MECHANIKA II. Gyakorlat

Sailer Kornél

Segédanyag számolási gyakorlathoz

Elméleti Fizikai Tanszék
Debreceni Egyetem
Debrecen
2009.

Contents

FELADATOK

1 . gyakorlat

A Legendre-transzformációról szóló összefoglalást tanulmányozza a „Sailer K.: Bevezetés a statisztikus fizikába és termodinamikába” c. jegyzet B.1.-B.3. függelékében!

1. Legyen $f(x)$ legalább kétszer differenciálható konvex valós függvény, azaz $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ és legyen
$$p(x) = \frac{df(x)}{dx}. \tag{1.1}$$
Képezzük a
$$g = px - f(x) \tag{1.2}$$
kifejezést tetszőleges x-re. Mutassuk meg, hogy
   (a) g tekinthető a p valós változó függvényének: $g = g(p)$; **ezt a függvényt nevezzük az $f(x)$ Legendre-transzformáltjának;**
   (b) teljesül a
   $$\frac{dg(p)}{dp} = x \tag{1.3}$$
   egyenlőség;
   (c) $g(p)$ a p változó konvex függvénye, azaz
   $$\frac{d^2 g(p)}{dp^2} > 0; \tag{1.4}$$
   (d) és hogy $g(p)$ Legendre-transzformáltja $f(x)$.

   Az utolsó tulajdonság miatt mondhatjuk, **hogy $f(x)$ és $g(p)$ egymás Legendre-transzformáltjai.**

2. Legyen $f(x)$ konvex valós függvény, p tetszőlegesen adott valós szám. Képezzük az $y = px$ egyenes és az $y = f(x)$ függvény grafikonja közti
$$F(x,p) = px - f(x) \tag{1.5}$$
előjeles távolságot tetszőleges x esetén!
   (a) Mutassuk meg, hogy adott p esetén $F(x,p)$ akkor maximális, ha annak a pontnak az $x = x(p)$ abszcisszájában vesszük, amelyben az $y = f(x)$ görbe érintőjének meredeksége éppen p, azaz amelyre $p = \frac{df(x)}{dx}$.
   (b) Mutassa meg, hogy ebben a pontban az $y = px$ egyenes és az $y = f(x)$ függvénygörbe előjeles távolságának értéke éppen a $g(p)$ Legendre-transzformált értékével egyezik meg.

3. Legyen az $f(x_1, \ldots, x_n)$ $n-$változós valós függvény konvex, azaz a második parciális deriváltjaiból képezett $\frac{\partial^2 f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ mátrix pozitív definit (valamennyi sajátértéke pozitív). Legyen továbbá

$$p_i = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Mutassa meg, hogy a

$$g(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.7}$$

Legendre-transzformált valóban csak a p_i változók függvénye, és hogy fennállnak az

$$x_i = \frac{\partial g(p_1, \ldots, p_n)}{\partial p_i} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.8}$$

és a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 g(p_1, \ldots, p_n)}{\partial p_i \partial p_k} \frac{\partial^2 f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k \partial x_j} = \delta_{i,j} \tag{1.9}$$

összefüggések, ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker-delta. (A második összfüggésben vagy az x_i változókat kell a p_i-k, vagy a p_i-ket az x_i-k függvényeként behelyettesíteni.)

4. Tegyük fel, hogy az $f(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ függvény függ a λ paramétertől is és hogy létezik a Legendre-transzformáltja az x_i $(i = 1, \ldots, n)$ változók tekintetében. Mutassuk meg, hogy ekkor a $g(p_1, \ldots, p_n; \lambda)$ Legendre-transzformált és az eredeti függvény λ paraméter szerinti parciális deriváltjaira fennáll a

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n, \lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{\partial g(p_1, \ldots, p_n, \lambda)}{\partial \lambda} \tag{1.10}$$

azonosság, ahol vagy az x_i változókat kell a p_i-k, vagy a p_i-ket az x_i-k függvényeként behelyettesíteni a Legendre-transzformációnak megfelelő összefüggések szerint.

5. Legyen egy mechanikai rendszer Lagrange-függvénye adott, $L(q_1, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s; t)$.

   (a) Tegyük fel, hogy a Lagrange-függvény a $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ általános sebességeknek konvex függvénye; mit jelent ez matematikailag?

   (b) Képezze a Lagrange-függvény Legendre-transzformáltját az általános sebességek tekintetében, bevezetve helyettük a $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ kanonikusan konjugált impulzusokat! Mi a Lagrange-függvény Legendre-transzformáltjának fizikai jelentése?

6. Lássa be, hogy adott mechanikai rendszer Lagrange-függvényének és Hamilton-függvényének idő szerinti parciális deriváltjaira fennáll a

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.11}$$

összefüggés.

2 . gyakorlat

1. Az m tömegű pontrészecskét ferdén elhajítjuk az (x, z) függőleges síkban, a vízszintessel $\alpha < \pi/2$ szöget bezáró, v_0 nagyságú kezdősebességgel a koordinátarendszer origójából. A z-tengely függőlegesen felfelé mutat, az x-tengely vízszintes. Írja fel és oldja meg a ferde hajításra vonatkozó Hamilton-egyenleteket.

2. Írja fel a lineáris harmónikus oszcillátor Hamilton-függvényét, a mozgás Hamilton-egyenleteit és oldja meg az utóbbiakat azzal a kezdőfeltétellel, hogy a $t = 0$ kezdeti időpillanatban az oszcillátor kitérése $x(0) = 0$ és kezdeti impulzusa $p_x(0) = p_{x0}$.

3. Lineáris harmónikus oszcillátor az x-tengely mentén az $F_x = mf_0 \sin(\Omega t)$ periódikus gerjesztő erő hatása alatt mozog. A kezdeti $t = 0$ időpillanatban az oszcillátor nyugalomban van az origóban, $x(0) = 0$ és $p_x(0) = 0$. Írja fel a gerjesztett oszcillátor Hamilton-függvényét, a mozgás Hamilton-egyenleteit és oldja meg azokat.

4. Keresse meg m tömegű, függőlegesen felhajított részecske esetében a Hamilton-Jacobi-egyenlet megoldását. Használja ki, hogy a nehézségi erőtérben a részecske energiája mozgásállandó. A hatásnak, mint a valódi pályák végponti adatai függvényének az ismeretében határozza meg a mozgásegyenletek általános megoldását.

3 . gyakorlat

1. A Föld felszínén, az α északi szélességen függőlegesen felhajítunk egy pontszerű, m tehetetlen tömegű testet. Hová esik vissza a test? (Hanyagoljuk el a Föld forgási szögsebességében másodrendűen kicsiny tagokat. A megoldást célszerű a perturbációszámítás módszerével keresni, azaz a részecske $\vec{r} = \vec{r}(t)$ pályaegyenletét
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_1(t) \tag{3.12}$$
alakban keresni, ahol $\vec{r}_0 \sim \mathcal{O}(\omega^0)$ a perturbálatlan /a Coriolis-erő elhanyagolásával számolt/ pálya, $\vec{r}_1(t) \sim \mathcal{O}(\omega)$ pedig a pályának a Föld ω szögsebességében elsőrendű megváltozása.) Eredmény: az északi féltekén a visszaesés helye a Föld forgásával ellentétes irányban, a szélességi kör mentén tolódik el a vízszintes síkban a feldobás helyéhez képest.

2. Hogyan módosul a Föld forgása miatt a matematikai inga lengése kis kitérések esetén az α északi szélességen? (Hanyagolja el az ingán függő m tömegű részecske függőleges magasságának változását, valamint a Föld ω szögsebességében másodrendűen kicsiny effektusokat.) Eredmény: az inga lengési síkja állandó $\omega_z = \omega \sin\alpha$ szögsebességgel forog a felfüggesztési ponton áthaladó függőleges egyenes körül.

3. Nyugvó folyadék szabad felszíne mindig merőlegesen áll be a sztatikus külső térben uralkodó térerősségre. Másrészről az állandó gyorsulással haladó és állandó szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerben fellépő, egységnyi

tehetetlen tömegre ható erő úgy tekinthető, mint egy az adott vonatkoztatási rendszerben uralkodó sztatikus erőtér. Használja ezt fel annak meghatározására, hogy hogyan áll be a folyadék felszíne, ha a folyadék

(a) olyan tartályhoz képest nyugszik, amely a K_0 inerciarendszerhez képest $\vec{a}$ állandó gyorsulással mozgó kocsi platóján van mereven rögzítve, ill.

(b) egy henger alakú, a K_0 inerciarendszerhez képest nyugvó tartályban annak szimmetriatengelye körül állandó ω szögsebességgel forog.

Határozza meg mindkét esetben a tehetetlenségi erőktől származó sztatikus térerősséget, és írja fel mindkét esetben a folyadék felszínének egyenletét a folyadékhoz rögzített K koordinátarendszerben.

4 .gyakorlat

1. Határozza meg egy egyenlőszárú derékszögű háromszög alakú, homogén tömegeloszlású vékony lap esetében

   (a) a tömegközéppont (TKP) helyét;

   (b) a derékszög melletti csúcsra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték tenzorának Descartes-komponenseit, ha a derékszögű háromszög befogói rendre az x- és az y-tengelyre esnek;

   (c) Steiner tételének felhasználásával a TKP-ra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték Descartes-komponenseit ugyanabban a Descartes-koordinátarendszerben;

   (d) továbbá a TKP-on átmenő fő tehetetelenségi tengelyek irányát és az azokra vonatkoztatott fő tehetetlenségi nyomatékokat.

2. Vegyünk egy homogén tömegeloszlású hengert, amelynek alaplapja R sugarú, magassága h.

   (a) Határozzuk meg a henger TKP-jának koordinátáit abban a hengerkoordinátarendszerben, amelynek O origója az alaplap középpontjában van, z-tengelye pedig a henger szimmetriatengelye.

   (b) Határozzuk meg az O pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték Descartes-komponenseit. Válasszuk ehhez az x és y-tengelyt tetszőlegesen az alaplap síkjában. Melyek a fő tehetetlenségi irányok és nyomatékok?

   (c) Steiner tételének felhasználásával határozzuk meg a TKP-ra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték Descartes-komponenseit az előbbi koordinátarendszerben. Vizsgáljuk meg a lapos korong és a vékony rúd határeseteit.

5 .gyakorlat

1. Vízszintes síkon R sugarú (végtelen vékonynak tekinthető) homogén tömegeloszlású korong csúszásmentesen gördül. A korong O TKP-jának haladási sebessége a síkhoz rögzített K koordinátarendszerben $\vec{V}_0$ és vízszintes irányú. A csúszásmentesség feltétele, hogy a korong és a sík érintkezési pontja (véges vastagságú korong esetén érintkezési vonala) infinitezimális dt idő alatt azonos $dk = ds$ távolságon mozdul el a korong kerülete, ill. a sík felülete mentén.

(a) Mutassa meg, hogy a csúszásmentesség miatt a korong síkkal érintkező O' pontjának pillanatnyi sebessége zérus a K koordinátarendszerben. Határozza meg a korong szögsebességét.

(b) Írja fel a korong tetszőleges P pontjának K rendszerben mért sebességét (i) a korong TKP-jának K-ban mért sebessége és a szögsebesség segítségével, (ii) a korong síkkal érintkező O' pontjának K-ban mért sebessége és a szögsebesség segítségével. Mindkét esetben diszkutáljuk azt az esetet, ha P a TKP, ill. ha P az O' érintkezési pont.

(c) Mivel egyenlő a korong impulzusa (i) a K koordinátarendszerben, (ii) a koronghoz mereven rögzített K' koordinátarendszerben, (iii) a korong TKP-jával együtthaladó, nem forgó K_{TKP} koordinátarendszerben.

(d) Írja fel a korong kinetikus energiáját rendre a K, K' és K_{TKP} koordinátarendszerekben.

(e) Írja fel a korong impulsumomentumát (i) a K rendszerben nyugvó tetszőleges Q pontra vonatkozóan, (ii) a korong TKP-jára vonatkozóan.

2. R sugarú, gömbalakú, homogén tömegeloszlású labda $\vec{\omega}$ szögsebességgel forog és a TKP-jának haladási sebessége a Földhöz rögzített K vonatkoztatási rendszerben $\vec{V}$.

   (a) Írja fel a labda egy tetszőleges P pontjának K-ban mért pillanatnyi sebességét.

