A sine-Gordon modell elliptikus deformációja

Bacsó Viktória[1,5], Nicoló Defenu[6], Márián István Gábor[1,3], Andrea Trombettoni[2], Nándori István[3,4]

[1] Debreceni Egyetem, [2] SISSA, Trieste [3] MTA-DE Részecskefizikai Kutatócsoport, Debrecen [4] MTA-Atomki, Debrecen [5] Medgyessy Ferenc Gimnázium és Művészeti Szakgimnázium, Debrecen [6] Universitäte Heidelberg

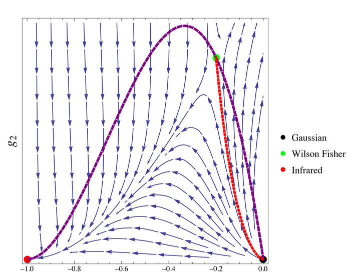
Kivonat

A sine-Gordon elmélet képzetes frekvenciákra való analitikus elfolytatásából adódó sinh-Gordon modell olyan skalártérelmélet, amelyben az önkölcsönhatást leíró potenciál egy hiperbolikus függvény. A modell fázisszerkezete a szakirodalomban eddig helytelenül szerepelt. FRG módszer alkalmazásával megmutatom, hogy az ShG modellnek egyetlen, szimmetrikus fázisa van, amelyet kritikus vonal határol. A modell Ising-típusúnak tekinthető, de a csatolások rögzített kezdőértékeivel. Továbbá megadom a sine-Gordon modell egy elliptikus deformációját, azaz az Sn-Gordon (SnG) modellt, amely a sine és a sinh-Gordon modellek között periódikusan interpoláló skalárelmélet. Amelyet topológikus típusú fázisátmenet jellemez, kivéve az interpoláció egyik végpontját jelentő ShG elméletet. Származtatom a fázisokat szeparáló kritikus frekvencia változását az interpoláció során és megmutatom, hogy az Sn-Gordon modell $m \to 1$ határátmenete nem analitikus.

Motiváció - Sinh-Gordon rejtély

A fázisszerkezetet meghatározzák: szimmetriák és dimenzió

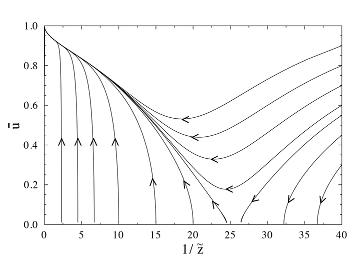
- Ising-modell, Z_2 szimmetria



$$S_{\rm Ising}[\varphi] = \int d^2x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}g1\varphi^2 + \frac{1}{4!}g2\varphi^4\right]$$

$\Longrightarrow$ másodrendű fázisátalakulás (WF)

- Sine-Gordon (SG), Z_2 + periodikus



$$S_{\rm SG}[\varphi] = \int d^2x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + u\cos(\beta\varphi)\right]$$

$\Longrightarrow$ topológikus fázisátalakulás $\beta_c^2 = 8\pi$

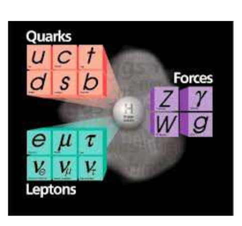
- Sinh-Gordon (ShG), Z_2 szimmetria

$$S_{\rm ShG}[\varphi] = \int d^2x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + u\cos(i\beta\varphi)\right] = \int d^2x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + u\cosh(\beta\varphi)\right]$$

$\Longrightarrow$ egy fázisa van, miért nem kettő?

Renormálás

- Részecskefizika
  - anyagtér (lepton, kvark)
  - mértéktér (foton, vekrtorbozon, gluon)
  - skalártér (Higgs részecske)



- Kvantumtérelmélet

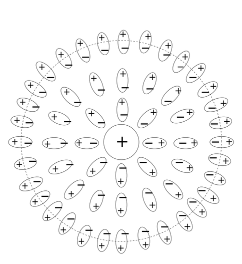
$$S = \int dx\,\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi, x) \qquad \text{Hatás}$$

$$Z[J] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}[\varphi] e^{-S[\varphi]+\int dx\,J\varphi} \qquad \text{Generáló funkcionál}$$

$$\Gamma[\varphi] = \sup_J \left(\int dx\,J\varphi - \log Z[J]\right) \qquad \text{Effektív hatás}$$

$$\Gamma \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Mérhető mennyiségek}$$

