

# ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLET HALADÓKNAK

Sailer Kornél

Az [1] tankönyv alapján készült oktatási segédanyag.

Elméleti Fizikai Tanszék  
Debreceni Egyetem  
Debrecen  
2015-2018

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>13</b>
1.1. A gravitáció . . . . .	13
1.2. A newtoni mechanika és a speciális relativitáselmélet a tér és idő fogalmáról . . . . .	18
1.3. Az általános relativitáselmélet elvi alapjai . . . . .	22
<b>2. Differenciálható sokaságok, tenzorok</b>	<b>24</b>
2.1. Sokaságok fogalma . . . . .	24
2.2. Érintőterek és érintővektorok . . . . .	25
2.3. Tenzorok . . . . .	31
2.4. Metrikus tenzor . . . . .	35
2.5. Jelölések, konvenciók . . . . .	36
<b>3. A téridő-sokaság görbülete</b>	<b>39</b>
3.1. Általános megfontolások . . . . .	39
3.2. A kovariáns deriválás operátora . . . . .	40
3.3. Párhuzamos eltolás . . . . .	44
3.4. A görbületi tenzor . . . . .	47
3.5. Geodetikusok . . . . .	54
3.5.1. A geodetikus fogalma . . . . .	54
3.5.2. Geodetikusok felhasználásával szerkesztett koordinátarendszerek	56
3.5.3. A minimális ívhosszú és a maximális sajátidőtartamú görbék .	57
3.5.4. A geodetikus deviáció . . . . .	60
3.6. A görbületi tenzor meghatározása . . . . .	63
3.6.1. A koordináta-komponensek módszere . . . . .	63
3.6.2. Tetrád-módszer . . . . .	65
<b>4. Az Einstein-egyenletek</b>	<b>71</b>
4.1. Térgeometria és fizikai törvények a relativitáselmélet előtti fizikában . . . . .	71
4.1.1. Térgeometria . . . . .	71
4.1.2. Általános és speciális kovariancia . . . . .	72
4.2. A téridő geometriája és fizikai törvények a speciális relativitáselméletben . . . . .	74
4.2.1. A téridő geometriája és a kovariancia elvek . . . . .	74
4.2.2. Fizikai törvények . . . . .	75

4.3.	Kovariancia-elvek és fizikai törvények az általános relativitáselméletben	84
4.3.1.	A gravitáció az általános relativitáselméletben	84
4.3.2.	Az anyag mozgását leíró fizikai törvények alakjáról	87
4.3.3.	A téridő dinamikája	92
<b>5.</b>	<b>A linearizált Einstein-egyenletek</b>	<b>96</b>
5.1.	Az Einstein-egyenletek linearizált alakja	96
5.2.	A newtoni gravitáció, mint határeset	99
5.3.	A gravitációs sugárzás	102
5.3.1.	Gravitációs hullámok	102
5.3.2.	A gravitációs sugárzás észlelésének elvi lehetősége	106
5.3.3.	A gravitációs sugárzás forrásai	108
5.3.4.	A gravitációs sugárzásban távozó energia	110
5.3.5.	Gravitációs hullámok észlelése	113
<b>6.</b>	<b>Homogén és izotróp kozmológia</b>	<b>116</b>
6.1.	A Robertson-Walker-metrika	116
6.1.1.	A Világegyetem homogenitását és izotrópiáját alátámasztó megfigyelések	116
6.1.2.	A térben homogén és izotróp Világegyetem görbülete	118
6.1.3.	Homogén és izotróp téridő metrikája	120
6.2.	A Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-téridő (FLRW-téridő)	121
6.2.1.	A Friedmann-egyenletek	121
6.2.2.	A Hubble-törvény és a sztatikus Világegyetem kérdése. A kozmológiai állandó	124
6.2.3.	A Nagy Bumm	127
6.2.4.	A Világegyetem energiasűrűségének változása	128
6.2.5.	A táguló Világegyetem jövője	130
6.2.6.	A kozmológiai vöröseltolódás	132
6.2.7.	A horizontok	134
<b>7.</b>	<b>A Schwarzschild-megoldás</b>	<b>140</b>
7.1.	A téridő sztatikus, gömbszimmetrikus test környezetében	140
7.1.1.	A sztatikus és a sztatikus és gömbszimmetrikus téridő metrikája	140
7.1.2.	Téridő sztatikus, gömbszimmetrikus testen kívül	143
7.2.	A téridő sztatikus, gömbszimmetrikus test belsejében	149
7.2.1.	A csillagok kritikus tömege	153

7.3.	Geodetikusok a Schwarzschild-téridőben . . . . .	155
7.3.1.	Gravitációs vöröseltolódás Schwarzschild-téridőben . . . . .	155
7.3.2.	Az időszerű és a null-geodetikusok egyenlete . . . . .	158
7.3.3.	A Kepler-törvények általánosítása . . . . .	160
7.3.4.	A fénygörbülés . . . . .	163
7.4.	A Kruskal-Szekeres-féle kiterjesztés. Gravitációs összeomlás . . . . .	166
7.4.1.	A szingularitásokról általában . . . . .	166
7.4.2.	Példa a kiterjesztésre: a 2-dimenziós Rindler-téridő . . . . .	166
7.4.3.	A Schwarzschild-metrika kiterjesztése . . . . .	169
<b>8.</b>	<b>A téridő kauzális szerkezete</b>	<b>174</b>
8.1.	Jövő és múlt . . . . .	174
8.1.1.	Kronológikus és kauzális jövő és múlt . . . . .	174
8.1.2.	Folytonos időszerű és kauzális görbék és kiterjeszthetőségük . . . . .	178
8.1.3.	A kauzális görbék konvergenciája . . . . .	179
8.2.	A kauzalitási feltételek . . . . .	182
8.3.	A függőségi tartományok, Cauchy-felület és Cauchy-horizontok . . . . .	186
8.3.1.	A függőségi tartományok . . . . .	186
8.3.2.	A Cauchy-felület . . . . .	189
8.3.3.	A Cauchy-horizontok . . . . .	191
8.3.4.	A globálisan hiperbolikus téridő jellemzői . . . . .	193
<b>9.</b>	<b>Szingularitások</b>	<b>198</b>
9.1.	A szingularitások kérdésköre . . . . .	198
9.2.	Szingularitások és jellemzőik . . . . .	199
9.3.	Az időszerű geodetikusok és a null-geodetikusok kongruenciái . . . . .	201
9.3.1.	Az időszerű geodetikusok kongruenciái és deformációjuk . . . . .	201
9.3.2.	Az energia-feltételek . . . . .	205
9.3.3.	A null-geodetikusok kongruenciái és az energia-feltételek . . . . .	209
9.4.	A konjugált pontok . . . . .	214
9.4.1.	A konjugált pontok fogalma . . . . .	214
9.4.2.	Konjugált pontok időszerű geodetikusokon . . . . .	214
9.4.3.	Konjugált pontok hiperfelület-ortogonális időszerű geodetikuson . . . . .	219
9.4.4.	Konjugált pontok null-geodetikuson . . . . .	221
9.4.5.	2-dimenziós, térszerű felülethez konjugált pont null-geodetikuson . . . . .	223
9.5.	Maximális hosszúságú görbék létezése . . . . .	224
9.6.	Szingularitási tételek . . . . .	228

9.6.1. A táguló Világegyetemre alkalmazható szingularitási tételek . . . . .	228
9.6.2. A gravitációs összeomlásra alkalmazható szingularitási tételek . . . . .	230
9.6.3. A szingularitási tételek feltételeiről . . . . .	233
<b>10. Az aszimptotikusan lapos téridő . . . . .</b>	<b>235</b>
10.1. Izolált test az általános relativitáselméletben . . . . .	235
10.2. A konform végtelen . . . . .	236
10.2.1. A „végtelen” a Minkowski-téridőben . . . . .	236
10.2.2. Az aszimptotikus laposság definíciója . . . . .	241
10.2.3. Az aszimptotikus laposság definíciójának magyarázata . . . . .	243
10.2.4. Aszimptotikus szimmetriák . . . . .	249
10.2.5. A görbület aszimptotikus viselkedése . . . . .	252
10.3. Az energia . . . . .	253
10.3.1. Az energia-fogalom bevezetésének lehetőségeiről . . . . .	253
10.3.2. Próbarészecske helyben tartásához szükséges erő stacionárius téridőben . . . . .	254
10.3.3. Aszimptotikusan lapos, stacionárius téridő teljes tömege . . . . .	255
10.3.4. Aszimptotikusan lapos, nem stacionárius téridő teljes négyesim- pulzusa . . . . .	259
<b>11. A feketelyukak . . . . .</b>	<b>265</b>
11.1. A feketelyuk fogalma . . . . .	266
11.2. A kozmikus cenzúrára vonatkozó sejtés . . . . .	270
11.3. A feketelyukak keletkezése . . . . .	273
11.4. A feketelyukak megfigyelése . . . . .	275
11.5. A feketelyukak általános tulajdonságai . . . . .	276
11.6. A töltött Kerr-féle feketelyukak . . . . .	281
11.6.1. A töltött Kerr-megoldás . . . . .	281
11.6.2. Stacionárius, axiálszimmetrikus téridők . . . . .	283
11.6.3. A Kerr-metrikák paramétereinek fizikai jelentése . . . . .	284
11.6.4. A Kerr-megoldás szingularitásai . . . . .	285
11.6.5. A téridő valóságos gravitációs összeomlás esetén . . . . .	290
11.6.6. Az ergoszféra . . . . .	291
11.6.7. Geodetikusok a Kerr-téridőben . . . . .	293
11.6.8. Fizikai mezők Kerr-háttéren . . . . .	294
11.6.9. A Kerr-feketelyukak unicitása . . . . .	295
11.7. Energiakinyerés feketelyukból . . . . .	295

11.7.1. A Penrose-mechanizmus . . . . .	295
11.7.2. Gravitációs sugárzás feketelyukak ütközésekor . . . . .	298
11.7.3. Felragyogó szóródás . . . . .	299
11.8. A feketelyukak és a termodinamika . . . . .	301
<b>A. Topológikus terek</b>	<b>311</b>
A.1. Topológia . . . . .	311
A.2. Leképezések . . . . .	312
A.3. Zárttság, összefüggés, lezárás, határok . . . . .	312
A.4. Kompaktság . . . . .	313
A.5. Konvergencia, megszámlálhatóság és kompaktság . . . . .	314
A.6. Parakompaktság és parakompakt sokaságok tulajdonságai . . . . .	315
<b>B. Differenciál-formák</b>	<b>317</b>
B.1. $p$ -forma, ékszorzat és külső derivált . . . . .	317
B.2. Integrálás . . . . .	318
B.3. Integráltételek . . . . .	320
B.3.1. Irányítható sokaságok és a Stokes-tétel . . . . .	320
B.3.2. Térfogati integrál . . . . .	321
B.3.3. A Gauss-tétel . . . . .	323
B.4. Frobenius tétele . . . . .	324
<b>C. A sokaságok leképezései</b>	<b>327</b>
C.1. Előre- és hátratólások . . . . .	327
C.2. Diffeomorfizmusok . . . . .	328
C.3. A Lie-derivált . . . . .	329
C.4. A Killing-vektormező . . . . .	333
<b>D. A konform transzformációk</b>	<b>338</b>
D.1. A sokaság kauzális szerkezetének transzformációja . . . . .	338
D.2. Téregyenletek transzformációja . . . . .	340
<b>E. Perturbációk</b>	<b>344</b>
E.1. A linearizálásról . . . . .	344
E.2. A vákuumbeli Einstein-egyenlet linearizálása . . . . .	345
<b>F. Az általános relativitáselmélet Lagrange- és Hamilton-féle tárgyalása</b>	<b>349</b>

F.1.	Általános megjegyzések . . . . .	349
F.2.	A Lagrange-féle megfogalmazás . . . . .	349
F.2.1.	A Lagrange-formalizmus . . . . .	349
F.2.2.	A Klein-Gordon-mező esete . . . . .	350
F.2.3.	Az elektromágneses mező . . . . .	350
F.2.4.	Az általános relativitáselmélet . . . . .	351
F.3.	A Hamilton-féle megfogalmazás . . . . .	356
F.3.1.	A Hamilton-formalizmus . . . . .	356
F.3.2.	A Klein-Gordon-mező esete . . . . .	358
F.3.3.	Az elektromágneses mező . . . . .	359
F.3.4.	Az általános relativitáselmélet . . . . .	361
<b>G.</b>	<b>A kezdetiérték-feladat</b>	<b>369</b>
G.1.	A kezdetiérték-feladat meghatározottsága . . . . .	369
G.2.	A klasszikus, newtoni mechanika kezdetiérték-feladata . . . . .	369
G.3.	Klasszikus, relativisztikus fizikai mezők kezdetiérték-feladata . . . . .	370
G.4.	Kezdetiérték-feladat az általános relativitáselméletben . . . . .	373
G.4.1.	A Maxwell-egyenletek kezdetiérték-feladata . . . . .	373
G.4.2.	A vákuumra vonatkozó Einstein-egyenletek kezdetiérték-feladata . . . . .	375
G.4.3.	Az Einstein-egyenletek kezdetiérték-feladata anyag jelenlétében	389

Matematika tanárom, Kónya István, az ózdi József Attila Gimnázium egykori tanára emlékére.



## Előszó

Ez a magyar nyelvű oktatási segédlet az [1] tankönyv alapján készült. Nagyjából követi annak a felépítését, noha néhány témakörhöz tartozó fejezetet, amely sokkal inkább önálló tanulásra, semmint előadásszerű ismertetésre alkalmas, áthelyeztem a függelékbe. Megőriztem a lemmáknak és a tételeknek az [1] tankönyvben használt sorszámozását annak érdekében, hogy könnyen visszakereshetők legyenek az eredeti tankönyvben, ahol sokszor további részletek és irodalmi hivatkozások is találhatóak.

## Konvenció

Ebben az oktatási segédanyagban mindvégig a  $(-, +, +, +)$  Lorentz-szignatúrát használjuk.

# 1. Bevezetés

## 1.1. A gravitáció

Az általános relativitáselmélet a gravitáció klasszikus elmélete, amely a gravitációs kölcsönhatást klasszikus, azaz nem kvantumfizikai kölcsönhatásként kezeli. A gravitációs kölcsönhatás a mindennapi életünkben, mint a tömegvonzásra vonatkozó tapasztalat jelenik meg. Két pontszerűnek tekinthető, inerciarendszerben nyugvó test, amelyek **súlyos tömege**  $m_{s1}$  és  $m_{s2}$ , vonzza egymást. A **tömegvonzás erőtvényét** Newton<sup>1</sup> gravitációs törvénye írja le: az 1-es test által a 2-es testre kifejtett erő

$$\vec{F}_{2\leftarrow 1} = -G \frac{m_{s1} m_{s2}}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (1.1.1.)$$

ahol  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$  a Newton-i gravitációs állandó és  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . (A 3-dimenziós térbeli  $\vec{v}$  vektorok hosszát  $v = |\vec{v}|$ -vel jelöljük.) Ez az erő mindig vonzó, és annak következtében lép fel, hogy a testek súlyos tömeggel rendelkeznek. Jelenlegi tapasztalataink alapján minden test rendelkezik súlyos tömeggel. Az Eötvös<sup>2</sup> -kísérletek bizonyossága szerint a testek súlyos  $m_s$  és tehetetlen  $m$  tömegének aránya,  $m_s/m$  univerzális állandó, amelyre 1 adódik  $10^{-12}$  pontossággal, ha a súlyos tömeg egységét a tehetetlen tömeg egységével azonosnak választjuk. Ezt a tapasztalatot a **súlyos és tehetetlen tömeg egyenértékűségének** nevezzük, és meghatározó szerepe van az általános relativitáselméletben. A gravitációs kölcsönhatás talán legközvetlenebbül tapasztalt megnyilvánulása a Föld felszínén a nehézségi erő,  $\vec{F} = m_s \vec{g}$ , amely a felszín közelében elhelyezkedő  $m_s$  súlyos tömegű testre hat, ahol  $\vec{g}$  a nehézségi gyorsulás, amelynek nagysága közelítőleg  $g = 9,81 \text{ms}^{-2}$ . Szigorúan véve azonban a  $\vec{g}$  nehézségi gyorsulás a föld-felszín különböző pontjainak közelében, különböző magasságokban sem irányát, sem nagyságát tekintve nem állandó. Jelöljük tehát a nehézségi gyorsulást a Föld felszíne közelében található tetszőleges  $P$  pontban  $\vec{g}(P)$ -vel. Newton II. törvénye szerint a Föld felszíne közelében a  $P$  pontban tartózkodó, szabadon eső  $m$  tehetetlen tömegű test  $\vec{a}$  gyorsulására

$$m\vec{a} = m_s \vec{g}(P) \quad (1.1.2.)$$

mozgásegyenlet áll fenn. Ebből a súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciáját, azaz az  $m_s = m$  azonosságot figyelembe véve, az adódik, hogy a szabadon eső test gyorsulása a nehézségi gyorsulás:

$$\vec{a} = \vec{g}(P). \quad (1.1.3.)$$

Ebből mindjárt következik egy másik fontos megállapítás. Képzeljük el, hogy a szabadon eső részecskét gondolatban körülveszi egy kicsiny „szekrényke”, amely maga is szabadon esik  $\vec{g}(P)$  gyorsulással. A Földön nyugvó megfigyelő a részecskének a szabadon eső szekrénykéhez képesti mozgását a következőképpen értelmezi, amikor a részecske a  $P$ -hez közeli  $Q$  pontban tartózkodik: a részecskére az  $m\vec{g}(Q)$

---

<sup>1</sup>sir Isaac Newton, angol fizikus, 1643-1727.

<sup>2</sup>báró Eötvös Loránd Ágoston, magyar fizikus, 1848-1919.

nehézségi erő és a  $-m\vec{a} = -m\vec{g}(P)$  tehetetlenségi erő hat, úgyhogy a részecske mozgásegyenlete:

$$m\vec{a}' = m\vec{g}(Q) - m\vec{g}(P). \quad (1.1.4.)$$

Ha  $Q = P$ , akkor a részecske gyorsulása a szekrénykében zérus,  $\vec{a}' = 0$ , ha  $Q$  csak infintezimálisan tér el  $P$ -től, akkor pedig a különbség nem zérus, de még mindig jó közelítéssel zérusnak tekinthető. Ez nyilván annál rosszabb közelítés, minél nagyobb a  $P$  és  $Q$  pontok távolsága. A szekrénykében nyugvó megfigyelő tehát a szekrénykét inerciarendszernek látja. Az ekvivalencia-elv tehát maga után vonja, hogy a szabadon eső kicsiny méretű rendszerek lokális inerciarendszerek. Ezt a gondolatsort azzal fejezzük be, hogy a szekrénykében nyugvó megfigyelő nem tudja mérni sem külön a nehézségi erőt, sem pedig a tehetetlenségi erőt. Egyedül azt tudja mérni, hogy ha a részecske nem a  $P$  hanem a közeli  $Q$  pontban esik szabadon, akkor annak mekkora a szekrénykéhez képesti kicsiny  $\vec{a}'$  gyorsulása. A lokális inerciarendszerben (a szekrénykében) nyugvó megfigyelő tehát el tudja dönteni, hogy a részecske inerciális mozgást végez-e, vagy pedig attól mennyire eltérő mozgást. Arra a következtetésre jutunk tehát, hogy nem érdemes külön gravitációs erőről és tehetetlenségi erőről beszélni, amelyek külön-külön nem figyelhetők meg lokálisan. Ehelyett inkább azt kellene mondani, hogy a gravitáció meghatározza lokálisan, hogy milyen az inerciális mozgás, és azt is, hogy két szomszédos, inerciális mozgást végző részecske egymáshoz képest hogyan gyorsul. Az általános relativitáselmélet ezt a gondolatot bontja ki.

Térjünk azonban egyelőre vissza a gravitáció Newton-féle törvényéhez. A gravitációs erő konzervatív, vagyis a potenciális energia

$$U(r_{12}) = -G \frac{m_{s1}m_{s2}}{r_{12}} \quad (1.1.5.)$$

törvényéből származtatható:  $\vec{F}_{2 \leftarrow 1} = -\vec{\nabla}_{r_2} U(r_{12})$ . A newtoni gravitációs törvény hatására mozgó testek energiája (kinetikus és potenciális energiájuk összege) megmarad. Ez lehetővé teszi, hogy a gravitációs kölcsönhatást, ami **eredeti newtoni megfogalmazásában távolhatás** (két egymással nem érintkező pontszerű test kölcsönhatása) **közelhatásként értelmezzük**. Ennek az az ára, hogy bevezetjük a fizikai mező, a **gravitációs mező** fogalmát. A közelhatás úgy valósul meg, hogy az 1-es anyagi pont súlyos tömegénél fogva gravitációs mezőt kelt maga körül, azaz megváltoztatja az üres geometriai teret,

$$\phi(r) = -G \frac{m_{s1}}{r} \quad (1.1.6.)$$

gravitációs potenciált hoz abban létre, amely csak az 1-es anyagi ponttól mért  $r = |\vec{r}|$  távolságtól függ, és ezért gömbszimmetrikus. Itt  $\vec{r}$  az 1-es anyagi pontból, mint origóból kifelé mutató helyzetvektor. A 2-es anyagi pont ebben a gravitációs mezőben helyezkedik el az  $\vec{r}$  helyzetvektorú pontban, súlyos tömegénél fogva tartózkodása helyén kölcsönhatásba lép a gravitációs mezővel, s ennek következtében  $U(r) = m_{s2}\phi(r)$  potenciális energiára tesz szert. Ugyanezt elmondhatjuk úgy is, hogy az 1-es részecske  $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(r) = -G \frac{m_{s1}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$  gravitációs térerősségmezőt kelt, és a 2-es anyagi pontra ez fejt ki annak  $\vec{r}$  tartózkodási helyén  $\vec{F} = m_{s2}\vec{E}(\vec{r}) = -G \frac{m_{s1}m_{s2}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$  vonzó erőt.