   (b) Írja fel a labda (i) K rendszerben, (ii) a labdához rögzített K' rendszerben, és (iii) a labdával együtthaladó, nem forgó K_{TKP} rendszerben mért impulzusát és kinetikus energiáját.

   (c) Írja fel a labda impulzusmomentumát a K rendszerben nyugvó tetszőleges Q pontra vonatkoztatva, és a labda TKP-jára vonatkoztatva.

3. Mutassa meg, hogy merevtest mozgása során minden pillanatban létezik pillanatnyi forgástengely, azaz egy olyan, a szögsebességgel párhuzamos egyenes, amelyen elhelyezkedő pontok sebessége adott pillanatban párhuzamos magával az egyenessel.

6 .gyakorlat

1. Határozza meg az a szárhosszúságú, egyenlőszárú derékszögű háromszög alakú, vékony, homogén tömegeloszlású lap impulzusmomentumát, szögsebességét, ha azt a szögfelezője körül a $t = 0$ pillanatban ω_0 kezdeti szögsebességgel forgásba hozzuk. Tegyük fel, hogy a $t = 0$ idpillanatban a háromszög szárai rendre a K laborrendszerben felvett Descartes-koordinátarendszer $x-$, ill. $y-$tengelyén helyezkedtek el. Tegyük fel, hogy a lapra semmilyen külső erő, ill. forgatónyomaték nem hat. Hogyan változik időben a szögsebesség? Mutassanak a merevtesthez rögzített koordinátarendszer tengelyei a lap fő tehetetelenségi tengelyeinek az irányába. Határozza meg a szögsebesség komponenseit a merevtesthez rögzített koordinátarendszerben. Hogyan változnak időben a mozgás során az Euler-szögek?

2. Vékony, hengeralakú pálcának olyan $\vec{\omega}_0$ kezdeti szögsebességet adunk a $t = 0$ pillanatban, amely a pálca szimmetriatengelyével ekkor α szöget zár be. Hogyan mozog a pálca, ha a pálcára semmilyen külső erő, ill. forgatónyomaték nem hat. Határozza meg a pálca szögsebességét a pálcához rögzített koordinátarendszerben, amelynek tengelyei a fő tehetetlenségi irányokba mutatnak. Hogyan változnak időben az Euler-szögek? Milyen mozgást végez az impulzusmomentum vektora a pálcához rögzített vonatkoztatási rendszerből nézve? Milyennek látja a laborrendszerben nyugvó megfigyelő a pálca mozgását?

3. Homogén gömb a felületének egy pontjában gömbcsuklóval van rögzítve a súlytalanság állapotában. A gömbnek $\vec{\omega}_0$ kezdeti szögsebességet adunk. Hogyan mozog a gömb? Diszkutálja azokat az eseteket, amikor a kezdeti szögsebesség a rögzítési pontból kiinduló átmérővel párhuzamos, ill. amikor avval szöget zár be.

7 .gyakorlat

1. Képzeljünk el egy olyan pörgettyűt, amely állandó nagyságú $\vec{J}$ saját impulzusmomentummal rendelkezik: $|\vec{J}| = J =$áll. Erre a pörgettyűre a homogén $\vec{B} =$áll. külső térben $\vec{M} = -g\vec{J} \times \vec{B}$ forgatónyomaték hat, ahol $g > 0$ állandó. Hogyan mozog a pörgettyű impulzusmomentuma a $\vec{B}$ külső térhez képest?

2. Egy vékony, henger alakú, homogén tömegeloszlású pálcát a szimmetriatengelyével $\alpha =$ áll. szöget bezáró tengely körül $\omega =$áll. szögsebességgel forgatunk. Ha a tengely körüli forgatáskor elhanyagolható a súrlódás, akkor mekkora energiára volt szükség ahhoz, hogy a pálcát forgásba hozzuk? Mekkora és milyen irányú forgató nyomatékra van szükség ahhoz, hogy a forgástengelyt eredeti irányában megtartsuk? Mikor minimális a forgási energia és a forgástengely megtartásához szükséges forgató nyomaték?

3. Vízszintes talajon m tömegű henger mozog. A hengert a vízszintes forgástengelye körül egy motor állandó nagyságú M forgatónyomatékot kifejtve forgatja.
   (a) Hogyan mozog a henger, ha a talaj és a henger között elhanyagolható a súrlódás?
   (b) Hogyan mozog a henger, ha csúszásmentes gördülés jön létre? Legalább mekkora μ_{krit} legyen a talaj és a henger közötti μ_0 tapadási súrlódási együttható ahhoz, hogy a henger ne csússzon meg. (Mi a csúszásmentes gördülés dinamikai feltétele?)

4. Az előző feladatban szereplő henger és a talaj közötti tapadási súrlódási együttható kisebb a csúszásmentességhez szükséges μ_{krit} értéknél. Mekkora lesz a henger szimmetriatengely körüli szöggyorsulása? Mennyi lesz a henger haladó mozgásának gyorsulása? Ha a henger nyugalomban van a kezdeti pillanatban, amikor beindítjuk az M forgató nyomatékot kifejtő motort, akkor hol helyezkedik el a mozgás során a pillanatnyi forgástengely? Mi történik, ha a csúszási súrlódási együttható zérushoz tart?

8 .gyakorlat

1. Legyenek q és Q két kvadratikusan csatolt lineáris harmónikus oszcillátor koordinátái, azaz a rendszer Lagrange-függvénye legyen

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}(Dq^2 + 2KqQ + DQ^2). \tag{8.13}$$

   Határozza meg a csatolt oszcillátorok rendszerének normálrezgéseit.

2. Két részecske között kvázielasztikus kölcsönhatás van, a részecskék relatív helyzetvektora egyensúlyi helyzetben $\vec{b}$,

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - \frac{1}{2}D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{b})^2. \tag{8.14}$$

   Jellemezze a rendszer normálrezgéseit (sajátfrekvenciák és az egyes részecskék kitérései).

   Javaslat: Válassza le a TKP mozgását, majd a relatív mozgást elemezze.

3. Három azonos tömegű részecske között kvázielasztikus kölcsönhatás van, a részecskék egyensúlyi állapotban egy egyenes mentén helyezkednek el, a szomszédos részecskék egyensúlyi távolsága b. Jellemezze a rendszer normálrezgéseit (sajátfrekvenciák és az egyes részecskék kitérései).

9 .gyakorlat

1. Határozza meg rugalmasan deformált testben a relatív deformációt leíró $\epsilon_{i,j}(\vec{r})$ tenzormezőt és a lokális szögelfordulást leíró $\delta\vec{\varphi}(\vec{r})$ vektormezőt, ha ismert a rugalmas deformációt leíró $\vec{s}(\vec{r})$ elmozdulás-vektormező!

   (a) $\vec{s}(\vec{r}) = \vec{s}_0 =$áll.,

   (b) $\vec{s}(\vec{r}) = \vec{A} \times \vec{r}$, ahol $\vec{A}$ =áll.,

   (c) $\vec{s}(\vec{r}) = a\vec{E}_{(3)}z + b(\vec{E}_{(1)}x + \vec{E}_{(2)}y)$, ahol $\vec{E}_{(i)}$ a Descartes-koordinátarendszer (K laborrendszer) tengelyei irányába mutató egységvektorok, a és b pedig valós állandók. Milyen fizikai jelentés adható annak az esetnek, amikor $a = \epsilon$, $b = -\sigma\epsilon$, ahol $\sigma > 0$ állandó?

2. Rugalmasan deformálható test homogén deformációt szenved és tudjuk, hogy csak valódi deformáció lép fel. Határozzuk meg a deformációs tenzor komponenseinek ismeretében az elmozdulás vektormezőt!

3. Tegyük fel, hogy a rugalmasan deformálható test alakja úgy változik meg, hogy nem szenved valódi deformációt, hanem a darabkái a test minden pontjában ugyanazzal a $\delta\varphi$ szöggel elfordulnak. Határozza meg az elmozdulás-vektormezőt!

4. Határozza meg az 1. feladatban szereplő esetekben, valamint a 2. feladatban szereplő esetben a test egyes pontjaiban

(a) a relatív térfogatváltozást,

(b) a feszültségi tenzor komponenseit, feltéve, hogy a test anyaga homogén, izotróp rugalmas közeg.

10 .gyakorlat

1. Egyenes henger alakú, h magasságú, homogén és izotróp anyagú oszlop vízszintes talajon áll és a nehézségi erő hatására deformálódik. Határozza meg, hogy

   (a) milyen lesz a deformációs tenzor változása az oszlop mentén,

   (b) hogyan változnak a feszültségi tenzor komponensei az oszlop mentén,

   (c) mennyi lesz az oszlop tényleges magassága?

   Tekintse a talajt merev, vízszintes lapnak. Oldja meg a feladatot először abban az esetben, ha az oszlop nincsen rögzítve a talajhoz, hanem azon szabadon (súrlódásmentesen) elcsúszhat. *Mi a helyzet akkor, ha az oszlop alja mereven van rögzítve a talajhoz?

2. * *Rúd hajlítása.* Az A állandó keresztmetszetű, homogén és izotróp anyagú, L hosszúságú vízszintes rúd egyik vége mereven rögzítve van a függőleges síkban egy merev falhoz. A rúd másik végére függőleges irányú, lefelé mutató F erővel hatunk. Milyen lesz a meghajlított rúd alakja, és mekkora lesz a rúd végének lehajlása a vízszinteshez képest? Hanyagoljuk el a rúd saját súlyából származó deformációt! Tegyük fel, hogy a hajlítás során a rúdban található egy olyan, eredetileg vízszintes réteg, amely változatlan hosszúságú marad, azaz amelynek mentén a vízszintes ($x-$)irányú relatív megnyúlás zérus. Nevezzük ezt a réteget *neutrális rétegnek.* Helyezzük koordinátarendszerünk $z-$tengelyének origóját a neutrális rétegre. Tegyük fel továbbá, hogy a neutrális rétegre merőleges síkok a hajlítás után is merőlegesek maradnak a neutrális rétegre.

   A megoldás javasolt lépései:

   (a) Fejezze ki a rúd $\epsilon_{x,x}(z)$ hosszirányú relatív deformációját, mint a rúd keresztmetszete mentén függőleges irányban mért z koordináta függvényét, a rúd vízszintes irányban változó $R(x)$ görbületi sugarával!

   (b) Határozza meg a rúd keresztmetszetére merőleges $\sigma_{x,x}(z)$ feszültséget!

   (c) Írja fel annak a feltételét, hogy a neutrális rétegre merőleges keresztmetszetekre a mechanikai feszültségből származó eredő erő zérus. Mutassa meg, hogy ebből a feltételből meg lehet határozni a neutrális réteg helyzetét a rögzítő függőleges felületnél.

   (d) Írja fel a rúd lehajló vége és egy, a neutrális rétegre merőleges, tetszőlegesen választott keresztmetszete közötti rúddarabra a belső feszültségből és a hajlítást okozó erőtől származó forgató nyomatékok egyensúlyát. Vezesse be a rúd neutrális rétegre merőleges keresztmetszetének

$$I = \int_A z^2 df \qquad (10.15)$$

nyomatékát. Ezután használja fel, hogy ha a neutrális réteg egyenlete $z_0(x)$, akkor a neutrális réteg görbülete

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{-z_0''(x)}{[1+(z_0'(x))^2]^{3/2}} \approx -z_0''(x), \tag{10.16}$$

ha kicsi a lehajlás és így $|z_0'(x)| \ll 1$.

(e) Végül oldja meg az előző lépésben kapott differenciálegyenletet a neutrális réteg alakjára, $z_0(x)$-re és határozza meg a lehajlás mértékét a rúd végén.

11 .gyakorlat

1. Végtelen kiterjedésű, homogén, izotróp rugalmas közegben $s_y(x,t) \equiv \psi(x,t)$ transzverzális síkhullámot keltünk

$$\psi(x, t=0) = A\sin(kx), \qquad \left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{t=0} = B\cos(kx) \tag{11.17}$$

kezdeti feltételekkel. A hullám terjedési sebessége c.

(a) Milyen kitéréshullám alakul ki, ha $B = 0$, ill. ha $B = kcA$?

(b) Határozzuk meg mindkét esetben a kialakuló deformációs és feszültséghullámot!