- Skálafüggés
  $(\Delta E)(\Delta t) \geq \hbar/2, \quad \Delta E = \Delta M c^2$



- Skálafüggő effektív hatás $\Gamma \to \Gamma_k$

Funkcionális renormálási csoport

- Divergenciák Pauli-Villars jellegű regularizálása

$$\Delta S_k[\varphi] = \int_p \varphi(p)\,R_k(p)\,\varphi(-p)$$

$$R_k(p\to 0) > 0, \quad R_{k\to 0}(p) = 0, \quad R_{k\to\Lambda}(p) = \infty$$

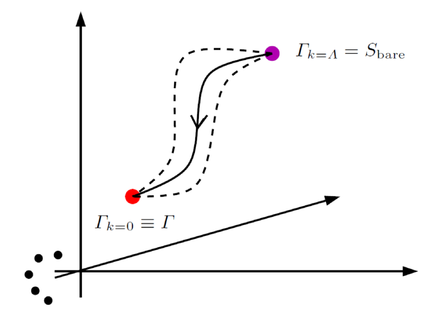
$$Z_k[J] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}[\varphi] e^{-S[\varphi]-\Delta S_k[\varphi]+\int dx\,J\varphi} \qquad \text{skálafüggő } Z_k$$

$$\Gamma_k[\varphi] = \sup_J \left(\int dx\,J\varphi - \log Z_k[J]\right) - \Delta S_k[\varphi] \qquad \text{skálafüggő } \Gamma_k$$

$$\Gamma_{k=\Lambda}[\varphi] \equiv S, \qquad \Gamma_{k\to 0}[\varphi] \equiv \Gamma$$

- FRG egyenlet (skálainvariancia)

$$k\partial_k \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{k\partial_k R_k}{\Gamma_k^{(2)}[\varphi] + R_k}\right]$$



FRG egyenlet, lokális potenciál közelítésben (LPA), $d = 2$ dimenzióban

$$(2 + k\partial_k)\tilde{V}_k(\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dy \frac{y^2\frac{dr}{dy}}{(1+r)y + \tilde{V}_k''(\varphi)},$$

ahol $\tilde{V}_k$ a dimenziótlan potenciál, $r(y)$ a dimenziótlan regulátor.

Az ShG modell fázisai

- Linearizált FRG egyenlet, LPA, $d = 2$ dimenzió

$$(2 + k\partial_k)\tilde{V}_k(\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\tilde{V}_k''(\varphi) + \mathcal{O}(\tilde{V}_k''^2)$$

- SG modell $\tilde{V}_{\rm SG}(\varphi) = \tilde{u}_k\cos(\beta\varphi)$

$$k\partial_k \tilde{u}_k = \tilde{u}_k\left(-2 + \frac{1}{4\pi}\beta^2\right) \quad \to \quad \beta_c^2 = 8\pi$$

$\Rightarrow$ Topológikus, fázisátmenet

- ShG modell $\tilde{V}_{\rm ShG}(\varphi) = \tilde{u}_k\cos(i\beta\varphi)$

$$k\partial_k \tilde{u}_k = \tilde{u}_k\left(-2 - \frac{1}{4\pi}\beta^2\right) \quad \to \quad \text{Nincs } \beta_c^2$$

$\Rightarrow$ Nincs topológikus, fázisátmenet [5]

- Taylor sorfejtés (Z_2 szimmetria)

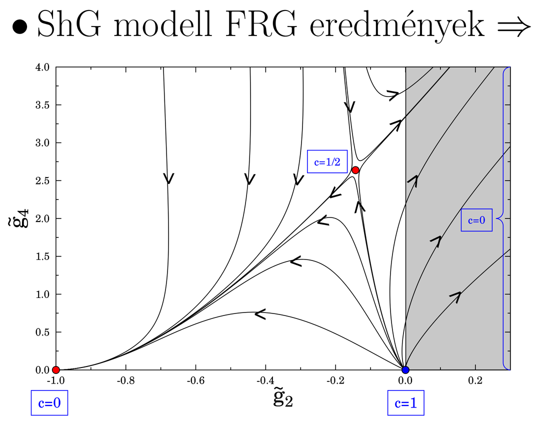
$$\tilde{V}_{\rm ShG}(\varphi) = \tilde{u}_k\cos(i\beta\varphi) \cong \tilde{u}_k\left[1 + \frac{1}{2}\beta^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\beta^4\varphi^4 + ...\right]$$

