Elemirész-ütközések nagy pontosságú leírása

Somogyi Gábor
Debreceni Egyetem

Wigner FK RMI Elméleti Osztály Szemináriuma, 2021 június 14.

Bevezetés

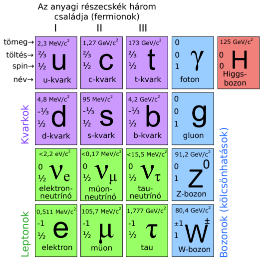
Az elemirész-fizika alapvető kérdése

Kérdés: miből van a világ és mi tartja egyben – vagyis melyek a szubatomi méretskálán érvényesülő természeti törvények?

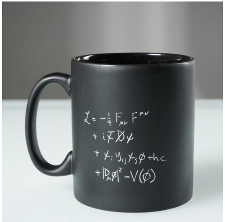
- melyek az anyag alapvető építőkövei?
- milyen kölcsönhatások hatnak köztük?

Jelenlegi legjobb válaszunk: a részecskefizika standard modellje

- 12 elemi fermion (6 lepton + 6 kvark)
- 3 alapvető mértékkölcsönhatás (elektromágneses, gyenge, erős) + Higgs mechanizmus



[Forrás: Wikipédia]



A kihívás

A standard modell rendkívül sikeresen írja le a részecskefizikai jelenségek széles körét.

Ugyanakkor, a standard modell nem lehet az elemirész-fizika végső modellje, hiszen nem ad magyarázatot számos megfigyelt jelenségre:

- gravitáció
- sötét anyag, sötét energia
- anyag-antianyag aszimmetria
- neutrínó tömegek, neutrínó oszcilláció
- a standard modell „mintázatai": részecskecsaládok száma, mértékcsoport, CKM mátrix szerkezete, stb.
- ...

Mi van a standard modellen túl?

A kihívás

A válasz megtalálásának egyik legfontosabb eszköze a nagyenergiás elemirész-ütközési folyamatok tanulmányozása.

- nagyobb energia $\Rightarrow$ kisebb méretskálák

Az eszköz: a Nagy Hadronütköztető (Large Hadron Collider, LHC), amely a laboratóriumi körülmények között eddig elért legnagyobb energiájú ütközések előállítására képes.

- proton-proton és nehézion ütköztető
- az eddigi két adatgyűjtési szakaszban 7, 8 és 13 TeV teljes energia (pp ütközésben)
- jelenleg a harmadik adatgyűjtési szakaszra való felkészülés zajlik

Hol tartunk?

Amit lehetett, azt megmértük

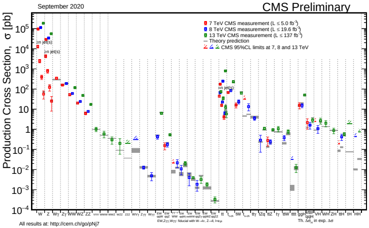
- alapvető folyamatok (pl. W-, Z-bozon keltés) $\leq 1\%$-os kísérleti pontossággal ismertek

Ugyanakkor egyelőre nem látunk a standard modellen túli (BSM) fizikára utaló közvetlen jeleket

- jellemzően hatalmas hátterek

Az LHC tervezett működésének az elején járunk

- ezidáig a várható teljes adathalmaz csupán $\sim 10\%$-át gyűjtöttük be

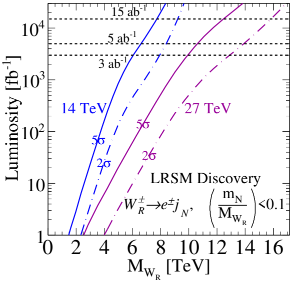


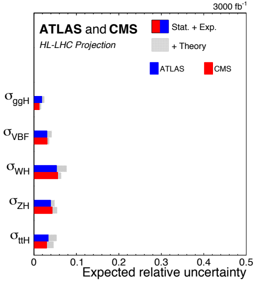
- Standard modell folyamatok hatáskeresztmetszetei

Hogyan aknázzuk ki a legteljesebb módon az LHC nyújtotta lehetőségeket?

Merre tovább?

Közvetlen felfedezés vagy közvetett jelek?





[CERN Yellow Rep. Monogr. 7 (2019) 585]

[CERN Yellow Rep. Monogr. 7 (2019) 221]

- Az új részecskék közvetlen keresése egyre nehézkesebb és lassabb lesz.
- Ugyanakkor kiváló lehetőség nagy pontosságú mérések elvégzéséhez.

A nagy pontosság kihívásával az elméleti oldalon is szembe kell néznünk!

Korai $pp \to WW$ hatáskeresztmetszet mérések az LHC-n

- ATLAS @ 8 TeV [ATLAS-CONF-2014-033]

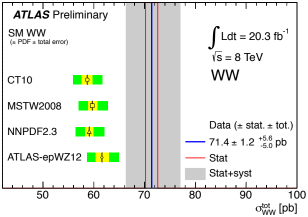
$$\sigma(pp \to WW) = 71.4^{+1.2}_{-1.2}(\text{stat})^{+5.0}_{-4.4}(\text{syst})^{+2.2}_{-2.1}(\text{lumi})\ \text{pb}$$

- Standard modell jóslat NLO rendben

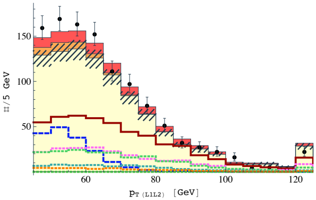
$$\sigma_{\text{NLO}}(pp \to WW) = 58.7^{+3.0}_{-2.7}\ \text{pb}$$

- Hasonló eltérés a CMS-nél és 7 TeV-en

$$\boxed{\Delta(\text{mérés/NLO, ATLAS+CMS}) \sim 3\sigma}$$



Remek! Szuperszimmetrikus csardzsínó párkeltés (alaposan tanulmányozott) jele.



[Phys. Rev. D 87 (2013) 3, 031701]

- csardzsínó párkeltés járuléka
- $m(\chi^{\pm}) = 110$ GeV

Elméleti fejlemények

- Második kvantum-színdinamikai sugárzási (NNLO QCD) korrekciók kiszámolása ⇒ az NNLO korrekció figyelembevétele az NLO jóslatot $\sim +10\%$-al növeli

[Phys. Rev. Lett. 113 (2014) 21, 212001]

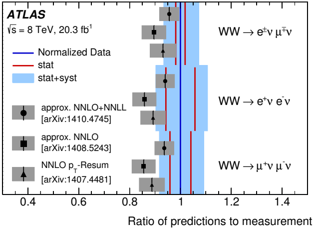
	$\sigma_{\text{inclusive}}$ [fb]		$\sigma/\sigma_{\text{NLO}} - 1$	
$\sqrt{s}$	8 TeV	13 TeV	8 TeV	13 TeV
LO	$425.41(4)\,^{+2.8\%}_{-3.6\%}$	$778.99\ (8)\,^{+5.7\%}_{-6.7\%}$	-31.8%	-35.4%
NLO	$623.47(6)\,^{+3.6\%}_{-2.9\%}$	$1205.11(12)\,^{+3.9\%}_{-3.1\%}$	0	0
NLO′	$635.95(6)\,^{+3.6\%}_{-2.8\%}$	$1235.82(13)\,^{+3.9\%}_{-3.1\%}$	$+\ 2.0\%$	$+\ 2.5\%$
NLO′$+gg$	$655.83(8)\,^{+4.3\%}_{-3.3\%}$	$1286.81(13)\,^{+4.8\%}_{-3.7\%}$	$+\ 5.2\%$	$+\ 6.8\%$
NNLO	$690.4(5)\,^{+2.2\%}_{-1.9\%}$	$1370.9(11)\,^{+2.6\%}_{-2.3\%}$	$+10.7\%$	$+13.8\%$

[JHEP 08 (2016) 140]

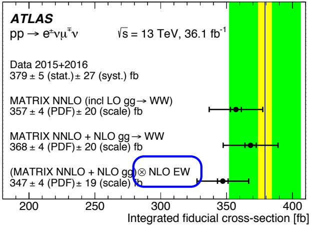
- Az analízis egyéb elemeinek (pl. a háttér elnyomásához használt dzset-vétó) megfelelő modellezésében is fontos szerepet játszanak a magasabb rendű perturbatív járulékok.

Két lecke a közelmúltból

A végső összehasonlítás 8 TeV-en, illetve 13 TeV-en



[JHEP 09 (2016) 029]



[Eur. Phys. J. C 79 (2019) 10]

Tanulságok:

- A pontos és megfelelően kontrollált elméleti jóslat alapvető fontosságú.
- A magasabb rendű perturbatív effektusok szerepe jelentős.
- Mára a magasabb rendű elektrogyenge korrekciók kiszámolása is lényegessé vált.

Két lecke a közelmúltból

t-kvarkok keletkezése a Tevatron-on

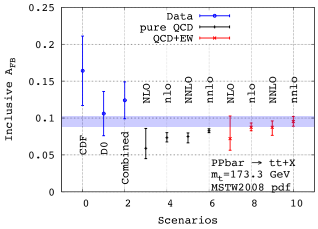
- A Tevatron proton-antiproton ($p\bar{p}$) ütköztető, a keletkező t-kvark jellemzően a proton nyaláb iránya által definiált térrészbe szóródik.
- Ez lehetővé teszi egy „előre-hátra” aszimmetria definiálását. Ha $\Delta y \equiv y_t - y_{\bar{t}}$ a t-kvark és a t-antikvark rapiditásának a különbsége, akkor

$$A_{\mathrm{FB}} = \frac{\sigma(\Delta y > 0) - \sigma(\Delta y < 0)}{\sigma(\Delta y > 0) + \sigma(\Delta y < 0)}$$

t-kvark előre-hátra aszimmetria

[Phys. Rev. Lett. 115 (2015) 5, 052001]

- A mérések és elméleti jóslatok eltérése kezdetben $> 3\sigma$, majd a mérések finomítása után ~ 2–3σ.
- Új fizika? (Pl. új nehéz semleges vektorbozon.) Kritikus a magasabb rendű perturbatív járulékok ismerete.
- A második kvantum-színdinamikai sugárzási korrekciókon (NNLO QCD) kívül fontos az első elektrogyenge sugárzási korrekció (NLO EW) figyelembe vétele is.



pontosabb modellezés

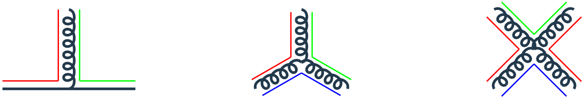
Hatáskeresztmetszetek a QCD-ben

Az erős kölcsönhatás

Az LHC proton-proton ütköztető, ezért az erős kölcsönhatás minden ütközésben szerepet kap.