Ha figyelembe vesszük az erőhatások függetlenségének elvét, azaz Newton IV. törvényét, akkor a fentiek könnyen általánosíthatók kiterjedt testek gravitációs

kölcsönhatására. Vizsgáljuk két kiterjedt test kölcsönhatását, amelyek térben diszjunkt tartományokat foglalnak el. Az 1-es kiterjedt testet jellemezze a  $\rho_1(\vec{r}_1)$  (súlyos) tömegsűrűség. Ekkor a test által a geometriai tér  $\vec{r}$  pontjában keltett gravitációs mező a  $V_1$  térfogatú test egyes  $\rho(\vec{r}_1)dV_1$  tömegű,  $dV_1$  térfogatú infinitezimális darabkái által keltett gravitációs mezők lineáris szuperpozíciója, azaz

$$\phi(\vec{r}) = -G \int_{V_1} dV_1 \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \quad (1.1.7.)$$

és  $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\phi(\vec{r}) = \int_{V_1} d\vec{E}$ , ahol  $d\vec{E}$  az egyes darabkák által keltett térerősség az  $\vec{r}$  helyen. A 2-es test tömegsűrűsége legyen  $\rho_2(\vec{r}_2)$  annak  $\vec{r}_2$  helyzetű pontjában. Ekkor a  $V_2$  térfogatú 2-es test potenciális energiája az 1-es test terében

$$U_{12} = \int_{V_2} dV_2 \rho_2(\vec{r}_2) \phi(\vec{r}_2) = -G \int_{V_2} dV_2 \int_{V_1} dV_1 \frac{\rho_2(\vec{r}_2) \rho_1(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \quad (1.1.8.)$$

és a 2-es testre ható eredő gravitációs erő

$$\vec{F}_{2 \leftarrow 1} = \int_{V_2} dV_2 \rho_2(\vec{r}_2) \vec{E}(\vec{r}_2). \quad (1.1.9.)$$

Általánosan, ha a geometriai térben a gravitáló tömeg  $\rho(\vec{r})$  térfogati sűrűsége sztatikus, akkor ez

$$\phi(\vec{r}) = -G \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.1.10.)$$

gravitációs potenciált kelt. Ha az anyag az origóban nyugvó  $m$  tömegű pontszerű test, akkor  $\rho(\vec{r}) = m\delta(\vec{r})$  és visszkapjuk a potenciál  $\phi(\vec{r}) = -Gm/r$  képletét, amely az origót, mint szinguláris pontot leszámítva, az egész térben kielégíti a

$$\Delta\phi = r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r\phi) = 0, \quad r \neq 0 \quad (1.1.11.)$$

Laplace<sup>3</sup>-egyenletet. Könnyen beláthatjuk, hogy a szingularitást helyesen a

$$\Delta\phi = 4\pi Gm\delta(\vec{r}) \quad (1.1.12.)$$

egyenlet megoldása veszi figyelembe. (Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát  $\epsilon \rightarrow 0^+$  sugarú gömb térfogatára és használjuk fel a bal oldalon Gauss<sup>4</sup> tételét.) Ez egyúttal azt is jelenti, hogy tetszőleges  $\rho(\vec{r})$  tömegeloszlás sztatikus gravitációs potenciálja a

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho(\vec{r}) \quad (1.1.13.)$$

Poisson<sup>5</sup>-egyenletet elégíti ki. Ezzel összefoglaltuk a newtoni gravitációra vonatkozó alapösszefüggéseket.

---

<sup>3</sup>marquis Pierre-Simon de Laplace, francia matematikus, csillagász és fizikus, 1749-1827.

<sup>4</sup>Johann Carl Friedrich Gauss, német matematikus és fizikus, 1777-1855.

<sup>5</sup>Baron Siméon Denis Poisson, francia matematikus, m'ernök és fizikus, 1781-1840.

A tapasztalatok alapján azt mondhatjuk, hogy a Newton gravitációs törvénye lényegében sztatikus esetben a  $10^{-15}$  m (a proton sugara) és a 150 millió km (Föld-Nap távolság) méretek között, mintegy 26 nagyságrendet átfogva nagy pontossággal teljesül. A csillagászati megfigyelésekből azonban arra kell következtetnünk, hogy a gravitációs kölcsönhatás némileg eltér a newtoni gravitációs törvénytől. Említsünk meg néhány fontos megfigyelést, ami a newtoni gravitációs törvény korlátaira mutat rá:

1. A newtoni fizika szembeötlő paradoxona sokáig az volt, hogy a newtoni gravitáció alapján nem lehetett megérteni pontosan a **Merkúr Nap-közei pontjának (a perihéliumnak) a vándorlását** (precesszióját), amely az 1697 és 1848 közötti csillagászati megfigyelések gondos analízise után is eltért a newtoni elméletből számolttól. Erre az anomáliára csak az Einstein<sup>6</sup> által kidolgozott, 1915-ben publikált általános relativitáselmélet adott választ.
2. A Nap gravitációs vonzásánál fogva eltéríti a távoli csillagok fényét eredeti irányától, ha a fénysugár a Nap korongja mellett elhaladva jut a földi megfigyelő szemébe. Ez a **fénygörbülés jelensége**. A fényt nagysebességű részecske mozgásának tekintve Soldner<sup>7</sup> határozta meg először (1804) a fénysugár irányának eltérülését a newtoni gravitáció alapján. Soldner eredménye fele az 1919 és 1973 között egyre nagyobb pontossággal ténylegesen megfigyelt értéknek, amelyet az általános relativitáselmélet alapján lehet értelmezni, és ami igazolja Einstein 1911-es számításának eredményét.
3. Perlmutter<sup>8</sup>, Riess<sup>9</sup>, Schmidt<sup>10</sup> és társainak 1998-as megfigyelései óta tudjuk, hogy a látható Világegyetemünk gyorsulva tágul. Ennek valószínűsíthető oka, hogy a gravitációs kölcsönhatás a ma látható Világegyetem méretskáláján ( $46$  milliárd fényév  $\approx 9,46 \cdot 10^{15}$  m  $\approx 0,3$  pc) taszító. Az általános relativitáselméleten alapuló kozmológiai modell erre is adhat magyarázatot, ha az úgynevezett **kozmológiai állandó** nem zérus.
4. Newton gravitációs törvényének egyik érvényességi határa abból származik, hogy sztatikus kölcsönhatás alapján nyertük ki a tapasztalatokból, vagy legalább is olyan esetekből, amikor a testek a vákuumbeli fénysebességhez képest kis sebességgel mozognak. A speciális relativitáselméletben megtanultuk, hogy a fizikai mezők nem alternatív szemléletet jelentenek, hanem valóságos fizikai tulajdonságokkal (energiával, impulzussal és impulzusmomentummal) felruházott objektumok. Ez lényegében annak a következménye, hogy bennük a változások, a zavarok véges sebességgel terjednek, nem pedig végtelen sebességgel. Ennek szép klasszikus példája az elektromágneses mező, amelyben a vákuumbeli fénysebességgel,  $c = 299792458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  terjednek az elektromágneses hullámok. Bár a speciális relativitáselmélet nem foglalkozik a gravitációs kölcsönhatás leírásával, sejtetni engedi a fizikai mezőről kialakított szemlélete, hogy a gravitációs kölcsönhatás mozgó testek között nem egyezhet meg pontosan a newtoni gravitációs törvényből adódó kölcsönhatással. A testek relatív távolságának megváltozása nem jelentkezik pillanatszerűen, azaz azonnal a köztük levő erőhatásban, hanem csak valamilyen időbeli késleltetéssel,

<sup>6</sup>Albert Einstein, német fizikus, 1879-1955

<sup>7</sup>Johann Georg von Soldner, német fizikus, matematikus és csillagász, 1776-1833

<sup>8</sup>Saul Perlmutter, amerikai asztrofizikus, 1959-

<sup>9</sup>Adam Guy Riess, amerikai asztrofizikus, 1969-

<sup>10</sup>Brian Paul Schmidt, ausztrál asztrofizikus, 1967

amelyet a gravitációs mezőben a forrásként szolgáló testek elmozdulása által keltett zavar terjedésének sebessége kell, hogy meghatározzon.

Bináris rendszerek megfigyeléséből közvetett bizonyítékunk van arra, hogy azok gravitációsan sugároznak. Az első ilyen felfedezés 1974-ben a Hulse<sup>11</sup>-Taylor<sup>12</sup>-féle bináris pulzár (PSR B1913+16) megfigyelése volt. A bináris rendszer egyik tagja pulzár, amely, mint természetes óra, lehetővé teszi a keringési idő változásának pontos mérését. A keringési idő csökkenéséből arra lehetett következtetni, hogy a bináris rendszer tagjai a rendszer tömegközéppontja felé esnek, miközben egymás körül keringenek, s eközben energiát sugároznak ki gravitációs hullámok alakjában. A jelenséget az általános relativitáselmélet alapján sikerült kvantitatív módon is pontosan magyarázni. A gravitációs sugárzás, a gravitációs hullámok létezése szintén túlmutat a newtoni gravitáción, viszont természetes magyarázatot nyer az általános relativitáselméletben. A gravitációs sugárzás közvetlen kísérleti megfigyelése még sokáig váratott magára, de végül 2016-ban a LIGO és a Virgo Tudományos Kollaboráció bejelentette, hogy először sikerült gravitációs hullámokat közvetlenül detektálniuk. A gravitációs sugárzás két feketelyukból álló bináris rendszertől származtak, amelyek egymásba zuhantak és összeolvadtak. Az első megfigyelést rövidesen további gravitációs források megfigyelése követte. 2017-ben Weiss<sup>13</sup>, Thorne<sup>14</sup> és Barish<sup>15</sup> fizikai Nobel-díjban részesültek a gravitációs hullámok detektálásában játszott szerepükért. A gravitációs hullámok létezése alátámasztja az általános relativitáselmélet szemléletét, miszerint a gravitáció fizikai mező.

5. Newton gravitációs törvényének további korlátja, hogy olyan esetek megfigyelésén alapszik, amikor a gravitációs mező gyenge. Ma már tudjuk, hogy nem extrapolálható olyan esetekre, mint a Világegyetem korai szakaszában, vagy a feketelyukak felszíne közelében uralkodó erős gravitációs mező leírása.

A newtoni gravitáció alapján meghatározhatjuk egy  $M$  tömegű test potenciális energiáját a sajátmaga által keltett gravitációs mezőben. Ebből kiderül, hogy az  $M$  tömegű pontszerű test saját energiája végtelennek adódik. Az általános relativitáselméletben hasonló szingularitás jelenik meg. Ha egy gömbszimmetrikus,  $M$  tömegű test a gravitációs vonzás hatására teljesen összeomlik, azaz gravitációs kollapszust szenved, akkor a Schwarzschild<sup>16</sup>-sugárnak megfelelő feketelyuk keletkezik, amely a külső, távoli megfigyelő számára eltakarja a centrumban található szingularitást, ahová minden a feketelyukba belépő anyag végül véges sajátidő alatt bezuhan. Csillagászati megfigyelések közvetett módon igazolják feketelyukak létezését.

A fenti korlátokon az általános relativitás elmélete túllép, kivéve a szingularitások problematikáját. Számos olyan tapasztalati jelenség van, mint pl. a Merkúr perihélium mozgása, a fénysugár görbülése a Nap közelében, a gravitációs lencse-effektus, a gravitációs vöröseltolódás, a gravitációs sugárzás, stb., ami az általános relativitáselmélet keretében nyer magyarázatot. Az általános relativitáselmélet azonban egy alapvető szemléletváltást jelent a gravitációról alkotott elképzelésünkben.

---

<sup>11</sup>Russell Alan Hulse, amerikai fizikus, 1950-

<sup>12</sup>Joseph Hooton Taylor Jr., amerikai asztrofizikus, 1941-

<sup>13</sup>Rainer Weiss, amerikai fizikus, 1932-

<sup>14</sup>Kip Stephen Thorne, amerikai fizikus, 1940-

<sup>15</sup>Barry Barish, amerikai fizikus, 1936-

<sup>16</sup>Karl Schwarzschild, német fizikus és csillagász, 1873-1916.

A newtoni mechanika szemlélete szerint a fizikai történések az eleve adott térben és időben mennek végbe. A speciális relativitáselmélet ugyan viszonylagossá teszi a térbeliség és az időbeliség fogalmát, de továbbra is azt mondja, hogy a fizikai történések egy eleve adott geometriai háttéren, a téridőben mennek végbe. A tér és idő a newtoni mechanikában, avagy a téridő a speciális relativitáselméletben passzív színpad szerepét tölti be, amelynek geometriáját a fizikai történések nem befolyásolják. Ezzel szemben az általános relativitáselmélet arra az álláspontra helyezkedik, hogy a téridő geometriai viszonyait maguk a fizikai történések alakítják ki, azaz az anyag mozgása határozza meg, és ezért a téridő geometriája éppen annyira dinamikai, mint az anyag viselkedése. A gravitáció többé nem fizikai mezőként jelenik meg, hanem a téridő geometriájaként, amelyet az anyag gravitációs hatásánál fogva tud alakítani, meghatározni.

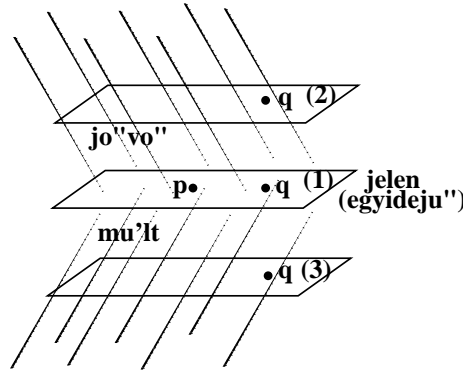
Az általános relativitáselmélet klasszikus fizikai elmélet, ami egyúttal érvényességi határt is jelent számára. A feketelyukakban vagy a Világegyetem korai, a Nagy Bumm-ot követő szakaszában uralkodó gravitációs mező annyira erős, hogy a mező gravitációs energiasűrűsége összemérhető az anyag zérusponthi kvantumfluktuációiból adódó kinetikus energiasűrűségével. Ekkor várható, hogy a gravitációs effektusok mellett a kvantumfizikai effektusok is jelentős szerepet játszanak, ami túlmutat az általános relativitáselmélet keretein.

## 1.2. A newtoni mechanika és a speciális relativitáselmélet a tér és idő fogalmáról

A térről és időről alkotott foglmaink folyamatosan változtak, számos korábbi elképzelésünk ezekről a fogalmakról a speciális relativitáselmélet szerint helytelennek bizonyult, majd az általános relativitáselméletben még gyökeresebben megváltozott. Az általános relativitás elmélete előtti fizikai világképünk szerint minden fizikai történés, folyamat **elemi események** egymásutánjaként fogható fel, amelyek definíció szerint pontszerűeknek (azaz térbeli kiterjedés nélkülieknek) és pillanatszerűeknek tekinthetők. Az elemi események folytonos ponthalmazt alkotnak (pontosabb matematikai megjelöléssel sokaságot), amelyet **téridőnek** nevezünk. A téridőben minden elemi esemény (vagy legalábbis minden elemi esemény egy tetszőleges másik elemi esemény kicsiny környezetében) 4 adattal, azaz 4 koordinátával jellemezhető bármely megfigyelő számára: 3 térkoordinátával és egy időadattal. A téridő tehát 4-dimenziós folytonos sokaság. Az általános relativitás elmélete előtti fizikában a téridő-sokaság nem fizikai objektum, hanem eleve adott háttér, amely jól definiált geometriával rendelkezik, és amelyen a fizikai objektumok közötti történések végbemennek anélkül, hogy azok bármilyen kihatással lennének a téridő geometriájára. Az általános relativitáselméletben a téridőről alkotott fogalmunk gyökeresen megváltozik: egyrészt a téridőt a mozgó anyag hozza létre, tehát a téridő-sokaság dinamikai objektum, amely magával a gravitációs mezővel azonosítható; másrészt a téridő pontjai elveszítik fizikai tartalmukat, az elemi események a fizikai objektumok koincidenciái, ezek hordoznak fizikai tartalmat, mint például két részecske találkozása, vagy két fizikai mező lokálisan megfigyelt (tehát) összetartozó értékei.

A newtoni mechanika a téridőt további szerkezettel ruházza fel. Tetszőleges  $p$  elemi eseményhez képest a többi  $q$  esemény a következőképpen osztályozható. (1) Vannak azok a  $q$  elemi események, amelyekre az igaz, hogy semmilyen megfigyelő vagy anyagi pont nem lehet jelen mindkét ( $p$  és  $q$ ) eseménynél. (2) Vannak azok a  $q$  események, amelyekbe egy megfigyelő vagy anyagi pont el tud jutni  $p$ -ből, ezek a  $p$ -hez képest jövőbeli események. (3) Vannak azok a  $q$  események,

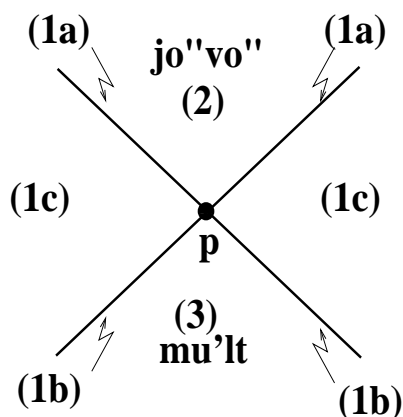




1. ábra. A newtoni mechanika téridő-szerkezetének sematikus szemléltetése

amelyekből egy anyagi pont vagy megfigyelő el tud jutni  $p$ -be, ezek a  $p$ -hez képest múltbeli események. Az eseményeknek ez az osztályozása lényegében nemcsak a téridő geometriai szerkezetének, hanem kauzális szerkezetének is az alapja. Az (1) típusú  $q$  eseményekkel  $p$  nem lehet ok-okozati, vagyis kauzális kapcsolatban, a (2) típusú  $q$  események lehetnek a  $p$  esemény következményei; a (3) típusú  $q$  események lehetnek a  $p$  esemény okai. A newtoni mechanika szerint az (1) tulajdonságú események  $p$ -vel egyidejűek, és egy 3-dimenziós sokaságot alkotnak, amely kifeszíti a geometriai teret. Az egyidejűség vonatkoztatási rendszertől független tény. Olyan ekvivalencia relációt jelent a téridő pontjainak halmazán, amely szerint az események egyidejű események ekvivalencia osztályába sorolhatók. Az egyes ekvivalencia osztályok pedig folytonos időparaméterrel jelölhetők meg, amely konvenció szerint monoton növekszik aszerint, ahogy haladunk valamely ekvivalencia-osztály felől az ahhoz képest jövőbeli ekvivalencia-osztály felé.

A téridő fenti szerkezete, ami az események tetszőleges  $p$  elemi eseményhez képesti (1), (2), (3) tulajdonságú halmazokba történő besorolását illeti, érvényes marad a speciális relativitáselméletben is. Nem érvényes azonban, hogy az (1) tulajdonságú események 3-dimenziós sokaságot alkotnának, és hogy azokat egyidejűeknek tekinthetné bármely megfigyelő. Az (1) tulajdonságú események tovább osztályozhatók: (1a) Vannak azok a  $q$  pontok, amelyek a  $p$ -hez képest jövőbeli események halmazának határán helyezkednek el. Ezeket  $p$ -ből induló anyagi pont nem érheti el, viszont elérheti  $p$ -ből induló fény sugar. Ezek alkotják a  $p$ -hez tartozó jövőbeli fénykúpot, ami egy 3-dimenziós sokaság. (1b) Hasonlóan értelmezhetjük a  $p$ -hez tartozó múltbeli fénykúpot. (1c) Végül vannak azok a  $q$  pontok, amelyek (1) tulajdonságúak és nincsenek rajta sem a  $p$ -hez tartozó jövőbeli, sem a  $p$ -hez tartozó múltbeli fénykúpon. Ezeket a pontokat  $p$ -hez képest térszerűen elválasztottaknak nevezzük, és ezek 4-dimenziós sokaságot képeznek. Megjegyezzük, hogy a fénykúpon és a fénykúpon belül elhelyezkedő pontokat szokás rendre  $p$ -hez képest fényszerűen, és időszerűen elválasztott pontoknak nevezni. A téridő itt leírt szerkezete bármely megfigyelő számára azonos, abszolút érvényű. Az, hogy a téridő geometriai szerkezete különbözik a newtoni mechanikában megszokottól, annak tulajdonítható, hogy nincsen abszolút egyidejűség, mint vonatkoztatási rendszertől független fogalom. Természetesen bármely megfigyelő definiálhatja az egyidejű események halmazát, ami továbbra is 3-dimenziós sokaság. Az egyidejű események halmaza azonban függeni fog attól, hogy hogyan mozog az adott megfigyelő, aki az egyidejűséget definiálja. Az egyidejűség fogalmának relativizálása okozta talán a legdrámaibb változást a fizikusok téridőről alkotott szemléletében, amikor bebizonyosodott, hogy



2. ábra. A speciális relativitáselmélet téridő-szerkezetének sematikus szemléltetése

a speciális relativitáselmélet a tágabb érvényességi körű helyes fizikai elmélet, és a newtoni fizika csak ennek jó közelítése akkor, ha a mozgó testek sebessége a vákuumbeli fénysebességhez képest kicsiny.

A speciális relativitáselmélet (és a newtoni mechanika) szerint kitüntetett szerepük van az inerciális, azaz nem gyorsuló mozgást végző testeknek. Ezek olyan mozgó testek, amelyekre nem hatnak külső erők. A tehetetlenségi mozgást végző testhez, ill. megfigyelőhöz rögzíthetünk gondolatban egy távolságmérésre szolgáló vonalzókból (standard hosszúságmérő eszköz) álló merev rendszert, amelynek geometriáját euklideszinek feltételezzük. Ennek pontjait  $(x, y, z)$  Descartes<sup>17</sup>-koordinátákkal jelölhetjük meg. Végül a merev rendszer minden pontjában nyugvó órákat (standard időmérő eszköz) helyezünk el. Utóbbiakat szimmetrikus eljárással szinkronizáljuk, megkövetelve, hogy bármely két szinkronizálni kívánt óra esetén a köztük félúton elhelyezkedő megfigyelő által küldött fényjel mindkét órához azonos óramutatóállásnál érkezzen meg. Itt kihasználjuk, hogy vákuumban a fénysebesség nagysága minden megfigyelő számára minden irányban azonos (a newtoni mechanikában végtelen, a speciális relativitáselméletben  $c$ ). A szinkronizálás a téridő bonyolultabb kauzális szerkezete miatt a speciális relativitáselméletben nem triviális. Végül a megfigyelő magával hordozhatja ezt a nyugvó szinkronizált órákkal ellátott merev rendszert nem forgó módon. Ekkor a téridő minden  $p$  eseményét el tudja látni az  $(x, y, z)$  térkoordinátákkal és az óráján (a merev rendszer szinkronizált óráin) leolvasott  $t$  mutatóállással:  $p \leftrightarrow (t, x, y, z)$ . Így **globális inerciális vonatkoztatási rendszert**, ill. koordinátarendszert értelmeztünk. Végül összehasonlíthatjuk a téridő pontjainak koordinátáit különböző inerciális vonatkoztatási rendszerekben. A newtoni mechanikában a kapcsolatot a Galilei<sup>18</sup>-transzformáció írja le. Legyen  $O$  az egyik megfigyelő, aki a  $p$  eseményt a  $(t, x, y, z)$  koordinátákkal jelöli meg. Legyen továbbá  $O'$  egy másik megfigyelő, akinek  $O$ -val történő találkozása a  $t = x = y = z = 0$  esemény, és aki  $O$ -hoz képest az  $x$ -irányban  $v$  állandó sebességgel mozog. Ekkor az  $O'$ -höz rögzített inerciarendszerben a  $p$  esemény koordinátái  $t' = t$ ,  $x' = x - vt$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ . A speciális relativitáselméletben ezt a

<sup>17</sup>René Descartes (Renatus Cartesius), francia filozófus, matematikus és természettudós, 1596-1650.

