerben energiát és impulzust hordoz.** Mint az a négyes-impulzus kifejezéséből látszik, ahhoz az elektromágneses mező minden egyes térfogateleme ad egy meghatározott járulékot, amelynek nagysága csak attól függ, hogy a mező adott térfogatelemében mekkora a térerősség. Ezért azt kell mondjuk, hogy **az elektromágneses mező minden egyes térfogateleme**

$\epsilon dV = T^{(em)\,00}dV$ **energiával és** $g^i dV = \frac{1}{c}T^{(em)\,0i}dV$ **impulzussal rendelkezik.** Ekkor $\epsilon = T^{(em)\,00}$ és $g^i = \frac{1}{c}T^{(em)\,0i}$ rendre **az elektromágneses mező energia- és impulzussűrűsége**. **A** $T^{(em)\,\rho\mu}$ **tenzort ezért az elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzorának nevezzük.**

Rövid számolás után kapjuk, hogy az energiaimpulzus-tenzor komponensei az elektromos térerősséggel és a mágneses imdukcióval kifejezve tetszőleges K inerciarendszerben a következő alakúak:

$$\begin{aligned} T^{(em)}_{00} &= \frac{1}{2}\left(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right), \\ T^{(em)}_{0i} &= (\vec{B} \times \vec{E})_i, \\ T^{(em)}_{ij} &= -E_iE_j - B_iB_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Ha az eltolási szimmetria következményét tetszőleges olyan Ω téridőtartományon nézzük, amelyben nincsenek ponttöltések, (azaz a hatást eleve ilyen téridőtartományon definiáljuk) és újra elismételjük a hatás megváltozásának kiszámolását infinitezimális eltolás esetén, akkor a

$$-\frac{1}{c}\int_\Omega d\Omega\partial^\rho T^{(em)}_{\rho\mu}\delta a^\mu = 0 \tag{4.57}$$

egyenletre jutunk tetszőleges δa^μ eltolás és Ω tartomány esetén. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha fennáll a

$$\partial_\rho T^{(em)\,\rho\mu} = 0 \tag{4.58}$$

egyenlet. **A szabad elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzorának divergenciája tehát eltűnik.** A μ index különböző rögzített értékei esetén ugyanolyan alakú egyenletek állnak fenn, mint amilyen az elektromos töltésre vonatkozó kontinuitási egyenlet. Ezért ezek az egyenletek mind fizikai mennyiségek lokális megmaradását fejezik ki. Miután az energiaimpulzus-tenzor néhány komponensének a jelentését már tisztáztuk, az is nyilvánvaló, hogy mely fizikai mennyiségek kontinuitását, azaz lokális megmaradását fejezi ki a szabad elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzorának divergencia-mentessége.

1. Vegyük a $\mu = 0$ esetén az egyenletet: $\partial_\rho T^{(em)\,\rho 0} = 0$. Itt $T^{(em)\,00} = \epsilon$ a mező energiasűrűsége. Az egyenlet,

$$\frac{\partial}{\partial t}\epsilon + \nabla^i cT^{(em)\,i0} = 0, \tag{4.59}$$

tehát **az energia lokális megmaradását fejezi ki** és az energiaimpulzus-tenzor $T^{(em)\,i0}$ komponensei az S^i **energiaáramsűrűség**gel állnak $S^i = cT^{(em)\,i0}$ kapcsolatban. Az energiaáramsűrűség $\vec{S}$ vektorát **Poynting-vektor**nak nevezzük.

2. Vegyük az energiaimpulzus-tenzorra vonatkozó kontinuitási egyenletet $\mu = j = 1, 2, 3$ esetén: $\frac{1}{c}\partial_\rho T^{(em)\,\rho j} = 0$. Itt $\frac{1}{c}T^{(em)\,0j} = g^j$ a mező impulzussűrűsége. Következésképpen az egyenlet az impulzus lokális megmaradását fejezi ki, és az $\frac{1}{c}T^{(em)\,ij} \equiv \sigma^{ij}$ mennyiségeket a j irányú **impulzus áramsűsűsége** i irányú komponensének (az i irányú normálissal rendelkező egységfelületen időegység alatt átadott j irányú impulzusnak) kell tekinteni. Ez azt jelenti, hogy az elektromágneses mező „darabkái" között mechanikai feszültség ébred. Ezért σ^{ij}-t **Maxwell-féle feszültségtenzornak** szokás nevezni.

A fentiek alapján a szabad elektromágneses mező energiaáramsűrűsége és impulzussűrűsége között az $\vec{S} = c^2\vec{g}$ összefüggés áll fenn. Az energiaimpulzus-tenzor komponensei jelentésük alapján a következőképpen foglalhatók mátrixalakban össze:

$$T^{(em)\,\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & cg_x & cg_y & cg_z \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

A komponenseket explicit módon kiírva meggyőződhetünk róla, hogy **az elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzorának spúrja zérus:**

$$T^{(em)\,\mu}_{\mu} = 0. \tag{4.61}$$

References

[1] L.D. Landau, E.M. Lifsic, *Elméleti fizika II.*, *Klasszikus erőterek.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976)

[2] Hraskó P., *Bevezetés az általános relativitáselméletbe* (BME Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1997)

[3] Dede M., Demény A., *Kísérleti fizika II.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1979)

[4] Novobátzky K., *A relativitás elmélete* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1963)

[5] R.H. Price, K.S. Thorne, *A fekete lyukak membránelmélete* (Tudomány, 1988 június, 25. old.)