Az erős kölcsönhatás

- A kvarkok (——) színtöltései között ható nemabeli mértékkölcsönhatás (kvantum-színdinamika, quantum chromodynamics, QCD).
- A kölcsönhatást közvetítő bozonok, a gluonok () is hordoznak színtöltést.



- A QCD aszimptotikusan szabad elmélet: a kvarkok és gluonok (együttesen partonok) közötti kölcsönhatás erőssége az energia növelésével csökken.

A QCD alapos elméleti megértése elengedhetetlen az LHC kísérleti adatainak értelmezéséhez.

Perturbatív QCD

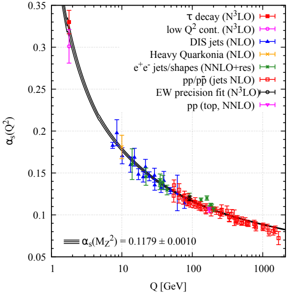
A QCD nagyenergiás részecskeütközési folyamatok leírására történő alkalmazásának eszköze a perturbációszámítás.

- a vizsgált mennyiséget valamely „kis” paraméter szerinti sorfejtésként állítjuk elő

$$\sigma = \alpha_S^p \left[\sigma_0 + \alpha_S \sigma_1 + \alpha_S^2 \sigma_2 + \ldots \right]$$

Az erős csatolás

- a QCD-ben a kölcsönhatás erősségét jellemző „kis” paraméter az ún. erős csatolás, tipikus számértéke, $\alpha_S(Q) \sim 0.1$
- a perturbatív módszer alkalmazhatóságának alapja a QCD esetén az aszimptotikus szabadság: $\alpha_S(Q)$ értéke az ütközési energia növelésével csökken



[PDG Review of Particle Physics (2021)]

Perturbatív QCD

A jóslat pontossága javítható több tag figyelembevételével.

- a vezető rendű (leading order, LO) jóslat a QCD-ben nagyságrendi becslés
- legalább az első korrekció (next-to-leading order, NLO) figyelembevétele szükséges a mennyiségek realisztikus becsléséhez
- a második korrekció (next-to-next-to-leading order, NNLO) kiszámolása fontossá válik, ha nagy pontosságú elméleti becslésre van szükség

Cél: az NNLO QCD korrekciók kiértékelését lehetővé tevő általános és hatékony számolási eljárás megfogalmazása.

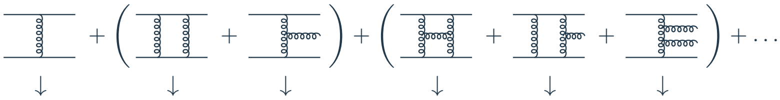
A hatáskeresztmetszet a perturbációszámításban

A hatáskeresztmetszetet az erős csatolás, $\alpha_S(\mu)$ szerinti sor alakjában írjuk fel:

$$\sigma_m = \alpha_S^p(\mu)\left[\sigma_m^{\mathrm{LO}} + \alpha_S(\mu)\sigma_m^{\mathrm{NLO}} + \alpha_S^2(\mu)\sigma_m^{\mathrm{NNLO}} + \dots\right]$$

A hatáskeresztmetszet kiszámolása két alapvető problémát vet fel

1. ki kell számolni reakcióhoz tartozó kvantummechanikai átmeneti valószínűségi amplitúdót („mátrixelemeket'') a perturbatív korrekcióival (magasabb rend $\sim$ több vertex) együtt, pl.



$$|\mathcal{M}_m^{(0)}\rangle \qquad |\mathcal{M}_m^{(1)}\rangle \quad |\mathcal{M}_{m+1}^{(0)}\rangle \qquad |\mathcal{M}_m^{(2)}\rangle \quad |\mathcal{M}_{m+1}^{(1)}\rangle \quad |\mathcal{M}_{m+2}^{(0)}\rangle$$

2. az átmeneti valószínűséget összegezni és integrálni kell a különböző végállapoti konfigurációkra, pl. a végállapoti részecskék típusára és impulzusaira („fázistér integrálás'')

Az NNLO korrekció

Egy általános m-dzset hatáskeresztmetszethez tartozó NNLO korrekció három tag összege

$$\sigma^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+2} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RR}}_{m+2} J_{m+2} + \int_{m+1} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RV}}_{m+1} J_{m+1} + \int_{m} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{VV}}_{m} J_{m} \,.$$

A három tagban a végállapoti részecskék száma különböző, ezért különböző fázisterek felett kell őket integrálni:

1. duplán valós $\quad \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RR}}_{m+2} = \mathrm{d}\phi_{m+2}\,|\mathcal{M}^{(0)}_{m+2}|^2$
2. valós-virtuális $\quad \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RV}}_{m+1} = \mathrm{d}\phi_{m+1}\,2\Re\langle\mathcal{M}^{(0)}_{m+1}|\mathcal{M}^{(1)}_{m+1}\rangle$
3. duplán virtuális $\quad \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{VV}}_{m} = \mathrm{d}\phi_{m}\left[2\Re\langle\mathcal{M}^{(0)}_{m}|\mathcal{M}^{(2)}_{m}\rangle + |\mathcal{M}^{(1)}_{m}|^2\right]$

J_n az ún. dzset függvény (vagy mérőfüggvény), a fizikai mennyiséget definiálja, amelyet számolunk.

- alakja (bizonyos feltételek mellett) tetszőlegesen bonyolult lehet, tartalmazhat fázistér vágásokat, Dirac-féle δ-függvényeket, stb.
- ezért a fázistérintegrálok analitikus elvégzése általában reménytelen, az integrálást numerikusan kell elvégezni

Feloldatlan partonok

Egy partont feloldatlannak nevezünk, ha az energiája sokkal kisebb, mint a többi parton jellemző energiája (lágy határeset), vagy ha impulzusa közel párhuzamos egy másik parton impulzusával (kollineáris határeset).

Képletesen ha egy $n+p$-részecskés végállapotban p parton feloldatlan, akkor a végállapoti impulzus konfiguráció $n+p$ impulzusa megkülönböztethetetlen egy n-részecskés végállapot impulzus konfigurációjától. Ekkor p-szeresen feloldatlan konfigurációról beszélünk.

LO rendben az összes végállapoti parton feloldott (definíció szerint), NLO rendben legfeljebb egy parton válhat feloldatlanná, NNLO rendben kétszeresen feloldatlan konfigurációk is előfordulhatnak.

Feloldatlan partonok

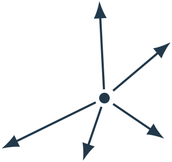
Egy partont feloldatlannak nevezünk, ha az energiája sokkal kisebb, mint a többi parton jellemző energiája (lágy határeset), vagy ha impulzusa közel párhuzamos egy másik parton impulzusával (kollineáris határeset).

Képletesen ha egy $n+p$-részecskés végállapotban p parton feloldatlan, akkor a végállapoti impulzus konfiguráció $n+p$ impulzusa megkülönböztethetetlen egy n-részecskés végállapot impulzus konfigurációjától. Ekkor p-szeresen feloldatlan konfigurációról beszélünk.

LO rendben az összes végállapoti parton feloldott (definíció szerint), NLO rendben legfeljebb egy parton válhat feloldatlanná, NNLO rendben kétszeresen feloldatlan konfigurációk is előfordulhatnak.

Példák:

- 5 feloldott parton, 0 feloldatlan parton
- az összes impulzus „elkülönül” és „kemény”



Feloldatlan partonok

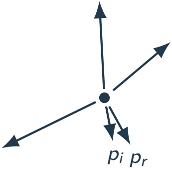
Egy partont feloldatlannak nevezünk, ha az energiája sokkal kisebb, mint a többi parton jellemző energiája (lágy határeset), vagy ha impulzusa közel párhuzamos egy másik parton impulzusával (kollineáris határeset).

Képletesen ha egy $n+p$-részecskés végállapotban p parton feloldatlan, akkor a végállapoti impulzus konfiguráció $n+p$ impulzusa megkülönböztethetetlen egy n-részecskés végállapot impulzus konfigurációjától. Ekkor p-szeresen feloldatlan konfigurációról beszélünk.

LO rendben az összes végállapoti parton feloldott (definíció szerint), NLO rendben legfeljebb egy parton válhat feloldatlanná, NNLO rendben kétszeresen feloldatlan konfigurációk is előfordulhatnak.

Példák:

- 4 feloldott parton, 1 feloldatlan parton
- egy pár impulzus kollineáris, $p_i||p_r$



Feloldatlan partonok

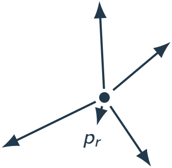
Egy partont feloldatlannak nevezünk, ha az energiája sokkal kisebb, mint a többi parton jellemző energiája (lágy határeset), vagy ha impulzusa közel párhuzamos egy másik parton impulzusával (kollineáris határeset).

Képletesen ha egy $n+p$-részecskés végállapotban p parton feloldatlan, akkor a végállapoti impulzus konfiguráció $n+p$ impulzusa megkülönböztethetetlen egy n-részecskés végállapot impulzus konfigurációjától. Ekkor p-szeresen feloldatlan konfigurációról beszélünk.

LO rendben az összes végállapoti parton feloldott (definíció szerint), NLO rendben legfeljebb egy parton válhat feloldatlanná, NNLO rendben kétszeresen feloldatlan konfigurációk is előfordulhatnak.

Példák:

- 4 feloldott parton, 1 feloldatlan parton
- egy impulzus lágy, $p_r \to 0$



Feloldatlan partonok

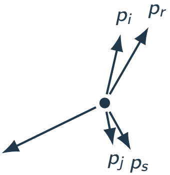
Egy partont feloldatlannak nevezünk, ha az energiája sokkal kisebb, mint a többi parton jellemző energiája (lágy határeset), vagy ha impulzusa közel párhuzamos egy másik parton impulzusával (kollineáris határeset).

Képletesen ha egy $n+p$-részecskés végállapotban p parton feloldatlan, akkor a végállapoti impulzus konfiguráció $n+p$ impulzusa megkülönböztethetetlen egy n-részecskés végállapot impulzus konfigurációjától. Ekkor p-szeresen feloldatlan konfigurációról beszélünk.