(c) Határozzuk meg mindkét esetben a rugalmas hullámban a $\rho_\epsilon(x,t)$ energiasűrűséget és az $\vec{S}(x,t)$ energiaáram-sűrűséget! Ne feleddjük, hogy az energiasűrűség is és az energiaáram sűrűsége is részben kinetikus, részben potenciális energiából származik. Mutassuk meg, hogy haladó hullámban a kinetikus energia sűrűsége megegyezik a potenciális energia sűrűségével, állóhullámban pedig a közeg minden darabjának energiája időben azonos fázisban alakul kinetikus energiából potenciális energiává és vissza.

(d) Mutassuk meg a konkrét példánkon, hogy az energia áramlására fennáll a

$$\frac{\partial \rho_\epsilon(x,t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}(x,t) = 0 \tag{11.18}$$

kontinuitási egyenlet.

(e) Integrálja a fenti kontinuitási egyenletet a közeg tetszőleges V térfogatú darabjára és mutassa meg, hogy az egyenlet az energia lokális megmaradását fejezi ki!

2. Mereven rögzített végű, ℓ hosszúságú rugalmas húron transzverzális hullámot indítunk el a $t = 0$ időpillanatban

$$s_y(x, t=0) \equiv \psi(x, t=0) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \in [0, \frac{1}{2}(\ell - a)], [\frac{1}{2}(\ell + a), \ell] \\ A, & \text{ha} \quad x \in [\frac{1}{2}(\ell - a), \frac{1}{2}(\ell + a)] \end{cases} \equiv F(x), \tag{11.19}$$

$$v_y(x, t=0) \equiv \left.\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \equiv G(x) \tag{11.20}$$

kezdeti feltételekkel, ahol $a \ll \ell$ és a hullám keltése előtt a nyugvó húr az $x-$tengelyen a $[0, \ell]$ intervallumban fekszik. Legyen c a hullám terjedési sebessége a húron. Hogyan alakul a kitérés az idő függvényében a húr mentén (ábrázoljon jellegzetes pillanatfelvételeket)? Tudjuk, hogy a hullámegyenlet általános megoldása

$$\psi(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct). \tag{11.21}$$

A fenti konkrét esetben határozza meg az $f_1(u)$ és $f_2(u)$ függvényeket, ahol $u \in (-\infty, +\infty)$.

3. Végtelen hosszú rugalmas szál fekszik az $x-$tengelyen. Az $x < 0$ részen a rugalmas longitudinális hullám terjedési sebessége c_-, az $x > 0$ részen pedig c_+. Az $x \to \infty$ végtelen távoli végről ω körfrekvenciájú szinuszos hullám érkezik be.

   (a) Hogyan alakul a hullámkép a rugalmas szál mentén? (Oldja meg a hullámegyenletet és használja fel, hogy a megoldásnak mindenütt folytonosnak és folytonosan differenciálhatónak kell lennie az x függvényében.)

   (b) Határozza meg az energiaáramsűrűséget a beérkező, a visszavert és az áthaladó hullámban! Értelmezze ezek alkalmasan képzett hányadosaiként a két rész határán történő reflexió (visszaverődés) R és a transzmisszió (áteresztés) T valószínűségét. Fejezze ki ezeket a $c_\pm$ terjedési sebességekkel, és mutassa meg, hogy összegük $R + T = 1$.

4. Rugalmas pálca szabad végére a végtelen távoli másik vég felől ω körfrekvenciájú szinuszhullám érkezik be. Mi lesz a visszavert hullám? *Javaslat: Használja azt a határfeltételt, hogy szabad végen az energiaáramsűrűség el kell tűnjön.*

12 .gyakorlat

1. Tegyük fel, hogy síkban áramló folyadékban a sebességmező

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{a^2 t}{r}\vec{e}_r + b\vec{e}_\varphi + \frac{a}{r}(r_0 - at_0)\vec{e}_r \tag{12.22}$$

   alakú, ahol (r, φ) síkbeli polárkoordináták, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ a síkbeli polárkoordinátarendszer ortonormált bázisvektorai az (r, φ) pontban.

   (a) Hogyan mozog a folyadék a $t = t_0$ pillanatban?

   (b) Mi azon folyadékelemek $\vec{r}_{\vec{r}_0}(t)$ helyzete egy tetszőleges $t > t_0$ pillanatban, amelyek a kezdeti t_0 pillanatban az r_0 sugarú kör kerületén helyezkedtek el. Használja fel, hogy a folyadékelemek $\vec{r}_{\vec{r}_0}(t)$ pályaegyenlete kielégíti a sebességmező definícióját jelentő

$$\frac{d\vec{r}_{\vec{r}_0}(t)}{dt} = \vec{v}(\vec{r}_{\vec{r}_0}(t), t) \tag{12.23}$$

   differenciálegyenletet. Határozza meg előbb a folyadékelemek pályájának a t idővel parametrizált alakját, majd adja meg az áramvonalak $r_{\vec{r}_0}(\varphi)$ síkbeli polárkoordinátás egyenletét!

2. Ideális, inkompresszibilis folyadék áramlik stacionáriusan egy A_0 keresztmetszetű csőben v_0 sebességgel, amely egy adott ponton összeszűkül A keresztmetszetűvé. Mekkora lesz a v áramlási sebesség a szűkebb csőrészben? Ha a vastagabb csőrészben a nyomás p_0, akkor mennyi a nyomás a vékonyabb csőrészben?

3. Ideális, inkompresszibilis folyadék áramlik v_0 sebességgel stacionáriusan egy A_0 keresztmetszetű csőben, amely ketté ágazik egy A_1, ill. A_2 keresztmetszetű csőre. Mutassa meg a tömegmegmaradás alapján, hogy az áramlásra alkalmazható Kirchhoff csomóponti törvénye. Határozza meg az egyes csőágakban történő áramlás v_1 és v_2 sebességeinek arányát! Ha az A_0 keresztmetszetű csőben p_0 a nyomás, akkor mekkora a folyadék nyomása az 1-es és 2-es csőágakban?

4. Ideális, inkompresszibilis folyadék áramlik v_0 sebességgel alulról felfelé stacionáriusan egy A_0 keresztmetszetű csőben, amelynek két vége között h a szintkülönbség. A cső a vízszintessel $0 < \alpha \leq \pi/2$ szöget zár be és hossza L. Hogyan változik a nyomás a cső mentén?

5. Egy téglatest alakú tartályban H magasságú nyugvó folyadék van. Milyen a nyomás eloszlás a tartály oldalfalain és mekkora forgatónyomaték hat a falakra?

Kérdések

Mechanika. II. 1. zh. Kérdések a felkészüléshez

1. Hogyan számolja ki az $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorszorzat escartes-komponenseit a tényező-vektorok escartes-komponenseinek segítségével?
2. Hogyan szól a q_i általános koordinátákhoz kanonikusan konjugált p_i impulzusok definíciója?
3. Hogyan van értelmezve a Hamilton-függvény?
4. Hogyan van értelmezve és milyen tulajdonságú az $f(x)$ konvex függvény Legendre-transzformáltja?
5. Mivel egyenlő az $f(x)$ konvex függvény Legendre-transzformáltjának a Legendre-transzformáltja?
6. Írja fel a Hamilton-egyenleteket és mondja meg, hogy hány darab egyenletből álló, milyen tulajdonsádú egyenletrendszerről van szó?
7. Milyen tulajdonságú a Hamilton-egyenletek általános megoldása és hogyan találhatjuk meg ebből az adott fizikai probléma egyetlen megoldását?
8. Mi a fázistér és a fázistrajektória?
9. Hogyan van értelmezve két tetszőleges f és g fizikai mennyiség Poisson-zárójeles kifejezése?
10. Milyen algebrai tulajdonságoknak tesznek eleget a Poisson-zárójeles kifejezések?
11. $\{f, g_1 g_2\} = ?$
12. Hogyan szól a Poisson-zárójelekre vonatkozó Jacobi-azonosság?
13. $\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = ?$
14. Mit mondhatunk arról a fizikai mennyiségről, amely nem függ explicit módon az időtől és amelynek a Hamilton-zárójellel vett Poisson-zárójele zérus?
15. Hogyan írhatók fel a Hamilton-egyenletek a Poisson-zárójelek segítségével?
16. Mivel egyenlők az általános koordináták és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusok egymással tetszőlege páronként képezett Poisson-zárójelei?
17. Milyen transzformációkat nevezünk ponttranszformációknak? Változik-e a Lagrange-függvény alakja, ill. a Lagrange-egyenletek Lagrange-függvénnhyel kifejezett implicit alakja ponttranszformációk során?
18. Milyen transzformációkat nevezünk kanonikus transzformációknak? Változik-e a Hamilton-függvény alakja és a Hamilton-egyenletek Hamilton-függvénnyel kifejezett implicit alakja kanonikus transzformációk során?
19. Milyen kapcsolat van a fázistrajektória és a kanonikus transzformációk között?
20. Mi az infinitezimális fázistérfogatelem definíciója és függ-e ez a kanonikus koordináták megválasztásától? Mit mond ki Liouville tétele?
21. Ha a hatást a valódi mozgás pályáján tekintjük, mint a pálya végponti adatainak függvényét, akkor
$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = ?, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = ? \tag{12.24}$$
22. Írja fel egy s szabadsági fokú rendszerre a Hamilton-Jacobi-egyenletet!

23. Milyen megoldást nevezünk a Hamilton-Jacobi-egyenlet teljes megoldásának? Miért biztos, hogy az abban szereplő egyik állandó additív.
24. Mi az algoritmusa annak, hogy a Hamilton-Jacobi-egyenlet teljes megoldásának ismeretében megtaláljuk a Hamilton-egyenletek általános megoldását?
25. Milyen alakot ölt a Hamilton-Jacobi-egyenlet konzervatív mechanikai rendszer esetén?
26. Milyen tehetetlenségi erő lép fel az inerciarendszerekhez képest nem forgó, haladva gyorsuló rendszerekben?
27. Milyen tehetetlenségi erők lépnek fel abban a vonatkoztatási rendszerben, amelynek origója a Földdel együtt mozog a Nap körüli pályán, de amelyhez rögzített koordinátatengelyek az állócsillagokhoz rögzített valamely koordinátarendszer megfelelő tengelyeivel párhuzamosak maradnak a mozgás során.
28. Milyen tehetetlenségi erők lépnek fel egy valamely inerciarendszerben rögzített szimmetriatengely körül forgó korong vonatkoztatási rendszerében arra a részecskére, amelyik (i) a koronghoz képest nyugalomban van, (ii) a koronghoz képest sugárirányban kifelé mozog.
29. Milyen módosítással érvényes Newton II. törvénye a nem inerciális vonatkoztatási rendszerekben.
30. Hogyan van értelmezve pontrendszer TKP-jának helyzetvektora?
31. Hogyan van értelmezve $\rho(\vec{r})$ tömegsűrűség-mezővel jellemzett folytonos tömegeloszlású test TKP-jának helyzetvektora?
32. Milyen tulajdonságú testet nevezünk merevtestnek?
33. Merevtest elemi elmozdulását milyen elemi mozgásokból lehet mindig összetenni?
34. Hány független szabadsági foka van egy merevtestnek?
35. Írja fel a merevtest egy tetszőleges pontjának sebességét egy vonatkoztatási pontja sebességének és a szögsebességének az ismeretében?
36. A merevtest az A pontja körül $\vec{\omega}$ szögsebességgel forog. Mi a merevtest tatszőleges másik A' pontja körüli forgásának $\vec{\omega}'$ szögsebessége?
37. Hogyan vannak értelmezve az Euler-szögek?
38. Mik a merevtesthez rögzített K' koordinátarendszer tengelyeinek irányát a K laborrendszer tengelyeihez képest meghatározó iránykoszinuszok?
39. Hány független adattal lehet megadni a merevtesthez rögzített K' rendszer elfordulását a K laborrendszerhez képest?
40. Legyen $\vec{V}$ a merevtest TKP-jának sebessége a K laborrendszerben és $\vec{\omega}$ a merevtest szögsebessége. Írja fel ezek ismeretében a merevtest teljes impulzusát, kinetikus energiáját a K rendszerben és a TKP-ra vonatkoztatott impulzusmomentumát!
41. Hogyan van értelmezve a merevtest tetszőleges O pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka?
42. Mik azok a fő tehetetlenségi irányok és fő tehetetlenségi tengelyek?
43. Mikor nvezünk egy merevtestet gömbszimmetrikusnak, tengleyszimmetrikusnak, ill. aszimmetrikusnak?
44. Mi a kapcsolat a merevtest TKP-ra vonatkoztatott impulzusmomentumának és szögsebességének komponensei között, ha a vektorokat a fő tehetetlenségi irányok szerint bontjuk komponensekre.
45. Ha egy $\vec{A}$ fizikai mennyiség vektora a merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszerben állandó, akkor hogyan változik ez a mennyiség a merevtest TKP-jával együtthaladó, nem forgó K'' vonatkoztatási rendszerben?