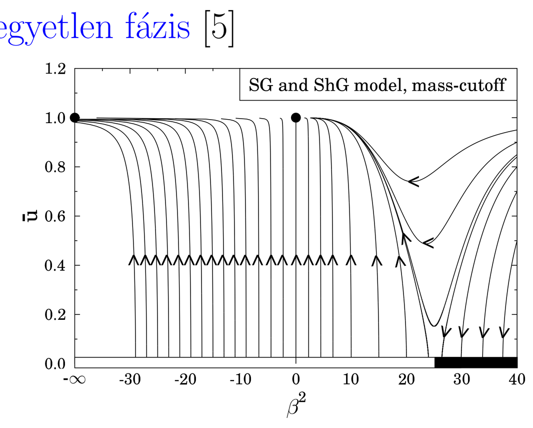
pozitív csatolások $\Rightarrow$ Ising-modell szimmetrikus fázisa $\Rightarrow$ egyetlen fázis

- ShG modell vizsgálta FRG egyenlettel (mass-cutoff regulátor) [5]

$$(2 + k\partial_k)\tilde{u}_k = -\frac{\beta^2}{2\pi\tilde{u}_k}\left[1 - \sqrt{1 - \tilde{u}_k^2}\right], \quad k\partial_k\beta_k^2 = -\frac{1}{24\pi}\frac{\beta_k^4\tilde{u}_k^2}{[1 - \tilde{u}_k^2]^{\frac{3}{2}}}$$

- ShG modell FRG eredmények $\Rightarrow$ egyetlen fázis [5]





Interpoláció SG és ShG között?

$\Longrightarrow$ periódikus interpoláció $\Longrightarrow$ elliptikus deformáció

Elliptikus deformáció

Legyen x, y két koordináta az $\mathbb{R}^2$ térben. Az ellipszis minden pontja m excentricitással az alábbi módon paraméterezhető

$$x = r\cos(\theta), \; y = r\sin(\theta), \; r = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2\sin(\theta)^2}} \tag{1}$$

ahol θ a szögparaméter az $x - y$ sikon. Ebből a definícióból kiindulva definiálhatjuk a Jacobi amplitúdót, például az ellipszis szögívhosszát

$$u(\theta, m) = \int_0^\theta \frac{d\omega}{1 - m^2\sin^2(\omega)}. \tag{2}$$

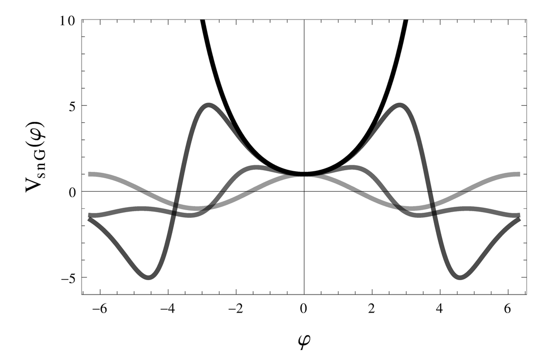
Újrafoglamazva az (1) egyenlet összefüggéseit az (u, m) változókra, és folytatva az analógiát a trigonometrikus esettel, a következőt kapjuk

$$x = \frac{\mathrm{cn}(u,m)}{\mathrm{dn}(u,m)}, \quad y = \frac{\mathrm{sn}(u,m)}{\mathrm{dn}(u,m)}, \quad r = \frac{1}{\mathrm{dn}(u,m)} \tag{3}$$

azaz a fundamentális Jacobi függvényeket (cn, sn, dn). Egy egyszerű interpoláló modell a Jacobi függvényekből konstruált potenciállal így hozható létre

$$V_{\rm snG}(\varphi) = u\,\mathrm{cn}(\beta\varphi, m) = u\,\mathrm{cd}(\beta\varphi, m)\,\mathrm{nd}(\beta\varphi, m). \tag{4}$$