LO rendben az összes végállapoti parton feloldott (definíció szerint), NLO rendben legfeljebb egy parton válhat feloldatlanná, NNLO rendben kétszeresen feloldatlan konfigurációk is előfordulhatnak.

Példák:

- 3 feloldott parton, 2 feloldatlan parton
- két pár impulzus kollineáris, $p_i || p_r$ és $p_j || p_s$



Feloldatlan partonok

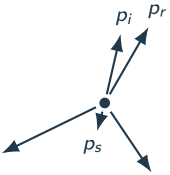
Egy partont feloldatlannak nevezünk, ha az energiája sokkal kisebb, mint a többi parton jellemző energiája (lágy határeset), vagy ha impulzusa közel párhuzamos egy másik parton impulzusával (kollineáris határeset).

Képletesen ha egy $n+p$-részecskés végállapotban p parton feloldatlan, akkor a végállapoti impulzus konfiguráció $n+p$ impulzusa megkülönböztethetetlen egy n-részecskés végállapot impulzus konfigurációjától. Ekkor p-szeresen feloldatlan konfigurációról beszélünk.

LO rendben az összes végállapoti parton feloldott (definíció szerint), NLO rendben legfeljebb egy parton válhat feloldatlanná, NNLO rendben kétszeresen feloldatlan konfigurációk is előfordulhatnak.

Példák:

- 3 feloldott parton, 2 feloldatlan parton
- egy pár impulzus kollineáris, egy harmadik impulzus lágy, $p_i || p_r$ és $p_s \to 0$



A probléma – infravörös divergenciák

Egy általános m-dzset hatáskeresztmetszethez tartozó NNLO korrekció három tag összege

$$\sigma^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+2} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RR}}_{m+2} J_{m+2} + \int_{m+1} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RV}}_{m+1} J_{m+1} + \int_{m} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{VV}}_{m} J_{m}$$

A probléma – infravörös divergenciák

Egy általános m-dzset hatáskeresztmetszethez tartozó NNLO korrekció három tag összege

$$\sigma^{\mathrm{NNLO}} = \boxed{\int_{m+2} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RR}}_{m+2} J_{m+2}} + \int_{m+1} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RV}}_{m+1} J_{m+1} + \int_{m} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{VV}}_{m} J_{m}$$

Duplán valós

- fa szintű mátrixelemek, $m+2$-részecskés kinematika
- a mátrixelem divergál, ha egy vagy két parton feloldatlan
- a fázistér integrál divergens (dim. reg.-ben ϵ pólusok a fázistér integrálból $\mathrm{O}(\epsilon^{-4})$-ig)
- nincsenek hurkok, nincs explicit ϵ pólus

A probléma – infravörös divergenciák

Egy általános m-dzset hatáskeresztmetszethez tartozó NNLO korrekció három tag összege

$$\sigma^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+2} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RR}}_{m+2} J_{m+2} + \boxed{\int_{m+1} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RV}}_{m+1} J_{m+1}} + \int_{m} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{VV}}_{m} J_{m}$$

Duplán valós

- fa szintű mátrixelemek, $m+2$-részecskés kinematika
- a mátrixelem divergál, ha egy vagy két parton feloldatlan
- a fázistér integrál divergens (dim. reg.-ben ϵ pólusok a fázistér integrálból $\mathrm{O}(\epsilon^{-4})$-ig)
- nincsenek hurkok, nincs explicit ϵ pólus

Valós-virtuális

- egy-hurok mátrixelemek, $m+1$-részecskés kinematika
- a mátrixelem divergál, ha egy parton feloldatlan
- a fázistér integrál divergens (dim. reg.-ben ϵ pólusok a fázistér integrálból $\mathrm{O}(\epsilon^{-2})$-ig)
- egy hurok, dim. reg.-ben explicit ϵ pólusok a hurok integrálból $\mathrm{O}(\epsilon^{-2})$-ig

A probléma – infravörös divergenciák

Egy általános m-dzset hatáskeresztmetszethez tartozó NNLO korrekció három tag összege

$$\sigma^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+2} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RR}}_{m+2} J_{m+2} + \int_{m+1} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RV}}_{m+1} J_{m+1} + \boxed{\int_{m} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{VV}}_{m} J_{m}}$$

Duplán valós

- fa szintű mátrixelemek, $m+2$-részecskés kinematika
- a mátrixelem divergál, ha egy vagy két parton feloldatlan
- a fázistér integrál divergens (dim. reg.-ben ϵ pólusok a fázistér integrálból $\mathrm{O}(\epsilon^{-4})$-ig)
- nincsenek hurkok, nincs explicit ϵ pólus

Valós-virtuális

- egy-hurok mátrixelemek, $m+1$-részecskés kinematika
- a mátrixelem divergál, ha egy parton feloldatlan
- a fázistér integrál divergens (dim. reg.-ben ϵ pólusok a fázistér integrálból $\mathrm{O}(\epsilon^{-2})$-ig)
- egy hurok, dim. reg.-ben explicit ϵ pólusok a hurok integrálból $\mathrm{O}(\epsilon^{-2})$-ig

Duplán virtuális

- két-hurok mátrixelemek, m-részecskés kinematika
- a feloldatlan partonokhoz tartozó divergenciákat a dzset függvény kiszűri
- a fázistér integrál véges
- két hurok, dim. reg.-ben explicit ϵ pólusok a hurok integrálokból $\mathrm{O}(\epsilon^{-4})$-ig

A Kinoshita-Lee-Nauenberg tétel

Egy általános m-dzset hatáskeresztmetszethez tartozó NNLO korrekció három tag összege

$$\sigma^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+2} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RR}}_{m+2} J_{m+2} + \int_{m+1} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RV}}_{m+1} J_{m+1} + \int_{m} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{VV}}_{m} J_{m}$$

azonban naivan (pl. $d = 4$ dimenzióban) mindhárom divergens (UV renormálás után is)!

Kinoshita-Lee-Nauenberg tétel

Elegendően inkluzív („infravörös és kollineáris biztonságos") mennyiségek esetén az infravörös szingularitások a perturbációszámítás adott rendjében a valós és virtuális járulékok között kiesnek. Vagyis megfelelően definiált fizikai mennyiségekhez a teljes korrekció véges.

Azonban

A különböző járulékokat (RR, RV és VV) általában csak numerikusan lehet kiértékelni. (Hiszen J_n tetszőlegesen bonyolult lehet.) Ezért bármilyen konkrét mennyiség számszerű meghatározásához a közbenső lépésekben megjelenő divergenciákat konzisztens módon kezelni kell.

Sugárzási korrekciók kezelése levonással

A levonási módszer alapgondolata

Ötlet

Alkalmasan megválasztott közelítő hatáskeresztmetszetek segítségével rendezzük át a szingularitásokat a teljes sugárzási korrekció egyes járulékai között olyan módon, hogy az átrendezés után minden járulék külön-külön is véges legyen!

Szingularitások átrendezése levonással

Ki szeretnénk számolni σ-t $\epsilon = 0$-nál

$$\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x) + \sigma^{\mathrm{V}} \qquad \text{ahol} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x) = \mathrm{d}x\, x^{-1-\epsilon} R(x)\,, \quad R(0) = R_0 < \infty \\ \sigma^{\mathrm{V}} = R_0/\epsilon + V\,, \quad V < \infty \end{array}$$

Szingularitások átrendezése levonással

Ki szeretnénk számolni σ-t $\epsilon = 0$-nál

$$\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x) + \sigma^{\mathrm{V}} \qquad \text{ahol} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x) = \mathrm{d}x\, x^{-1-\epsilon} R(x)\,, \quad R(0) = R_0 < \infty \\ \sigma^{\mathrm{V}} = R_0/\epsilon + V\,, \quad V < \infty \end{array}$$

1. definiáljunk egy levonási ellentagot, $\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A}}(x)$-t, amelynek a szingularitás szerkezete megegyezik $\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x)$ szingularitás szerkezetével

$$\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A}}(x) = \mathrm{d}x\, x^{-1-\epsilon} R_0$$

Szingularitások átrendezése levonással

Ki szeretnénk számolni σ-t $\epsilon = 0$-nál

$$\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x) + \sigma^{\mathrm{V}} \qquad \text{ahol} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x) = \mathrm{d}x\, x^{-1-\epsilon} R(x)\,, \quad R(0) = R_0 < \infty \\ &\sigma^{\mathrm{V}} = R_0/\epsilon + V\,, \quad V < \infty \end{aligned}$$

1. definiáljunk egy levonási ellentagot, $\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A}}(x)$-t, amelynek a szingularitás szerkezete megegyezik $\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x)$ szingularitás szerkezetével

$$\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A}}(x) = \mathrm{d}x\, x^{-1-\epsilon} R_0$$

2. használjuk az ellentagot a szingularitás átrendezésére

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^1 \left[\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x) - \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A}}(x)\right]_{\epsilon=0} + \left[\sigma^{\mathrm{V}} + \int_0^1 \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A}}(x)\right]_{\epsilon=0} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{R(x) - R_0}{x^{1+\epsilon}}\right]_{\epsilon=0} + \left[\frac{R_0}{\epsilon} + V - \frac{R_0}{\epsilon}\right]_{\epsilon=0} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{R(x) - R_0}{x} + V \end{aligned}$$

Szingularitások átrendezése levonással

Ki szeretnénk számolni σ-t $\epsilon = 0$-nál

$$\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x) + \sigma^{\mathrm{V}} \qquad \text{ahol} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x) = \mathrm{d}x\, x^{-1-\epsilon} R(x)\,, \quad R(0) = R_0 < \infty \\ &\sigma^{\mathrm{V}} = R_0/\epsilon + V\,, \quad V < \infty \end{aligned}$$

1. definiáljunk egy levonási ellentagot, $\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A}}(x)$-t, amelynek a szingularitás szerkezete megegyezik $\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x)$ szingularitás szerkezetével

$$\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A}}(x) = \mathrm{d}x\, x^{-1-\epsilon} R_0$$

2. használjuk az ellentagot a szingularitás átrendezésére

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^1 \left[\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}(x) - \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A}}(x)\right]_{\epsilon=0} + \left[\sigma^{\mathrm{V}} + \int_0^1 \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A}}(x)\right]_{\epsilon=0} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{R(x) - R_0}{x^{1+\epsilon}}\right]_{\epsilon=0} + \left[\frac{R_0}{\epsilon} + V - \frac{R_0}{\epsilon}\right]_{\epsilon=0} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{R(x) - R_0}{x} + V \end{aligned}$$