<sup>18</sup>Galileo Galilei, olasz fizikus, csillagász, matematikus, természettudós, 1564-1642

kapcsolatot a Lorentz<sup>19</sup>-transzformáció írja le:

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (1.2.1.)$$

A fenti transzformációkkal kapcsolatban azonban fontos tudatosítanunk, hogy a speciális relativitáselméletben (és a newtoni mechanikában) nincsen kitüntetett inerciarendszer, hanem minden inerciarendszer egyenértékű. Ezért az egyik vagy másik inerciális megfigyelő által az elemi eseményekhez (azonos eljárással) rendelt koordináták függenek a megfigyelőtől, nem abszolút jellegűek. Nem jellemzik megfigyelőtől, azaz vonatkoztatási rendszertől függetlenül a téridő geometriai és kauzális szerkezetét. Jogos tehát az a kérdés, hogy melyek a téridő geometriai szerkezetének vonatkoztatási rendszertől független jellemzői, és azokat hogyan lehet kifejezni a globális inerciális koordinátákkal. A newtoni mechanikában az egyedüli ilyen mennyiségek a következők: (1) két esemény között eltelt  $\Delta t$  idő; (2) két egyidejű esemény térbeli távolsága  $\Delta \ell = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ . Ezeket és csak ezeket találja bármely inerciális megfigyelő azonosaknak. Ez megfelel annak, hogy a téridő egyidejű események 3-dimenziós sokaságaival rétegezhető, az egyes rétegek megjelölhetők egy  $t$  világidővel, és valamely  $t = t_0$  időkoordinátájú rétegen értelmezett térbeli koordinátarendszer átemelhető a többi rétegre.

A speciális relativitáselméletben sem az időtartamok, sem a valamely megfigyelő által egyidejűnek észlelt események térbeli távolsága nem független a vonatkoztatási rendszertől. A téridő egyetlen vonatkoztatási rendszertől független jellemzője:

$$I = -(\Delta t)^2 + \frac{1}{c^2}[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]. \quad (1.2.2.)$$

A globális inerciarendszerek közti összes lehetséges transzformációk a Poincaré<sup>20</sup>-transzformációk. Ezek olyan (inhomogén) lineáris transzformációk, amelyek az  $I$  mennyiséget invariánsan hagyják. (A Poincaré-transzformációk a térbeli eltolásokat, az időbeli eltolásokat és a Lorentz-transzformációkat foglalják magukba.) Az  $I$  invariáns jellegzetessége, hogy  $(\Delta t)^2$  előjele negatív. Ha pozitív lenne, akkor  $c^2 I$  a lapos (nem görbült) euklideszi távolságnégyzet kifejezése lenne egy 4-dimenziós térben. A negatív előjel miatt a speciális relativitáselmélet szerint a téridő nem euklideszi metrikájú, hanem Lorentz-metrikájú, úgynevezett Minkowski<sup>21</sup>-tér. A metrika pontosabb fogalmával később ismerkedünk meg. Az invariáns „távolságnégyzet” kifejezésében szereplő  $(-, +, +, +)$  előjeleket szignatúrának nevezzük. A Minkowski-téridő lapos (nem görbült), a tehetetlenségi mozgást végző anyagi pontok világvonalai pedig egyenesek.

**Megjegyzés:** Mindez természetesen nem mond ellent annak, hogy a Minkowski-téridőben a fentebb bevezetett inerciális  $(t, x, y, z)$  koordináták helyett használhatunk görbült koordinátarendszert, mint pl. az egyenletesen gyorsuló megfigyelő által definiált Rindler<sup>22</sup>-koordinátákat (amelyekről később teszünk említést).

<sup>19</sup>Hendrik Antoon Lorentz, holland fizikus, 1853-1928

<sup>20</sup>Jules Henri Poincaré, francia matematikus, fizikus, filozófus, 1854-1912

<sup>21</sup>Hermann Minkowski, német matematikus, 1864-1909.

<sup>22</sup>Wolfgang Rindler, osztrák fizikus, 1924- .

### 1.3. Az általános relativitáselmélet elvi alapjai

Mint azt fentebb már említettük, a gravitáció Newton-féle törvénye feltételezi, hogy az egyik test pillanatszerűen fejti ki gravitációs hatását a másakra. Ez nem egyeztethető össze a speciális relativitáselmélettel, amely szerint minden fizikai hatás véges sebességgel terjed. Lehetne azonban arra gondolni, hogy a gravitációs törvény általánosítható olyan módon, hogy figyelembe vegye a kölcsönhatás retardáltságát. Einstein azonban nem ezen az úton indult el, amikor megalkotta a gravitáció elméletét.

Mi indíthatta arra, hogy más úton keresse a gravitáció leírását? Az egyik indíték **az ekvivalencia elve**, amely szerint minden test alá van vetve a gravitációnak és azonos módon esik szabadon gravitációs mezőben, mint azt már Galilei is megfigyelte. Ez annak a következménye, hogy a testek súlyos és tehetetlen tömegének hányadosa univerzális állandó, mint azt az Eötvös-kísérlet bizonyítja. A szabadesés független tehát a szabadon eső test tulajdonságaitól. Ezért a szabadon eső testek világvonalai kitüntetett görbék a téridőben, amelyek szintén függetlenek a szabadon eső test tulajdonságaitól. Ez veti fel annak a lehetőségét, hogy a gravitációs mező tulajdonságait magával a téridő szerkezetével hozzuk közvetlen kapcsolatba. A speciális relativitáselmélet szerint a tehetetlenségi mozgást végző testek világvonalai a Minkowski-téridő geodetikusai, és ezek alkotják a téridő szerkezetét jellemző kitüntetett görbesereget. Ez sejteti, hogy a szabadon eső testek világvonalai lehetnek általában (gravitáció jelenlétében) a téridő geodetikusai, a téridő geometriája azonban általában nem Minkowski-metrikával jellemezhető, amely lapos (nem görbült) sokaságot határoz meg, hanem valamilyen görbült sokaságot leíró metrikával.

Másik indítékul szolgálhattak a **Mach<sup>23</sup>-elv** néven összefoglalható gondolatok. A newtoni mechanika és a speciális relativitáselmélet szerint is a téridő szerkezete egyszer s mindenkorra adott és független attól, hogy jelen van-e anyag és az hogyan mozog. Például az is független a Világegyetemben jelenlevő anyagtól, hogy mit jelent a nem gyorsuló (a tehetetlenségi) mozgás és a nem forgó mozgás. Mach és több más fizikus ezt nem találta kielégítőnek. Azt a sejtést fogalmazták meg, hogy a Világegyetemben levő összes anyagnak kell azt befolyásolnia, meghatároznia, hogy lokálisan mit nevezhetünk nem gyorsuló, ill. nem forgó mozgásnak, továbbá, hogy ezeknek a fogalmaknak anyag nélküli Világegyetemben egyáltalán nincs is jelentésük. Einstein annyit mindenképpen figyelembe vett ezekből a gondolatokból, hogy olyan leírását kereste a gravitációnak, amikor az anyag jelenléte döntően befolyásolja a téridő szerkezetét.

A gravitáció Einstein által kidolgozott elméletében, **az általános relativitáselméletben** a téridő szerkezete maga is éppen annyira dinamikai, mint az anyag. A téridőnek a megfigyelőktől független szerkezetét ugyanúgy a metrika írja le, mint

---

<sup>23</sup>Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach, cseh-osztrák fizikus és filozófus, 1838-1916

a speciális relativitáselméletben. Ez a metrika azonban nem a lapos (nem görbült) sokaság Minkowski-féle metrikája, hanem általában görbülettel rendelkező sokaság metrikája. A téridő görbülete, azaz az eltérés a nem görbült téridőtől, hivatott a gravitáció leírására. Az Einstein által posztulált egyenlet értelmében a téridő görbülete az anyag energiainpulzus-tenzorával van kapcsolatban. Így a téridő szerkezete, ill. az azt meghatározó metrika szoros kapcsolatban áll a Világegyetemben található anyaggal. Azóta számos kísérleti bizonyíték támasztja alá az általános relativitáselméletet.

## 2. Differenciálható sokaságok, tenzorok

### 2.1. Sokaságok fogalma

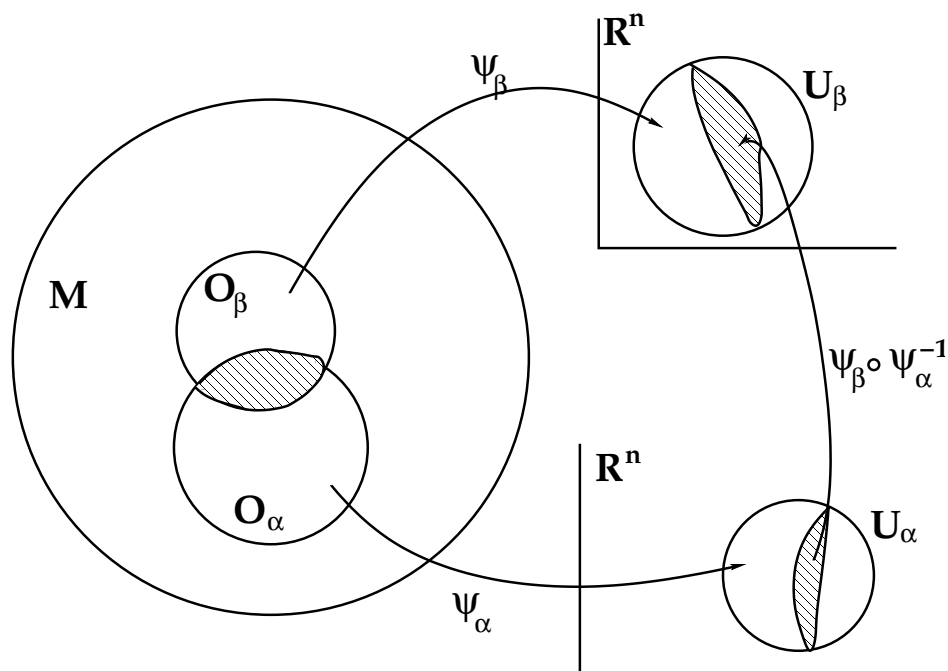
Amikor a téridő szerkezetét akarjuk feltérképezni, akkor két fontos szempont vezérel. Egyrészt nem akarunk eleve feltételezni semmit a téridő globális szerkezetéről, hanem a téridőt csak lokálisan, minden egyes pontja környezetében szeretnénk koordinátázni. Másrészt, a téridőnek, mint ponthalmaznak a strukturáját a sokaság belső tulajdonságaiként akarjuk definiálni, mert jelenlegi ismereteink szerint a 4-dimenziós téridő nincsen beágyazva valamely magasabb dimenziós térbe.

A sokaság olyan  $M$  halmaz, amely lokálisan olyan, mint  $\mathbb{R}^n$  nyílt halmaza, és ilyen lokális tartományokból „simán” van összevarrva. Pontosabban:

**Definíció: Sokaság:** az  $M$  halmazt az azon  $O_\alpha$  részhalmazainak  $\{O_\alpha\}$  együttesével együtt nevezzük sokaságnak, amelyek a következő tulajdonságoknak tesznek eleget:

1.  $\forall p \in M$  ponthoz található olyan  $\alpha$ , hogy  $p \in O_\alpha$ , vagyis az  $O_\alpha$  részhalmazok lefedik  $M$ -et;
2.  $\forall \alpha$ -hoz létezik olyan  $\psi_\alpha : O_\alpha \mapsto U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  leképezés, amely kölcsönösen egyértelműen képezi le  $O_\alpha$ -t az  $\mathbb{R}^n$  egy  $U_\alpha$  nyílt részhalmazára, vagyis a sokaság bármely pontjának környezete olyan, mint  $\mathbb{R}^n$  egy nyílt halmaza;
3. Ha  $O_\alpha$  és  $O_\beta$  bármely két olyan részhalmaza az  $\{O_\alpha\}$  lefedésnek, hogy  $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$ , és  $\psi_\alpha : O_\alpha \mapsto U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  és  $\psi_\beta : O_\beta \mapsto U_\beta \subset \mathbb{R}^n$ , akkor tekinthetjük a  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$  leképezést, amely  $\psi_\alpha(O_\alpha \cap O_\beta) \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ -t képezi le  $\psi_\beta(O_\alpha \cap O_\beta) \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$ -ra. Ekkor megköveteljük, hogy  $\psi_\alpha(O_\alpha \cap O_\beta)$  és  $\psi_\beta(O_\alpha \cap O_\beta)$  nyílt halmazok legyenek, és  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ , mint  $\mathbb{R}^n$ -ből  $\mathbb{R}^n$ -be történő leképezés,  $C^\infty$  típusú, azaz végtelen sokszor differenciálható legyen. Ez a tulajdonság fejezi ki, hogy a lokális leképezések simán vannak összevarrva. ( $A \circ$  jel a leképezések kompozícióját, azaz egymás utáni végrehajtását jelenti.)

Érdemes emlékeztetni rá, hogy  $\mathbb{R}^n$ -ben az  $r$  sugarú,  $x = (x^1, \dots, x^n)$  középpontú nyílt gömb azon  $y$  pontok halmaza, amelyekre  $|x - y| = \sqrt{\sum_{\mu=1}^n (x^\mu - y^\mu)^2} < r$ . Az  $U_\alpha$  nyílt halmazok olyan részhalmazai  $\mathbb{R}^n$ -nek, amelyek ilyen nyílt gömbök egyesítésekként állíthatók elő. Az egyes  $\psi_\alpha$  leképezéseket **lokális térképeknek**, vagy **lokális koordinátarendszereknek** szokták nevezni, ezek szinonim fogalmak. Fel szokás tételezni, hogy  $\{O_\alpha\}$  és  $\{\psi_\alpha\}$  maximális, azaz a sokaság-fogalom tartalmazza az összes lehetséges lokális koordinátarendszert, amely eleget tesz a fenti tulajdonságoknak. A sokaság topológikus térré tehető, amikor is az  $O_\alpha$  halmazok játsszák a nyílt halmazok szerepét és a  $\psi_\alpha$  lokális térképektől megköveteljük,



3. ábra. A sokaságot lefedő lokális térképek sima összevarrásának személtetése.

hogy homeomorfizmusok legyenek. Továbbiakban csak olyan sokaságokról lesz szó, amelyek, mint topológikus terek Hausdorff<sup>24</sup>-típusúak és parakompaktak.

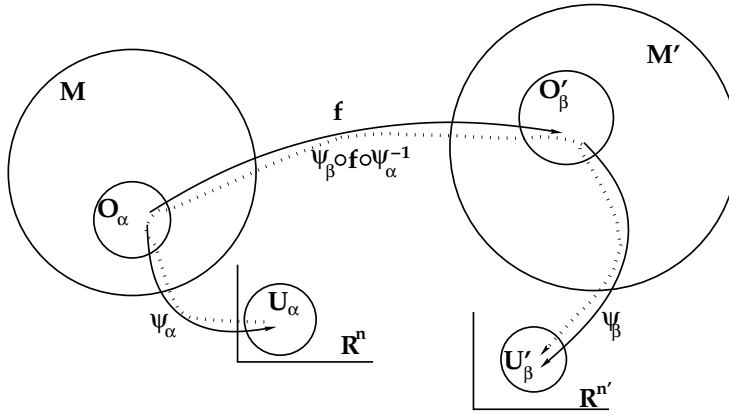
Fontos még annak az eldöntése, hogy mely sokaságok struktúrája azonos. Ehhez értelmezzük a diffeomorfizmusokat. Azon sokaságok struktúrája azonos, amelyek diffeomorfizmus révén képezhetők le egymásra. Az ilyen sokaságokat **diffeomorfaknak** nevezzük.

**Definíció: Diffeomorfizmus:** az  $M$  sokaságnak  $M'$  sokaságra történő  $f : M \mapsto M'$  leképezését diffeomorfizmusnak nevezzük, ha kölcsönösen egyértelmű, „-ra” történő leképezés, amelynek létezik inverze és az  $C^\infty$ . Azon, hogy  $f$   $C^\infty$ , azt értjük, hogy ha  $M$  az  $\{O_\alpha, \psi_\alpha\}$ , az  $M'$  pedig az  $\{O'_\beta, \psi'_\beta\}$  lokális térképekkel van lefedve, akkor bármely  $\alpha$  és  $\beta$  esetén az a  $\psi'_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$  leképezés  $C^\infty$ , amelyik  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ -et leképezi  $U'_\beta \subset \mathbb{R}^{n'}$ -be.

## 2.2. Érintőterek és érintővektorok

A newtoni mechanika szerint a 3-dimenziós térben a véges elmozdulások a vektorösszeadás szabályai szerint összeadhatók, továbbá számmal szorozhatók, azaz nyújthatók és zsugoríthatók. Más szóval a newtoni mechanika 3-dimenziós tere egy 3-dimenziós lineáris vektortér. Hasonlóan a Minkowski-téridő 4-esvektorok

<sup>24</sup>Felix Hausdorff, német matematikus, 1868-1942.



4. ábra. Az  $M$  sokaságot az  $M'$  sokaságra leképező  $f$  diffeomorfizmus személtetése.

lineáris vektortere. A téridőnek ez a szerkezete azonban nincsen meg, ha görbült. Például egy gömb felületén nincsen értelme annak, hogy hogyan lehet a felület egyik pontjához a másikat úgy „hozzáadni”, hogy a felület egy harmadik pontját kapjuk eredményül. Ugyanakkor lokálisan a görbült felület minden pontja kicsiny környezetében értelmezhetjük az infinitezimális eltolások összeadását és számszorosát. Ha a görbült tér egy magasabb dimenziós térbe beágyazott felület lenne, akkor minden pontban érintő hipersíkot képzelhetnénk el, s ennek a vektoraival azonosítanánk az infinitezimális eltolásokat. Mivel legjobb tudásunk szerint a téridő nincsen beágyazva ilyen módon, azért a vektorok fogalmát a sokaságok szerkezetének belső tulajdonságaira alapozva, külső beágyazó térre történő hivatkozás nélkül kell értelmezni.

A vektorok definícióját az motiválja, hogy  $\mathbb{R}^n$ -ben a vektoroknak kölcsönösen egyértelműen iránymenti deriváltak feleltethetők meg: a  $v = (v^1, \dots, v^n)$  vektornak a  $\sum_{\mu=1}^n v^\mu (\partial/\partial x^\mu)$  iránymenti derivált, és fordítva. Az iránymenti derivált az  $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett skalármezőkön van értelmezve, és meghatározza a mező infinitezimális megváltozását egy olyan görbe mentén, amelynek érintője  $v$ . A sokaság tetszőleges pontjában az érintővektorokat ennek mintájára definiáljuk.

**Definíció: Érintővektor.** Legyen  $M$  sokaság,  $p$  a sokaság tetszőleges pontja és  $\mathcal{F}$  azon  $f$   $C^\infty$ -függvények halmaza, amelyek  $M$ -ből  $\mathbb{R}$ -be képeznek le. Ekkor a  $p$  pontbeli  $v$  érintővektort azzal a  $v : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$  leképezéssel definiáljuk, amely lineáris, azaz amelyre  $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\forall f, g \in \mathcal{F}$ , és amelyre érvényes a Leibnitz<sup>25</sup>-szabály, azaz  $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$ .

**Következmény:** Ha  $h \in \mathcal{F}$  konstans függvény, azaz  $h(q) = c = \text{const.} \neq 0$   $\forall q \in M$ , akkor  $v(h) = 0$ . Valóban, a Leibnitz-szabály miatt ekkor  $v(h^2) = 2hv(h) = 2cv(h)$ , másrészt a linearitás miatt  $v(h^2) = v(ch) = cv(h)$ , úgyhogy  $2cv(h) = cv(h)$ , azaz  $v(h) = 0$  adódik.

<sup>25</sup>Gottfried Wilhelm Leibnitz (vagy Leibniz), német matematikus, 1646-1716



A  $p \in M$  pontban értelmezett  $v$  vektorok összessége egy  $V_p$  lineáris vektorteret alkot a  $(v_1 + v_2)(f) = v_1(f) + v_2(f)$  összeadásra és az  $(av)(f) = av(f)$  számmal történő szorzásra nézve. Ez a sokaság **érintőtere**  $p$ -ben.

**2.2.1 tétel:** Ha  $M$   $n$ -dimenziós sokaság és a  $p \in M$  pontban az érintőtere  $V_p$ , akkor  $\dim V_p = n$ .

Valóban meg lehet mutatni, hogy  $V_p$ -ben értelmezhető pontosan  $n$  darab lineárisan független vektorból álló vektorrendszer, amely kifeszíti  $V_p$ -t. Egy ilyen bázishoz a következőképpen jutunk. Legyen  $p \in O$  és  $\psi : O \mapsto U \subset \mathbb{R}^n$  lokális térkép. Legyenek továbbá  $\mathbb{R}^n$ -ben a koordináták  $x = (x^1, \dots, x^n)$ . Definíció szerint bármely  $f \in \mathcal{F}$  esetén  $f \circ \psi^{-1} : U \mapsto \mathbb{R}$   $C^\infty$ , ezért ennek a függvénynek léteznek az  $x^\mu$  koordináták szerinti parciális deriváltjai a  $\psi(p) \in U$  pontban. A  $p \in M$  pontbeli  $V_p$  érintőtér szóban forgó bázisvektorait

$$X_\mu(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \psi^{-1}) \quad \mu = 1, \dots, n \quad (2.2.1.)$$

összefüggéssel értelmezzük. Ezekről a vektorokról megmutatható, hogy lineárisan függetlenek, és hogy bármely  $v \in V_p$  vektor felírható ezen bázisvektorok lineáris kombinációjaként, azaz hogy  $\forall f \in \mathcal{F}$  fennáll, hogy

$$v(f) = \sum_{\mu=1}^n v^\mu X_\mu(f), \quad (2.2.2.)$$

ahol

$$v^\mu = v(x^\mu \circ \psi) \quad (2.2.3.)$$

a  $v$  vektor komponensei az  $\{X_\mu\} \subset V_p$  bázisban, hiszen

$$v(x^\mu \circ \psi) = \sum_{\nu=1}^n v^\nu (\partial/\partial x^\nu)(x^\mu \circ \psi \circ \psi^{-1}) = v^\mu. \quad (2.2.4.)$$

Az így bevezetett  $\{X_\mu\}$  bázist **koordináta-bázisnak** nevezik. Egy másik szokásos jelölés  $X_\mu$  helyett  $\partial/\partial x^\mu$ .

**Következmény: Bázistranszformáció.** Ha a  $\psi$  lokális térkép helyett egy másik  $\psi'$  lokális térképet használunk, akkor másik  $\{X'_\mu\}$  koordinátabázist kapunk. Ha felhasználjuk a közönséges analízis láncszabályát, akkor

$$X_\mu = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_{\psi(p)} X'_\nu \quad (2.2.5.)$$

adódik, ahol  $x'^\nu = x'^\nu(x^1, \dots, x^n) = (\psi' \circ \psi^{-1})^\nu$  határozza meg az  $\mathbb{R}^n$ -beli új és régi koordináták kapcsolatát. Ekkor  $v = \sum_{\mu=1}^n v^\mu (\partial/\partial x^\mu) = \sum_{\mu,\nu=1}^n \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_{\psi(p)} v^\mu (\partial/\partial x'^\nu)$

miatt

$$v'^\nu = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_{\psi(p)} v^\mu \quad (2.2.6.)$$

a vektorkomponensek transzformációs szabálya.

Fontos vektorok a sima görbék érintői.

**Definíció: Sima görbének** nevezzük az  $\mathbb{R}$  valós számegyenesnek vagy a valós számegyenes egy intervallumának  $C$  leképezését  $M$ -be,  $C : \mathbb{R} \mapsto M$ , ha az  $C^\infty$ .