46. Ha az $\vec{A}$ vektormennyiség a merevtesthez rögzített K' vonatkoztatási rendszerben is függ az időtől, akkor mekkoerának találja a $\frac{d\vec{A}}{dt}$ deriváltat az a megfigyelő, aki a merevtest TKP-jával együtthaladó, nem forgó K'' vonatkoztatási rendszerben áll? (Szubsztanciális derivált!)

47. Írja fel a merevtest forgásának Euler-egyenleteit!

48. Milyen Euler-egyenletekben szereplő impulzusmomentumot és forgatónyomatékot milyen vonatkoztatási pontra kell vonatkoztatni? Milyen koordinátarendszerben vannak komponensekre bontva ezek a vektorok és hogyan?

49. Hogyan módosul az Euler-egyenletek jelentése, ha a merevtest rögzített forgástengellyel rendelkezik és az Euler-egyenleteket ennek a tengelynek valamelyik pontjára írtuk fel?

50. Milyen kapcsolat van a merevtest forgási energiájának infinitezimális megváltozása, a merevtest infinitezimális szögelfordulása és a merevtestre ható külső forgatónyomaték között? Hogyan fejezhető ki forgási energia idő szerinti első deriváltja a szögsebességgel, ha a merevtest rögzített tengely körül forog?

51. Milyen merevtetstet nevezünk erőmentes pörgettyűnek? Mikor nevezzük a pörgettyűt gömbi pörgettyűnek, szimmetrikus pörgettyűnek, ill. aszimmetrikus pörgettyűnek?

52. Mi a kapcsolat az erőmentes gömbi pörgettyű TKP-ra vonatkoztatott impulzusmomentuma és szögsebességvektora között? Hogyan mozognak a térben ezek a vektorok a pörgettyű mozgása során a pörgettyűhöz rögzített K' vonatkoztatási rendszerből és abból a nem forgó K laborrendszerből nézve, amelyben a TKP nyugszik? (Legyen a TKP a pörgettyű alátámasztási pontja.)

53. Mi a kapcsolat az erőmentes szimmetrikus pörgettyű TKP-ra vonatkoztatott impulzusmomentuma és szögsebességvektora között? Hogyan mozognak a térben ezek a vektorok a pörgettyű mozgása során a pörgettyűhöz rögzített K' vonatkoztatási rendszerből és abból a nem forgó K laborrendszerből nézve, amelyben a TKP nyugszik? (Legyen a TKP a pörgettyű alátámasztási pontja.)?

54. Fizikai inga a vízszintes z-tengely körül végez kis lengéseket. Mi az inga lengéseinek periódusideje? Mik azok a deviációs nyomatékok?

Mechanika. II. 2. zh. Kérdések a felkészüléshez

1. Hogyan szól pontrészecskére Newton II. törvénye?
2. Hogyan szól a pontrészecskék rendszerére vonatkozó impulzustétel?
3. Írja fel pontrendszer tömegközéppontjának a mozgásegyenletét!
4. Mi az erő definíciója?
5. Mit értünk a részecskére ható $\vec{F}$ erő által a részecskén végzett elemi munkán?
6. Mi a potenciális energia definíciója?
7. Írja fel az impulzustételt és az impulzusmomentum-tételt merevtest mozgására. Milyenek erők eredője szerepel az impulzustételben, számít-e, hogy az egyes erőknek hol van a támadási pontja? Milyen pontra vonatkoztatva érvényes az impulzusmomentum-tétel?
8. Legyen $\vec{A}$ a merevtesthez rögzített rendszerben állandó vektor. Mi ennek a vektornak a $\frac{d\vec{A}}{dt}$ változási sebessége a K laborrendszerből nézve, ha $\vec{\omega}$ a merevtest szögsebessége?

9. Mi a feltétele, hogy szétcsatolódjon a merevtest haladó és forgó mozgása?
10. Írja fel merevtest forgó mozgásának Euler-féle egyenleteit! Hogyan egyszerűsödnek ezek erőmentes gömbi pörgettyű, és erőmentes szimmetrikus pörgettyű esetén.
11. Jellemezze az erőmentes gömbi pörgettyű mozgását!
12. Jellemezze az erőmentes szimmetrikus pörgettyű mozgását!
13. Írja fel a rögzített tengely körül forgó merevtest mozgásegyenletét!
14. Szabadon mozgó merevtestnek az egyik fő tehetetlenségi tengelye irányába mutató kezdeti szögsebességet adunk. Megőrzi-e a szögsebesség az irányát a mozgás során? Miért?
15. Mi az általános összefüggés a merevtest impulzusmomentuma és szögsebessége között? Egy irányba mutatnak-e ezek a vektorok? Hogyan egyszerűsödik az összefüggés, ha az impulzusmomentumnak a fő tehetetlenségi tengelyek irányába mutató komponenseit fejezzük ki a szögsebességgel?
16. Mi a csúszásmentes gördülés kinematikai feltétele?
17. Mi a csúszásmentes gördülés dinamikai feltétele?
18. Normálkoordinátákban kifejezve egy kisrezgéseket végző rendszer mozgásegyenleteit, azok milyen alakot öltenek?
19. Milyen alakú a kisrezgéseket végző rendszer kinetikus és potenciális energiája normálkoordinátákkal kifejezve? Az egyes normálmódusok egymástól függetlenül járulnak-e hozzá a rendszer energiájához, vagy nem függetlenül?
20. Kisrezgéseket végző s szabadsági fokú rendszernek hány darab független normálrezgése lehetséges?
21. Az oszcillátorok milyen mozgását jelentik a normálrezgések?
22. Hogyan szól az energiamegmaradás törvénye konzervatív külső térben mozgó részecske esetén?
23. Írja fel a lineáris harmonikus oszcillátor Lagrange-függvényét!
24. Írja fel a lineáris harmonikus oszcillátor mozgásegyenletét!
25. Hogyan tehető össze egy deformálható közeg tetszőleges P pontjának kicsiny környezetében található másik Q pont kicsiny elmozdulása elemi transzlációból, infinitezimális elfordulásból és valódi deformációból?
26. Mi a kapcsolat az infinitezimális elfordulás szöge és a deformációt leíró kitérés-vektormező között?
27. Hogyan van értelmezve az $\vec{s}(\vec{r}, t)$ kitérés-vektormező segítségével a rugalmasan deformálható közeg $\epsilon_{i,j}$ deformációs tenzora?
28. Mi a deformációs tenzor $\epsilon_{x,x}$ diagonális komponensének jelentése, ha $\epsilon_{x,x} > 0$?
29. Milyen deformációt jelent, ha csak $\epsilon_{x,y} = \epsilon_{y,x} \neq 0$?
30. Mi a feszültségi tenzor $\sigma_{i,j}$ komponensének fizikai jelentése?
31. Rugalmasan deformálható közegben milyen kapcsolat van Hook törvénye szerint a feszültségi tenzor és a deformációs tenzor között?
32. Milyen kapcsolat van a relatív térfogatváltozás és a deformációs tenzor kózött?
33. Hogyan bontható fel a deformációs tenzor egy tiszta térfogati deformációt és egy tiszta nyírást leíró részre.

FÜGGELÉK

A Hamilton-féle mozgásegyenletek

Tekintsünk egy s szabadsági fokú mechanikai rendszert, amelynek Lagrange-függvénye $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$. Ennek energiakifejezése

$$H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L, \tag{A.1.1}$$

mert ez az a mennyiség, amelyik időbeli eltolási szimmetria megléte esetén megmarad. Itt

$$p_i = \frac{\partial L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} = p_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \qquad i = 1, 2, \ldots, s \tag{A.1.2}$$

a q_i általános koordinátákhoz kanonikusan konjugált impulzusokat jelentik. Ha a $p_i = p_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ függvénykapcsolatok invertálhatóak az általános sebességekben, akkor az utóbbiak kifejezhetők, mint a kanonikusan konjugált p_i impulzusok és természetesen mint a q_i-k függvényei,

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\underline{q}, \underline{p}, t). \tag{A.1.3}$$

Ekkor érvényesek az alábbi állítások:

1. Az energia az általános koordinátákkal és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusokkal fejezhető ki,
$$H = H(\underline{q}, \underline{p}, t), \tag{A.1.4}$$
ezt nevezzük a Hamilton-függvény kanonikus alakjának.

2. A q_i általános koordináta idő szerinti első deriváltja a Hamilton-függvénynek a q_i-hez kanonikusan konjugált p_i impulzus szerinti parciális deriváltjával egyenlő,
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\underline{q}, \underline{p}, t)}{\partial p_i}. \tag{A.1.5}$$

3. A p_i kanonikusan konjugált impulzus idő szerinti első deriváltja a Hamilton-függvénynek a q_i általános koordinát szerinti első deriváltjának a mínusz egyszerese,
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(\underline{q}, \underline{p}, t)}{\partial q_i}. \tag{A.1.6}$$

4. A Lagrange-függvény és a Hamilton-függvény idő szerinti parciális deriváltjai közt fennáll a
$$\frac{\partial H(\underline{q}, \underline{p}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)}{\partial t} \tag{A.1.7}$$
összefüggés, ahol vagy a jobb oldalon kell a $\dot{q}_i$ általános sebességeket kifejezni a p_i impulzusokkal, vagy fordítva a bal oldalon a p_i kanonikusan konjugált impulzusokat kifejezni a $\dot{q}_i$ általános sebességekkel.

A fenti tulajdonságokat úgy lehet matematikailag összefoglalni, hogy a $H(\underline{q},\underline{p},t)$ Hamilton-függvény az $L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)$ Lagrange-függvény Legendre-transzformáltja az általános sebességekben.

A fenti állítások a következőképpen bizonyíthatók:

1. Amennyiben a kanonikusan konjugált impulzusok (A.1.2) definíciójából következő $p_i = p_i(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)$ függvénykapcsolatok maradéktalanul feloldhatók a $\dot{\underline{q}}_i$ általános sebességekre, akkor léteznek a $\dot{\underline{q}}_i = \dot{\underline{q}}_i(\underline{q},\underline{p},t)$ függvények. Ezeket felhasználva az energia kifejezése,

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i(\underline{q},\underline{p},t) - L(\underline{q},\dot{\underline{q}}(\underline{q},\underline{p},t),t) \\ &= H(\underline{q},\underline{p},t) \end{aligned} \tag{A.1.8}$$

úgy adódik, mint az általános koordináták és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusok, valamint az idő függvénye. Ez a Hamilton-függvény kanonikus alakja. Ha másképp nem mondjuk, a Hamilton-függvényt mindig kanonikus alakjában fogjuk használni.

2.
$$\frac{\partial H(\underline{q},\underline{p},t)}{\partial p_i} = \dot{q}_i(\underline{q},\underline{p},t) + \sum_{j=1}^{s} p_j \frac{\partial \dot{q}_j(\underline{q},\underline{p},t)}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j(\underline{q},\underline{p},t)}{\partial p_i} = \dot{q}_i. \tag{A.1.9}$$

3.
$$\begin{aligned} -\frac{\partial H(\underline{q},\underline{p},t)}{\partial q_i} &= -\sum_{j=1}^{s} p_j \frac{\partial \dot{q}_j(\underline{q},\underline{p},t)}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j(\underline{q},\underline{p},t)}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{A.1.10}$$

4.
$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{s} p_j \frac{\partial \dot{q}_j(\underline{q},\underline{p},t)}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j(\underline{q},\underline{p},t)}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \tag{A.1.11}$$

Az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletek felhasználásával kapjuk, hogy

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i. \tag{A.1.12}$$

A fentieket összefoglalva tehát az Euler-Lagrange-egyenletekből következnek az úgynevezett Hamilton-féle mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,s \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,s \end{aligned} \tag{A.1.13}$$

A $2s$ darab Hamilton-egyenlet közönséges elsőrendű csatolt differenciálegyenletrendszert alkot az általános koordinátákra és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusokra, mint az idő függvényeire. Ennek az egyenletrendszernek, – a differenciálegyenletek elmélete szerint,– az általános megoldása $2s$ darab határozatlan paramétert tartalmaz. Utóbbiak értékét $2s$ darab kezdeti feltétel,

$$q_i(t_0) = q_{i0}, \qquad p_i(t_0) = p_{i0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{A.1.14}$$

egyértelműen meghatározza. A Hamilton-egyenletek adott kezdeti feltételhez tartozó megoldása egyértelmű.