3. az utolsó sorban mindkét tag véges, numerikusan kiszámítható

A levonási módszer NLO rendben

Adott m-dzset mennyiség NLO korrekciója két tag, a valós és virtuális járulékok, összege

$$\sigma^{\mathrm{NLO}}[J] = \int_{m+1} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}_{m+1} J_{m+1} + \int_m \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{V}}_m J_m$$

A két járulék külön-külön infravörös divergens, de csak az egyszeresen feloldatlan konfigurációk szingulárisak. A szingularitások átrendezhetőek egyetlen közelítő hatáskeresztmetszet segítségével

$$\sigma^{\mathrm{NLO}}[J] = \int_{m+1} \left[\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}_{m+1} J_{m+1} - \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A_1}}_{m+1} J_m\right]_{d=4} + \int_m \left[\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{V}}_m + \int_1 \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A_1}}_{m+1}\right]_{d=4} J_m$$

A közelítő hatáskeresztmetszetek pontos definiálásához figyelembe kell venni, hogy:

- $\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A_1}}_{m+1}$ és $\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R}}_{m+1}$ szingularitás szerkezete meg kell, hogy egyezzen (d dimenzióban)
- $\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{R,A_1}}_{m+1}$-et összegeznünk és integrálnunk kell a feloldatlan parton kvantumszámaira és impulzusára ($\int_1$)

A közelítő hatáskeresztmetszet megszerkesztésére NLO rendben több eljárás ismert $\Rightarrow$ különböző levonási sémák

A CoLoRFulNNLO levonási módszer

CoLoRFulNNLO: Completely Local subtRactions for Fully differential NNLO

[Del Duca, SG, Trócsányi 2005-6]

Adott m-dzset mennyiség NNLO korrekciója három tag összege

$$\sigma^{\mathrm{NNLO}}[J] = \int_{m+2} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RR}}_{m+2} J_{m+2} + \int_{m+1} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{RV}}_{m+1} J_{m+1} + \int_{m} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{VV}}_{m} J_{m}$$

A három járulék külön-külön infravörös divergens, az egyszeresen és kétszeresen feloldatlan konfigurációk szingulárisak.

- RR: egyszeresen és kétszeresen feloldatlan valós emisszió
- RV: egyszeresen feloldatlan valós emisszió $\oplus$ ϵ-pólusok az $m+1$-partonos egy-hurok mátrixelemekből
- VV: ϵ-pólusok az m-partonos két-hurok mátrixelemekből

Az ellentagoknak mind az egyszeresen, mind a kétszeresen feloldatlan valós emissziót regularizálni kell $\Rightarrow$ több különböző közelítő hatáskeresztmetszet levonása szükséges.

Az RR járulékban külön levonások regularizálják az egy illetve két feloldatlan partonhoz tartozó szingularitásokat

$$\sigma_{m+2}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+2} \left\{ \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR}} J_{m+2} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_2} J_m - \left[\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} J_{m+1} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_{12}} J_m \right] \right\}_{d=4}$$

- A_1 és A_2 metszete nem üres $\Rightarrow$ A_{12} szerepe a dupla levonás elkerülése a metszeten

Az RV járulékban csak egyszeresen feloldatlan valós emisszió fordul elő

$$\sigma_{m+1}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+1} \left\{ \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV}} + \int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} \right] J_{m+1} - \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV},\mathrm{A}_1} + \left(\int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} \right)^{\mathrm{A}_1} \right] J_m \right\}_{d=4}$$

- Az integrált A_1 az RR járulékból maga is szinguláris $\Rightarrow$ ehhez a taghoz saját levonást kell bevezetni (utolsó tag)

Az m-partonos járulék a duplán virtuális korrekciót és integrált levonásokat tartalmaz

$$\sigma_m^{\mathrm{NNLO}} = \int_m \left\{ \mathrm{d}\sigma_m^{\mathrm{VV}} + \int_2 \left[\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_2} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_{12}} \right] + \int_1 \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV},\mathrm{A}_1} + \left(\int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} \right)^{\mathrm{A}_1} \right] \right\}_{d=4} J_m$$

Az RR járulékban külön levonások regularizálják az egy illetve két feloldatlan partonhoz tartozó szingularitásokat

$$\sigma_{m+2}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+2} \left\{ \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR}} J_{m+2} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_2}} J_m - \left[\boxed{\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_1}}} J_{m+1} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_{12}}} J_m \right] \right\}_{d=4}$$

- $\mathrm{A_1}$ és $\mathrm{A_2}$ metszete nem üres $\Rightarrow$ $\mathrm{A_{12}}$ szerepe a dupla levonás elkerülése a metszeten

Az RV járulékban csak egyszeresen feloldatlan valós emisszió fordul elő

$$\sigma_{m+1}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+1} \left\{ \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV}} + \int_1 \boxed{\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_1}}} \right] J_{m+1} - \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV,A_1}} + \left(\int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_1}} \right)^{\mathrm{A_1}} \right] J_m \right\}_{d=4}$$

- Az integrált $\mathrm{A_1}$ az RR járulékból maga is szinguláris $\Rightarrow$ ehhez a taghoz saját levonást kell bevezetni (utolsó tag)

Az m-partonos járulék a duplán virtuális korrekciót és integrált levonásokat tartalmaz

$$\sigma_{m}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m} \left\{ \mathrm{d}\sigma_{m}^{\mathrm{VV}} + \int_2 \left[\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_2}} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_{12}}} \right] + \int_1 \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV,A_1}} + \left(\int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_1}} \right)^{\mathrm{A_1}} \right] \right\}_{d=4} J_m$$

Az RR járulékban külön levonások regularizálják az egy illetve két feloldatlan partonhoz tartozó szingularitásokat

$$\sigma_{m+2}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+2} \left\{ \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR}} J_{m+2} - \boxed{\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_2}} J_m - \left[\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} J_{m+1} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_{12}} J_m \right] \right\}_{d=4}$$

- A_1 és A_2 metszete nem üres $\Rightarrow$ A_{12} szerepe a dupla levonás elkerülése a metszeten

Az RV járulékban csak egyszeresen feloldatlan valós emisszió fordul elő

$$\sigma_{m+1}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+1} \left\{ \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV}} + \int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} \right] J_{m+1} - \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV},\mathrm{A}_1} + \left(\int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} \right)^{\mathrm{A}_1} \right] J_m \right\}_{d=4}$$

- Az integrált A_1 az RR járulékból maga is szinguláris $\Rightarrow$ ehhez a taghoz saját levonást kell bevezetni (utolsó tag)

Az m-partonos járulék a duplán virtuális korrekciót és integrált levonásokat tartalmaz

$$\sigma_{m}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m} \left\{ \mathrm{d}\sigma_{m}^{\mathrm{VV}} + \int_2 \left[\boxed{\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_2}} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_{12}} \right] + \int_1 \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV},\mathrm{A}_1} + \left(\int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} \right)^{\mathrm{A}_1} \right] \right\}_{d=4} J_m$$

Az RR járulékban külön levonások regularizálják az egy illetve két feloldatlan partonhoz tartozó szingularitásokat

$$\sigma_{m+2}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+2} \left\{ \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR}} J_{m+2} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_2}} J_m - \left[\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_1}} J_{m+1} - \boxed{\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_{12}}}} J_m \right] \right\}_{d=4}$$

- A_1 és A_2 metszete nem üres $\Rightarrow$ A_{12} szerepe a dupla levonás elkerülése a metszeten

Az RV járulékban csak egyszeresen feloldatlan valós emisszió fordul elő

$$\sigma_{m+1}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+1} \left\{ \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV}} + \int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_1}} \right] J_{m+1} - \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV,A_1}} + \left(\int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_1}} \right)^{\mathrm{A_1}} \right] J_m \right\}_{d=4}$$

- Az integrált A_1 az RR járulékból maga is szinguláris $\Rightarrow$ ehhez a taghoz saját levonást kell bevezetni (utolsó tag)

Az m-partonos járulék a duplán virtuális korrekciót és integrált levonásokat tartalmaz

$$\sigma_{m}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m} \left\{ \mathrm{d}\sigma_{m}^{\mathrm{VV}} + \int_2 \left[\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_2}} - \boxed{\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_{12}}}} \right] + \int_1 \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV,A_1}} + \left(\int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR,A_1}} \right)^{\mathrm{A_1}} \right] \right\}_{d=4} J_m$$

Az RR járulékban külön levonások regularizálják az egy illetve két feloldatlan partonhoz tartozó szingularitásokat

$$\sigma_{m+2}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+2} \left\{ \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR}} J_{m+2} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_2} J_m - \left[\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} J_{m+1} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_{12}} J_m \right] \right\}_{d=4}$$

- A_1 és A_2 metszete nem üres $\Rightarrow$ A_{12} szerepe a dupla levonás elkerülése a metszeten

Az RV járulékban csak egyszeresen feloldatlan valós emisszió fordul elő

$$\sigma_{m+1}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+1} \left\{ \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV}} + \int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} \right] J_{m+1} - \left[\boxed{\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV},\mathrm{A}_1}} + \left(\int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} \right)^{\mathrm{A}_1} \right] J_m \right\}_{d=4}$$

- Az integrált A_1 az RR járulékból maga is szinguláris $\Rightarrow$ ehhez a taghoz saját levonást kell bevezetni (utolsó tag)

Az m-partonos járulék a duplán virtuális korrekciót és integrált levonásokat tartalmaz

$$\sigma_{m}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m} \left\{ \mathrm{d}\sigma_{m}^{\mathrm{VV}} + \int_2 \left[\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_2} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_{12}} \right] + \int_1 \left[\boxed{\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV},\mathrm{A}_1}} + \left(\int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} \right)^{\mathrm{A}_1} \right] \right\}_{d=4} J_m$$

Az RR járulékban külön levonások regularizálják az egy illetve két feloldatlan partonhoz tartozó szingularitásokat

$$\sigma_{m+2}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+2} \left\{ \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR}} J_{m+2} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_2} J_m - \left[\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} J_{m+1} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_{12}} J_m \right] \right\}_{d=4}$$

- A_1 és A_2 metszete nem üres $\Rightarrow$ A_{12} szerepe a dupla levonás elkerülése a metszeten

Az RV járulékban csak egyszeresen feloldatlan valós emisszió fordul elő

$$\sigma_{m+1}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m+1} \left\{ \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV}} + \int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} \right] J_{m+1} - \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV},\mathrm{A}_1} + \boxed{\left(\int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} \right)^{\mathrm{A}_1}} \right] J_m \right\}_{d=4}$$

- Az integrált A_1 az RR járulékból maga is szinguláris $\Rightarrow$ ehhez a taghoz saját levonást kell bevezetni (utolsó tag)

Az m-partonos járulék a duplán virtuális korrekciót és integrált levonásokat tartalmaz

$$\sigma_{m}^{\mathrm{NNLO}} = \int_{m} \left\{ \mathrm{d}\sigma_{m}^{\mathrm{VV}} + \int_2 \left[\mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_2} - \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_{12}} \right] + \int_1 \left[\mathrm{d}\sigma_{m+1}^{\mathrm{RV},\mathrm{A}_1} + \boxed{\left(\int_1 \mathrm{d}\sigma_{m+2}^{\mathrm{RR},\mathrm{A}_1} \right)^{\mathrm{A}_1}} \right] \right\}_{d=4} J_m$$

Közelítő hatáskeresztmetszetek megszerkesztése

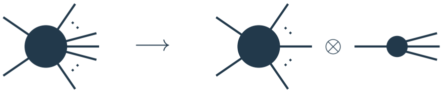
Közelítő hatáskeresztmetszetek a CoLoRFulNNLO módszerben

A CoLoRFulNNLO módszerben a közelítő hatáskeresztmetszetek explicit megszerkesztésének kiindulópontjául a QCD mátrixelemek szingularitás szerkezetét leíró infravörös faktorizációs tételek szolgálnak.