**Definíció: A  $C$  sima görbe érintője** a sokaság tetszőleges  $p \in M$  pontjában az a  $T \in V_p$  vektor, amelyet tetszőleges  $f \in \mathcal{F}$  esetén a

$$T(f) = \frac{d}{dt}(f \circ C) \quad (2.2.7.)$$

összefüggés definiál, ahol az  $f \circ C : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  valós függvény értelmezési tartományának pontjait  $t$  valós paraméterrel jelöltük,  $p = C(t)$ , és az egyenlet jobb oldalán valós függvény közösleges deriváltja áll.

Ha a  $p \in M$  pont környezetében választott  $\psi$  lokális koordinátarendszer koordinátái  $x^\mu$ , akkor a görbe paraméteres egyenlete ebben a koordinátarendszerben  $(\psi \circ C)^\mu = x^\mu(t)$  és  $f \circ \psi^{-1} = f(x^1, \dots, x^n)$ , így az  $f$  függvénynek a  $C$  görbe pontjain felvett értékei  $f \circ C = f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ C = f(x^1(t), \dots, x^n(t))$ . Ezért írhatjuk, hogy

$$T(f) = \frac{d}{dt}(f \circ C) = \frac{d}{dt}(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ C) = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \psi^{-1}) \frac{dx^\mu}{dt}, \quad (2.2.8.)$$

ahonnan

$$T(f) = \sum_{\mu=1}^n \frac{dx^\mu}{dt} X_\mu(f), \quad (2.2.9.)$$

avagy rövidebben a  $C$  sima görbe érintővektora a  $p \in M$  pontban

$$T = \sum_{\mu=1}^n \frac{dx^\mu}{dt} X_\mu \equiv \sum_{\mu=1}^n T^\mu X_\mu \quad (2.2.10.)$$

és ennek komponensei

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \quad (2.2.11.)$$

az  $\{X_\mu\}$  koordinátabázisban.

**Megjegyzés:** Ha  $C$  olyan görbe, amelynek mentén minden koordináta állandó a  $\mu_0$ -adik  $x^{\mu_0}$  kivételével, azaz  $C$  ehhez a koordinátához tartozó **koordinátavonal**,

akkor  $T = X_{\mu_0}$ . **A bázisvektorok tehát ilyen koordinátavonalak érintői.** (A lapos téridőben is hasonló a helyzet; a görbült téridőben azonban az érintővektor az érintőtér vektora és nem a téridősokaság  $p$  pontjából annak egy másik pontjába mutató nyíl.)

**Megjegyzés:** Tekintsük a  $V_p$  és  $V_q$  érintőtereket a sokaságnak rendre a  $p$  és  $q \neq p$  pontjaiban. Ha csak a sokaság-struktúrát adtuk meg, akkor  $V_p$  és  $V_q$  vektorai között **nem találunk semmilyen természetes megfeleltetést.** Ilyen kapcsolatot csak alább fogunk találni, amikor a sokaságot további tulajdonságokkal látjuk el: értelmezni fogjuk a konnexiót, segítségével a deriválás operátorát, azaz a gradiens-operátort, majd végül a párhuzamos eltolást, amely lehetővé fogja tenni, hogy  $V_p$  vektorait leképezzük  $V_q$  vektoraira. Ez a párhuzamos eltolás azonban függeni fog attól, hogy melyik,  $p$ -ből  $q$ -ba menő görbén végezzük el.

**Definíció: (Érintő)vektormezőről** beszélünk, ha a sokaság minden  $p \in M$  pontjában adott egy  $v|_p \in V_p$  vektor. Akkor mondjuk, hogy a **vektormező sima**, ha bármely  $f : M \mapsto \mathbb{R}$  sima függvény esetén  $v|_p(f) : M \mapsto \mathbb{R}$  sima függvény. Meg lehet mutatni, hogy az  $X_\mu$  koordinátabázis-mezők simák. Ezért a  $v$  vektormező akkor és csak akkor sima, ha a  $v^\mu$  koordinátái sima függvények.

Az  $\mathbb{R}^n$ -ben az adott irányú elmozdulások egy-paraméteres folytonos csoportot alkotnak, és ezen elmozdulások generátora az adott irányú egységvektor. Ennek analógiájára meg lehet mutatni, hogy az  $M$  sokaságon értelmezett vektormező vektorai egy-paraméteres diffeomorfizmusok csoportjának generátorai, és hogy minden vektormezőhöz tartozik az egy-paraméteres diffeomorfizmusok egy csoportja. Ezért az érintővektorokat infinitezimális eltolásokkal hozhatjuk közvetlen kapcsolatba.

**Definíció:** A  $\phi_t : \mathbb{R} \times M \mapsto M$   $C^\infty$  leképezést **egy-paraméteres diffeomorfizmusok csoportjának** nevezzük, ha bármely rögzített  $t \in \mathbb{R}$  esetén  $\phi_t : M \mapsto M$  diffeomorfizmus, és bármely  $t, s \in \mathbb{R}$  esetén  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ . Ekkor  $\phi_{t=0}$  az egységelem és  $\phi_{-t}$  a  $\phi_t$  inverze.

**Állítás:** Minden  $\phi_t$  egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoporthoz rendelhetünk egy  $v$  vektormezőt. Legyen  $p \in M$  rögzített. Ekkor  $\phi_t(p) : \mathbb{R} \mapsto M$  olyan görbe, amelynek  $t = 0$  paraméterű pontja  $p$ . Ezt nevezzük **a diffeomorfizmus-csoport pályájának, vagy orbitájának.** Legyen ezek után  $v|_p$  az a vektor, amely a  $p$ -n áthaladó orbita érintője a  $p$  pontban:  $v|_p(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t(p)) \forall f : M \mapsto \mathbb{R}$ . Ez a vektor tekinthető úgy, mint az orbita mentén  $p$  pontból történő infinitezimális eltolás generátora. Ha  $p$  befutja  $M$ -et, akkor így az egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoporthoz tartozó vektormezőt kapunk.

Fordítva, minden sima  $v$  vektormezőhöz tartozik egy egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport. Legyen adott a  $v$  sima vektormező. Ekkor minden  $p \in M$  ponton pontosan egy olyan görbe halad át, amelynek érintője  $p$ -ben  $v|_p$ . Ezek a görbék **a  $v$  vektormező  $\mathcal{C}$  integrálgörbéi.** Meg lehet mutatni, hogy az integrálgörbék megkeresése egy közösleges elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer megoldásának

meghatározásával egyenértékű  $\mathbb{R}^n$ -ben. Ha a  $p$  pont környezetében bevezetjük a  $\psi$  koordinátatérképet az  $(x^1, \dots, x^n)$  koordinátákkal, akkor  $x^\mu(t) = \psi \circ \mathcal{C}$  határozza meg a  $t \in \mathbb{R}$  paraméterértékhez tartozó  $\mathbb{R}^n$ -beli pontok  $x^\mu(t)$  koordinátáit. Ekkor tetszőleges  $f \in \mathcal{F}$  sima függvény esetén

$$\begin{aligned} v_p(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ \mathcal{C}(p)) = \frac{d}{dt}(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \mathcal{C}(p)) \\ &= \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \psi^{-1}) \frac{dx^\mu}{dt}. \end{aligned} \quad (2.2.12.)$$

Másészt viszont  $v_p(f)$  felbontása az  $\partial/\partial x^\mu$  koordinátabázisban

$$v_p(f) = \sum_{\mu=1}^n v^\mu(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \psi^{-1}). \quad (2.2.13.)$$

Ezért a szóbanforgó differenciálegyenlet-rendszer a  $\partial/\partial x^\mu$  bázisban

$$v^\mu(x^1, \dots, x^n) = \frac{dx^\mu(t)}{dt}. \quad (2.2.14.)$$

Ennek a  $t = 0$ -ban adott  $p \in M$  kezdőponthoz tartozó megoldása egyértelműen létezik. Ez a  $p$  ponton  $t = 0$  paraméterértékkel áthaladó integrálgörbe paraméteres egyenlete. Ezután a  $\phi_t(p)$ -t úgy definiáljuk, mint a  $p$ -n áthaladó integrálgörbe  $t$  paraméterértékhez tartozó pontját. Az így kapott  $\phi_t$  egy egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport, leszámítva azt az esetet, ha  $t$  nem futhatja be csak a valós számegegyenes valamely véges intervallumát.

A későbbiekben hasznos lesz a  $v$  és  $w$  vektormezők kommutátorának fogalma.

**Definíció:** Legyen adott az  $M$  sokaságon a  $v$  és a  $w$  vektormező, ezek **kommutátorán** a

$$[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f)) \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad (2.2.15.)$$

vektormezőt értjük. Be lehet bizonyítani, hogy a  $[v, w]$  kommutátor valóban eleget tesz a linearitásnak és a Leibnitz-szabálynak, azaz valóban vektor.

**Következmény:** Mivel  $X_\nu(f) = (\partial/\partial x^\nu)(f \circ \psi^{-1}) = \partial f(x^1, \dots, x^n)/\partial x^\nu$ , azt kapjuk, hogy koordináta-bázisvektorok kommutátora zérus:

$$[X_\mu, X_\nu](f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^\nu} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^\mu} \right) = 0. \quad (2.2.16.)$$

Megfordítva, ha adottak az  $X_1, \dots, X_n$  el nem tűnő vektormezők, amelyek páronként kommutálnak, azaz amelyekre  $[X_\mu, X_\nu] = 0$ ,  $\mu, \nu = 1, \dots, n$ , akkor mindig létezik olyan lokális koordinátarendszer, amelynek  $\{X_\mu\}$  a bázisa.

**Állítás:** Az  $\{X_\mu\}$  koordinátabázisban a kommutátor komponensei

$$[v, w]^\mu = \sum_{\nu=1}^n \left( v^\nu \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \right). \quad (2.2.17.)$$

Valóban, részletesen kiírva azt kapjuk, hogy  $\forall f \in \mathcal{F}$  esetén

$$\begin{aligned} v(w(f)) &= \sum_{\nu} v^\nu X_\nu(w(f)) = \sum_{\nu} v^\nu X_\nu \left( \sum_{\mu} w^\mu X_\mu(f) \right) = \sum_{\nu} v^\nu X_\nu \left( \sum_{\mu} w^\mu \frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^\mu} \right) \\ &= \sum_{\nu, \mu} v^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( w^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right), \end{aligned} \quad (2.2.18.)$$

és hasonlóan

$$w(v(f)) = \sum_{\nu, \mu} w^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right), \quad (2.2.19.)$$

úgyhogy ezek különbsége

$$[v, w](f) = \sum_{\mu, \nu} \left( v^\nu \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \right) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv [v, w]^\mu X_\mu(f), \quad (2.2.20.)$$

ahonnan a  $[v, w]^\mu$  komponensekre a keresett kifejezés adódik.

## 2.3. Tenzorok

Már a newtoni mechanikában és a speciális relativitáselméletben is megtapasztaltuk, hogy a fizikai mennyiségek egy része skalár, ill. vektor, de azt is láttuk, hogy szükségünk van tenzoriális mennyiségekre is, mint pl. a mechanikai feszültség vagy az energia-impulzus tenzora. Hasonlóan, az általános relativitáselméletben a görbült téridő-sokaságon értelmezhetünk tenzorokat. Ehhez először definiáljuk a duális vektorokat, majd pedig a tenzorokat, mint a vektorok és duális vektorok multilineáris függvényeit. Az így értelmezett tenzor-fogalom független a lokális koordinátarendszer-választástól.

**Definíció:** Legyen  $V$  lineáris vektortér. (Esetünkben  $V = V_p$  a sokaság érintőtere a  $p \in M$  pontban.) Ekkor a  $V$  **vektortér**  $V^*$  **duálisán** azon  $\omega : V \mapsto \mathbb{R}$  leképezéseket értjük, amelyek lineárisak. A  $V$  vektortér lineáris leképezései a leképezések összeadásának és számmal való szorzásának triviális értelmezése esetén lineáris vektorteret alkotnak.

**Állítás:** Legyen adott a  $\{v_\mu\}$  bázis a  $V$  vektortérben, akkor a

$$v^{\mu*}(v_\nu) = \delta_\nu^\mu \quad (2.3.1.)$$

összefüggés által definiált  $\{v^{\mu*}\} \subset V^*$  vektorrendszer bázis a duális vektortérben; ez a **duális bázis**.

**Megjegyzés:** A duális bázis és a bázis közötti összefüggés ugyan megfeleltetést, izomorfizmust létesít a  $V$  vektortér és  $V^*$  duális vektortér elemei között, ez a megfeleltetés azonban függ a  $\{v_\mu\}$  bázis megválasztásától. Ha nem adunk meg további szerkezetet a sokaságon, akkor nem lehet természetes megfeleltetést létesíteni  $V$  és  $V^*$  elemei között.

**Megjegyzés:** Meg lehet mutatni, hogy a duális vektortér duálisa,  $V^{**}$  izomorf az eredeti  $V$  vektortérrel, és ez egy természetes (bázisválasztástól független) megfeleltetés. Így a többszöri duálisképzés nem vezet új eredményre, és a továbbiakban  $V^{**}$  és  $V$  azonosnak tekinthetők,  $V^{**} \equiv V$ .

**Definíció:** Legyen  $V$  lineáris vektortér és  $V^*$  a duálisa. Ekkor a  $(k, l)$  típusú  $T$  tenzorok a  $T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_k \times \underbrace{V \times \dots \times V}_l \mapsto \mathbb{R}$  multilineáris leképezést értjük.

A  $(k, l)$ -típusú tenzorokat  $k + l$ -rendűeknek nevezzük. A tenzor rendje azonban nem határozza meg egyértelműen a típusát.

**Állítás:** A szokásos összeadásra és számmal történő szorzásra nézve a  $(k, l)$ -típusú tenzorok  $\mathcal{T}(k, l)$  lineáris vektorteret alkotnak.

**Megjegyzés:** Mivel  $V^{**}$  azonosítható  $V$ -vel, ezért az  $(1, 0)$ -típusú tenzorok (a duális vektorok terén értelmezett lineáris leképezések) a vektorok. Nyilvánvalóan a  $(0, 1)$ -típusú tenzorok pedig a duális vektorok.

Mivel a tenzorok multilineáris leképezések, ezért a  $\{v_\mu\} \subset V$  bázisvektorokon és  $\{v^{\nu*}\} \subset V^*$  duális bázison felvett értékeik teljesen meghatározzák őket. Ha  $\dim V = \dim V^* = n$ , akkor a  $(k, l)$ -típusú tenzorok argumentuma ezen bázisvektorokkal  $n^{k+l}$  különböző módon adható meg, úgyhogy  $\dim \mathcal{T}(k, l) = n^{k+l}$ .

**Megjegyzés:** Fontos megemlíteni, hogy a magasabb rendű tenzorokat többféle, egymással egyenértékű módon lehet szemlélni annak köszönhetően, hogy  $V^{**}$  és  $V$  azonosítható egymással. Például az  $(1, 1)$ -típusú tenzor  $T : V^* \times V \mapsto \mathbb{R}$  multilineáris leképezés. Ezért, rögzített  $v \in V$  változó esetén  $T(\cdot; v) : V^* \mapsto \mathbb{R}$  a  $V^{**}$  eleme (a duális téren értelmezett lineáris leképezés), és ezért minden rögzített  $v \in V$ -hez hozzárendel egy másik  $V$ -beli vektort, azaz úgy tekinthető, mint egy  $V \mapsto V$  lineáris leképezés. Hasonlóan az  $(1, 1)$  típusú tenzort úgy is tekinthetjük, mint egy  $V^* \mapsto V^*$  lineáris leképezést.

A tenzorokon az alábbi műveleteket szokás értelmezni.

**Definíció: Kontrakció:** a  $(k, l)$ -típusú tenzornak az  $i$ -edik duális vektorváltozója és a  $j$ -edik vektorváltozója szerinti  $C$  kontrakciója a

$$CT = \sum_{\sigma=1}^n T(\dots, v^{\sigma*}, \dots; \dots, v_\sigma, \dots) \quad (2.3.2.)$$

összefüggéssel meghatározott  $(k-1, l-1)$  típusú tenzor, ahol a jobb oldalon az  $i$ -edik duális vektor- és a  $j$ -edik vektor-pozícióban álló változókat tüntettük fel. A

kontrakció eredménye független a bázisválasztástól.

**Definíció:** A  $T$   $(k, l)$ -típusú és a  $T'$   $(k', l')$ -típusú **tenzorok**  $T \otimes T'$  **külső szorzatán** azt a  $(k + k', l + l')$ -típusú tenzort értjük, amelyet a következő szabály szerint képezhetünk. Legyenek  $w_1, \dots, w_l \in V$  és  $v^{1*}, \dots, v^{k*} \in V^*$  azok a vektorok és duális vektorok, amelyeken  $T$  hat, és rendre  $w_{l+1}, \dots, w_{l+l'}$ , ill.  $v^{k+1*}, \dots, v^{k+k'*}$  azok, amelyeken  $T'$  hat, ekkor

$$(T \otimes T')(v^{1*}, \dots, v^{k+k'*}; w_1, \dots, w_{l+l'}) \\ = T(v^{1*}, \dots, v^{k*}; w_1, \dots, w_l) T'(v^{k+1*}, \dots, v^{k+k'*}; w_{l+1}, \dots, w_{l+l'}). \quad (2.3.3.)$$

A külső szorzás lehetővé teszi, hogy tetszőleges  $(k, l)$ -típusú tenzorokat úgynevezett egyszerű tenzorokból szerkesszünk meg.

**Definíció:** Legyenek  $\{v_\mu\}$  és  $\{v^{\nu*}\}$  rendre bázis  $V$ -ben és a megfelelő duális bázis  $V^*$ -ban. Ekkor a  $(k, l)$ -típusú **egyszerű tenzorok**

$$v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{\nu_1*} \otimes v^{\nu_l*}. \quad (2.3.4.)$$

**Állítás:** Összesen  $n^{k+l}$  különböző  $(k, l)$ -típusú egyszerű tenzor konstruálható adott bázisok esetén. Ezek  $\mathcal{T}(k, l)$ -ben bázist képeznek. Következésképpen bármely  $T \in \mathcal{T}(k, l)$  tenzor kifejtethető ebben a bázisban:

$$T = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{\nu_1*} \otimes v^{\nu_l*}. \quad (2.3.5.)$$

A kifejtésben szereplő  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$  együtthatókat nevezzük a  $T$  **tenzor komponenseinek** az adott bázisban. **A tenzorfogalom független mindenféle bázisválasztástól**, míg a tenzorkomponensek bázisfüggőek, azaz értékük függ attól, hogy milyen bázissal és a duálisával dolgozunk.

**Megjegyzés:** Tenzorkomponensek segítségével a kontrakció

$$(CT)^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \nu_{l-1}} = \sum_{\sigma=1}^n T^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \sigma \dots \nu_{l-1}}, \quad (2.3.6.)$$

a külső szorzat pedig

$$S^{\mu_1 \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_1 \dots \nu_{l+l'}} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} T'^{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_{l+1} \dots \nu_{l+l'}} \quad (2.3.7.)$$

alakot ölt.

A koordinátabázis vektorainak szokásos jelölése  $X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in V$ , a megfelelő duális bázisvektorokat  $dx^\mu$ -vel jelöljük, úgyhogy definíció szerint  $dx^\mu(\partial/\partial x^\nu) = \delta^\mu_\nu$ .

Korábban már megmutattuk, hogy valamely lokális  $(x^1, \dots, x^n)$  koordináta-rendszer-ről egy másik  $(x'^1, \dots, x'^n)$  koordináta-rendszerre történő áttérés során a  $v$  vektor komponensei

$$v'^{\mu'} = \sum_{\mu=1}^n v^{\mu} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \quad (2.3.8.)$$

szabály szerint transzformálódnak. Ezt felhasználva beláthatjuk, hogy tetszőleges  $\omega \in V^*$  duális vektor komponensei

$$\omega'_{\mu'} = \sum_{\mu=1}^n \omega_{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \quad (2.3.9.)$$

módon transzformálódnak.

Ehhez először belátjuk, hogy  $\forall \omega \in V^*, \forall w \in V$  esetén

$$\omega(w) = \sum_{\mu=1}^n \omega_{\mu} w^{\mu}. \quad (2.3.10.)$$

Valóban, ha a koordinátabázis  $V$ -ben  $\{v_{\mu}\}$  és ennek duálisa  $V^*$ -ben  $\{v^{\mu*}\}$ , akkor

$$\omega(w) = \sum_{\mu} v^{\mu*}(w) = \sum_{\mu} \omega_{\mu} v^{\mu*} \left( \sum_{\nu} w^{\nu} v_{\nu} \right) = \sum_{\mu, \nu} \omega_{\mu} w^{\nu} v^{\mu*}(v_{\nu}) = \sum_{\mu, \nu} \omega_{\mu} w^{\nu} \delta_{\nu}^{\mu} = \sum_{\mu} \omega_{\mu} w^{\mu}. \quad (2.3.11.)$$

Koordinátatranszformáció során

$$\omega(w) = \sum_{\mu} \omega_{\mu} w^{\mu} = \sum_{\mu'} \omega'_{\mu'} w'^{\mu'} = \sum_{\mu', \mu} \omega'_{\mu'} w^{\mu} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}, \quad (2.3.12.)$$

ahonnan

$$\omega_{\mu} = \sum_{\mu'} \omega'_{\mu'} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}. \quad (2.3.13.)$$

Jelöljük most át a vesszős koordináta-rendszert vesszőtlenre és fordítva a vesszőtlen-t vesszősre, akkor

$$\omega'_{\mu'} = \sum_{\mu=1}^n \omega_{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \quad (2.3.14.)$$

adódik.

Ezeket felhasználva, tetszőleges  $(k, l)$ -típusú tenzor komponenseinek transzformációs szabályára

$$T'^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \sum_{\mu_1 \dots \mu_k} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \frac{\partial x'^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \quad (2.3.15.)$$



adódik.

**Megjegyzés:** A tenzorokat koordináta-rendszer-választástól függetlenül definiáltuk. Lehetne azonban a tenzorokat a komponenseik transzformációs tulajdonságaival is definiálni. Ez azonban előnytelen, mert a legtöbb esetben olyan állításokat fogunk megfogalmazni, amelyek koordináta-rendszertől függetlenek, hiszen alapelv az általános relativitáselméletben, hogy a Természet törvényei vonatkoztatási rendszertől függetlenek.

**Megjegyzés:** Szokás a  $p \in M$  pontbeli  $V_p$  érintőtér vektorait **tangens-**, azaz **érintővektoroknak**, ill. **kontravariáns vektoroknak**, a duális  $V_p^*$  tér vektorait **kotangensvektoroknak**, ill. **kovariáns vektoroknak** nevezni.

**Definíció:** Amennyiben a sokaság minden  $p$  pontjában értelmezve van a  $T(k, l)$ -típusú tenzor, akkor **tenzormezőről** beszélünk. Egy tenzormezőt akkor nevezünk simának, ha sima függvénye a vektor- és duális vektor-változóinak, amelyek maguk is sima mezők. Függvények és vektormezők simaságát már értelmeztük. Az  $\omega$  duális vektormezőt akkor nevezzük simának ( $C^\infty$ -nek), ha tetszőleges, sima  $v$  vektormező esetén  $\omega(v)$  sima függvény.