Fordítva is igaz, a Hamilton-egyenletekből következnek az Euler-Lagrange-egyenletek. Csakugyan a

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{A.1.15}$$

Hamilton-egyenletek következtében írhatjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{A.1.16}$$

amik az Euler-Lagrange-egyenletek. **Mondhatjuk tehát, hogy az Euler-Lagrange-egyenletek és a Hamilton-egyenletek egyenértékűek.**

Még egy fontos megjegyzés: a Lagrange-függvény Legendre-transzformáltja akkor létezik, ha a kanonikus impulzusok, mint az általános sebességek függvényei feloldhatók az utóbbiakra. Ennek az a feltétele, hogy a Lagrange-függvény az általános sebességek konvex függvénye legyen. A konvexitás azt jelenti, hogy a

$$L^{(2)}_{i,j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \tag{A.1.17}$$

$s \times s$-es mátrix pozitív definit, azaz minden sajátértéke pozitív. Másrészről viszont, ha ez így van, akkor a Hamilton-függvény a kanonikusan konjugált impulzusoknak szintén konvex függvénye. Ezt annak alapján láthatjuk be, hogy megmutatjuk, hogy a

$$H^{(2)}_{i,j} = \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{p}_i \partial \dot{p}_j} \tag{A.1.18}$$

mátrix az $L^{(2)}_{i,j}$ mátrix inverze,

$$\sum_{k=1}^{s} L^{(2)}_{i,k} H^{(2)}_{k,j} = \delta_{i,j}. \tag{A.1.19}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{i,j} &= \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} \\
&= \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i}.
\end{aligned} \tag{A.1.20}$$

Ha a második derivált mátrixok egymás inverzei, akkor $H^{(2)}_{i,j}$ is pozitív definit. Ezt figyelembe véve és a Legendre-transzformáció képletét fordítva olvasva mondhatjuk, hogy a Lagrange-függvény a Hamilton-függvény Legendre-transzformáltja. **A Lagrange-függvény és a Hamilton-függvény tehát egymásnak Legendre-transzformáltjai.**

A klasszikus mechanikai rendszerek dinamikai leírásának tehát két, **egyenértékű** lehetőségével ismerkedtünk meg: a Lagrange-féle és a Hamilton-féle leírással. Ezek között a Legendre-transzformáció teremt kapcsolatot. Amíg a Lagrange-féle leírás s darab csatolt közönséges **másodrendű** differenciálegyenletből álló egyenletrendszer megoldását igényli, addig a Hamilton-féle leírás a problémát visszavezeti $2s$ darab közönséges **elsőrendű** differenciálegyenletből álló egyenletrendszer megoldására. A megoldást egyértelműsítő kezdőfeltételek száma mindkét esetben $2s$. A Lagrange-féle leírásban a keresett függvények az s darab független $q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ általános koordináta, mint az idő függvénye. A Hamilton-féle tárgyalásban a keresett függvények az s darab független $q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ általános koordináta és az s darab független, hozzájuk kanonikusan konjugált $p_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ impulzus, mint az idő függvénye. A Lagrange-féle leírás esetében a mozgás szemléltetésére a **konfigurációs teret** használjuk. Ezt szemléltethetjük úgy, hogy egy s dimenziós (általában görbevonalú) koordinátarendszer hálózza be, amelynek tengelyeire rendre a q_i általános koordináták vannak felmérve. A mechanikai rendszert a konfigurációs térben egy pont ábrázolja, amely folytonos és síma (vagy legalábbis szakaszonként síma) görbén mozog az Euler-Lagrange-egyenletek megoldása által meghatározott módon. Ez a görbe a fizikai rendszer pályája a konfigurációs térben. A konfigurációs tér két adott pontja közötti valóságos mozgás pályáját a legkisebb hatás elve választja ki mindazok közül a próbapályák (elképzelt pályák) közül, amelyek a konfigurációs tér ugyanezen két pontját kötik össze.

A Hamilton-féle leírásban szereplő független változókat, a q_i általános koordinátákat és a hozzájuk kanonikusan konjugált p_i impulzusokat is tekinthetjük egy $2s$ dimenziós térben koordinátáknak. Ezt a $2s$ dimenziós teret, amelyet az általános koordináták és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusok feszítenek ki, **fázistérnek** nevezzük. A fázistérben a mechanikai rendszer állapotát adott időpillanatban egy pont, a **fázispont** ábrázolja. A mozgás során a fizikai rendszert a fázistérben ábrázoló pont folytonos (és síma) görbét rajzol ki, ez a rendszer **fázistrajektóriája.** Adott kezdőfeltételeknek megfelelő kezdeti állapotot ábrázoló fázisponton átmenő fázistrajektória paraméteres egyenletrendszerét a Hamilton-egyenleteknek az adott $(\underline{q}_0, \underline{p}_0)$ kezdőfeltételekhez tartozó $q_i = q_i(t; \underline{q}_0, \underline{p}_0)$, $p_i = p_i(t; \underline{q}_0, \underline{p}_0)$ megoldásai jelentik.

Az általános koordináták és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusok változása az idő függvényében kimerítően jellemzi a mechanikai rendszer mozgását. Mindemellett sokszor közvetlenül arra vagyunk kíváncsiak, hogy valamely az általános koordináták és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusok függvényeként definiált

$f(\underline{q}, \underline{p}, t)$ fizikai mennyiség (mint pl. az energia) értéke hogyan változik az idő függvényében. Itt megengedtük, hogy a fizikai mennyiség értelmezése explicit módon is függhet az időtől. Utóbbi pl. az energia esetében akkor következik be, ha a részecskék az időtől explicit módon függő külső térben mozognak. A közvetett függvények deriválására vonatkozó láncszabály alkalmazásával kapjuk, hogy az általános koordinátáknak és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusoknak a Hamilton-egyenletek szerinti időbeli változása esetén:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^{s}\Big(-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\Big) + \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \tag{A.1.21}$$

ahol az utolsó egyenlőség felírásakor felhasználtuk a Hamilton-egyenleteket.

Az eredményt könnyen megjegyezhető, tömör alakba írhatjuk, ha bevezetjük az általános koordináták és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusoktól függő függvények halmazán a **Poisson-zárójelnek** nevezett műveletet. Legyen $f(\underline{q}, \underline{p}, t)$ és $g(\underline{q}, \underline{p}, t)$ két tetszőleges függvény (fizikai mennyiség), akkor a Poisson-zárójelükön a

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{s}\Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\Big) \tag{A.1.22}$$

kifejezést értjük. A Poisson-zárójelnek a legfontosabb tulajdonságai:

1. antikommutatív,
$$\{f, g\} = -\{g, f\}; \tag{A.1.23}$$

2.
$$\{f, g_1 + g_2\} = \{f, g_1\} + \{f, g_2\}; \tag{A.1.24}$$

3. ha λ tetszőleges valós szám, akkor
$$\{\lambda f, g\} = \lambda\{f, g\}; \tag{A.1.25}$$

4. szorzat Poisson-zárójelére érvényes a Leibnitz-szabály,
$$\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\}g_2 + g_1\{f, g_2\}; \tag{A.1.26}$$

5. érvényes a Jacobi-féle azonosság,
$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0; \tag{A.1.27}$$

6. a t idő-paraméter szerinti deriváltra ugyancsak a Leibnitz-szabály érvényes,
$$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \Big\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\Big\} + \Big\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\Big\}. \tag{A.1.28}$$

A Poisson-zárójel felhasználásával tetszőleges f fizikai mennyiség idő szerinti (teljes) első deriváltjára

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{A.1.29}$$

adódik. Innen leolvasható a következő állítás: Ha az f fizikai mennyiség nem függ explicit módon az időtől, akkor f akkor és csak akkor megmaradó mennyiség, ha a Hamilton-függvénnyel képezett Poisson-zárójele zérus,

$$f = \text{áll.} \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \{f, H\} = 0. \tag{A.1.30}$$

Speciálisan, ha f az általános koordináták, vagy a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusok egyike, akkor rendre

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H\} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned} \tag{A.1.31}$$

ahol felhasználtuk, hogy a független változókra

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{i,j}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0. \tag{A.1.32}$$

Látjuk, hogy a Poisson-zárójel segítségével fel tudjuk írni a Hamilton-egyenleteket. Ugyancsak közvetlen számolással adódnak az általános koordináták és a hozzájuk kanonikusan konjugált implzusok egymás közötti Poisson-zárójelei:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}. \tag{A.1.33}$$

Érdemes még bizonyítás nélkül megemlíteni Poisson tételét: Ha f és g mozgásállandók, akkor az $\{f, g\}$ Poisson-zárójelük is mozgásállandó. Ez a tétel segíthet újabb mozgásállandók meghatározásában. Azt azonban meg kell jegyezni, hogy két mozgásállandó Poisson-zárójele nem mindig szolgáltat újabb fizikai mennyiséget, mert lehet azonosan állandó, vagy eredményezhet olyan fizikai mennyiséget, ami az $f$és g mennyiségek függvénye.

B Kanonikus transzformációk

Az $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ Lagrange-függvény az általános koordináták, az általános sebességek és az idő függvénye. Az általános koordináták a mechanikai rendszer térbeli helyzetének megadásához szükséges geometriai adatok. Megengedett azonban, hogy a q_i ($i =$

$1, 2, \ldots, s$) általános koordináták helyett más Q_i általános koordinátákat használjunk, amelyek az eredeti q_i koordinátáknak és a t időnek függvényei,

$$Q_i = Q_i(\underline{q}, t), \tag{B.1.1}$$

ha ezek feloldhatók egyértelműen a q_i koordinátákra, azaz egyértelműen léteznek a $q_i = q_i(\underline{Q}, t)$ függvénykapcsolatok. A

$$\underline{q} \longrightarrow \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}, t) \tag{B.1.2}$$

transzformációt **ponttranszformációnak** nevezzük. A ponttranszformáció azt jelenti, hogy a q_i geometriai adatok helyett más Q_i geometriai adatokat használunk a mechanikai rendszer térbeli helyzetének megadására. Ponttranszformáció során a Lagrange-függvény

$$L'(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t) = L(\underline{q}(\underline{Q}, t), \dot{\underline{q}}(\underline{Q}, t), t) \tag{B.1.3}$$

szabály szerint transzformálódik, ahol

$$\dot{q}_i(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial q_i(\underline{Q}, t)}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i(\underline{Q}, t)}{\partial t}. \tag{B.1.4}$$

Az Euler-Lagrange-egyenletek alakja azonban nem változik ponttranszformáció során, ami azt jelenti, hogy az általános koordináták bármely megválasztása egyenértékű a dinamikai leírás szempontjából.

Az állítás a következőképpen bizonyítható:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} &= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}, \\
\frac{\partial L'}{\partial Q_i} &= \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i},
\end{aligned} \tag{B.1.5}$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} &= \sum_{j=1}^{s} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \\
&= \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{B.1.6}$$

mert

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} &= -\frac{\partial}{\partial Q_i}\Big(\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial q_j}{\partial Q_k}\dot{Q}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t}\Big) = -\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_k \partial Q_i}\dot{Q}_k - \frac{\partial^2 q_j}{\partial t \partial Q_i} \\
&= -\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial}{\partial Q_k}\Big(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\Big)\dot{Q}_k - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\Big) = -\frac{d}{dt}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}
\end{aligned}
\tag{B.1.7}
$$

és mert $\underline{q}(t)$ kielégíti az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenleteket.