[Del Duca, SG, Trócsányi 2006; SG, Trócsányi 2006; SG 2009]

- a valós emisszió szingularitás szerkezete univerzális (folyamatfüggetlen)

$$|\mathcal{M}_{m+q}(\{p_m, p_q\})|^2 \xrightarrow{\{p_q\}\ \text{feloldatlan}} (8\pi\alpha_S\mu^{2\epsilon})^q \underbrace{Sing_q(\{p_q\})}_{\text{nem függ } \mathcal{M}\text{-től}} \otimes |\mathcal{M}_m(\{p_m\})|^2$$



- az infravörös faktorizációs tételek konkrét alakjai ismertek minden NNLO rendben megjelenő szingularitásra

[Bern, Dixon, Dunbar, Kosower 1994; Campbell, Glover 1997; Catani, Grazzini 1998; Bern, Del Duca, Kilgore, Schmidt 1998-9; Del Duca, Frizzo, Maltoni 1999; Kosower, Uwer 1999; Catani, Grazzini 2000; Kosower 2002; Kosower 2003]

Faktorizációs tételektől levonási tagokig

Az alábbi három problémára kell megoldást találni

1. El kell kerülni a többszörös levonást az átfedő szinguláris tartományokon: „határesetek illesztése”. Pl. NLO rendben: kollineáris + lágy − kollineáris-lágy határeset

$$\mathbf{A}_1 = \sum \Big(\mathbf{C}_1 + \mathbf{S}_1 - \mathbf{C}_1 \cap \mathbf{S}_1 \Big)$$

   Duplán valós emisszióra NNLO rendben (szita-elv)

$$\mathbf{A}_2 = \sum \Big[\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_{1;1} + \mathbf{CS}_{1;1} + \mathbf{S}_2 - (\mathbf{C}_2 \cap \mathbf{CS}_{1;1} + \mathbf{C}_2 \cap \mathbf{S}_2 + \mathbf{C}_{1;1} \cap \mathbf{CS}_{1;1} \\ + \mathbf{C}_{1;1} \cap \mathbf{S}_2 + \mathbf{CS}_{1;1} \cap \mathbf{S}_2) + (\mathbf{C}_2 \cap \mathbf{CS}_{1;1} \cap \mathbf{S}_2 + \mathbf{C}_{1;1} \cap \mathbf{CS}_{1;1} \cap \mathbf{S}_2) \Big]$$

2. A faktorizációs képleteket értelmezni kell a teljes fázistéren: „határesetek kiterjesztése”. Pontosan definiálni kell a faktorizációs tételekben megjelenő mennyiségeket a szinguláris tartományoktól távol.

$$\{p_m, p_q\} \longrightarrow \{\tilde{p}_m\} : \quad \mathrm{d}\phi_{m+q}(\{p_m, p_q\}; Q) = \mathrm{d}\phi_m(\{\tilde{p}_m\}; Q)[\mathrm{d}p_q]$$

3. A levonási tagokat integrálni kell a feloldatlan fázistér tartomány felett.

A CoLoRFulNNLO módszer általános tulajdonságai

Levonási tagok definíciója: QCD infravörös faktorizációs tételek alapján, egzakt fázistér faktorizációt felhasználva

- explicit képletek a kezdeti állapotban hadront nem tartalmazó folyamatokra
- nehéz kvark-antikvark pár esetére is (a kvarktömeg plusz technikai nehézség)
- tetszőleges kezdeti állapotokra való kiterjesztés folyamatban

A fázistéren teljesen differenciális, lokális levonási tagok

- tetszőleges infravörös és kollineáris biztonságos mennyiség számolható $d = 4$ dimenzióban
- a levonási tagok tartalmazzák a feloldatlan emisszióban fellépő spin és szín korrelációkat

Az integrált levonási tagok ϵ-pólusai analitikusan ismertek

- a duplán virtuális járulékban a póluskiejtés expliciten ellenőrizhető

A módszer folyamatfüggetlen módon implementálható numerikus kódban

- hatékony, kiváló numerikus pontosság és stabilitás

Alkalmazások

Alkalmazások

A CoLoRFulNNLO módszer alkalmazásai

- Higgs-bozon bomlása (tömeges) b-kvark párra NNLO rendben

  [Del Duca, Duhr, SG, Tramontano, Trócsányi 2015; SG, Tramontano 2020]

- alakváltozók az $e^+e^- \to 3j$ folyamatban NNLO rendben

  [Del Duca, Duhr, Kardos, SG, Trócsányi 2016; Del Duca, Duhr, Kardos, SG, Szőr, Trócsányi, Tulipánt 2016]

- $pp \to VH \to l\bar{l}b\bar{b} + X$ keltés az LHC-n NNLO rendben

  [Ferrera, SG, Tramontano 2018]

- energia-energia korreláció és az erős csatolás megmérése

  [Del Duca, Duhr, Kardos, SG, Trócsányi 2016; Tulipánt, Kardos, SG 2017; Kardos, Kluth, SG, Tulipánt, Verbytskyi, 2018]

- fésült alakváltozók az $e^+e^- \to 3j$ folyamatban NNLO rendben

  [Kardos, SG, Trócsányi 2018]

- dzset ráták és az erős csatolás megmérése

  [Verbytskyi, Banfi, Kardos, Monni, Kluth, SG, Szőr, Trócsányi, Tulipánt, Zanderighi 2019]

VH keltés $H \to b\bar{b}$ bomlással az LHC-n

Motivációk

- Higgs-bozon elsősorban b-kvarkokba bomlik, a $\mathrm{Br}(H \to b\bar{b}) = \Gamma_{H\to b\bar{b}}/\Gamma_H = 0.58$ ($m_H = 125$ GeV)
- a $H \to b\bar{b}$ bomlás kimutatásához a legérzékenyebb Higgs-bozon keltési csatorna az asszociált VH keletkezés
- egyedülálló folyamat, amelyben a Higgs-bozon mind vektorbozonokhoz, mind d-típusú kvarkokhoz való csatolása tanulmányozható
- meghatározó járulék a Higgs-bozon szélességének bizonytalanságában

Elmélet

- a keskeny szélesség közelítés nagyon pontos ($\Gamma_H \ll m_H$), ezért a keltést és a bomlást leíró teljesen differenciális számolások ismerete elegendő
- a VH keltés leptonikus V bomlással NNLO QCD-ben ismert

[Ferrera, Grazzini, Tramontano 2011]

- a $H \to b\bar{b}$ bomlás NNLO QCD-ben ismert

[Anastasiou, Herzog, Lazopoulos 2012;
Del Duca, Duhr, SG, Tramontano, Trócsányi 2015]

Teljes NNLO QCD korrekció a $VH(b\bar{b})$ folyamathoz

A $pp \to VH + X \to l_1 l_2 b\bar{b} + X$ folyamat hatáskeresztmetszete a keskeny szélesség közelítésben

$$d\sigma_{pp\to VH\to Vb\bar{b}} = d\sigma_{pp\to VH} \times \frac{d\Gamma_{H\to b\bar{b}}}{\Gamma_H} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} d\sigma^{(k)}_{pp\to VH}\right] \times \left[\frac{\sum_{k=0}^{\infty} d\Gamma^{(k)}_{H\to b\bar{b}}}{\sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^{(k)}_{H\to b\bar{b}}}\right] \times \mathrm{Br}(H\to b\bar{b})$$

A teljes NNLO eredményben minden tagot meg kell tartani másodrendig ($k = 2$-ig).