## 2.4. Metrikus tenzor

A metrikus tenzort annak érdekében vezetjük be, hogy a sokaságon „infinitezimális távolságnégyzetet” értelmezzünk, s tesszük ezt, mint az „infinitezimális elmozdulás” négyzetét. Az „infinitezimális elmozdulásoknak” viszont a sokaság érintővektorait feleltettük meg. Ezért a metrikát, mint  $(0, 2)$ -típusú  $g$  tenzort vezetjük be.

**Definíció:** A  $g$  **metrikus tenzor** a sokaság  $p \in M$  pontjában értelmezett olyan  $(0, 2)$ -típusú tenzor, amely **szimmetrikus**, azaz  $\forall v_1, v_2 \in V_p$  esetén  $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$ , és **nem elfajult**, azaz  $g(v, v_1) = 0$  tetszőleges  $v \in V_p$  esetén akkor és csak akkor, ha  $v_1 = 0 \in V_p$ .

**Megjegyzés:** A metrika tehát az érintőtéren értelmezett belső szorzat, amely azonban nem feltétlenül pozitív definit.

Valamely lokális koordináta-bázisban a metrikus tenzor

$$g = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (2.4.1.)$$

alakba írható. Szokás ezt az összefüggést a  $ds^2$  **invariáns ívelemnégyzet** segítségével

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.4.2.)$$

alakba írni, amikor elhagytuk a jobb oldalon a külső szorzat jelét. Ez az írásmód tükrözi, hogy „infinitezimális elmozdulás négyzetének” megfelelő matematikai kép-

lettel van dolgunk. (Ne felejtsük azonban el, hogy sem a jobb oldal, sem a bal oldal nem szám, hanem bilineáris leképezés; valós számot akkor kapunk, ha  $g(v, v) \in \mathbb{R}$ -t képezzük valamely  $v \in V_p$  vektor segítségével. Ha  $v$  integrálgörbéje mentén mozdulunk el a sokaságon a  $t$  paraméterű  $p \in M$  pontból a  $t + dt$  paraméterű  $q \in M$  infinitezimálisan közeli pontba, akkor az integrálgörbén az ívhossznégyszet arányos  $g(v, v)$ -vel,  $g(v, v)dt^2 \in \mathbb{R}$ . A görbék ívhosszáinak értelmezésére később még visszatérünk.

**Állítás:** Ha adott a  $g$  metrika, akkor az érintőtérben mindig találhatunk **ortonormált bázist**, azaz olyan  $v_1, \dots, v_n$  bázisvektorokat  $V_p$ -ben, amelyekre  $g(v_\mu, v_\nu) = 0$ , ha  $\mu \neq \nu$  és  $g(v_\mu, v_\mu) = \pm 1$ . Végtelen sok ortonormált bázis létezik. Bármelyiket is választjuk azonban, a sokaságra egyértelműen jellemző azon vektorok száma, amelyekre  $g(v_\mu, v_\mu) = +1$ , és amelyekre  $g(v_\mu, v_\mu) = -1$ . A  $+$  és  $-$  előjelek számát a **metrika szignatúrájának** nevezzük. A  $(++++)$  szignatúrájú metrikát **Riemann<sup>26</sup>-metrikának**, a  $(-+++)$  szignatúrájú **Lorentz-metrikának** nevezzük. A téridő metrikája a speciális és az általános relativitáselmélet szerint Lorentz-metrika.

Legyen értelmezve a  $g$  metrika a téridő  $p$  pontjában, mint a  $g : V_p \otimes V_p \mapsto \mathbb{R}$  bilineáris leképezés. Rögzített  $v \in V$  esetén a  $g(\cdot, v) : V_p \mapsto \mathbb{R}$  lineáris leképezés a duális vektortér eleme,  $g(\cdot, v) \in V_p^*$ . Ha  $v \in V_p$  végigfut a  $V_p$  érintőtér elemein, akkor tehát  $g(\cdot, v)$  minden  $v \in V_p$  vektorhoz hozzárendel egy  $v^* \in V_p^*$  duális vektort. Ez a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, mert a metrika nem elfajult, és „-ra” történő leképezés, úgyhogy létezik az inverz leképezés is. A metrika segítségével tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a vektortér és duálisának elemei között. Ha adott a metrika, ez azt is jelentheti, hogy nem érdemes külön bevezetni a duális vektorokat. Így szoktunk eljárni pl. a newtoni mechanikában. Az általános relativitáselméletben azonban nem ismert előre a metrika, úgyhogy ekkor világos különbséget kell tenni a vektorok és a duális vektorok között.

## 2.5. Jelölések, konvenciók

A tenzorok jelölésére olyan konvenciót fogunk használni, amikor a jelölés egyértelműsíti a tenzor típusát, ugyanakkor nem keverhető össze a tenzornak és a komponenseinek a jelölése. Ez a jelölés azt is egyértelműsíti, hogy ha egyenletet írunk fel, akkor az tenzorokra vonatkozó, lokális koordinátarendszer-választástól független érvényű egyenlet, avagy csak a tenzorkomponensekre valamilyen speciális koordinátarendszerben érvényes összefüggés.

Ezért a  $T(k, l)$ -típusú tenzort  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  módon fogjuk jelölni ellátva  $k$  darab kontravariáns és  $l$  darab kovariáns latin indexszel. Ugyanennek a tenzornak a komponenseit valamely adott koordináta-rendszerben megfelelő görög indexszel látjuk el,  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ . További megállapodás, hogy a kontrakciót, ami akár

---

<sup>26</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann, német matematikus, 1826-1866.

a tenzor kontrakciója, akár a kontrahált tenzor komponensei esetén összegzést jelent egy megegyező kontravariáns és kovariáns indexpárra, az összegzés jelének elhagyásával és azonos felső és alsó (latin, ill. görög) indexszel jelöljük, mint pl.  $T^{a_1 \dots c \dots a_{k-1}}_{b_1 \dots c \dots b_{l-1}}$  a  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzor kontrakcióját jelenti az  $i$ -edik kontravariáns és a  $j$ -edik kovariáns index szerint, ha  $c$  a kontravariáns indexek között az  $i$ -edik helyen és a kovariáns indexek között a  $j$ -edik helyen áll. A megfelelő kontrahált tenzor komponensei valamely koordinátarendszerben  $T^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \sigma \dots \nu_{l-1}}$ .

További szabályok vonatkoznak a metrikus tenzor hatásának jelölésére. A  $(0, 2)$ -típusú metrikus tenzort  $g_{ab}$ -vel jelöljük. A metrikus tenzor minden  $v \in V_p$  vektorhoz hozzárendeli a  $v^* = g(\cdot, v) \in V_p^*$  duálisvektort. Konvenciónknak megfelelően a  $v$  kontravariáns vektort  $v^a$ -val, a metrikus tenzor által értelmezett izometria révén hozzárendelt  $v^*$  duális vektort (kovariáns vektort) pedig  $v_a$ -val jelöljük, úgyhogy  $g_{ab}v^b = v_a$  írható, ami explicit módon kifejezi a  $V_p$  és  $V_p^*$  közti izometriát. A metrikus tenzor inverze  $(2, 0)$ -típusú tenzor, amit jelölhetnénk  $(g^{-1})^{ab}$ -vel. Ehelyett azonban általánosan elfogadott egyszerűen  $g^{ab}$ -vel jelölni. Ekkor definíció szerint

$$g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a \quad (2.5.1.)$$

a  $V_p \mapsto V_p$  azonossági leképezés. Hasonlóan a metrika inverzének az  $\omega_a$  duális vektorra vett hatásaként előálló vektort  $\omega^a$ -val jelöljük, azaz  $g^{ab}\omega_b = \omega^a$ . Ezt a jelölésmódot az indexek fel- és lehúzásával következetesen alkalmazhatjuk bármely tenzor bármely indexére, s így az eredeti tenzorral (izometria erejéig) azonos tenzort kapunk. A jelölés következetes abban is, hogy a metrikus tenzorból indexfelhúzással kapjuk az inverz metrikát,  $g^{ab} = g^{ac}g^{bd}g_{cd}$ .

További egyszerűsödés, hogy jelölésünk különbséget tud tenni pl. a  $(0, 2)$ -típusú tenzor esetén  $T(v, w) = T_{ab}v^aw^b$  és  $T'(w, v) = T'_{ab}w^bv^a$  között, ha  $T'$  csak annyiban különbözik  $T$ -től, hogy a  $v$  és  $w$  vektorokat felcseréljük az argumentában; írhatjuk ugyanis, hogy  $T'_{ab} = T_{ba}$ . Amennyiben  $T_{ab} = T_{ba}$ , akkor azt mondjuk, hogy a  $T_{ab}$  **tenzor szimmetrikus**. A metrikus tenzor például szimmetrikus,  $g_{ab} = g_{ba}$ . Bármely kontravariáns vagy kovariáns indexpárra hasonló szabályt alkalmazhatunk. Érdemes külön jelölést bevezetni a tenzorok teljesen szimmetrikus és teljesen antiszimmetrikus részére. A  $(0, 2)$ -típusú  $T_{ab}$  tenzorok esetén a szimmetrikus, ill. az antiszimmetrikus részre írhatjuk rendre, hogy

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}), \quad \text{ill.} \quad T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}). \quad (2.5.2.)$$

Ekkor mindig igaz, hogy  $T_{ab} = T_{(ab)} + T_{[ab]}$ , azaz egy  $(0, 2)$ -típusú tenzor mindig egyértelműen felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus rész összegére. Az indexek fel- és lehúzásának szabályait figyelembe véve ez azt is jelenti, hogy bármely másodrendű tenzor hasonlóképpen felbontható. Általánosabban, pl. egy  $T_{a_1 \dots a_l}$   $(0, l)$ -típusú tenzor teljesen szimmetrikus, ill. teljesen antiszimmetrikus része

rendre

$$\begin{aligned} T_{(a_1 \dots a_l)} &= \frac{1}{l!} \sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}, \\ T_{[a_1 \dots a_l]} &= \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}, \end{aligned} \quad (2.5.3.)$$

ahol az összegzés az indexek összes  $\pi$  permutációjára történik és  $\delta_{\pi}$  egyenlő  $+1$ -gyel, ill.  $-1$ -gyel rendre aszerint, hogy a  $\pi$  permutáció páros, ill. páratlan. Hasonló szimmetrizálási, ill. antiszimmetrizálási szabályt alkalmazhatunk a kontravariáns és a kovariáns indexek bármely együttesére.

**Definíció:** A teljesen antiszimmetrikus  $(0, l)$ -típusú  $T_{a_1 \dots a_l}$  tenzorokat **differenciális  $l$ -formáknak nevezik**; esetükben  $T_{a_1 \dots a_l} = T_{[a_1 \dots a_l]}$ .

### 3. A téridő-sokaság görbülete

#### 3.1. Általános megfontolások

A görbületről alkotott naív fogalmunk olyan esetekből származik, amikor egy 2-dimenziós felület be van ágyazva egy magasabb dimenziós térbe, mint például a Föld felszíne a 3-dimenziós euklideszi térbe. A felületet akkor nevezzük görbültnek, ha a beágyazó euklideszi térben nem síkfelület. A görbület ilyen értelmezésének a külső görbület fogalma felel meg, amit a beágyazó tér jelenlétére alapozunk. A külső görbületet a felület valamely pontjában az jellemzi, hogy a felület normálisa mennyire nem marad (a külső euklideszi térben) önmagával párhuzamos, ha kicsit odább mozdulunk a felület mentén. Ilyenkor a vektorok párhuzamossága a beágyazó euklideszi térben van értelmezve. A külső görbület a felület **külső tulajdonságain** alapszik.

Jelenlegi legjobb tudásunk szerint azonban a téridő-sokaság nincsen beágyazva egy külső, magasabb dimenziós sokaságba. Ezért az általános relativitáselméletben olyan görbület-fogalomra van szükségünk, amely a sokaság, a görbült felület belső tulajdonságain alapszik. Az ilyen, úgynevezett **belső görbület** fogalmának kidolgozása Gauss nevéhez fűződik, szokás **Gauss-görbületnek** is nevezni. A belső görbület definiálásának ötlete a következő észrevételen alapszik. Vigyünk körbe egy vektort a felület egy zárt görbéje mentén úgy, hogy a vektor mindig benne maradjon a felület érintősíkjában és önmagával párhuzamos maradjon. Ha ezt a sík bármely zárt görbéje mentén tesszük, akkor mindig visszajutunk az eredeti vektort, amikor visszaérünk a kiindulási pontba. Ha ugyanezt a gömbfelületen, mondjuk egy gömbi háromszög mentén tesszük, akkor általában nem kapjuk vissza ugyanazt a vektort. A felület belső görbületét tehát azzal fogjuk jellemezni, hogy ha egy vektort a felületen tetszőleges zárt görbe mentén önmagával párhuzamosan eltolunk, akkor mennyire különböző vektort kapunk az eredeti vektorhoz képest, ha visszaérünk a kiindulási pontba. A kényes kérdés az, hogy pontosan mit is értsünk párhuzamos eltoláson. Látni fogjuk, hogy a párhuzamos eltolás fogalma egyértelművé tehető, ha metrikát értelmezzük a felületen, mint pontsokaságon.

A görbület, avagy általánosabban a **görbületi tenzor** értelmezéséhez a következő lépésekben jutunk el:

1. Értelmezzük vektormező görbementi deriváltját; ennek során bevezetjük a **kovariáns deriválás operátorát**.
2. Értelmezzük a **párhuzamos eltolást** a sokaságon, mint a sokaság egy járulékos geometriai tulajdonságát.
3. Értelmezzük a görbületet az alapján, hogy vektort zárt görbe mentén párhuzamosan eltolva mekkora lesz az eltérés az új (zárt görbe mentén párhuzamosan

eltolt) és az eredeti vektor között. Látni fogjuk, hogy ez az eltérés azzal lesz kapcsolatos, hogy a kovariáns deriválások operátorai nem kommutálnak.

Végül meg fogjuk mutatni, hogy a párhuzamos eltolás, mint a sokaság járulékos geometriai szerkezete, származtatható a metrikából, ha az értelmezve van a sokaságon. Ebben az esetben egyértelműen létezik olyan párhuzamos eltolás, amelyik skalárszorozattartó (azaz távolság- és szögtartó). A téridő metrikájából tehát egyértelműen következik egyfajta párhuzamos eltolás és görbület.

**Megjegyzés:** Azt azonban érdemes megemlíteni, hogy nem kötelező a gravitáció elméletében ilyen szorosan összekötni a párhuzamos eltolást és a metrika létezését, hanem lehet ezeket független geometriai struktúrákként kezelni, amelyeket az anyag dinamikája határoz meg. Einstein az általános relativitáselméletben azt az utat választotta, amikor a párhuzamos eltolás és a görbület a metrika által egyértelműen meghatározott jellemzők. Mi is ezt az utat követjük.

### 3.2. A kovariáns deriválás operátora

**Definíció:** A kovariáns deriválás  $\nabla$  operátora, a gradiens-operátor olyan leképezés, amely bármely sima (vagy legrosszabb esetben differenciálható)  $T \in \mathcal{T}(k, l)$  tenzormezőt átvisz egy  $\nabla T \in \mathcal{T}(k, l+1)$  tenzormezőbe, és eleget tesz az alábbi tulajdonságoknak:

1. lineáris, azaz

$$\nabla_c(\alpha A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) = \alpha \nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta \nabla_c B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}, \quad (3.2.1.)$$

ahol  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tetszőleges valós számok,  $A, B \in \mathcal{T}(k, l)$  tetszőleges tenzorok;

2. teljesíti a Leibnitz-szabályt, azaz

$$\begin{aligned} \nabla_c(A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} B^{a'_1 \dots a'_{k'}}_{b'_1 \dots b'_{l'}}) &= (\nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) B^{a'_1 \dots a'_{k'}}_{b'_1 \dots b'_{l'}} \\ &\quad + A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} (\nabla_c B^{a'_1 \dots a'_{k'}}_{b'_1 \dots b'_{l'}}) \end{aligned} \quad (3.2.2.)$$

bármely  $A \in \mathcal{T}(k, l)$ ,  $B \in \mathcal{T}(k', l')$  esetén;

3. felcserélhető a kontrakcióval, azaz

$$\nabla_d(A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}) = \nabla_d A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}, \quad (3.2.3.)$$

bármely  $A \in \mathcal{T}(k, l)$ -re, ahol a jobb oldalon a  $\nabla A$  deriválttenzor kontraháltja áll;

4. összhangban van az érintővektoroknak skalármezők iránymenti deriváltjaként történő értelmezésével, azaz  $\forall f \in \mathcal{F}$  függvény és  $\forall t^a \in V_p$  vektor esetén

$$t(f) = t^a \nabla_a f \quad (3.2.4.)$$

teljesül;

5. **torziómentes**, azaz  $\forall f \in \mathcal{F}$  függvény esetén

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f, \quad (3.2.5.)$$

vagyis a kovariáns deriválások operátorai skalárfüggvényre történő hatásukban felcserélhetők.

**Megjegyzés:** Vigyázat! Az 5. tulajdonság nem jelenti, hogy bármilyen tenzormezőre való hatásukban a kovariáns deriválások operátorai felcserélhetők lennének.

**Megjegyzés:** Az 5. tulajdonság elnevezése onnan származik, hogy amennyiben nem rójuk ki az 5. feltételt, akkor meg lehet mutatni, hogy a többi 4 tulajdonság megkövetelése miatt létezik olyan  $T^c_{ab}$ , az  $a, b$  indexekben antiszimmetrikus tenzor, a **torzió tenzora**, hogy

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c_{ab} \nabla_c f, \quad \forall f \in \mathcal{F}. \quad (3.2.6.)$$

Az 5. tulajdonság tehát azt jelenti, hogy a torzió tenzora eltűnik.

A fenti definícióval kapcsolatban először is az a kérdés merül fel, hogy létezik-e egyáltalán az 1.-5. tulajdonságoknak eleget tevő deriválási operátor, és amennyiben létezik, egyértelműen meg van-e határozva.

Könnyen meg lehet mutatni, hogy léteznek az 1.-5. tulajdonsággal rendelkező deriválási operátorok. Legyen  $\psi$  egy lokális koordinátarendszer, és legyenek  $\{\partial/\partial x^\mu\}$  és  $\{dx^\mu\}$  a megfelelő koordinátabázisok. Abban a tartományban, amelyet ez a koordinátarendszer lefed, értelmezhetjük az **adott koordináta-rendszerhez tartozó közönséges deriválás  $\partial_a$  operátorát** a következőképpen: vegyünk egy tetszőleges  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  sima tenzormezőt, amelynek komponensei a  $\psi$  koordinátarendszerben  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ , és legyen  $\partial_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  az a tenzormező, amelynek komponensei

$$\partial T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} / \partial x^\mu. \quad (3.2.7.)$$

A közönséges parciális deriválás tulajdonságai következtében az 1.-5. tulajdonságok ekkor mind teljesülnek. Az 5. tulajdonság a közönséges parciális deriválás felcserélhetősége miatt azt jelenti, hogy  $\partial_a$  és  $\partial_b$  bármely tenzormezőre vett hatásában felcserélhető. Beláttuk tehát, hogy létezik az 1.-5. tulajdonságoknak eleget tevő deriválási operátor: a közönséges deriválás  $\partial_a$  operátora ilyen.

Vegyünk most egy másik  $\psi'$  lokális koordinátarendszert, amelynek van átfedése az előző  $\psi$  koordinátarendszerrel. Ekkor a fenti eljárással egy másik  $\partial'_a$  deriválási

operátort kapunk. A bonyodalmat az okozza, hogy  $\partial'_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  komponensei a  $\psi'$  koordinátarendszerben nem fognak megegyezni a  $\partial_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  vesszős koordinátarendszerben vett komponenseivel. **A közönséges deriválás operátora tehát koordinátarendszer-függő;** nem társítható koordináta-független, azaz természetes módon a sokaság geometriai struktúrájához.

Vizsgáljuk meg következő lépésként, hogy mennyire van egyértelműen meghatározva az 1.-5. tulajdonságokkal definiált derivált operátor. Tegyük fel, hogy létezik két különböző derivált operátor,  $\nabla_a$  és  $\tilde{\nabla}_a$ , amelyek mindegyike eleget tesz az 1.-5. követelményeknek. A 4. tulajdonság következtében skalármezőre vett hatásukban ezeknek a deriválási operátoroknak azonosaknak kell lenniük,  $\nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f \ \forall f \in \mathcal{F}$ . Ahhoz, hogy esetleges különbözőségeükről felvilágosítást kapjunk, vizsgáljuk meg hatásukat eggyel magasabb rendű tenzormezőkre. Legyen  $\omega_a$  tetszőleges sima duális vektormező. A 2. és a 4. követelmény értelmében

$$\tilde{\nabla}_a(f\omega_b) - \nabla_a(f\omega_b) = f(\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b) \quad \forall f \in \mathcal{F}. \quad (3.2.8.)$$

Az egyenlet jobb oldalán álló  $\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b$  különbség értéke a sokaság bármely  $p \in M$  pontjában csak  $\omega_b$ -nek a  $p$  pontban felvett értékétől függ.

Ezt a következőképpen láthatjuk be. Tegyük fel, hogy  $\omega'_b$  olyan duális vektormező, amelyik a  $p$  pontban megegyezik  $\omega_b$ -vel, azaz amelyre  $(\omega'_b - \omega_b)|_p = 0$ , és mutassuk meg, hogy  $\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b = \tilde{\nabla}_a\omega'_b - \nabla_a\omega'_b$ . Mivel  $(\omega'_b - \omega_b)|_p = 0$ , ezért meg lehet mutatni, hogy létezik a  $p$  pontnak olyan környezete, amelyben léteznek olyan duális  $\mu_b^{(\alpha)}$  bázisvektormezők, hogy alkalmas, a  $p$  pontban eltűnő  $f_{(\alpha)}$  függvények segítségével az  $\omega'_b - \omega_b$  különbség

$$\omega'_b - \omega_b = \sum_{\alpha=1}^n f_{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)} \quad (3.2.9.)$$

alakba írható. Ekkor a  $p$  pontban

$$\begin{aligned} & \tilde{\nabla}_a\omega'_b - \nabla_a\omega'_b - (\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b) \\ &= \tilde{\nabla}_a(\omega'_b - \omega_b) - \nabla_a(\omega'_b - \omega_b) = \sum_{\alpha=1}^n \left( \tilde{\nabla}_a(f_{(\alpha)}\mu_b^{(\alpha)}) - \nabla_a(f_{(\alpha)}\mu_b^{(\alpha)}) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n f_{(\alpha)} (\tilde{\nabla}_a\mu_b^{(\alpha)} - \nabla_a\mu_b^{(\alpha)}) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.10.)$$

hiszen a  $p$  pontban valamennyi  $f_{(\alpha)}$  függvény eltűnik. Ezzel beláttuk, amit bizonyítani akartunk.