A Hamilton-féle dinamikai leírás előnye, hogy a ponttranszformációk osztálya kibővíthető anélkül, hogy megváltozna a Hamilton-egyenletek alakja. Ez azért lehetséges, mert a q_i és p_i független változók, azaz a független változók száma $2s$, kétszer annyi, mint a Lagrange-féle leírásban. Most tehát a $2s$ darab változó együttes transzformációi között kereshetjük azokat, amelyek megőrzik a Hamilton-egyenletek alakját. Az ilyen transzformációkat **kanonikus transzformációknak** nevezzük. Ezek olyan

$$
\underline{q},\ \underline{p} \longrightarrow \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q},\underline{p},t),\ \ \underline{P} = \underline{P}(\underline{q},\underline{p},t) \tag{B.1.8}
$$

transzformációk, amelyek során a

$$
\dot{q}_i = \frac{\partial H(\underline{q},\underline{p},t)}{\partial p_i},\ \ \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\underline{q},\underline{p},t)}{\partial q_i} \tag{B.1.9}
$$

Hamilton-egyenletek megőrzik az alakjukat, azaz a transzformált $H'(\underline{Q},\underline{P},t)$ Hamilton-függvénnyel felírt mozgásegyenletek,

$$
\dot{Q}_i = \frac{\partial H'(\underline{Q},\underline{P},t)}{\partial P_i},\ \ \dot{P}_i = -\frac{\partial H'(\underline{Q},\underline{P},t)}{\partial Q_i} \tag{B.1.10}
$$

változatlan alakúak.

Melyek azok a transzformációk, amelyek kanonikusak, azaz megőrzik a Hamilton-egyenletek alakját? A kérdés megválaszolásához írjuk fel a hatás variációját a konfigurációs térben rögzített kezdő és végpontok között a régi és az új koordináták segítségével:

$$
0 = \delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2}[\sum_{i=1}^{s}p_i\dot{q}_i - H]dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}[\sum_{i=1}^{s}P_i\dot{Q}_i - H']dt, \tag{B.1.11}
$$

ahol a variációt $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, ill. $\delta Q_i(t_1) = \delta Q_i(t_2) = 0$ feltételekkel kell képezni. Itt az egyenlőség utolsó előtti és utolsó kifejezésében a Hamilton-függvény segítségével felírt hatás úgy értendő, hogy rendre a $\underline{q}(t)$, ill. a $\underline{Q}(t)$ koordinátáknak, mint az idő függvényeinek funkcionálja.

A hatás variációja az eredeti és a transzformált változókban egyaránt eltűnik, ha a megfelelő integrandusok csak egy teljes deriváltban különböznek,

$$
\sum_{i=1}^{s}p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{s}P_i\dot{Q}_i - H' + \frac{d}{dt}W(\underline{q},\underline{Q},t), \tag{B.1.12}
$$

ahol $W(\underline{q},\underline{Q},t)$ a régi és az új általános koordinátáknak tetszőleges függvénye. Ezt a függvényt a **kanonikus transzformáció alkotófüggvényének** nevezzük. Ehhez elegendő megmutatni, hogy

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}W &= \delta\Big[W(\underline{q}(t_2),\underline{Q}(t_2),t_2)-W(\underline{q}(t_1),\underline{Q}(t_1),t_1)\Big]\\ &= \Bigg[\sum_{i=1}^{s}\Big(\frac{\partial W}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial W}{\partial Q_i}\delta Q_i\Big)\Bigg]_{t_1}^{t_2}=0 \qquad \text{(B.1.13)}\end{aligned}$$

Képezzük a (B.1.12) feltételi egyenlet variációját a q_i, Q_i, t független változók szerint, akkor

$$\sum_{i=1}^{s} p_i\delta q_i - H\delta t = \sum_{i=1}^{s} P_i\delta Q_i - H'\delta t + \frac{\partial W}{\partial t}\delta t + \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial W}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial W}{\partial Q_i}\delta Q_i, \qquad \text{(B.1.14)}$$

ami független variációkra akkor és csak akkor tud teljesedni, ha valamennyi független változó variációjának együtthatója külön-külön zérus:

$$\begin{aligned}p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i}, \Rightarrow Q_i = Q_i(\underline{q},\underline{p},t),\\ P_i &= -\frac{\partial W}{\partial Q_i}, \Rightarrow P_i = P_i(\underline{q},\underline{p},t),\\ H' &= H + \frac{\partial W}{\partial t}. \qquad \text{(B.1.15)}\end{aligned}$$

A kanonikus transzformációk (B.1.12) feltételi egyenletéből kaphatunk Legendre-transzformációval más alkotófüggvényű kanonikus transzformációkat. Tekintsük pl. azt az esetet, amikor az alkotófüggvény a $\underline{q}$ régi koordináták és az új $\underline{P}$ impulzusok függvénye. Ehhez úgy jutunk, ha a korábbi $W(\underline{q},\underline{Q},t)$ alkotófüggvényt a $\underline{Q}$ változókban Legendre-transzformáljuk:

$$\bar{W}(\underline{q},\underline{P},t) = W(\underline{q},\underline{Q},t) + \sum_{j=1}^{s} P_i Q_i, \quad P_i = -\frac{\partial W(\underline{q},\underline{Q},t)}{\partial Q_i}. \qquad \text{(B.1.16)}$$

Ekkor az (B.1.12) egyenlet

$$\sum_{i=1}^{s} p_i\delta q_i - H\delta t = \sum_{i=1}^{s} P_i\delta Q_i - H'\delta t + \frac{d}{dt}\bar{W}(\underline{q},\underline{P},t)\delta t - \sum_{i=1}^{s}(P_i\dot{Q}_i + \dot{P}_i Q_i)\delta t \qquad \text{(B.1.17)}$$

alakot ölt, ahol

$$\frac{d}{dt}\bar{W}(\underline{q},\underline{P},t) = \frac{\partial \bar{W}(\underline{q},\underline{P},t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial \bar{W}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial \bar{W}}{\partial P_i}\dot{P}_i. \qquad \text{(B.1.18)}$$

Ezt felhasználva a δq_i, δP_i, δt független variációkra a

$$\sum_{i=1}^{s}\Big(p_i-\frac{\partial\bar{W}}{\partial q_i}\Big)\delta q_i \;=\; \sum_{i=1}^{s}\Big(\frac{\partial\bar{W}}{\partial P_i}-Q_i\Big)\delta P_i+\Big(H-H'+\frac{\partial\bar{W}}{\partial t}\Big)\delta t \tag{B.1.19}$$

feltétel adódik, és végül a kanonikus transzformáció

$$p_i=\frac{\partial\bar{W}}{\partial q_i},\qquad Q_i=\frac{\partial\bar{W}}{\partial P_i},\qquad H'=H+\frac{\partial\bar{W}}{\partial t} \tag{B.1.20}$$

alakot ölt.

Kanonikus transzformáció során a térbeli és az impulzus jellegű adatok keverednek. Az általános koordináták és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusok egyenértékűek a dinamikai leírás szempontjából. Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy a fázistérben végtelen sokféle görbevonalú koordinátarendszert használhatunk a dinamikai leíráshoz. Egyedül az a fontos, hogy a Hamilton-egyenletek alakja ne változzon, ha koordinátarendszert változtatunk.

Érdemes a kanonikus transzformáció kétféle speciális esetével külön is foglalkozni.

1. Az a kanonikus transzformáció, amelynek alkotófüggvénye

$$W(\underline{q},\underline{Q})=\sum_{i=1}^{s}q_iQ_i, \tag{B.1.21}$$

olyan, hogy felcseréli az általános koordinátákat és a kanonikusan konjugált impulzusokat,

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}=Q_i,\qquad P_i=-\frac{\partial W}{\partial Q_i}=-q_i. \tag{B.1.22}$$

2. Az

$$\bar{W}(\underline{q},\underline{P},t)=\sum_{i=1}^{s}f_i(\underline{q},t)P_i \tag{B.1.23}$$

alkotófüggvénnyel adott kanonikus transzformáció, ahol $f_i(\underline{q},t)$ tetszőleges függvények, ponttranszformációt jelent, hiszen

$$Q_i=\frac{\partial\bar{W}}{\partial P_i}=f_i(\underline{q},t). \tag{B.1.24}$$

Ponttranszformáció során az új impulzusokat a

$$p_i=\frac{\partial\bar{W}}{\partial q_i}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial f_j}{\partial q_i}P_j \tag{B.1.25}$$

egyenletek feloldásával kell meghatározni.

A kanonikus transzformációkkal szemben nemcsak a Hamilton-egyenletek alakja marad változatlan, hanem a Poisson-zárójelek is:

$$\{f,g\}_{\underline{q},\underline{p}} = \{f,g\}_{\underline{Q},\underline{P}}. \tag{B.1.26}$$

Ennek a következménye, hogy az $(\underline{q},\underline{p}) \longrightarrow (\underline{Q},\underline{P})$ transzformáció akkor és csak akkor kanonikus transzformáció, ha az új változók Poisson-zárójelei a régi változók tekintetében

$$\{Q_i,Q_j\}_{\underline{q},\underline{p}} = \{P_i,P_j\}_{\underline{q},\underline{p}} = 0, \qquad \{Q_i,P_j\}_{\underline{q},\underline{p}} = \delta_{i,j}. \tag{B.1.27}$$

A mechanikai rendszer időbeli fejlődése, amelyet a Hamilton-egyenletek határoznak meg, a t és a $t+\tau$ időpontok között,

$$q_i(t+\tau) = q_i(\tau,\underline{q}(t),\underline{p}(t)), \qquad p_i(t+\tau) = p_i(\tau,\underline{q}(t),\underline{p}(t)). \tag{B.1.28}$$

Be lehet látni, hogy ez kanonikus transzformáció, amelynek az alkotófüggvénye a hatásintegrál negatívja, ahol a valóságos pályára kiszámolt hatást, mint a $\underline{q}(t)$ kezdőpont és a $\underline{Q}(t) = \underline{q}(t+\tau)$ végpont, valamint a t időpillanat függvényének tekintjük. Valóban, tekintsük a hatást a kezdő- és végpont függvényeként az azokat összekötő valódi pályán,

$$S = \int_t^{t+\tau} dt' \Big(\sum_{i=1}^{s} p_i(t')\dot{q}_i(t') - H(t')\Big) \equiv S(\underline{q}(t),\underline{q}(t+\tau),t). \tag{B.1.29}$$

Ekkor

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i(t+\tau)\dot{q}_i(t+\tau) - H(t+\tau) - \Big(\sum_{i=1}^{s} p_i(t)\dot{q}_i(t) - H(t)\Big), \tag{B.1.30}$$

amit összevetve a (B.1.12) kanonikus transzformációra vonatkozó feltételi egyenlettel, a

$$W(\underline{q},\underline{Q},t) = -S(\underline{q}(t),\underline{q}(t+\tau),t) \tag{B.1.31}$$

megfeleltetést tehetjük.

Végezetül bizonyítás nélkül közlünk még néhány állítást. Legyen a fázistérben egy infinitezimális térfogatelem

$$d\Gamma = dq_1 \cdots dq_s dp_1 \cdots dp_s. \tag{B.1.32}$$

Bizonyítható, hogy a $(\underline{q},\underline{p}) \longrightarrow (\underline{Q},\underline{P})$ **kanonikus transzformáció a fázistérfogatelemet invariánsan hagyja,**

$$d\Gamma = \prod_{i=1}^{s} dq_i dp_i = \prod_{i=1}^{s} dQ_i dP_i. \tag{B.1.33}$$

Ennek következménye **Liouville tétele:** ha a $\Delta\Gamma$ fázistérfogat minden pontja elmozdul a Hamilton-egyenleteknek megfelelően, akkor a fázistérfogat változatlan marad. Ez nyilvánvaló, mert a mozgás kanonikus transzformáció és kanonikus transzformáció során minden fázistérfogatelem képének térfogata az eredeti fázistérfogatelem térfogatával egyezik meg.