ahol $\mathrm{nd}(\beta\varphi, m) = 1/\mathrm{dn}(\beta\varphi, m)$ és $\mathrm{cd}(u, m) = \mathrm{cn}(u, m)/\mathrm{dn}(u, m)$. Az snG potenciál (4) m = 0-ra $u\cos(\beta\varphi)$, míg m = 1-re $u\cosh(\beta\varphi)$. Megmutattuk, hogy az interpoláló potenciál periodikus (kivéve m = 1-nél) ezért topológikus típusú fázisátmenetet várunk el $0 \leq m < 1$ esetén.



A sn-Gordon modell fázisai

- Periódikus + Z_2 szimmetria (ha $m \neq 1$) ezért Fourier sorfejthető

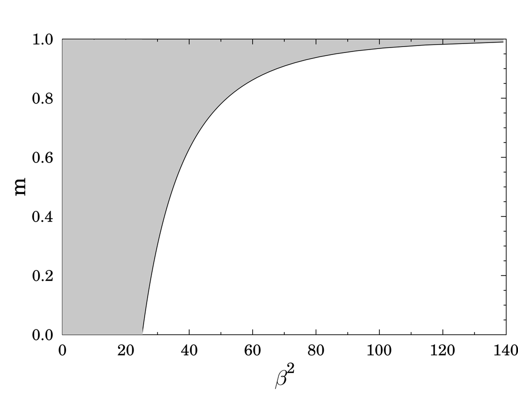
$$\tilde{V}_{\rm SnG}(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n(k)\cos(n\,b\,\phi), \; b = \frac{\beta}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, m\right)}.$$

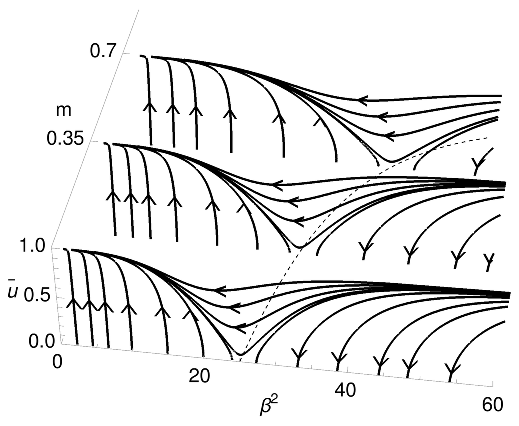
ahol ${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, m\right)$ hypergeometrikus függvény

- Linearizált FRG egyenlet a Fourier amplitudókra

$$k\partial_k\tilde{u}_n(k) = \tilde{u}_n(k)\left(-2 + \frac{1}{4\pi}n^2b^2\right)$$

- Topológikus fázisátmenet, $\beta_c^2(m) = 8\pi\left[{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, m\right)\right]^2$





Összegzés

- Megmutattam, hogy az ShG-modellnek egyetlen, szimmetrikus fázisa van.
- Megadtam a sine-Gordon modell egy elliptikus deformációját, azaz az Sn-Gordon (SnG) modellt, amely a sine és a sinh-Gordon modellek között periódikusan interpoláló skalárelmélet.
- Megmutattam, hogy Sn-Gordon modellt topológikus típusú fázisátmenet jellemzi, kivéve az interpoláció egyik végpontját jelentő ShG elméletet.
- Származtattam a fázisokat szeparáló kritikus frekvencia változását az interpoláció során és megmutattam, hogy az Sn-Gordon modell $m \to 1$ határátmenete nem analitikus.

Irodalomjegyzék

[1] A. B. Zamolodchikov, JETP Lett. **43**, 730 (1986).
[2] I. Nándori, I. G. Márián, V. Bacsó, Phys. Rev. D **89** (2014) 047701.
[3] A. Codello, G. D'Odorico, and C. Pagani, JHEP **1407** (2014) 040.
[4] V. Bacsó, N. Defenu, A. Trombettoni, I. Nandori, Nucl. Phys. B **901** (2015) 444.
[5] N. Defenu, V. Bacsó, I. G. Márián, I. Nándori, A. Trombettoni, J. Phys. A: Math. Theor. **52** (2019) 345002.