A (3.2.8.) egyenletnek ezek szerint a bal oldala is csak  $\omega_b$ -nek a  $p$  pontban felvett értékétől függ. Ezzel megmutattuk, hogy  $\tilde{\nabla}_b - \nabla_b$  a  $p$  pontban vett duális vektorok terének leképezését definiálja az ezen pontban vett  $(0, 2)$ -típusú tenzorok terére, továbbá az 1. tulajdonság alapján ez a leképezés lineáris. Ezért  $\tilde{\nabla}_b - \nabla_b$  egy  $(1, 2)$  típusú  $C^c_{ab}$  tenzort definiál a  $p$  pontban,

$$\tilde{\nabla}_a\omega_b = \nabla_a\omega_b + C^c_{ab}\omega_c, \quad (3.2.11.)$$

avagy átrendezés után

$$\nabla_a\omega_b = \tilde{\nabla}_a\omega_b - C^c_{ab}\omega_c. \quad (3.2.12.)$$



Ez azonban bármely  $p$  pontban elmondható, úgyhogy  $C_{ab}^c$  tenzormező. Ez az összefüggés fejezi ki, hogy két különböző deriválási operátor duális vektormezőkre vett hatásában milyen módon különbözhet. A  $C_{ab}^c$  tenzor az  $a$  és  $b$  indexekben szimmetrikus,  $C_{ab}^c = C_{ba}^c$ . A  $C_{ab}^c$  tenzort **konnexiónak** nevezzük.

Válasszuk speciálisan  $\omega_b$ -t  $\omega_b = \tilde{\nabla}_b f = \nabla_b f$ -nek, ahol  $f \in \mathcal{F}$  tetszőleges. Ekkor

$$\nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - C_{ab}^c \nabla_c f \quad (3.2.13.)$$

adódik. Itt  $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f$  és  $\nabla_a \nabla_b f$  is szimmetrikus, ha megköveteljük a torziómentességet, úgyhogy ebből következik a kívánt tulajdonság.

A (3.2.12.) reláció, a Leibnitz-szabály és a 4. tulajdonság meghatározza a deriválási operátorok közti különbséget vektormezőkre, ill. bármely más tenzormezőre való hatásukban. Legyen  $t^a$  sima vektormező, ekkor

$$\nabla_a t^b = \tilde{\nabla}_a t^b + C_{ac}^b t^c. \quad (3.2.14.)$$

Mivel tetszőleges  $\omega$  duális vektormező esetén  $\omega_b t^b$  skalármező, ezért írhatjuk a 4. tulajdonság következményeként, hogy

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(\omega_b t^b) = 0, \quad (3.2.15.)$$

ahonnan a Leibnitz-szabály és a (3.2.12.) összefüggés segítségével

$$0 = C_{ab}^c \omega_c t^b + \omega_b (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b = \omega_b [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b + C_{ac}^b t^c] \quad (3.2.16.)$$

$\forall \omega_b$ , úgyhogy innen következik a (3.2.14.) reláció.

Hasonlóan kaphatjuk meg tetszőleges tenzorra való hatásában a deriválási operátorok különbségét. Legyen  $T \in \mathcal{T}(k, l)$  tetszőleges sima tenzormező, ekkor

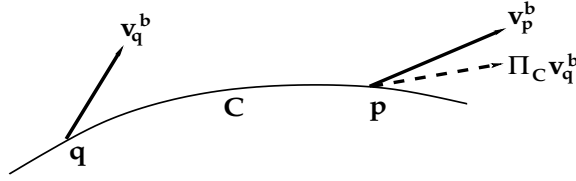
$$\begin{aligned} \nabla_a T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} &= \tilde{\nabla}_a T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \\ &+ \sum_{i=1}^k C_{ac}^{a_i} T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_{j=1}^l C_{ab_j}^c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}, \end{aligned} \quad (3.2.17.)$$

ahol a jobboldali első és második összegben a kontrakció rendre az  $i$ -edik és a  $j$ -edik tenzorindexre vonatkozik. A (3.2.12.), (3.2.14.) és (3.2.17.) összefüggések azt mutatják, hogy a  $C_{ab}^c$  tenzor teljesen meghatározza a deriválási operátorok közötti lehetséges különbséget a különböző típusú tenzorokra való hatásukban. Ezért rendkívül nagy a deriválási operátor megválasztásában a szabadságunk, hiszen a konnexiónak minden pontban  $n \frac{1}{2} n(n+1)$  független komponense van. Szokásos az a választás, amikor  $\tilde{\nabla}_a$ -t valamely lokális koordinátarendszerben a közönséges deriválási operátornak választjuk, ekkor a  $C_{ab}^c$ -t **Christoffel**<sup>27</sup> **-szimbólumnak** nevezzük és  $\Gamma_{ab}^c$ -vel jelöljük. Ekkor például a (3.2.14.) összefüggés

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma_{ac}^b t^c \quad (3.2.18.)$$

---

<sup>27</sup>Elvin Bruno Christoffel, német matematikus és fizikus, 1829-1900



5. ábra. A  $\delta v^b|_p = v_p^b - \Pi_C v_q^b = t^a \nabla_a v^b|_p \delta \lambda$  különbség méri, hogy a  $C$  görbe környezetében értelmezett  $v^b$  vektormező a görbe mentén mennyire tér el a  $v_p^b$  vektor görbementi párhuzamos eltolásával kapott vektormezőtől.

alakot ölt, a (3.2.12.) egyenlőség pedig

$$\nabla_a \omega_b = \partial_a \omega_b - \Gamma_{ab}^c \omega_c \quad (3.2.19.)$$

alakot.

**Megjegyzés:** A (3.2.18.) és (3.2.19.) egyenlőségek jobb oldalának első tagja nem a tenzorkomponensek transzformációs szabálya szerint változik, ha áttérünk másik lokális koordinátarendszerre. Ez azzal kapcsolatos, hogy amikor koordinátarendszert váltunk, akkor a  $\partial_a$  operátorról áttérünk a másik  $\partial'_a$  operátorra. Ugyanakkor az egyenlőségek bal oldalán álló tenzorok komponensei a tenzorkomponensek transzformációs szabályai szerint változnak. Ez azt kell jelentse, hogy **a Christoffel-szimbólumoknak szintén koordinátarendszer-függő az értelmezésük:** amikor koordinátarendszert váltunk, akkor a  $\Gamma_{ab}^c$  tenzorról is át kell térjünk az új  $\Gamma'_{ab}^c$  tenzorra. A Christoffel-szimbólumok komponenseinek azonban a koordinátatranszformációk során úgy kell változniuk – nem tenzorkomponensek transzformációs szabályai szerint, hogy a két, jobb oldalon álló és nem szabályosan transzformálódó tag összege már kövesse a tenzorkomponensek transzformációs szabályát.

### 3.3. Párhuzamos eltolás

A kovariáns deriválás operátorának segítségével most definiáljuk vektoroknak a görbementi párhuzamos eltolását.

**Definíció:** Legyen  $C$  egy sima görbe és  $t^a$  a görbe érintővektora. Akkor mondjuk, hogy a  $C$  görbe pontjaiban adott  $v^a$  **vektor párhuzamosan van eltolva a  $C$  görbe mentén**, ha fennáll a

$$t^a \nabla_a v^b = 0 \quad (3.3.1.)$$

egyenlőség a görbe mentén.

Ez geometriailag a következőt jelenti. Legyen  $p$  a  $C$  görbe  $t$  paraméterű pontja,  $q$  pedig a  $t - dt$  paraméterű pontja, továbbá  $\Pi_C(q \rightarrow p)v_q^b$  a  $q$  pontban értelmezett  $v_q^b$  vektor párhuzamos eltoltja a  $C$  görbe mentén  $q$ -ból  $p$ -be,  $v_p^b$  pedig a vektormező

értéke a  $p$  pontban. Általában  $v_p^b - \Pi_C(q \rightarrow p)v_q^b = t^a \nabla_a v^b|_p dt$ . Tehát  $t^a \nabla_a v^b$  azt méri, hogy a  $v^b$  vektormező vektorai mennyire nem egymás párhuzamos eltoltsai. Ha tehát a (3.3.1.) egyenlőség fennáll valamely  $C$  görbe mentén, akkor a  $v^a$  vektormező vektorai a görbe mentén egymásból a görbe mentén történő párhuzamos eltolással kaphatók meg.

Általánosabban, tetszőleges  $T$  tenzor párhuzamosan van eltolva a  $C$  görbe mentén, ha

$$t^a \nabla_a T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = 0 \quad (3.3.2.)$$

teljesül a görbe mentén.

Ha lokális koordinátarendszert választunk, akkor a (3.3.1.) egyenlet

$$t^a \partial_a v^b + t^a \Gamma^b_{ac} v^c = 0 \quad (3.3.3.)$$

alakot ölt, amelyet komponensekben kiírva

$$\frac{dv^\nu}{dt} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} t^\mu v^\lambda = 0 \quad (3.3.4.)$$

adódik, ahol  $dv^\nu/dt = (\partial v^\nu/\partial x^\mu)(dx^\mu/dt)$  és  $x^\mu = x^\mu(t)$  a  $C$  görbe paraméteres egyenlete.

A geometriai jelentés alapján a vektormező  $q$ -ban vett vektorának  $p$ -be történő párhuzamos eltolása a

$$\Pi_C(q \rightarrow p)v_q^b = v_p^b - t^a \nabla_a v^b|_p dt \quad (3.3.5.)$$

vektort eredményezi a  $p$  pontban. A lokális  $x^\mu$  koordinátarendszerben tehát a párhuzamosan eltoló vektor komponensei

$$\begin{aligned} \Pi_C(q \rightarrow p)v_q^\nu &= v^\nu(x(t)) - \left( \frac{dv^\nu}{dt} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} t^\mu v^\lambda \right) dt \\ &= v^\nu(x(t)) - \left( v^\nu(x(t)) - v^\nu(x(t-dt)) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda dx^\mu \right) \\ &= v^\nu(x(t-dt)) - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda dx^\mu. \end{aligned} \quad (3.3.6.)$$

### Megjegyzés:

1. A párhuzamos eltolást így a görbe mentén adott vektorokra értelmeztük, hiszen az nem függ csak  $v^a$ -nak a görbe mentén felvett értékeitől.
2. A közönséges elsőrendű differenciálegyenletek elméletéből azt is tudjuk, hogy ha a görbe egy pontjában adott a  $v^a$  vektor, akkor a görbe mentén párhuzamosan eltoló vektorra vonatkozó differenciálegyenletnek egyértelműen létezik a megoldása.

3. Az előző két megjegyzés alapján lehetőségünk van arra, hogy azonosítsuk, azaz egymásra leképezzük a sokaság  $p \in M$  és  $q \in M$  pontjaiban vett  $V_p$  és  $V_q$  érintőtereket, ha van olyan  $C$  görbe, amely összeköti a  $p$  és a  $q$  pontot. Ez az azonosítás függ attól, hogy melyik, a  $p$ -t  $q$ -val összekötő görbe mentén végezzük a párhuzamos eltolást. Az érintőterek ilyen, görbefüggő azonosításával a sokaságon nyert járulékos matematikai strukturát **konnexiónak** nevezzük.

A deriválási operátor végtelen sokféleképpen megválasztható, és ennek következtében végtelen sokféle párhuzamos eltolás képzelhető el, amelyek közül a sokaság nem tüntet ki egyet sem. Ha azonban értelmezve van a sokaságon a  $g_{ab}$  **metrika**, akkor az **kitüntetett egyetlen deriváló operátort és ezáltal egyetlen párhuzamos eltolást**. Az a kitüntetett párhuzamos eltolás, amely változatlanul hagyja a vektorok skalárszorzatát. Ha adottak a tetszőleges  $v^a$  és  $w^a$  párhuzamosan eltoló vektorok a  $C$  görbe mentén, akkor a metrika által kitüntetett párhuzamos eltolás olyan, hogy

$$t^a \nabla_a (g_{bc} v^b w^c) = 0. \quad (3.3.7.)$$

Felhasználva, hogy a párhuzamosan eltoló vektorokra  $t^a \nabla_a v^b = 0$  és  $t^a \nabla_a w^c = 0$ , az adódik, hogy

$$t^a v^b w^c \nabla_a g_{bc} = 0. \quad (3.3.8.)$$

Ez az összefüggés akkor és csak akkor áll fenn tetszőleges  $C$  görbe, és annak mentén párhuzamosan eltoló tetszőleges  $v^a$  és  $w^a$  vektorokra, ha

$$\nabla_a g_{bc} = 0. \quad (3.3.9.)$$

Ezért a metrika által kitüntetett kovariáns derivált az 1.-5. követelmények mellett még annak a követelménynek is eleget kell tennie, hogy a metrika kovariáns deriváltja zérus.

**3.1.1. tétel:** Ha adott a  $g_{ab}$  metrika, akkor egyetlen olyan  $\nabla_a$  deriváló operátor létezik, amelyre  $\nabla_a g_{bc} = 0$ . Ha  $\tilde{\nabla}_a$ -t valamely  $\psi$  koordinátarendszerhez tartozó közönséges parciális deriválás  $\partial_a$  operátorának választjuk, akkor a metrika által indukált  $\nabla_a$  operátort a metrikával

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \quad (3.3.10.)$$

alakban kifejezett Christoffel-szimbólum határozza meg, amelynek komponenseit

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_\sigma g^{\rho\sigma} \left( \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (3.3.11.)$$

a metrikus tenzor komponensei és azoknak első parciális deriváltjai egyértelműen meghatározzák.

A tétel bizonyításához válasszuk  $\tilde{\nabla}_a$ -t valamely koordinátarendszerhez tartozó közönséges  $\partial_a$  deriváló operátornak. Ezután meghatározzuk  $C_{ab}^c$ -t úgy, hogy a  $\tilde{\nabla}_a$  és  $C_{ab}^c$  által meghatározott  $\nabla^a$  deriváló operátor elégítse ki a  $\nabla_a g_{bc} = 0$  feltételt. Ehhez  $C_{ab}^c$ -nek olyannak kell lennie a (3.2.17.) egyenlőség szerint, hogy

$$0 = \nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C_{ab}^d g_{dc} - C_{ac}^d g_{bd}, \quad (3.3.12.)$$

azaz

$$C_{cab} + C_{bac} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} \quad (3.3.13.)$$

teljesüljön. Az  $a, b$  indexek felcserélése, majd ezután a  $b$  és  $c$  indexek további felcserélése további összefüggéseket eredményez:

$$C_{cba} + C_{abc} = \tilde{\nabla}_b g_{ac}, \quad (3.3.14.)$$

$$C_{bca} + C_{acb} = \tilde{\nabla}_c g_{ab}. \quad (3.3.15.)$$

Adjuk össze a (3.3.13.) és (3.3.14.) egyenletek megfelelő oldalait, majd vonjuk ki ezekből a (3.3.15.) egyenlet megfelelő oldalait és használjuk fel, hogy  $C_{cab} = C_{cba}$ , ekkor

$$2C_{cab} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ac} - \tilde{\nabla}_c g_{ab} \quad (3.3.16.)$$

adódik, ahonnan

$$C_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\tilde{\nabla}_a g_{bd} + \tilde{\nabla}_b g_{ad} - \tilde{\nabla}_d g_{ab}). \quad (3.3.17.)$$

Ezzel a  $C_{ab}^c$ -vel  $\nabla_a g_{bc} = 0$  és látjuk azt is, hogy  $C_{ab}^c$ -t a metrika és első deriváltjai egyértelműen meghatározzák.

### 3.4. A görbületi tenzor

Az előzőekben megmutattuk, hogy ha adott a kovariáns deriválás operátora, akkor jól definiált az is, hogy mit értünk egy  $v \in V_p$  vektornak valamely  $C$  görbe mentén a  $p$  pontból a  $q$  pontba történő párhuzamos eltolásán. Azt is láttuk, hogy az eltolás eredménye, azaz hogy a párhuzamos eltolás, mint leképezés a  $V_q$  érintőtér melyik vektorát eredményezi, attól is függ, hogy az eltolást melyik, a  $p$  pontot a  $q$  ponttal összekötő  $C$  görbe mentén végezzük. Ennek az lesz a következménye, hogy ha egy vektort párhuzamosan eltolunk egy zárt görbe mentén a  $p$  pontból ugyanebbe a  $p$  pontba, akkor általában nem az eredeti vektort kapjuk vissza. Az eltérés a vektor és párhuzamos eltoltja között (zárt görbe menti eltolás esetén mindkettő  $V_p$  eleme) jellemzi a sokaság görbültségét. Ennek kvantitatív jellemzéséhez úgy jutunk, hogy először értelmezzük a Riemann-féle görbületi tenzort annak alapján, hogy két egymást követő kovariáns deriválás végrehajtása valamely duális vektormezőn mennyire különböző eredményre vezet, ha felcseréljük a deriválások sorrendjét. Ezután megmutatjuk, hogy az így definiált Riemann-féle görbületi tenzor azt is meghatározza, hogy vektornak infinitezimális zárt görbe mentén történő párhuzamos eltolása az eredeti vektorhoz képest mennyire különböző vektort eredményez.

Legyen  $\nabla_a$  a kovariáns deriválás operátora,  $\omega_a$  tetszőleges duális vektormező és  $f$  tetszőleges sima függvény. Határozzuk meg két egymást követő kovariáns deriválás hatását az  $f\omega_a$  duális vektormezőre:

$$\begin{aligned}\nabla_a \nabla_b (f\omega_c) &= \nabla_a (\omega_c \nabla_b f + f \nabla_b \omega_c) \\ &= (\nabla_a \nabla_b f) \omega_c + (\nabla_b f) \nabla_a \omega_c + (\nabla_a f) \nabla_b \omega_c + f \nabla_a \nabla_b \omega_c, \quad (3.4.1.)\end{aligned}$$

majd fordított sorrendben

$$\nabla_b \nabla_a (f\omega_c) = (\nabla_b \nabla_a f) \omega_c + (\nabla_a f) \nabla_b \omega_c + (\nabla_b f) \nabla_a \omega_c + f \nabla_b \nabla_a \omega_c. \quad (3.4.2.)$$

Vonjuk ki a két egyenlet megfelelő oldalait egymásból és használjuk ki a torziómentességet, ekkor

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f\omega_c) = f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c \quad (3.4.3.)$$

adódik. Hasonló érveléssel, mint amelyet a deriváló operátorok vizsgálata során alkalmaztunk, be lehet látni, hogy  $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c$  értéke valamely  $p$  pontban csak  $\omega_c$  ezen pontban felvett értékétől függ, mégpedig lineárisan. Ezért létezik olyan  $R_{abc}{}^d$  tenzor, amelynek segítségével a kovariáns deriváltak kommutátorának hatása a duális vektormezőre

$$[\nabla_a, \nabla_b]\omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad (3.4.4.)$$

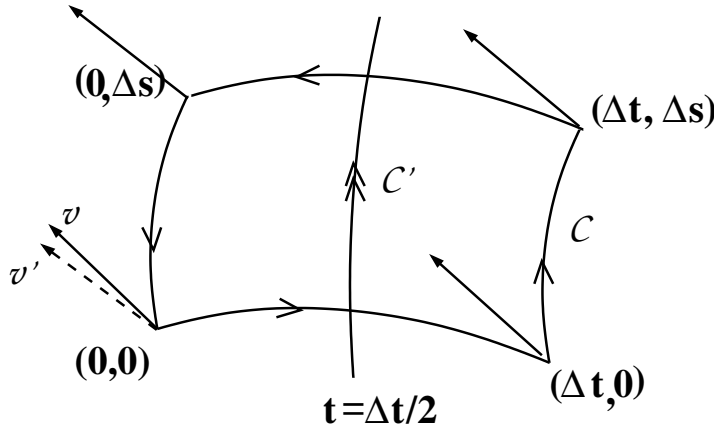
alakba írható. Itt  $R_{abc}{}^d$  a **Riemann-féle görbületi tenzor**. Érdemes megjegyezni, hogy az  $a$  és  $b$  indexek a sokaságon értelmezett  $\psi$  lokális koordinátarendszernek megfelelő indexek, ugyanakkor a  $c$  és  $d$  indexek rendre a  $V_p$  érintőtérben és a  $V_p^*$  duális vektortérben használt (a  $\psi$  lokális térképhez tartozó) bázisok szerinti indexek.

**Megjegyzés:** A levezetés során a (3.4.3.) összefüggés adódott, ami biztosítja, hogy a (3.4.4.) egyenlőség duális vektoroknak tetszőleges sima függvényekkel képezett lineáris kombinációjára is fennáll.

Most megmutatjuk, hogy az  $R_{abc}{}^d$  Riemann-féle görbületi tenzor azt is meghatározza, hogy mennyire kapunk az eredeti vektortól különböző vektort, ha egy vektort infinitezimális zárt görbe mentén párhuzamosan eltolunk. A következőképpen járunk el. Tekintsünk a  $p \in M$  ponton átmenő tetszőleges 2-dimenziós  $S$  felületet. Legyenek ezen a koordináták  $t$  és  $s$  olyanok, hogy  $t = s = 0$  felel meg a  $p$  pontnak. Tekintsük ezután a  $(0, 0)$ ,  $(\Delta t, 0)$ ,  $(\Delta t, \Delta s)$ ,  $(0, \Delta s)$  pontok által kijelölt infinitezimális paralelogrammát ( $\Delta t$ ,  $\Delta s$  infinitezimális), amelynek oldalai által meghatározott infinitezimális zárt görbe mentén a  $v^a$  vektort párhuzamosan eltoljuk (ld. 6. ábra). Azt fogjuk megmutatni, hogy **az infinitezimális zárt görbe mentén történő párhuzamos eltolás során a  $v^a$  vektor megváltozása**

$$\delta v^a = \Delta t \Delta s v^d T^c S^b R_{cd}{}^a, \quad (3.4.5.)$$

ahol  $T^a$  és  $S^a$  rendre az  $s = \text{áll.}$  és  $t = \text{áll.}$  koordinátavonalak érintővektorai.



6. ábra. A  $v$  vektor párhuzamos eltolása infinitezimális zárt  $C$  görbe mentén, a vektor és párhuzamos eltoltja közti különbség  $\delta v = v' - v$ .