C Hamilton-Jacobi-egyenlet

Tekintsünk először egy egy-szabadsági fokú mechanikai rendszert. A hatásintegrál

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, t)dt. \tag{C.1.1}$$

Mint azt már korábban tanultuk, ha a mozgás $q(t)$ pályáját infinitezimálisan megváltoztatjuk, $q(t) \longrightarrow q(t) + \delta q(t)$, akkor a hatás variációja

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} \Big(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt'}\delta q\Big)dt' \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \Big(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt'}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big)\delta q dt' + \Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big]_{t_i}^{t_f}. \end{aligned} \tag{C.1.2}$$

Vizsgáljuk most a korábbiaktól eltérően a hatást olyan valódi pályákon, amelyeknek közös a kiinduló pontja a konfigurációs térben az adott t_i kezdeti időpillanatban, a q_f végpontjuk azonban különbözik és az a t_f időpillanat is különbözik, amikor ezek a pályák befutnak a q_f végpontba. Ekkor a hatás a q_f és t_f változók függvénye, $S = S(q_f, t_f)$. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért hagyjuk el eme változók jelöléséből a végpontra utaló f alsó indexet. Mivel a valódi pályákon történő mozgás $q(t)$ pályája kielégíti az Euler-Lagrange-egyenletet, azért a δS variáció jobb oldalán álló integrál a valódi pályákon tekintett hatás esetében zérus. Azt kapjuk tehát, hogy

$$\delta S(q, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \tag{C.1.3}$$

ahol a jobb oldalon álló kifejezést a q végpont eléréséhez tartozó t pillanatban kell venni. (Felhasználtuk, hogy $\delta q(t_1) = 0$ a kezdeti időpillanatban.) A hatásnak, mint az integrál felső határa függvényének az általános koordináta szerinti parciális deriváltja tehát az általános koordinátához kanonikusan konjugált impulzus:

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p. \tag{C.1.4}$$

Az állítás különösebb nehézség nélkül általánosítható s szabadsági fokú rendszerekre:

$$\frac{\partial S(\underline{q}, t)}{\partial q_i} = p_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \tag{C.1.5}$$

Másrészről a hatásnak, mint a konfigurációs térbeli pálya végpontjaihoz tartozó $\underline{q}, t$ adatok függvényének a teljes idő szerinti deriváltja:

$$\frac{dS(\underline{q}(t), t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_i}^{t} L dt' = L, \tag{C.1.6}$$

ahol a bal oldalon álló derivált

$$\frac{dS(\underline{q}(t),t)}{dt} = \frac{\partial S(\underline{q},t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S(\underline{q},t)}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S(\underline{q},t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i. \tag{C.1.7}$$

Ezt a kifejezést a megelőző egyenlet bal oldalába behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{\partial S(\underline{q},t)}{\partial t} = L - \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i = -H. \tag{C.1.8}$$

A fentiek alapján az $S(\underline{q},t)$ hatásra, mint a konfigurációs térbeli pálya végponti adatainak függvényére a következő parciális differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial S(q_1,\ldots,q_s,t)}{\partial t} + H(q_1,\ldots,q_s,\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_s},t) = 0. \tag{C.1.9}$$

Ez a **Hamilton-Jacobi-egyenlet.** A Hamilton-Jacobi-egyenlet elsőrendű parciális differenciálegyenlet a $2s{+}1$-változós $S(q_1,\ldots,q_s,t)$ hatásfüggvényre nézve. **A Hamilton-Jacobi-egyenlet úgy nevezett teljes megoldásának ismeretében általános módszer adható a mozgásegyenletek integrálására.** Az Euler-Lagrange-egyenletek megoldása és a Hamilton-egyenletek megoldása, mint láttuk, két egyenértékű módszert jelent a mechanikai rendszer dinamikai leírására. A Hamilton-Jacobi-egyenleten alapuló módszer egy további, a fenti két módszerrel egyenértékű lehetőség a mozgásegyenletek integrálására.

A Hamilton-Jacobi-egyenlet teljes megoldásán azt a megoldást értjük, amely pontosan annyi független határozatlan paramétert tartalmaz, amennyi a keresett függvény, a hatás független változóinak a száma. Mivel a hatás s darab q_i általános koordináta és a t idő függvénye, azért a teljes megoldás $s+1$ darab $\alpha_1,\ldots,\alpha_s,A$ határozatlan paramétert tartalmaz. Mivel azonban a Hamilton-Jacobi-egyenletben a hatásnak csak a parciális deriváltjai szerepelnek, azért az egyik ilyen paraméter additív; legyen ez a paraméter A. A Hamilton-Jacobi-egyenlet teljes megoldása tehát

$$S(q_1,\ldots,q_s,t) = f(q_1,\ldots,q_s,t,\alpha_1,\ldots,\alpha_s) + A \tag{C.1.10}$$

alakú. Tegyük fel, hogy megtaláltuk a teljes megoldásban szereplő f függvény explicit alakját. Most megmutatjuk, hogy akkor abból megkaphatjuk a mozgásegyenletek általános megoldását. Hajtsunk végre olyan kanonikus transzformációt, amelynek során az új P_i impulzusoknak a Hamilton-Jacobi-egyenlet teljes megoldásában szereplő α_i paramétereket választjuk, és amelynek alkotófüggvénye a teljes megoldásban szereplő f függvény:

$$(q_i,p_i) \longrightarrow (Q_i,P_i=\alpha_i), \qquad \bar{W}(\underline{q},\underline{P},t) = f(\underline{q},\underline{\alpha},t). \tag{C.1.11}$$

Ekkor a kanonikus transzformáció képleteit felhasználva,

$$Q_i = \frac{\partial f(\underline{q},\underline{\alpha},t)}{\partial \alpha_i}, \quad p_i = \frac{\partial f(\underline{q},\underline{\alpha},t)}{\partial q_i}, \tag{C.1.12}$$

és az új Hamilton-függvény azonosan zérus,

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{C.1.13}$$

Ez viszont azt jelenti a Hamilton-egyenletek alapján, hogy mind az új kanonikus koordináták, mind az új kanonikus impulzusok mozgásállandók, hiszen

$$\dot{Q}_i = 0, \quad \dot{\alpha}_i = 0. \tag{C.1.14}$$

Innen

$$\alpha_i = \text{ áll.}, \quad Q_i = \beta_i = \text{ áll.} \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{C.1.15}$$

Az új koordinátákat meghatározó, s darab egyenletből álló

$$Q_i = \frac{\partial f(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial \alpha_i} \equiv \beta_i \tag{C.1.16}$$

algebrai egyenletrendszer megoldása szolgáltatja a régi q_i általános koordinátákat, mint az α_i paraméterek és az új koordináták, azaz a $Q_i = \beta_i$ állandók és a t idő függvényeit: $q_i = q_i(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, t)$. Ez éppen a mozgásegyenletek $2s$ darab állandó paramétert tartalmazó általános megoldása. Ennek birtokában a régi koordinátákhoz kanonikusan konjugált impulzusokat is ki tudjuk fejezni, mint az idő és a $2s$ darab állandó paraméter függvényeit:

$$p_i = \frac{\partial f(\underline{q}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, t), \underline{\alpha}, t)}{\partial q_i} \equiv p_i(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, t). \tag{C.1.17}$$

A Hamilton-Jacobi-egyenleten alapuló dinamikai leírásban a mozgásegyenletek integrálásának minden nehézsége áttolódott az egyenlet teljes megoldásának megkeresésére.

Konzervatív rendszerek esetében a Hamilton-Jacobi-egyenlet leegyszerűsödik, hiszen ekkor a Hamilton-függvény mozgásállandó, értéke a mechanikai rendszer állandó $H = E$ energiája. Ezért a

$$\frac{\partial S(\underline{q}, t)}{\partial t} = -E \tag{C.1.18}$$

összefüggés közvetlenül integrálható az idő tekintetében és a hatás az

$$S(\underline{q}, t) = S_0(\underline{q}) - Et \tag{C.1.19}$$

alakot ölti, ahol $S_0(\underline{q})$ az úgy nevezett „rövidített hatás”. A Hamilton-Jacobi-egyenlet ekkor átírható a rövidített hatásra vonatkozó elsőrendű parciális differenciálegyenletté,

$$E = H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right). \tag{C.1.20}$$

D Nem inerciális vonatkoztatási rendszerek

Egyetlen pontrészecske mozgásának példáján vizsgáljuk meg, hogy hogyan módosulnak a mozgásegyenletek nem inerciális vonatkoztatási rendszerekben. Látni fogjuk, hogy Newton II. törvénye változatlanul érvényben marad, ha az erőtörvényből származó erők mellett az úgynevezett „tehetetlenségi erőket” is figyelembe vesszük. Ilyen erők csak a nem inerciális vonatkoztatási rendszerekben lépnek fel.

Legyen K_0 inerciarendszer. Ebben az m tehetetlen tömegű pontrészecske Lagrange-függvénye (a szokásos jelöléseket használva)

$$L_0 = \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 - V_0(\vec{r}_0), \tag{D.1.1}$$

ahol a 0 alsó index a K_0 inerciarendszerre utal, értelemszerűen $\vec{v}_0 = \frac{d}{dt}\vec{r}_0 = \dot{\vec{r}}_0$. A legkisebb hatás elve értelmében a mozgásegyenlet az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenlet,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_0} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_0} = 0, \tag{D.1.2}$$

amelynek explicit alakja

$$m\frac{d\vec{v}_0}{dt} = -\frac{\partial V_0}{\partial \vec{r}_0}. \tag{D.1.3}$$

Ez pontosan Newton II. törvénye: az 4m4 tehetetlen tömeg szorozva a részecske gyorsulásával , azaz az impulzusváltozási gyorsaság, más néven az erő egyenlő az erőtörvényből adódó értékével, ha a részecske V_0 potenciális energiájú (esetleg az időtől explicit módon is függő általánosított potenciális energiájú) külső térben mozog. Az erőtörvény a potenciális energia negatív gradiense, mint az $\vec{r}_0$ helyzetvektor (és esetleg az idő) függvénye.

Hogyan módosul a mozgásegyenlet, ha a fenti példában szereplő, külső térben mozgó részecskét nem inerciarendszerben nyugvó megfigyelőként vizsgáljuk, hanem valamilyen nem inerciális rendszerben nyugvó megfigyelőként. A kérdés megválaszolásához abból fogunk kiindulni, hogy **a legkisebb hatás elve tetszőleges vonatkoztatási rendszerben érvényes, legyen az akár inerciális, akár nem inerciális vonatkoztatási rendszer.** Azt viszont figyelembe kell vegyük, hogy egyik vonatkoztatási rendszerről a másikra történő áttérés során a Lagrange-függvény explicit alakja változni fog. Ha a K_0 inerciarendszerbeli $\vec{r}_0$ helyzetvektort és $\vec{v}_0$ sebességvektort kifejezzük részecske egy másik K' vonatkoztatási rendszerben nyugvó megfigyelő által észlelt $\vec{r}'$ és $\vec{v}'$ helyzetvektorával és sebességvektorával:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}', \vec{v}', t), \qquad \vec{v}_0 = \vec{v}_0(\vec{r}', \vec{v}', t), \tag{D.1.4}$$

akkor a K' vonatkoztatási rendszerben a Lagrange-függvény kinetikus energia tagja, mint a K'-ben nyugvó megfigyelő által észlelt helyzet- és sebességvektor függvénye:

$$T'(\vec{r}', \vec{v}', t) = T_0\Big(\vec{v}_0(\vec{r}', \vec{v}', t)\Big). \tag{D.1.5}$$

Ha a jobb oldalon álló kifejezés explicit alakjában szerepel olyan tag, amelyik idő szerinti teljes derivált, akkor azt a tagot elhagyhatjuk az $L' = T' - V'$ Lagrange-függvény explicit alakjának felírásakor. A külső térben a részecske potenciális energiafüggvénye K_0-ban $V_0(\vec{r}_0)$, $K'-$ben jelölje ezt $V'(\vec{r}')$. A Galilei-féle relativitási elv csak inerciarendszerekben érvényes, ezért a priori nem mondhatunk semmi közelebbit az általános elvek alapján a $V'(\vec{r}')$ függvény és a $V_0(\vec{r}_0)$ függvény kapcsolatáról. Természetesen, ha K' is inerciarendszer, akkor a relativitási elv értelmében $V'(\vec{r}') = V_0(\vec{r}')$, azaz a potenciális energiafüggvény megegyezik a két vonatkoztatási rendszerben.

2 Gyorsulva haladó, nem forgó vonatkoztatási rendszer

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a részecske mozgását olyan K' rendszerben nyugvó megfigyelő írja le, amely K' rendszer a K_0 inerciarendszerhez képest az idő adott függvényének tekintett $\vec{V}(t)$ sebességgel haladó mozgást végez, de nem forog a K_0 inerciarendszerhez képest. A klasszikus mechanikában a „nem forgó" vonatkoztatási rendszer azt jelenti, hogy ha a K' rendszerben kijelölünk 3 független irányt, akkor azoknak a K_0-ban kijelölt 3 független iránnyal páronként bezárt szögei időben állandók. Ekkor a részecske infinitezimális dt idő alatt bekövetkező K_0, ill. K' rendszerbeli $d\vec{r}_0$, ill. $d\vec{r}'$ elmozdulásai közt

$$d\vec{r}_0 = d\vec{r}' + \vec{V}(t)dt \tag{D.2.1}$$

kapcsolat áll fenn, ahonnan a megfelelő sebességek kapcsolata:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{V}(t), \tag{D.2.2}$$

ahol $\vec{v}'$, ill. $\vec{v}_0$ rendre a részecske sebessége a K', ill. a K_0 vonatkoztatási rendszerben.