A korábbi részleges NNLO számolásokban a Higgs-bozon bomlásához tartozó NNLO korrekciót nem vették figyelembe

[Ferrera, Grazzini, Tramontano 2014-5
Campbell, Ellis, Williams 2016]

$$d\sigma^{\mathrm{NNLO(prod)+NLO(dec)}}_{pp\to VH\to Vb\bar{b}} = \left[d\sigma^{(0)}_{pp\to VH} \times \frac{d\Gamma^{(0)}_{H\to b\bar{b}} + d\Gamma^{(1)}_{H\to b\bar{b}}}{\Gamma^{(0)}_{H\to b\bar{b}} + \Gamma^{(1)}_{H\to b\bar{b}}} \right.$$
$$\left. + \left(d\sigma^{(1)}_{pp\to VH} + d\sigma^{(2)}_{pp\to VH} \right) \times \frac{d\Gamma^{(0)}_{H\to b\bar{b}}}{\Gamma^{(0)}_{H\to b\bar{b}}} \right] \times \mathrm{Br}(H\to b\bar{b})$$

Teljes NNLO QCD korrekció a $VH(b\bar{b})$ folyamathoz

Újdonság: figyelembe vesszük az NNLO korrekciót a Higgs-bozon bomlásában, illetve a keltésben és bomlásban is NLO rendű korrekciók kombinációját

$$
\begin{aligned}
d\sigma^{\mathrm{NNLO}}_{pp\to VH\to Vb\bar{b}} = \Bigg[& d\sigma^{(0)}_{pp\to VH} \times \frac{d\Gamma^{(0)}_{H\to b\bar{b}} + d\Gamma^{(1)}_{H\to b\bar{b}} + \boxed{d\Gamma^{(2)}_{H\to b\bar{b}}}}{\Gamma^{(0)}_{H\to b\bar{b}} + \Gamma^{(1)}_{H\to b\bar{b}} + \boxed{\Gamma^{(2)}_{H\to b\bar{b}}}} \\
& + d\sigma^{(1)}_{pp\to VH} \times \frac{d\Gamma^{(0)}_{H\to b\bar{b}} + \boxed{d\Gamma^{(1)}_{H\to b\bar{b}}}}{\Gamma^{(0)}_{H\to b\bar{b}} + \boxed{\Gamma^{(1)}_{H\to b\bar{b}}}} \\
& + d\sigma^{(2)}_{pp\to VH} \times \frac{d\Gamma^{(0)}_{H\to b\bar{b}}}{\Gamma^{(0)}_{H\to b\bar{b}}} \Bigg] \times \mathrm{Br}(H\to b\bar{b})
\end{aligned}
$$

Eredmények: hatáskeresztmetszetek

Kinematikai vágások

$pp \to W^+H + X \to l\nu_l b\bar{b} + X$

- $p_\mathrm{T}^l > 15$ GeV, $|\eta_l| < 2.5$
- $E_\mathrm{T}^{miss} > 30$ GeV
- $p_\mathrm{T}^W > 150$ GeV
- ≥ 2 b-dzset, $p_\mathrm{T}^b > 25$ GeV és $|\eta_b| < 2.5$

$pp \to ZH + X \to \nu\nu b\bar{b} + X$

- $E_\mathrm{T}^{miss} > 150$ GeV
- ≥ 2 b-dzset, $p_\mathrm{T}^b > 25$ GeV és $|\eta_b| < 2.5$

Eredmények: hatáskeresztmetszetek

Kinematikai vágások

$pp \to W^+H + X \to l\nu_l b\bar{b} + X$

- $p_\mathrm{T}^l > 15$ GeV, $|\eta_l| < 2.5$
- $E_\mathrm{T}^{miss} > 30$ GeV
- $p_\mathrm{T}^W > 150$ GeV
- ≥ 2 b-dzset, $p_\mathrm{T}^b > 25$ GeV és $|\eta_b| < 2.5$

$pp \to ZH + X \to \nu\nu b\bar{b} + X$

- $E_\mathrm{T}^{miss} > 150$ GeV
- ≥ 2 b-dzset, $p_\mathrm{T}^b > 25$ GeV és $|\eta_b| < 2.5$

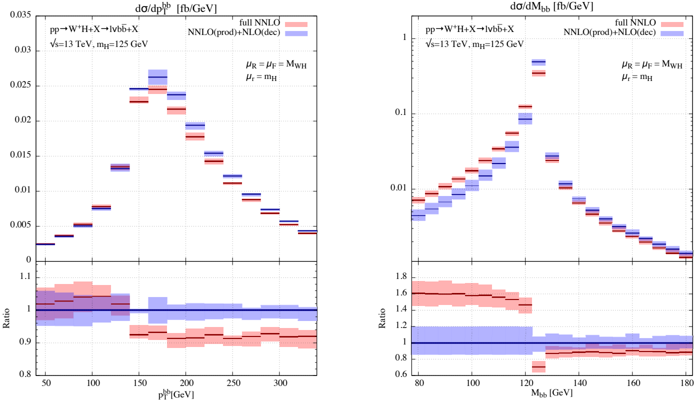
Számolt hatáskeresztmetszetek a $\sqrt{s} = 13$ TeV-es LHC-n

σ (fb)	NNLO(prod)+NLO(dec)	teljes NNLO
$pp \to W^+H + X \to l\nu_l b\bar{b} + X$	$3.94^{+1\%}_{-1.5\%}$	$3.70^{+1.5\%}_{-1.5\%}$
$pp \to ZH + X \to \nu\nu b\bar{b} + X$	$8.65^{+4.5\%}_{-3.5\%}$	$8.24^{+4.5\%}_{-3.5\%}$

- Az NNLO(prod)+NLO(dec) eredményhez képest a teljes NNLO számolás $\sim$ 5–6%-al kisebb hatáskeresztmetszeteket ad (a bizonytalanságok a skálavariációt tükrözik)

Eredmények: kinematikai eloszlások

A vezető b-dzset pár transzverzális impulzusa és invariáns tömege: $W^+H(b\bar{b})$

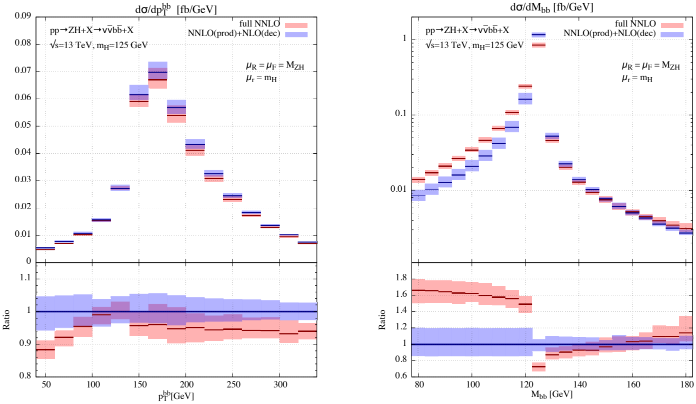


[Ferrera, SG, Tramontano 2018]

- A teljes NNLO számolásban figyelembe vett tagok lényegesen befolyásolják az eloszlások alakjait: -8% – $+5\%$ korrekciók a $p_T^{b\bar{b}}$ eloszlásban és -30% – $+60\%$ korrekciók az $M_{b\bar{b}}$ eloszlásban!

Eredmények: kinematikai eloszlások

A vezető b-dzset pár transzverzális impulzusa és invariáns tömege: $ZH(b\bar{b})$



[Ferrera, SG, Tramontano 2018]

- A teljes NNLO számolásban figyelembe vett tagok lényegesen befolyásolják az eloszlások alakjait: -10% – -5% korrekciók a $p_T^{b\bar{b}}$ eloszlásban és -30% – $+70\%$ korrekciók az $M_{b\bar{b}}$ eloszlásban!

Az erős csatolás meghatározása dzset rátákból

Az erős csatolás (α_S) a részecskefizikai standard modell egyik alapvető paramétere, a kvarkok és gluonok közötti kölcsönhatás erősségét méri. Értéke (egy adott energián) természeti állandó.

- Precíz ismerete fontos az elemirész-ütközések nagy pontosságú leírásához, így az LHC által mért adatok lehető legteljesebb kiaknázásához.
- A legkevésbé pontosan ismert csatolás: $\Delta\alpha_S(M_Z)/\alpha_S(M_Z) \sim 1\%$.

Csatolás	Jelölés	Érték	Hiba ($\times 10^{-9}$)
finomszerkezeti állandó	α_{EM}	$7.2973525664(17) \times 10^{-3}$	0.23
Fermi állandó	G_F	$1.1663787(6) \times 10^{-5}$ GeV^{-2}	510
erős csatolás	$\alpha_S(M_Z)$	0.1181(11)	$\boxed{9.3 \times 10^6}$
gravitációs állandó	G_N	$6.67408(31) \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	4.7×10^4

- Értékét elméleti számolások mért adatokhoz történő illesztésével határozzuk meg.
- Egy lehetőség: hadronos végállapotok, pl. dzset keletkezés, vizsgálata elektron-pozitron szétsugárzásban.

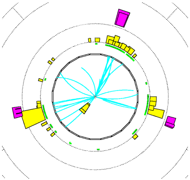
A QCD egy fontos jóslata: az elektron-pozitron szétsugárzásban keletkező hadronok dzsetekbe – hadron nyalábokba – szerveződnek.

Azt, hogy egy esemény hány dzsetet tartalmaz, illetve, hogy egy adott hadron pontosan melyik dzsethez tartozik, dzset kereső algoritmusokkal tudjuk pontosan definiálni. Pl. a Durham algoritmusban a végállapoti objektumok impulzusai között definiáljuk az alábbi „távolságot":

$$y_{ij} = 2\frac{\min(E_i^2, E_j^2)}{E_{\mathrm{vis}}^2}(1 - \cos\theta_{ij})$$

A dzseteket az alábbi rekurzív algoritmus definiálja:

1. Megkeressük a legkisebb y_{ij}-t, legyen ez $\min(y_{ij}) = y_{kl}$.
2. Ha y_{kl} nagyobb, mint egy előre rögzített y_{cut} érték (azaz $\min(y_{ij}) > y_{\mathrm{cut}}$), készen vagyunk, minden végállapoti objektum egy dzset.
3. Ha $y_{kl} < y_{\mathrm{cut}}$, akkor az k-ik és l-ik objektumot egyetlen új objektumba kombináljuk, melynek impulzusa egyszerűen $p_k^\mu + p_l^\mu$.