Legyen továbbá  $\omega_a$  tetszőleges duális vektormező. Vizsgáljuk meg, hogyan változik az  $\omega_a v^a$  skalár a  $v^a$  vektor párhuzamos eltolása során. Legyen rendre ez a megváltozás  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  a zárt görbe  $(0,0) - (\Delta t, 0), (\Delta t, 0) - (\Delta t, \Delta s), (\Delta t, \Delta s) - (0, \Delta s), (0, \Delta s) - (0, 0)$  szakaszain. Jelölje rendre  $T^a$  és  $S^a$  az  $s = \text{const.}$  és a  $t = \text{const.}$  koordinátavonalak érintővektorait. Ekkor jó közelítéssel

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \Delta t \frac{\partial}{\partial t} (\omega_a v^a) \Big|_{(\Delta t/2, 0)} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \\
 &= \Delta t (T^b \nabla_b) (\omega_a v^a) \Big|_{(\Delta t/2, 0)} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \\
 &= \Delta t \left[ v^a (T^b \nabla_b) \omega_a + \omega_a (T^b \nabla_b) v^a \right] \Big|_{(\Delta t/2, 0)} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \\
 &= \Delta t \left[ v^a (T^b \nabla_b) \omega_a \right] \Big|_{(\Delta t/2, 0)} + \mathcal{O}((\Delta t)^2), \tag{3.4.6}
 \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a kovariáns deriválás 4. tulajdonságát, a Leibnitz-szabályt, és azt, hogy a görbe mentén párhuzamosan eltolott vektornak a görbe érintőjének irányában vett iránymenti deriváltja zérus. Hasonlóan adódik, hogy

$$\delta_3 = -\Delta t \left[ v^a (T^b \nabla_b) \omega_a \right] \Big|_{(\Delta t/2, \Delta s)} + \mathcal{O}((\Delta t)^2), \tag{3.4.7}$$

ahol a mínusz előjel a jobb oldalon azt veszi figyelembe, hogy az  $s = \Delta s$  koordinátavonalon ellentétes irányban haladunk, mint az  $s = 0$  koordinátavonalon tettük. Adjuk össze ezt a két megváltozást:

$$\delta_1 + \delta_3 = \Delta t \left[ v^a (T^b \nabla_b) \omega_a \Big|_{(\Delta t/2, 0)} - v^a (T^b \nabla_b) \omega_a \Big|_{(\Delta t/2, \Delta s)} \right]. \tag{3.4.8}$$

Hasonló kifejezést kapunk  $(\delta_2 + \delta_4)$ -re:

$$\delta_2 + \delta_4 = \Delta s \left[ v^a (S^b \nabla_b) \omega_a \Big|_{(\Delta t/2, \Delta s/2)} - v^a (S^b \nabla_b) \omega_a \Big|_{(0, \Delta s/2)} \right]. \tag{3.4.9}$$

Látjuk, hogy ha  $\Delta s \rightarrow 0$ , akkor a (3.4.8.) kifejezés első rendben eltűnik. Hasonlóképpen a (3.4.9.) kifejezés is elsőrendben eltűnik, ha  $\Delta t \rightarrow 0$ . A párhuzamos eltolás tehát  $\Delta t$ -ben és  $\Delta s$ -ben első rendben nem jelent változást.

Határozzuk meg azonban  $(\delta_1 + \delta_3)$ -at másodrendű pontossággal. Ehhez meg kell határozni a (3.4.8.) egyenlet jobb oldalán a szögletes zárójelben álló kifejezést  $\Delta s$ -ben elsőrendű pontossággal. Képzeljük el ehhez, hogy a  $v|_{(\Delta t/2, \Delta s)}$  vektor a  $v|_{(\Delta t/2, 0)}$  vektorból a  $t = \Delta t/2$  görbe (a 6. ábrán a  $C'$  görbe) mentén történő párhuzamos eltolással adódik. Ekkor azonban  $v|_{(\Delta t/2, \Delta s)} = v|_{(\Delta t/2, 0)} + \mathcal{O}((\Delta s)^2)$ , mert a párhuzamos eltolás első rendben nem függ a görbétől, amely mentén végeztük. Ugyanakkor  $T^b \nabla_b \omega_a|_{(\Delta t/2, \Delta s)}$  a párhuzamos eltolástól (ami első rendben  $T^b \nabla_b \omega_a|_{(\Delta t/2, 0)}$ -vel azonos)  $\Delta s S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a)|_{(\Delta t/2, 0)}$ -vel különbözik,

$$T^b \nabla_b \omega_a|_{(\Delta t/2, \Delta s)} = T^b \nabla_b \omega_a|_{(\Delta t/2, 0)} + \Delta s S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a)|_{(\Delta t/2, 0)}. \quad (3.4.10.)$$

Ezért azt kapjuk, hogy

$$\delta_1 + \delta_3 = -\Delta t \Delta s v^a S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a) \quad (3.4.11.)$$

másodrendű pontossággal, ahol a jobboldali kifejezést vehetjük a  $(0, 0)$  pontban, azaz a  $p$  pontban. Teljesen hasonlóan adódik, hogy

$$\delta_2 + \delta_4 = \Delta t \Delta s v^a T^c \nabla_c (S^b \nabla_b \omega_a). \quad (3.4.12.)$$

Az  $\omega_a v^a$  skalár megváltozása tehát a  $v^a$  vektornak az infinitezimális zárt görbe mentén történő eltolása során

$$\begin{aligned} \delta(\omega_a v^a) &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \\ &= \Delta t \Delta s v^a \left( T^c \nabla_c (S^b \nabla_b \omega_a) - S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a) \right) \\ &= \Delta t \Delta s v^a \left[ T^c S^b [\nabla_c, \nabla_b] \omega_a + \left( T^c (\nabla_c S^b) - S^c (\nabla_c T^b) \right) \nabla_b \omega_a \right]. \end{aligned} \quad (3.4.13.)$$

Itt a jobb oldalon a kerekzárójeles kifejezés éppen koordináta-bázisvektorok kommutátora

$$T^c (\nabla_c S^b) - S^c (\nabla_c T^b) = [T, S]^b = 0, \quad (3.4.14.)$$

amely mindig zérus, hiszen koordináta-bázisvektorok mindig felcserélhetők. Ezt is figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\delta(\omega_a v^a) = \Delta t \Delta s v^a T^c S^b [\nabla_c, \nabla_b] \omega_a. \quad (3.4.15.)$$

A Riemann-féle görbületi tenzor segítségével írhatjuk azonban, hogy

$$[\nabla_c, \nabla_b] \omega_a = R_{cba}{}^d \omega_d \quad (3.4.16.)$$

tetszőleges  $\omega_a$  duális vektormező esetén. Végül tehát

$$\delta(\omega_a v^a) = \Delta t \Delta s v^a T^c S^b R_{cba}{}^d \omega_d \quad (3.4.17.)$$

adódik, ami tetszőleges  $\omega_a$  duális vektormezőre akkor és csak akkor állhat fenn ( $\Delta t$ -ben és  $\Delta s$ -ben másodrendű pontossággal), ha az infinitezimális zárt görbe mentén történő párhuzamos eltolás során a  $v^a$  vektor megváltozása

$$\delta v^a = \Delta t \Delta s v^d T^c S^b R_{cbd}{}^a, \quad (3.4.18.)$$



ami éppen a keresett (3.4.5.) összefüggés.

A (3.4.5.) egyenlőség közvetlenül mutatja, hogy a görbületi tenzor meghatározza azt, hogy egy vektort infinitezimális zárt görbe mentén párhuzamosan eltolva, az eredményül kapott vektor mennyire tér el az eredeti vektortól. A levezetésből az is kiderült, hogy ez az eltérés abból adódik, hogy két egymás után végrehajtott kovariáns deriválás a duális vektormezőkre vett hatásában mennyire nem felcserélhető.

**Állítás:** A kovariáns deriválások operátorai kommutátorának hatása  $t^a$  sima vektormezőre:

$$[\nabla_a, \nabla_b]t^c = -R_{abd}{}^c t^d. \quad (3.4.19.)$$

Legyen  $\omega_a$  tetszőleges duális vektormező. Ekkor a torziómentesség feltétele alapján

$$\begin{aligned} 0 &= [\nabla_a, \nabla_b](t^c \omega_c) \\ &= \nabla_a(\omega_c \nabla_b t^c + t^c \nabla_b \omega_c) - \nabla_b(\omega_c \nabla_a t^c + t^c \nabla_a \omega_c) \\ &= \omega_c [\nabla_a, \nabla_b]t^c + t^c [\nabla_a, \nabla_b]\omega_c, \end{aligned} \quad (3.4.20.)$$

ahonnan

$$\omega_c [\nabla_a, \nabla_b]t^c = -t^c R_{abc}{}^d \omega_d \quad (3.4.21.)$$

áll fenn tetszőleges duális vektormezőre, úgyhogy innen következik a bizonyítani kívánt összefüggés.

**Állítás:** Teljes indukcióval belátható, hogy a kovariáns deriválások operátorai kommutátorának hatása tetszőleges tenzormezőre:

$$[\nabla_a, \nabla_b]T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} = -\sum_{i=1}^k R_{abc}{}^d T^{a_1 \dots c \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} + \sum_{j=1}^l R_{abb_j}{}^c T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots c \dots b_l}. \quad (3.4.22.)$$

A Riemann-féle görbületi tenzor néhány fontos tulajdonsággal rendelkezik:

1. Az első két indexében (a sokaság-indexekben) antiszimmetrikus:

$$R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d. \quad (3.4.23.)$$

Ez közvetlenül kiolvasható a Riemann-tenzort definiáló (3.4.4.) egyenlőségből.

- 2.

$$R_{[abc]}{}^d = 0. \quad (3.4.24.)$$

Először belátjuk, hogy  $\forall \omega_c$  tenzormező esetén

$$\nabla_{[a} \nabla_b \omega_c] = 0. \quad (3.4.25.)$$

Valóban,  $T_{bc} \equiv \nabla_b \omega_c = \partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \omega_d$  és

$$\nabla_a T_{bc} = \partial_a T_{bc} - \Gamma_{ab}^e T_{ec} - \Gamma_{ac}^e T_{be} \quad (3.4.26.)$$

miatt

$$\begin{aligned} \nabla_a T_{bc} &= \partial_a \partial_b \omega_c - (\partial_a \Gamma_{bc}^d) \omega_d - \Gamma_{bc}^d \partial_a \omega_d - \Gamma_{ab}^e (\partial_e \omega_c - \Gamma_{ec}^d \omega_d) \\ &= \partial_a \partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \partial_a \omega_d - \Gamma_{ab}^e \partial_e \omega_c - (\partial_a \Gamma_{bc}^d) \omega_d + \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d \omega_d, \end{aligned} \quad (3.4.27.)$$

és ennek a kifejezésnek a teljes antiszimmetrizáltja zérusnak adódik, ha felhasználjuk, hogy a közönséges parciális deriváltak sorrendje felcserélhető, és hogy  $\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c$ . (A belátott (3.4.25.) azonosság lényegében a  $d^2 \omega = \nabla \wedge (\nabla \wedge \omega) = 0$  azonosság, ami a differenciálformákra vonatkozó általános érvényű azonosság speciális esete, amikor  $\omega$  1-forma.)

Ekkor viszont írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= 2\nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} = \nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} - \nabla_{[b} \nabla_a \omega_{c]} \\ &= R_{[abc]}^d \omega_d, \end{aligned} \quad (3.4.28.)$$

amit bizonyítani akartunk.

3. Ha a  $\nabla_a$  deriválási operátor a metrikához természetes módon hozzárendelt kovariáns deriválás operátora, azaz olyan, amelyre  $\nabla_a g_{bc} = 0$ , akkor

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \quad (3.4.29.)$$

(antiszimmetria az érintőtérhez tartozó indexekben).

Ez az azonosság a (3.4.20.) szabályból következik, ha azt a  $g_{ab}$  metrikára alkalmazzuk:

$$0 = [\nabla_a, \nabla_b] g_{cd} = R_{abc}^e g_{ed} + R_{abd}^e g_{ce} = R_{abcd} + R_{abdc}, \quad (3.4.30.)$$

ami éppen a bizonyítani kívánt tulajdonság.

4. Teljesül a Bianchi<sup>28</sup>-azonosság:

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}^e = 0. \quad (3.4.31.)$$

Alkalmazzuk a (3.4.20.) szabályt duális vektormező kovariáns deriváltjára:

$$[\nabla_a, \nabla_b](\nabla_c \omega_d) = R_{abc}^e (\nabla_e \omega_d) + R_{abd}^f (\nabla_c \omega_f). \quad (3.4.32.)$$

Másrésről írhatjuk, hogy

$$\nabla_a [\nabla_b, \nabla_c] \omega_d = \nabla_a (R_{bcd}^e \omega_e) = \omega_e \nabla_a R_{bcd}^e + R_{bcd}^e \nabla_a \omega_e. \quad (3.4.33.)$$

Antiszimmetrizáljunk most az  $a, b, c$  indexek tekintetében mind a (3.4.32.), mind a (3.4.33.) egyenlőség mindkét oldalán. Ekkor az egyenletek bal oldalai meg fognak egyezni. A jobb oldalak egyenlősége pedig az alábbi azonosságot eredményezi:

$$R_{[abc]}^e (\nabla_e \omega_d) + R_{[ab|d]}^f (\nabla_c \omega_f) = \omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}^e + R_{[bc|d]}^e \nabla_a \omega_e. \quad (3.4.34.)$$

---

<sup>28</sup>Luigi Bianchi, olasz matematikus, 1856-1928

A függőleges elválasztóvonalak azt jelölik, hogy  $d$ -re nem antiszimetrizálunk. A baloldali első tag a Riemann-tenzor 2. tulajdonsága miatt zérus. A második tagok a két oldalon éppen megegyeznek és kiejtik egymást. Ezért végül a

$$0 = \omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e \quad (3.4.35.)$$

azonosságot kapjuk tetszőleges  $\omega_a$  1-formamezőre. Ez éppen a bizonyítani akart azonosság érvényességét jelenti.

A Riemann-féle  $R_{abcd}$  görbületi tenzor egyértelműen felbontható egy zérus spúrú  $C_{abcd}$  és egy nem zérus spúrú tenzor összegére. Ehhez először bevezetjük az  $R_{ab}$  Ricci<sup>29</sup>-tenzort és az  $R$  skalárgörbületet (Gauss-görbületet).

**Definíció: A Ricci-tenzor:**

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b. \quad (3.4.36.)$$

**Következmény: A Ricci-tenzor szimmetrikus:**

$$R_{ac} = R_{ca}. \quad (3.4.37.)$$

Valóban, az  $R_{abcd} = R_{cdab}$  tulajdonság következtében

$$R_{ca} = R_{cba}{}^b = g^{bd} R_{cbad} = g^{bd} R_{adcb} = R_{adc}{}^d = R_{ac} \quad (3.4.38.)$$

adódik.

**Definíció: A skalárgörbület a Ricci-tenzor spúrja,**

$$R = R_a{}^a. \quad (3.4.39.)$$

**Állítás:** Az  $n \geq 3$  dimenziós sokaságok esetén a Riemann-tenzor felbontása zérus és nem zérus spúrú tenzorok összegére:

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{n-2} \left( g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a} \right) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b}, \quad (3.4.40.)$$

ahol  $C_{abcd}$  az úgynevezett **Weyl**<sup>30</sup>-tenzor. A Weyl-tenzor spúrja bármely két indexében zérus, és eleget tesz a Riemann-tenzor 1., 2. és 3. tulajdonságának.

**Megjegyzés:** A Weyl-tenzor a metrika konform transzformációi során nagyon egyszerűen transzformálódik és ezért szokás **konform tenzornak** is nevezni.

**Definíció: Az Einstein-tenzort a**

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \quad (3.4.41.)$$

---

<sup>29</sup>Gregorio Ricci-Curbastro, olasz matematikus, 1853-1925

<sup>30</sup>Hermann Klaus Hugo Weyl, német matematikus, fizikus és gondolkodó, 1885-1955

összefüggéssel származtatjuk a Riemann-tenzorból.

**Megjegyzés:** Az Einstein-tenzor nagyon fontos szerepet játszik az általános relativitáselméletben. Segítségével írhatók fel az **Einstein-egyenletek**, amelyek leírják, hogy az anyag mozgásának hatására hogyan változik a téridő-sokaság szerkezete, pontosabban a metrikája.

**Állítás:** Az Einstein-tenzor kovariáns deriváltja azonosan eltűnik,

$$\nabla^a G_{ab} = 0. \quad (3.4.42.)$$

Induljunk ki a Bianchi-azonosságból,  $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0$ , és kontraháljuk az  $a$  és  $e$  indexek tekintetében,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cad}{}^a + \nabla_c R_{abd}{}^a - \nabla_c R_{bad}{}^a - \nabla_b R_{acd}{}^a - \nabla_a R_{cbd}{}^a \\ &= \nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} - \nabla_c R_{bd} + \nabla_b R_{cd} + \nabla_a R_{bcd}{}^a \\ &= 2(\nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd}). \end{aligned} \quad (3.4.43.)$$

Húzzuk fel most a metrikával a  $d$  indexet,

$$0 = \nabla_a R_{bc}{}^{da} + \nabla_b R_c{}^d - \nabla_c R_b{}^d, \quad (3.4.44.)$$

majd kontraháljunk a  $b$  és  $d$  indexek tekintetében. Ekkor megkapjuk a bizonyítani kívánt azonosságot:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_a R_{bc}{}^{ba} + \nabla_b R_c{}^b - \nabla_c R = \nabla_b R_{ac}{}^{ab} + \nabla_b R_c{}^b - \nabla_c R \\ &= 2\nabla^b R_{cb} - \nabla_c R = 2\nabla_b \left( R_{cb} - \frac{1}{2} R g_{cb} \right) = 2\nabla_b G_{cb}, \end{aligned} \quad (3.4.45.)$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$R_{ac}{}^{ab} = g^{ae} g^{bf} R_{acef} = -g^{ae} g^{bf} R_{caef} = -g^{ae} g^{bf} R_{efca} = g^{ae} g^{bf} R_{feca} = g^{bf} R_{fec}{}^e = g^{bf} R_{fc}, \quad (3.4.46.)$$

és hogy  $\nabla_b (g^{bf} R_{fc}) = g^{bf} \nabla_b R_{fc} = \nabla^f R_{fc} = \nabla^b R_{cb}$ , továbbá hogy  $\nabla_a g_{bc} = 0$ .

**Megjegyzés:** A (3.4.42.) azonosság az általános relativitáselméletben, mint az Einstein-egyenletek konzisztenciájának feltétele fog szerepelni.

## 3.5. Geodetikusok

### 3.5.1. A geodetikus fogalma

A görbült sokaságban vannak „kitüntetett görbék”, az úgynevezett **geodetikusok**. Ezek azok a görbék, amelyek a „legkevésbé görbülnek.”

**Definíció: Geodetikusoknak** azokat a görbéket nevezzük, amelyek mentén az érintővektorok megkaphatók egymásból a görbe menti párhuzamos eltolással, azaz amelyek  $T^a$  érintővektorai eleget tesznek a

$$T^a \nabla_a T^b = 0 \quad (3.5.1.)$$

egyenletnek.

**Megjegyzés:** Ha nem ragaszkodunk hozzá, hogy a párhuzamos eltolás során az érintővektor hossza ne változzon, akkor csak azt kell megkövetelni, hogy a görbe tetszőleges  $p$  pontjában az érintővektor párhuzamos legyen azzal a vektorral, amelyet egy tetszőleges másik  $q$  pontban vett érintővektornak a  $p$  pontba történő párhuzamos eltolásával kapunk. Ekkor az egyenlet, amely a görbe geodetikusságának feltétele,

$$T^a \nabla_a T^b = \alpha T^b \quad (3.5.2.)$$

alakra módosul, ahol  $\alpha$  a görbén értelmezett tetszőleges függvény. A (3.5.2.) egyenlet azt fejezi ki, hogy a görbe tetszőleges  $p$  pontjában a  $T_p^a$  érintővektor és a  $p$ -hez infinitezimálisan közeli  $q$  görbe-pontból a  $p$ -be párhuzamosan eltolt  $\Pi T_q^a$  vektor párhuzamosak, de nem azonos hosszúságúak. Meg lehet mutatni, hogy a görbe átparaméterezésével mindig elérhetjük, hogy a (3.5.2.) feltétel a (3.5.1.) alakot öltse. Ha a geodetikust úgy paraméterezzük, hogy egyenlete (3.5.1.) alakot ölt, akkor azt mondjuk, hogy **affin paraméterezést** használunk. A továbbiakban a geodetikusokat affin paraméterükkel fogjuk parametrizálni.

**Állítás:** Írjuk át a geodetikusok egyenletét valamely  $\psi$  koordinátarendszerben koordinátakomponensekre vonatkozó egyenletté. Legyen a geodetikus képe  $\mathbb{R}^n$ -ben  $x^\mu(t)$ . A geodetikusok egyenlete ekkor

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \sum_{\sigma\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \quad (3.5.3.)$$

alakot ölt.

A geodetikusok érintővektoraira vonatkozó egyenlet,

$$0 = T^a (\partial_a T^b + \Gamma^b_{ac} T^c), \quad (3.5.4.)$$

koordinátakomponensekben

$$0 = \frac{dT^\mu}{dt} + \sum_{\sigma,\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} T^\sigma T^\nu, \quad (3.5.5.)$$

ahol felhasználtuk a kovariáns deriváló operátor 3. tulajdonságát. A  $\psi$  koordinátarendszerben az érintővektor komponensei  $T^\mu = dx^\mu/dt$ , úgyhogy azonnal adódik a geodetikusok egyenletének (3.5.3.) alakja.

**Állítás:** A geodetikusok affin paramétere nem egyértelmű. Ha  $t$  affin paraméter, akkor bármely  $t' = at + b$  is affin paraméter, ahol  $a, b$  valós állandók.

Ez annak a következménye, hogy a geodetikusok egyenletében csak  $x^\mu(t)$  első és második deriváltja szerepel,

$$\frac{dx^\mu}{dt} = a \frac{dx^\mu}{dt'}, \quad \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 x^\mu}{dt'^2}, \quad (3.5.6.)$$

úgyhogy a geodetikus egyenlete az új paraméterben is az eredeti alakú marad egy  $a^2$  állandó szorzótól eltekintve.

A geodetikusok (3.5.3.) egyenlete közönséges másodrendű differenciálegyenlet az  $x^\mu(t)$  komponensfüggvények együttesére. Ennek egyértelműen létezik a megoldása, ha a görbe valamely pontja és abban a pontban a görbe érintővektora adott. Ez a következőt jelenti:

**Állítás:** A sokaság bármely  $p \in M$  pontján áthalad pontosan egy olyan geodetikus, amelynek érintője a  $p$  pontban a tetszőlegesen választott  $T^a|_p \in V_p$  érintővektor.

### 3.5.2. Geodetikusok felhasználásával szerkesztett koordinátarendszerek

Ellentétben a lapos, azaz nem görbült sokaságok esetével a sokaság  $p \in M$  pontjában értelmezett érintővektorok nem tekinthetők a sokaság  $p$  pontjából annak más pontjaiba mutató nyilaknak, hanem azok az érintővektorok  $V_p$  terének az elemei. A geodetikusok segítségével azonban leképezhetjük az érintővektorok  $V_p$  terét a sokaságra. Ez az úgynevezett **exponenciális leképezés**, amikor a  $p \in M$  pontban értelmezett  $V_p$  érintőtér tetszőleges  $v_p \in V_p$  vektorához a sokaság azon  $q$  pontját rendeljük, amely a  $p$ -ből induló,  $v_p$  érintővektorú, egyértelműen meghatározott geodetikus mentén fekszik az affin paraméterben mért  $t$  távolságra. Meg lehet mutatni, hogy bármely  $p \in M$  pont esetén a  $V_p$  érintőtér origójának van olyan kis környezete (kellően kis  $t$ -k esete), hogy ez a hozzárendelés létezik és kölcsönösen egyértelmű. A  $V_p$  érintőtérnek, mint  $n$ -dimenziós vektortérnek ez a kis környezete azonosítható  $\mathbb{R}^n$  origó körüli környezetével, és így az exponenciális leképezés segítségével koordinátarendszert vezethetünk be a  $p$  pont környezetében, amelyet **Riemann-féle normálkoordináta-rendszernek** nevezünk. Ebben a koordinátarendszerben a  $p$  pontban (a koordinátarendszer origójában) a Christoffel-szimbólumok eltűnnek. A  $p$  ponttól kellően távol a geodetikusok metszhetik egymást, ezért a koordinátarendszer csak a  $p$  pont megfelelően kis környezetében használható, lokális koordinátarendszer.