A helyzetvektorok közti kapcsolatot integrálva idő szerint és feltételezve, hogy a $t = 0$ időpillanatban K_0 és K' origója egybe esik, azt kapjuk, hogy

$$\vec{r}_0 = \vec{r}' + \int_0^t \vec{V}(t')dt' \equiv \vec{r}_0(\vec{r}', t). \tag{D.2.3}$$

Innen látjuk, hogy a K'-ben a részecske helyzetvektora csak a K_0-beli helyzetvektorától és a t időtől függ, de nem függ a részecske K_0-beli sebességétől.

Jelölje az általában nem inerciális K' rendszerben a potenciális energiát $V'(\vec{r}')$. A K' rendszerben a Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2}m(\vec{v}' + \vec{V})^2 - V'(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{2}m\vec{v}'^{\,2} + m\vec{V}\cdot\vec{v}' + \frac{1}{2}m\vec{V}^2 - V'(\vec{r}'). \end{aligned} \tag{D.2.4}$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon álló második tagot azonosan átalakíthatjuk úgy, hogy abban a részecske lineárisan szereplő sebessége helyett a helyzetvektora szerepeljen,

$$m\vec{V}\cdot\vec{v}' = m\vec{V}\cdot\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(m\vec{V}\cdot\vec{r}'\Big) - m\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{r}'. \tag{D.2.5}$$

Hagyjuk el innen az idő szerinti teljes deriváltat tartalmazó tagot, valamint a Lagrange-függvénynek a harmadik, a részecske kinematikai jellemzőit nem tartalmazó tagját. Így kapjuk meg a Lagrange-függvény végleges alakját a K' rendszerben:

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^{\,2} - m\vec{A}(t)\cdot\vec{r}' - V'(\vec{r}'), \tag{D.2.6}$$

ahol bevezettük a K' rendszer

$$\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} \tag{D.2.7}$$

K_0 inerciarendszerhez képesti haladó gyorsulását, ami az időnek adott függvénye. A legkisebb hatás elve alapján az Euler-Lagrange-egyenlet:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\vec{v}'} - \frac{\partial L'}{\partial\vec{r}'}, \tag{D.2.8}$$

ahonnan a részecske mozgásegyenlete K'-ben:

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial V'(\vec{r}')}{\partial\vec{r}'} - m\vec{A}(t). \tag{D.2.9}$$

Innen látjuk, hogy a mozgásegyenlet megőrizte Newton II. törvényének az alakját, de azon az áron, hogy az erőtörvényből adódó $-\frac{\partial V'(\vec{r}')}{\partial\vec{r}'}$ erő mellett fel kell tételeznünk egy, a haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszer gyorsulásával azonos térerősségű homogén külső tér felléptét. Utóbbi következtében az m tömegű részecskére a K_0 inerciarendszerhez képest (azaz minden inerciasrendszerhez képest) $\vec{A}(t)$ gyorsulással haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszerben $-m\vec{A}(t)$ tehetetlenségi erő lép fel. Ez a tehetetlenségi erő a részecske tehetetlen tömegével és vonatkoztatási rendszer haladó gyorsulásával arányos, és az utóbbival ellentétes irányba mutat.

Speciális esetben előfordulhat, hogy a K' vonatkoztatási rendszernek a K_0 inerciarendszerhez képesti haladási sebessége állandó, $\vec{V}$ =áll., azaz a gyorsulása zérus, $\vec{A} = 0$. Ekkor K' is inerciarendszer. Valóban, ekkor a tehetetlenségi erő $-m\vec{A} = 0$-nak adódik. Másrészt inerciarendszerekben érvényes a Galilei-féle relativitási elv, ami azt jelenti, hogy a külső tér erőtörvénye azonos kell legyen K_0-ban és K'-ben. Ez is teljesül, hiszen ekkor mindkét rendszerben azonos a potenciálisenergia-függvény,

$$V'(\vec{r}') = V_0(\vec{r}'), \tag{D.2.10}$$

ahonnan az erőtörvény K'-ben

$$-\frac{\partial V'(\vec{r}')}{\partial\vec{r}'} = -\frac{\partial V_0(\vec{r}')}{\partial\vec{r}'} \equiv \vec{F}(\vec{r}') \tag{D.2.11}$$

ami ugyanaz az $\vec{F}(\vec{r}')$ függvénye $\vec{r}'$-nek, mint amilyen $\vec{F}(\vec{r}_0)$ függvénye az erőtörvény a K_0 rendszerben $\vec{r}_0$-nak.

3 Gyorsulva haladó és forgó mozgást végző vonatkoztatási rendszer

Legyen K olyan vonatkoztatási rendszer, amelynek az origója egybeesik az előbb vizsgált K' rendszer origójával, de amely K'-höz (ill. K_0-hoz) képest az $\vec{n}(t)$, általában időben változó egységvektor által adott irány körül $\omega(t)$ nem egyenletes szögsebességgel forog. Bevezethetjük a forgás $\vec{\omega}$ szögsebesség vektorát az alábbi definícióval: legyen a K rendszernek az $\vec{n}(t)$ irány körüli, $(t, t + dt)$ infinitezimális időtartam alatt bekövetkező előjeles szögelfordulása $d\alpha$ ($d\alpha$ pozitív, ha a szögelfordulás a jobbkéz-szabály szerint illeszkedik az $\vec{n}(t)$ irányhoz), akkor

$$\vec{\omega}(t) = \vec{n}(t)\frac{d\alpha}{dt}. \tag{D.3.1}$$

Mint azt a térbeli forgatások kapcsán megbeszéltük, a K rendszerrel együtt forgó (a K-hoz képest rögzített) $d\vec{r}$ elmozdulásvektor és a nem forgó K' rendszerben a megfelelő $d\vec{r}'$ elmozdulásvektor közti kapcsolat,

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{n}d\alpha \times \vec{r}. \tag{D.3.2}$$

Ha formálisan elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát az eltelt dt idővel, akkor

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{D.3.3}$$

adódik a részecske K', ill. K rendszerben nyugvó megfigyelők által mért $\vec{v}'$, ill. $\vec{v}$ sebességeinek kapcsolatára.

Jelölje a K rendszerben a potenciális energiát $V(\vec{r})$. Ekkor a külső térben mozgó részecske Lagrange-függvénye a K rendszerben:

$$L = \frac{1}{2}m(\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r})^2 - m\vec{A} \cdot \vec{r} - V(\vec{r}). \tag{D.3.4}$$

A kinetikus energia tagot úgy kaptuk a K'-ben érvényes L' Lagrange-függvényből, hogy T' kifejezésében $\vec{v}'$-t kifejeztük a K-ban mért $\vec{v}$ sebességgel. Ugyanakkor az L' Lagrange-függvény második tagjában felhasználtuk, hogy ugyanannak az objektív térbeli pontnak a helyzetvektora K-ban és K'-ben ugyanaz, ha az origók egybeesnek. (Segít a megértésben, ha arra gondolunk, hogy az infinitezimális elmozdulásvektorokra felírt összefüggés tulajdonképpen az elmozdulásvektorok K-ban, ill. K'-ben mereven rögzített Descartes-koordinátarendszerben vett komponenseiből képezett oszlopvektorokra írható fel.) Írjuk a kinetikus energiát

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2}m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{D.3.5}$$

alakba, és képezzük ezután a Lagrange-függvény teljes differenciálját a független változók $d\vec{r}$ és $d\vec{v}$ infinitezimális megváltozásai esetén:

$$\begin{aligned} dL &= m\vec{v} \cdot d\vec{v} + m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot d\vec{v} + m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times d\vec{r}) \\ &\quad + m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times d\vec{r}) - m\vec{A} \cdot d\vec{r} - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r}. \end{aligned} \tag{D.3.6}$$

A vegyes szorzatokat azonosan átalakítva,

$$\begin{aligned} m\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times d\vec{r}) &= m(\vec{v}\times\vec{\omega})\cdot d\vec{r}, \\ m(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times d\vec{r}) &= m[(\vec{\omega}\times\vec{r})\times\vec{\omega}]\cdot d\vec{r}, \end{aligned} \tag{D.3.7}$$

a Lagrange-függvény differenciálját

$$\begin{aligned} dL &= \left[m\vec{v}\times\vec{\omega} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - m\vec{A} - \frac{\partial V}{\partial\vec{r}}\right]\cdot d\vec{r} \\ &\quad +[m\vec{v}+m\vec{\omega}\times\vec{r}]\cdot d\vec{v} \end{aligned} \tag{D.3.8}$$

alakba írhatjuk. Innen leolvashatjuk a Lagrange-függvény gradienseit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\vec{r}} &= m\vec{v}\times\vec{\omega} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - m\vec{A} - \frac{\partial V}{\partial\vec{r}}, \\ \frac{\partial L}{\partial\vec{v}} &= m\vec{v}+m\vec{\omega}\times\vec{r}. \end{aligned} \tag{D.3.9}$$

Ezeket felhasználva megkapjuk a részecske mozgásegyenletét a K haladó és egyúttal forgó vonatkoztatási rendszerben:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial\vec{r}}, \tag{D.3.10}$$

azaz

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial\vec{r}} - m\vec{A} + m\vec{r}\times\dot{\vec{\omega}} + 2m\vec{v}\times\vec{\omega} + m\vec{\omega}\times(\vec{r}\times\vec{\omega}). \tag{D.3.11}$$

A mozgásegyenlet ismét Newton II. törvényének alakját öltötte. Az egyenlet jobb oldalán a gyorsulva haladó mozgás miatt megjelenő $-m\vec{A}$ tehetetlenségi erő mellett további tehetetlenségi erők jelentek meg, amelyek a forgó mozgással kapcsolatosak. A harmadik tag olyan erő, amely a forgás nem egyenletes voltából származik. A negyedik tag az úgynevezett **Coriolis-erő**, amely merőleges a K vonatkoztatási rendszer szögsebességére és a részecskének a forgó K rendszerben mért sebességére. További jellegzetessége, hogy a Coriolis-erő zérus, ha a részecske a forgó rendszerben nyugalomban van. Az ötödik tag a **centrifugális erő**, amely merőleges a pillanatnyi szögsebesség irányára, azaz a pillanatnyi forgástengelyre (az $O = O'$ origón átmenő, $\vec{\omega}$-val párhuzamos egyenes), nagysága $m\rho\omega^2$, ahol ρ a részecske és a pillanatnyi forgástengely távolsága, és iránya szerint a forgástengelytől sugárirányban kifelé mutat.

Fontos speciális eset a K_0 inerciarendszerhez képest haladó gyorsulást nem mutató, $\vec{A} = 0$, egyenletesen forgó, $\vec{\omega}$ =áll. K vonatkoztatási rendszer. Ebben a Lagrange-függvény

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + m\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 - V(\vec{r}), \tag{D.3.12}$$

a mozgásegyenlet pedig

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} + 2m\vec{v}\times\vec{\omega} + m\vec{\omega}\times(\vec{r}\times\vec{\omega}) \tag{D.3.13}$$

alakot ölt. Határozzuk meg a részecske impulzusát K-ban,

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m(\vec{\omega}\times\vec{r}), \tag{D.3.14}$$

aminek az ismeretében a részecske energiája K-ban

$$E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 + V(\vec{r}). \tag{D.3.15}$$

Az energia második, negatív tagja a K rendszer egyenletes forgása miatt jelenik meg, független a részecske sebességétől. Ezt a tagot szokás ,,centrifugális energiának" nevezni. Érdemes még megkeresni az egyenletesen forgó rendszerben mért sebesség, impulzus, pályaimpulzusmomentum és energia kapcsolatát a megfelelő, inerciarendszerben mért mennyiségekkel:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 = \vec{r},\\ \vec{v}_0 &= \vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{r},\\ \vec{p}_0 &= m\vec{v}_0 = \vec{p},\\ \vec{l}_0 &= \vec{r}_0\times\vec{p}_0 = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{l}, \end{aligned} \tag{D.3.16}$$

és az energia

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m(\vec{v}_0 - \vec{\omega}\times\vec{r})^2 - \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 + V\\ &= \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 + V - m\vec{v}_0\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})\\ &= \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 + V - m(\vec{r}\times\vec{v}_0)\cdot\vec{\omega}\\ &= E_0 - \vec{l}_0\cdot\vec{\omega}. \end{aligned} \tag{D.3.17}$$