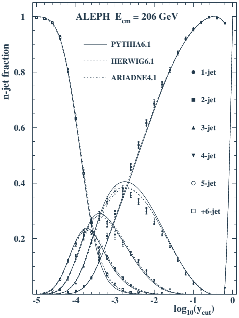


Dzset ráták: Az n-dzset ráta R_n a pontosan n db dzsetet tartalmazó események hányada rögzített y_{cut}-ra:

$$R_n(y_{\text{cut}}) = \frac{\sigma_{n-\text{jet}}(y_{\text{cut}})}{\sigma_{\text{tot}}}$$

Kísérlet

- nagy y_{cut}-ra sokszor kombinálunk objektumokat $\Rightarrow$ kevés dzset
- kis y_{cut}-ra kevésszer kombinálunk objektumokat $\Rightarrow$ sok dzset
- a dzset rátákra vonatkozóan számos pontos mérés áll rendelkezésre, széles energiatartományon, a PETRA és LEP gyorsítók kísérletei nyomán



[ALEPH Coll., Eur. Phys. J. **C35**, 457 (2004)]

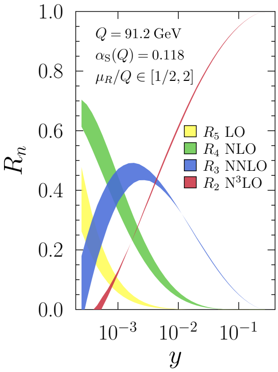
Dzset ráták elektron-pozitron szétsugárzásban

Dzset ráták: Az n-dzset ráta R_n a pontosan n db dzsetet tartalmazó események hányada rögzített y_{cut}-ra:

$$R_n(y_{\text{cut}}) = \frac{\sigma_{n-\text{jet}}(y_{\text{cut}})}{\sigma_{\text{tot}}}$$

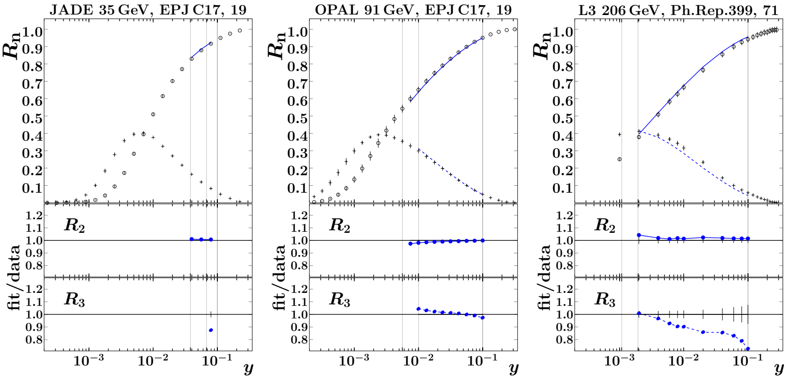
Elmélet

- nagyon pontos elméleti jóslat, különösen R_2-re: az N^{3}LO+NNLL rendű QCD korrekciók ismertek
- a parton-hadron átmenettel kapcsolatos korrekciókat modern Monte Carlo eseménygenerátorok segítségével lehet megbecsülni
- az elméleti jóslatot a kísérleti adatokkal összevetve, illesztéssel megkapható az erős csatolás értéke, $\alpha_S(M_Z)$



Illesztett eloszlások

Az illesztés eredménye néhány energián



[Verbytskyi, Banfi, Kardos, Monni, Kluth, SG, Szőr, Trócsányi, Tulipánt, Zanderighi 2019]

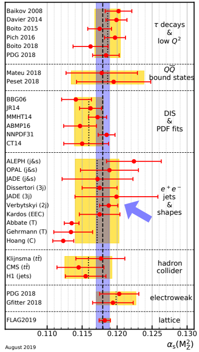
- az illesztési határok energiafüggőek, hogy elkerüljünk minden olyan tartományt, ahol az elméleti modellezés valamely eleme nem megbízható

Végeredmény

A legjobb illesztés mellett az alábbi $\alpha_S(M_Z)$ értéket kapjuk

$$\boldsymbol{\alpha_S(M_Z) = 0.11881 \pm 0.00063\ (exp.) \pm 0.00101\ (hadr.) \pm 0.00045\ (ren.) \pm 0.00034\ (res.)}$$
$$\boldsymbol{\alpha_S(M_Z) = 0.11881 \pm 0.00131\ (comb.)}$$

- hasonló mérések között először a hadronizációs korrekció becsléséhez kapcsolódó bizonytalanság (*hadr*.) nagyobb, mint a perturbatív bizonytalanság (*ren*.) és (*res*.)
- ez a nagyon pontos (magas perturbatív rendű) elméleti leírásnak köszönhető
- az eredmény szerepel az erős csatolás legfrissebb világátlagának meghatározásában



[PDG Review of Particle Physics (2021)]

Összefoglalás

Összefoglalás

A nagyenergiás elemirész-ütközések nagy pontosságú leírása szükségessé teszi NNLO QCD korrekciók kiszámítását számos folyamathoz.

Az NNLO korrekció kiszámítása két alapvető problémát vet fel:

1. ki tudjuk-e számolni a releváns (két-hurok) mátrixelemeket?
2. fel tudjuk-e használni azokat hatáskeresztmetszetek kiszámítására?

A hatáskeresztmetszet számítása során a közbenső lépésekben infravörös divergenciák lépnek fel.

CoLoRFulNNLO módszer: Completely Local subtRactions for Fully differential NNLO

- levonási eljárás az infravörös divergenciák kezelésére
- infravörös faktorizációs tételek alapján megszerkesztett közelítő hatáskeresztmetszetek
- a levonási tagok analitikus integrálása modern módszerekkel kivitelezhető
- hatékony, kiváló numerikus pontosság és stabilitás

Összefoglalás

Alkalmazások:

- Higgs-bozon bomlása b-kvarkokba, VH keltés $H \to b\bar{b}$ bomlással az LHC-n
- alakváltozók és fésült alakváltozók e^+e^- szétsugárzásban
- energia-energia korreláció és dzset ráták e^+e^- szétsugárzásban és az erős csatolás új meghatározásai

Következő feladat: hadronos kezdeti állapotok kezelése

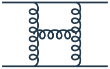
Köszönöm szépen a figyelmet!

Tartalék diák

Mátrixelemek

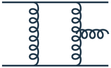
Egy általános m-dzset hatáskeresztmetszet NNLO rendű kiszámolásához ismerni kell az alábbi mátrixelemeket

- két-hurok (VV)



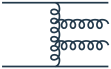
  - m-részecskés kinematika, két-hurok (duplán virtuális)
  - $2 \to 2$ ismert (ideértve a $pp \to VV$ keltést is)
  - $2 \to m$, $m > 2$ nagyon nehéz, bár nagyon gyors fejlődés

- egy-hurok (RV)



  - $m + 1$-részecskés kinematika, egy-hurok (valós-virtuális)
  - NLO szintű nehézség, ismert módszerek

- fa szintű (RR)

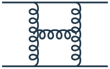


  - $m + 2$-részecskés kinematika, fa szintű (duplán valós)
  - LO szintű nehézség, mára „könnyű”

Mátrixelemek

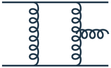
Egy általános m-dzset hatáskeresztmetszet NNLO rendű kiszámolásához ismerni kell az alábbi mátrixelemeket

- két-hurok (VV)



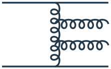
- m-részecskés kinematika, két-hurok (duplán virtuális)
- $2 \to 2$ ismert (ideértve a $pp \to VV$ keltést is)
- $2 \to m$, $m > 2$ nagyon nehéz, bár nagyon gyors fejlődés

- egy-hurok (RV)



- $m + 1$-részecskés kinematika, egy-hurok (valós-virtuális)
- NLO szintű nehézség, ismert módszerek

- fa szintű (RR)



- $m + 2$-részecskés kinematika, fa szintű (duplán valós)
- LO szintű nehézség, mára „könnyű”

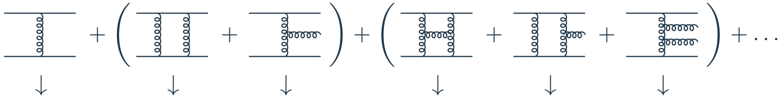
Amennyiben a szükséges mátrixelemek ismertek, fel tudjuk-e használni azokat hatáskeresztmetszetek kiszámolására?

A hatáskeresztmetszet NNLO rendben

A hatáskeresztmetszet a mátrixelem négyzetétől függ

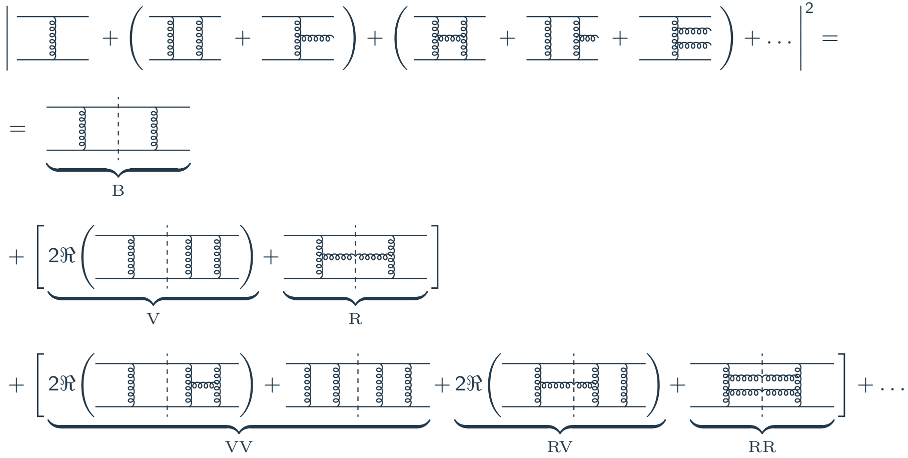
$$\text{hatáskeresztmetszet} = \int |\text{mátrixelem}|^2 \times \text{fázistér}$$

A mátrixelem szerkezete NNLO rendben

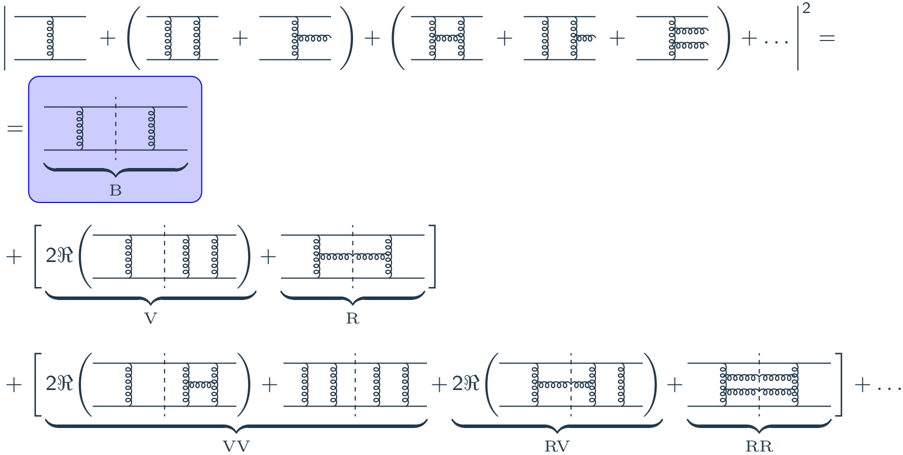


$$|\mathcal{M}_m^{(0)}\rangle \qquad |\mathcal{M}_m^{(1)}\rangle \qquad |\mathcal{M}_{m+1}^{(0)}\rangle \qquad |\mathcal{M}_m^{(2)}\rangle \qquad |\mathcal{M}_{m+1}^{(1)}\rangle \qquad |\mathcal{M}_{m+2}^{(0)}\rangle$$

A mátrixelemet négyzetre emelve



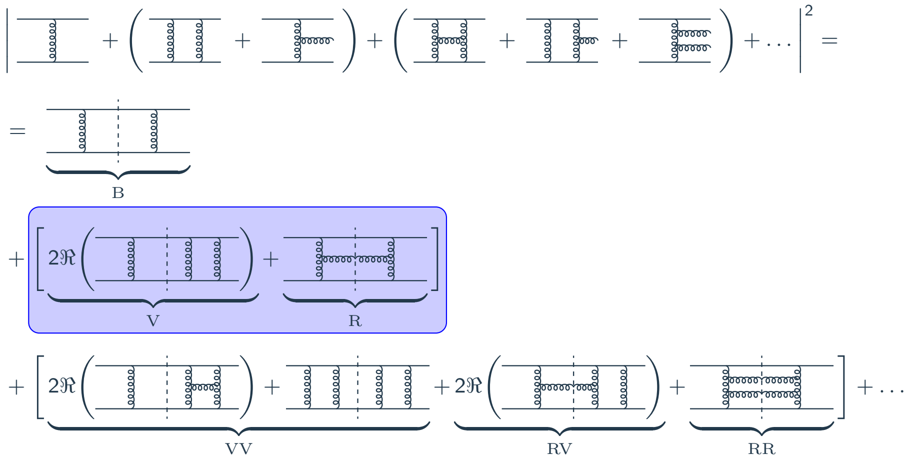
A mátrixelemet négyzetre emelve



A jobb oldalon álló három sor az LO, NLO és NNLO járulékot tartalmazza

- $\mathrm{LO} = \mathrm{B}$ (Born)

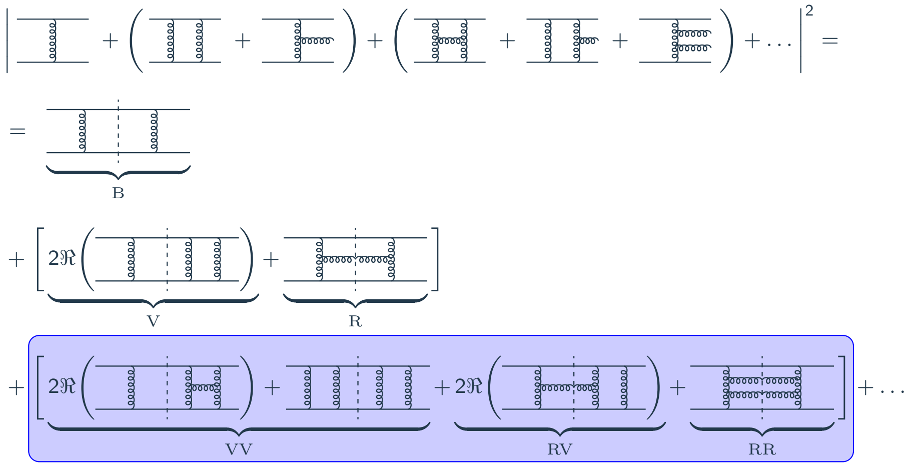
A mátrixelemet négyzetre emelve



A jobb oldalon álló három sor az LO, NLO és NNLO járulékot tartalmazza

- $\mathrm{LO} = \mathrm{B}$ (Born)
- $\mathrm{NLO} = \mathrm{R} + \mathrm{V}$ (valós + virtuális)

A mátrixelemet négyzetre emelve



A jobb oldalon álló három sor az LO, NLO és NNLO járulékot tartalmazza

- $\mathrm{LO} = \mathrm{B}$ (Born)
- $\mathrm{NLO} = \mathrm{R} + \mathrm{V}$ (valós + virtuális)
- $\mathrm{NNLO} = \mathrm{RR} + \mathrm{RV} + \mathrm{VV}$ (duplán valós + valós-virtuális + duplán virtuális)

Az integrált közelítő hatáskeresztmetszetek kiszámítása

A valós emissziós járulékokat regularizáló közelítő hatáskeresztmetszeteket a feloldatlan parton vagy partonok impulzusa felett integrált alakban kell visszaadni a virtuális járulékokhoz.

- az integrálás elvégezhető egyszer és mindenkorra, folyamatfüggetlen módon
- a gyakorlatban több száz igen bonyolult, több dimenziós „mesterintegrált" kell kiértékelni
- a mesterintegrálok infravörös divergensek, a végeredmények ϵ-pólusokat tartalmaznak

A szimbolikus integrálás legmodernebb eszközeit felhasználva a az integrált közelítő hatáskeresztmetszetek pólusszerkezete analitikusan kiszámolható.

- a számolás döntő módon támaszkodik a d-dimenziós szögintegrálok Mellin-Barnes reprezentációjára, illetve az általánosított polilogaritmusok Hopf-algebra szerkezetére

  [SG 2011; Duhr, Gangl, Rhodes 2012; Duhr 2012]
- a végeredmény racionális függvényeket, logaritmusokat és klasszikus polilogaritmusokat tartalmaz

Mesterintegrálok: egy példa

A duplán lágy levonási tag integrálása során többek közt felmerül az alábbi integrál:

$$\mathcal{I}_{2\mathcal{S},2}(Y_{ik,Q};\epsilon,y_0,d_0') = -\frac{4\Gamma^4(1-\epsilon)}{\pi\Gamma^2(1-\epsilon)}\,\frac{B_{y_0}(-2\epsilon,d_0')}{\epsilon}\,Y_{ik,Q}\int_0^{y_0}\mathrm{d}y\,y^{-1-2\epsilon}(1-y)^{d_0'-1+\epsilon}$$
$$\times\int_{-1}^{1}\mathrm{d}(\cos\vartheta)\,(\sin\vartheta)^{-2\epsilon}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}(\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{-1-2\epsilon}\Big[f(\vartheta,\varphi;0)\Big]^{-1}\Big[f(\vartheta,\varphi;Y_{ik,Q})\Big]^{-1}$$
$$\times\Big[Y(y,\vartheta,\varphi;Y_{ik,Q})\Big]^{-\epsilon}{}_2F_1\Big(-\epsilon,-\epsilon,1-\epsilon,1-Y(y,\vartheta,\varphi;Y_{ik,Q})\Big)$$

ahol

$$f(\vartheta,\varphi;Y_{ik,Q}) = 1-2\sqrt{Y_{ik,Q}(1-Y_{ik,Q})}\sin\vartheta\cos\varphi-(1-2Y_{ik,Q})\chi\cos\vartheta$$

$$Y(y,\vartheta,\varphi;\chi) = \frac{4(1-y)Y_{ik,Q}}{[2(1-y)+y\,f(\vartheta,\varphi;0)][2(1-y)+y\,f(\vartheta,\varphi;Y_{ik,Q})]}$$

Mesterintegrálok: egy példa

Az integrál pólusszerkezete analitikusan kiértékelhető $\left(y_0 = 1,\ d_0' = 3 - 3\epsilon\right)$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}_{2\mathcal{S},2}(Y;\epsilon,1,3-3\epsilon) = \\
&\quad = \frac{1}{2\epsilon^4} - \frac{1}{\epsilon^3}\Big[\ln(Y) - 3\Big] + \frac{1}{\epsilon^2}\Bigg[2\,\mathrm{Li}_2(1-Y) + \ln^2(Y) - \pi^2 - \Bigg(\frac{2}{1-Y} \\
&\quad - \frac{1}{2(1-Y)^2} + \frac{9}{2}\Bigg)\ln(Y) + \frac{1}{2(1-Y)} + 16\Bigg] + \frac{1}{\epsilon}\Bigg[\frac{5}{3}\Bigg(\frac{18\,\mathrm{Li}_3(1-Y)}{5} + \frac{6\,\mathrm{Li}_3(Y)}{5} \\
&\quad - \frac{6\,\mathrm{Li}_2(1-Y)\ln(Y)}{5} - \frac{2}{5}\ln^3(Y) + \frac{3}{5}\ln(1-Y)\ln^2(Y) + \pi^2\ln(Y) - \frac{78\zeta_3}{5}\Bigg) \\
&\quad + \Bigg(\frac{3}{1-Y} - \frac{3}{4(1-Y)^2} + \frac{15}{4}\Bigg)\Big(2\,\mathrm{Li}_2(1-Y) + \ln^2(Y)\Big) - 6\pi^2 - \Bigg(\frac{27}{2(1-Y)} \\
&\quad - \frac{13}{4(1-Y)^2} + \frac{91}{4}\Bigg)\ln(Y) + \frac{19}{4(1-Y)} + \frac{163}{2}\Bigg] + \mathrm{O}(\epsilon^0)
\end{aligned}
$$

- Megjegyzés: az $Y \to 1$ limesz véges

$$
\lim_{Y\to 1}\mathcal{I}_{2\mathcal{S},2}(Y;\epsilon,1,3-3\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon^4} + \frac{3}{\epsilon^3} + \frac{1}{\epsilon^2}\left(\frac{71}{4} - \pi^2\right) + \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{393}{4} - 6\pi^2 - 24\zeta_3\right) + \mathrm{O}(\epsilon^0)
$$

Mesterintegrálok: egy példa

Az integrál véges részét egy $Y \to 0$ határesetben szinguláris „aszimptotikus” részre és egy reguláris maradékra bontjuk

$$\mathcal{F}in\Big(\mathcal{I}_{2\mathcal{S},2}(Y;\epsilon,1,3-3\epsilon)\Big) = \mathcal{F}in\Big(\mathcal{I}^{\text{asy}}_{2\mathcal{S},2}(Y;\epsilon,1,3-3\epsilon)\Big) + \mathcal{F}in\Big(\mathcal{I}^{\text{reg}}_{2\mathcal{S},2}(Y;\epsilon,1,3-3\epsilon)\Big)$$

- az $Y \to 0$ határesetben szinguláris tagok

$$\begin{aligned}\mathcal{F}in\Big(\mathcal{I}^{\text{asy}}_{2\mathcal{S},2}(Y;\epsilon,1,3-3\epsilon)\Big) = {} & \frac{\log^4(Y)}{3} - 4\log^3(Y) - \frac{4}{3}\pi^2\log^2(Y) + 33\log^2(Y) \\ & + 40\zeta_3\log(Y) + 8\pi^2\log(Y) - \frac{345\log(Y)}{2}\end{aligned}$$

- a reguláris maradékot, $\mathcal{F}in\Big(\mathcal{I}^{\text{reg}}_{2\mathcal{S},2}(Y;\epsilon,1,3-3\epsilon)\Big)$-t, numerikusan értékeljük ki