Amennyiben a kovariáns derivált a 6. tulajdonságnak is eleget tesz, azaz a metrika által egyértelműen meghatározott kovariáns derivált, akkor a geodetikusok segítségével értelmezhetjük a **Gauss-féle normálkoordinátákat**. Ezek akkor használhatók előnyösen, ha az  $n$ -dimenziós  $M$  sokaságban létezik a beágyazott  $(n-1)$ -dimenziós  $S$  hiperfelületek serege. Ekkor a  $S$  hiperfelület bármely  $p \in S$  pontjában a hiperfelület  $\tilde{V}_p$  érintőtere  $(n-1)$ -dimenziós altere az  $M$  sokaság ugyan-ezen  $p$ -pontban vett  $V_p$  érintőterének. Ezért a nagyságától eltekintve egyértelműen létezik olyan  $n^a \in V_p$  vektor, amely a  $g_{ab}$  metrika szerint ortogonális a  $\tilde{V}_p$  érintőtér minden  $\tilde{v}^a \in \tilde{V}_p$  vektorára,  $g_{ab}\tilde{v}^an^b = 0$ . Ezt az  $n^a$  a vektort az  $S$  **hiperfelület normálisának** nevezzük. Ha a sokaság metrikája Riemann-metrika, akkor  $n^a$  nem lehet benne  $\tilde{V}_p$ -ben,  $n^a \notin \tilde{V}_p$ , és ekkor aszerint, hogy  $n^a$  térszerű vagy időszerű, normálhatjuk rendre  $g_{ab}n^an^b = +1$ , ill.  $= -1$  szerint. Ha a metrika Lorentz-metrika, akkor  $n^a$  lehet nullvektor,  $g_{ab}n^an^b = 0$ , s ilyenkor  $n^a \in \tilde{V}_p$ , és a hiperfelület **nullfelület**. Ha az  $S$  hiperfelület nem nullfelület, akkor a **Gauss-féle**

**normálkoordinátarendszert** a következőképpen értelmezzük. Határozzuk meg az  $S$  hiperfelület minden egyes  $p \in S$  pontjában az adott ponton áthaladó,  $n^a$  érintővektorú  $\gamma_p$  geodetikust. Ezen geodetikuskok és az  $S$  hiperfelület metszéspontjaihoz rendeljük a  $t = 0$  affin paraméterértéket. Vegyünk fel továbbá az  $S$  hiperfelületen (vagy annak egy tartományában) értelmezett  $(x^1, \dots, x^{n-1})$  koordinátákat. Az  $S$  hiperfelület környezetében levő tetszőleges  $q \in M$  ponthoz a következőképpen rendelünk koordinátákat: (a) megkeressük, hogy melyik az a  $\gamma_{p'}$  ( $S$ -re ortogonális) geodetikus, amely  $S$ -et  $p'$ -ben metszi és átmegy  $q$ -n; (b)  $q$ -hoz ugyanazokat az  $(x^1, \dots, x^{n-1})$  koordinátákat rendeljük, mint amelyek  $p' \in S$  megfelelő koordinátái; (c)  $q$ -hoz azt az  $x^n = t$  koordinátaértéket rendeljük, amilyen  $t$  affin paraméterértékhez tartozik  $q \in \gamma_{p'}$ . Ekkor az összes  $q \in M$  pont, amelynek azonos az  $x^n = t$  koordinátája, definiálja az  $S_t$  hiperfelületet. Ekkor mondhatjuk, hogy az  $S$  hiperfelületen értelmezett koordinátákat a leírt módon „átemeltük” az  $S_t$  hiperfelületekre.

**Állítás:** A Gauss-féle normálkoordinátarendszer azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a  $t = 0$  affin paraméterértékhez tartozó  $S$  hiperfelületet annak normálisa irányában metsző geodetikuskok az összes,  $t = \text{áll.}$  affin paraméterértékhez tartozó  $S_t$  hiperfelületre ortogonálisak.

A bizonyításhoz azt kell belátni, hogy a geodetikus érintővektor-mezeje,  $n^a$  ortogonális marad az  $X_1^a, \dots, X_{n-1}^a$  bázisvektor-mezőkre, amelyek kifeszítik  $S_t$  érintőterét. Ehhez elegendő azt belátni, hogy az  $n_a X^a$  skalárszorzat a geodetikuskok mentén történő párhuzamos eltolás során nem változik, azaz, hogy  $n^b \nabla_b (n_a X^a) = 0$ , ahol  $X^a$  az  $X_1^a, \dots, X_{n-1}^a$  vektormezőik bármelyike lehet. A bal oldalon álló kifejezés tovább alakítható,

$$n^b \nabla_b (n_a X^a) = n^b (\nabla_b n_a) X^a + n^b n_a \nabla_b X^a = n^b n_a \nabla_b X^a, \quad (3.5.7.)$$

mert  $n^a$  geodetikus érintővektora, amelyre  $n^b \nabla_b n^a = 0$ . Mivel  $n^a$  és  $X^a$  koordináta-bázisvektorok, azért felcserélhetők,  $0 = [n, X]^a = n^b \nabla_b X^a - X^b \nabla_b n^a$ , úgyhogy

$$n^b \nabla_b (n_a X^a) = n_a n^b \nabla_b (X^a) = n_a X^b \nabla_b n^a. \quad (3.5.8.)$$

Innen a Leibnitz-szabályt alkalmazva és figyelembe véve, hogy az  $n_a n^a = \pm 1$  normálási feltétel megőrződik a  $S_t$  hiperfelület mentén történő párhuzamos eltolások során, az adódik, hogy

$$n^b \nabla_b (n_a X^a) = \frac{1}{2} X^b \nabla_b (n_a n^a) = 0, \quad (3.5.9.)$$

amit bizonyítani akartunk. Mivel az  $n_a X^a = 0$  ortogonalitási feltételek fennállnak az  $S$  hiperfelület valamelyik pontjában, amelyet koordinátarendszerünk origójának választottunk, ezért a  $n^b \nabla_b (n_a X^a) = 0$  egyenlőség azt jelenti, hogy ennek a pontnak  $M$ -beli környezetében (a koordinátarendszer érvényességi tartományában) is teljesülnek az  $n_a X^a = 0$  ortogonalitási feltételek bármely  $X^a = X_1^a, \dots, X_{n-1}^a$  bázisvektor-mezőre.

### 3.5.3. A minimális ívhosszú és a maximális sajátidőtartamú görbék

A metrikához tartozó (azaz a  $\nabla_a g_{bc} = 0$  tulajdonságot is kielégítő) kovariáns derivált segítségével definiált geodetikuskok fontos tulajdonsága, hogy szélsőértékké teszik az adott két pontot összekötő görbe hosszát.

**Definíció:** Legyen az  $M$  sokaságon adott a  $g_{ab}$  Riemann-metrika. Legyen  $C$  sima (vagy legalább egyszer differenciálható) görbe és  $T^a$  ennek érintővektora,  $t$  pedig a paramétere. A görbe  $t_1$  és  $t_2$  paraméterhez tartozó pontjai közti görbeív hosszán az

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} (g_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt \quad (3.5.10.)$$

integrált értjük.

**Definíció:** Legyen az  $M$  sokaságon adott a  $g_{ab}$  Lorentz-metrika. Legyen  $C$  sima (vagy legalább egyszer differenciálható) görbe és  $T^a$  ennek érintővektora,  $t$  pedig a paramétere. A  $C$  görbét időszerűnek, null-görbének vagy térszerűnek nevezzük rendre aszerint, hogy érintőjének normanégyszete mindenütt negatív ( $g_{ab} T^a T^b < 0$ ), zérus ( $g_{ab} T^a T^b = 0$ ), vagy pozitív ( $g_{ab} T^a T^b > 0$ ). Térszerű görbe ívhosszán ismét a (3.5.10.) kifejezést értjük. Időszerű görbe ívhosszán a

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} (-g_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt \quad (3.5.11.)$$

integrált értjük, amit **sajátidőnek** nevezünk. A null-görbék ívhossza zérus.

**Állítás:** Lorentz-metrikájú sokaságban bármely geodetikus érintője vagy mindenütt időszerű, vagy mindenütt térszerű, vagy mindenütt null-vektor. Ezért egy geodetikus vagy időszerű, vagy térszerű, vagy null-geodetikus.

Ez közvetlen következménye annak, hogy a geodetikusok érintővektorai egymásnak párhuzamos eltoltsai, és a párhuzamos eltolás megőrzi a vektorok normanégyszetét.

**Állítás:** Görbe ívhossza (ill. az ívéhez tartozó sajátidő) nem függ a görbe paraméterezésétől.

Tekinsük pl. az ívhossz esetét. Térjünk át másik  $s = s(t)$  paraméter használatára, ahol feltesszük (mint szokás), hogy a régi és az új paraméter kapcsolata invertálható, azaz létezik a  $t = t(s)$  függvény. Ekkor  $s_1 = s(t_1)$  és  $s_2 = s(t_2)$  a végpontoknak megfelelő új paraméterértékek, az új érintővektorok pedig  $S^a = (dt/ds)T^a$  kapcsolatban állnak a régi érintővektorokkal, úgyhogy az új ívhossz

$$\ell' = \int_{s_1}^{s_2} (g_{ab} S^a S^b)^{1/2} ds = \int_{s_1}^{s_2} (g_{ab} T^a T^b)^{1/2} \frac{dt}{ds} ds = \int_{t_1}^{t_2} (g_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt = \ell \quad (3.5.12.)$$

meggyegyezik a régivel.

**Megjegyzés:** A térszerű görbe ívhossza és az időszerű görbe sajátideje olyan jellemzők, amelyek függetlenek a paraméterezéstől, továbbá függetlenek a tér-idő koordináta-lefedésétől. Ezek a szóbanforgó görbék szerkezeti jellemzői, amelyekhez a mérhető térbeli távolság és az időszerű görbén, mint világvonalon utazó megfigyelő óráján mért (saját)időtartam fizikai fogalmai köthetők.

**Állítás:** Tegyük fel, hogy a  $p \in M$  és  $q \in M$  pontok térszerű (ill. időszerű) görbével összeköthetők. Az a térszerű (ill. az az időszerű) görbe, amely szélsőértékké



teszi a rögzített  $p$  és  $q$  pontok közti görbeszakasz ívhosszát (ill. az ahhoz tartozó sajátidő-tartamot), a két pontot összekötő geodetikus.

Végezzük el a bizonyítást térszerű görbék esetére. Formálisan ugyanolyan feladattal állunk szemben, mint amikor a newtoni mechanikában azt kérdezzük, hogy melyik az a pálya, amelyik a hatást szélsőértékké teszi. Vezessünk be valamely  $\psi$  koordinátatérképet, hogy  $\mathbb{R}^n$ -ben dolgozhassunk. A hatás szerepét ekkor az  $\ell$  ívhossz, az  $L$  Lagrange<sup>31</sup>-függvény szerepét az

$$L = \left( \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{1/2} \quad (3.5.13.)$$

kifejezés veszi át. A szélsőérték szükséges feltétele, hogy az  $\ell$  ívhossz megváltozása elsőrendben tűnjön el, ha az  $x^\mu(t)$  görbét rögzített végpontok között infinitesimálisan folytonosan deformáljuk valamely  $x^\mu(t) + \delta x^\mu(t)$  görbébe, miközben  $\delta x^\mu(t_1) = \delta x^\mu(t_2) = 0$ . Az ívhossz variációja

$$\delta \ell = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{-1/2} \sum_{\alpha,\beta} \left[ g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{d(\delta x^\beta)}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\kappa} \delta x^\kappa \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right] dt. \quad (3.5.14.)$$

Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a görbét úgy parametrizáltuk, hogy

$$g_{ab} T^a T^b = 1 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \quad (3.5.15.)$$

legyen. Ekkor a szélsőérték szükséges feltétele, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha,\beta} \left[ g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{d(\delta x^\beta)}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\kappa} \delta x^\kappa \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha,\beta} \left[ -\frac{d}{dt} \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \right] \delta x^\beta dt, \end{aligned} \quad (3.5.16.)$$

ahol a határon vett tagoknak a végpontok rögzítése miatti eltűnését kihasználtuk. Mivel ennek a variációnak el kell tűnnie tetszőleges  $\delta x^\beta(t)$  variáció esetén, ezért a megfelelő Euler<sup>32</sup>-Lagrange-egyenlet

$$0 = \sum_{\alpha} \left[ -g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} - \sum_{\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \right]. \quad (3.5.17.)$$

Szorozzunk rá az egyenlet mindkét oldalára a  $g^{\kappa\beta}$  inverz metrikával és kontraháljunk a  $\beta$  index szerint. Rendezés után

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\kappa}{dt^2} &= \sum_{\alpha,\lambda} \frac{1}{2} g^{\kappa\beta} \left[ \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} - 2 \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right] \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} \\ &= \frac{1}{2} g^{\kappa\beta} \left[ \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} \right] \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} \\ &= - \sum_{\alpha,\lambda} \Gamma^{\kappa}_{\alpha\lambda} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \end{aligned} \quad (3.5.18.)$$

<sup>31</sup>Joseph-Louis Lagrange, olasz-francia matematikus és csillagász, 1736-1813.

<sup>32</sup>Leonhard Euler, svájci matematikus, fizikus, csillagász és mérnök, 1707-1783.

adódik. Ez éppen a geodetikus egyenlete.

Hasonlóan lehet bizonyítani, hogy két pontot összekötő időszerű görbék ívhosszát mérő sajátidőtartam szélsőértéket vesz fel a két pontot összekötő időszerű geodetikuson.

**Megjegyzés:** A fenti levezetés azt is mutatja, hogy a geodetikus egyenletét affin parametrizáció és tetszőleges koordináta-rendszer használata esetén megkaphatjuk, mint az

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} dt \quad (3.5.19.)$$

„Lagrangre-függvényhez” tartozó Euler-Lagrange-egyenletet. A Christoffel-szimbólumok valamely koordináta-rendszerben történő meghatározásának egyik lehetséges módja, hogy a Christoffel-szimbólumokat a geodetikusok egyenletének explicit alakjából olvassuk ki.

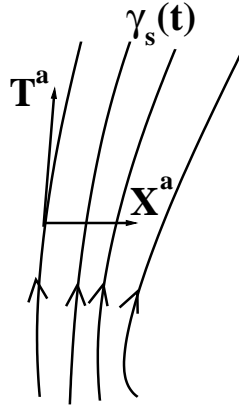
**Állítás:** Riemann-metrikájú sokaság esetén bármely két pontot összekötő görbék között találhatunk tetszőlegesen nagy ívhosszút. Az ívhossz azonban alulról korlátos. Feltéve, hogy van olyan, a két pontot összekötő görbe, amelyen az ívhossz felveszi a legkisebb értékét, akkor az az ívhossz szélsőértéke, és ez a görbe geodetikus. Két pontot összekötő legrövidebb út ezért mindig az, ha geodetikus mentén, azaz „a legegyenesebb úton” haladunk. Ha azonban adott két pont és az őket összekötő geodetikus, akkor az nem biztos, hogy ez a legrövidebb út a két pont között. (Előfordulhat, hogy több geodetikus is összeköti ugyanazt a két pontot.)

**Állítás:** Legyen adott két pont Lorentz-metrikájú sokaságban, amelyek összeköthetők időszerű görbével. Ilyenkor mindig találhatók olyan időszerű görbék, amelyek a sajátidő-tartam tetszőlegesen kis értéket vehet fel. Vannak olyan téridő-sokaságok, amelyekben adott két pontot összekötő időszerű görbékhez tartozó sajátidő-tartamnak nincsen felső korlátja. Ha azonban létezik ilyen felső korlát, akkor a sajátidő-tartam a maximális értékét a két pontot összekötő időszerű geodetikuson veszi fel. Megint igaz azonban, hogy ha két pontot összeköt egy időszerű geodetikus, akkor nem biztos, hogy ezen a geodetikuson a két pont közötti sajátidő a sajátidő maximális értéke.

**Állítás:** Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy két pontot összekötő időszerű geodetikus legyen a maximális sajátidejű görbe, (ill. Riemann-metrika esetén, hogy két pontot összekötő geodetikus legyen a minimális ívhosszú görbe), amely a két pontot összeköti, az, hogy hiányozzanak a geodetikus mentén az úgynevezett **konjugált pontok**. Erről később fogunk beszélni.

#### 3.5.4. A geodetikus deviáció

A geodetikus deviáció geometriailag a szomszédos geodetikusok egymáshoz képesti eltérülésének jellemzésére szolgál. Ennek közvetlen fizikai jelentést tulajdoníthatunk. Képzeljük el, hogy két részecskét engedünk el egymás közelében kezdősebesség



7. ábra. Időszerű geodetikusok egy-paraméteres családja a geodetikus deviáció meghatározásához

nélkül. Ezek a részecskék szomszédos geodetikusokon kezdenek mozogni. **A geodetikus deviáció** azt jellemzi, hogy a szomszédos geodetikusokon mozgó részecskéknek mekkora az egymáshoz képesti relatív gyorsulása és hogy mekkora az ennek megfelelő ár-apály erő. A relatív gyorsulás (és az ár-apály erő) gravitációs eredetű, a téridő görbültségének köszönhetően lép fel. A geodetikus deviáció, ami ezt a jelenséget leírja, egyúttal a téridő görbültségének egy másik jellemzője.

Tekintsük a geodetikusok egy  $\gamma_s(t)$  egy-paraméteres családját, amelyben minden geodetikust  $s \in \mathbb{R}$  valós paraméterrel jelöltünk meg, és  $t$  a geodetikusok affin paramétere. Legyen az  $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$  leképezés sima, kölcsönösen egyértelmű és az inverze is sima. Ekkor a  $\gamma_s(t)$  geodetikus-család egy  $\Sigma$  2-dimenziós részsokaságot képez. Válasszuk  $\Sigma$ -n az  $(s, t)$  koordinátákat. Ekkor a  $T^a = (\partial/\partial t)^a$  bázisvektormező a  $\gamma_s(t)$  geodetikusok érintője, az  $X^a = (\partial/\partial s)^a$  bázisvektormező pedig az infinitesimálisan közeli geodetikusok egymáshoz képesti eltolódását jellemzi, ez az úgynevezett **deviáció-vektor**.

**Állítás:** A geodetikusok  $\gamma_s(t)$  egy-paraméteres családjában a szomszédos, azaz  $X^a$  deviáció-vektorral jellemzett geodetikusok relatív gyorsulása

$$a^a = -R_{cdb}{}^a X^b T^c T^d, \quad (3.5.20.)$$

ahol  $T^a$  a geodetikusok érintővektor-mezeje.

A geodetikusok affin paraméterezésének megválasztásában mérték-szabadságunk van: az affin paraméter csak egy lineáris transzformáció,  $t \rightarrow t' = a(s)t + b(s)$  erejéig meghatározott. Az érintővektor normanégyzete,  $g_{ab}T^aT^b$  egy-egy geodetikus mentén állandó. A geodetikus affin paraméterezésében meglévő mértékszabadságot pedig felhasználjuk arra, hogy az affin paraméter alkalmas  $s$ -függő  $t' = a(s)t$  ( $a(0) = 1$ ) átskálázásával biztosítsuk, hogy az érintővektorok normanégyzete bármely  $s$ -hez tartozó geodetikuson is ugyanaz az állandó legyen. Mivel  $\gamma_s$ -en (annak

$t$ -paraméterű pontjában) az érintővektornak a normanégyzete

$$\begin{aligned} \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(x_s(t))(dx_s^\mu/dt)(dx_s^\nu/dt) &= a^2(s) \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(x_s(t'))(dx_s^\mu/dt')(dx_s^\nu/dt') \\ &\stackrel{!}{=} \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(x_0(t'))(dx_0^\mu/dt')(dx_0^\nu/dt'), \end{aligned} \quad (3.5.21.)$$

ebből kiolvashatjuk  $a(s)$  alkalmas választását.

A  $T^a$  és  $X^a$  vektormezők koordinátavektormezők  $\Sigma$ -n, ezért kommutálnak,  $[X, T]^a = 0$ , ahonnan

$$X^b \nabla_b T^a = T^b \nabla_b X^a \quad (3.5.22.)$$

adódik. Ebből viszont következik, hogy  $X_a T^a = \text{áll.}$  bármely geodetikus mentén, mivel

$$T^b \nabla_b (T_a X^a) = X^a T^b \nabla_b T_a + T^b T_a \nabla_b X^a = T_a T^b \nabla_b X^a = T_a X^b \nabla_b T^a = \frac{1}{2} X^b \nabla_b (T_a T^a) = 0. \quad (3.5.23.)$$

Ezek után végezhetünk a  $\gamma_s$  geodetikus affin paraméterén alkalmas  $t \rightarrow t' = t + b(s)$  eltolást, amivel el tudjuk érni, hogy  $X_a T^a = 0$  legyen valamennyi  $\gamma_s$  geodetikuson. Ezzel a paraméterezéssel tehát elértük, hogy  $X_a T^a = 0$  mindenhol a  $\Sigma$  részsokaságon. A  $t = \text{const.}$  görbék ekkor merőlegesen metszik az összes  $\gamma_s$  geodetikut.

Azt, hogy két szomszédos, azaz az  $X^a$  deviációs vektorral jellemzett geodetikus egymáshoz képesti eltolódása milyen ütemben változik a geodetikusok mentén, a

$$v^a = T^b \nabla_b X^a \quad (3.5.24.)$$

**relatív sebesség** jellemzi. (Időszerű geodetikus-sereg esetén úgy gondolhatjuk, hogy ez a szomszédos geodetikusok  $t = 0$  paraméterű pontjaiban elengedett és azok mentén szabadon eső részecskék relatív sebessége.) Hasonlóan az

$$a^a = T^c \nabla_c v^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) \quad (3.5.25.)$$

vektort a szomszédos geodetikusok **relatív gyorsulásának** nevezhetjük.

Végül megmutathatjuk, hogy a szomszédos geodetikusok relatív gyorsulása a (3.5.20.) egyenlőségnek tesz eleget:

$$\begin{aligned} a^a &= T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) = T^c \nabla_c (X^b \nabla_b T^a) \\ &= T^c (\nabla_c X^b) \nabla_b T^a + T^c X^b \nabla_c \nabla_b T^a \\ &= X^c (\nabla_c T^b) \nabla_b T^a + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - X^b R_{cbd}{}^a T^c T^d \\ &= X^c (\nabla_c T^b) \nabla_b T^a + X^c T^b \nabla_c \nabla_b T^a - X^b R_{cbd}{}^a T^c T^d \\ &= X^c \nabla_c (T^b \nabla_b T^a) - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\ &= -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d, \end{aligned} \quad (3.5.26.)$$

ahol az első egyenlőség annak a következménye, hogy  $T^a$  és  $X^a$ , mint koordináta-bázisvektorok kommutálnak; a második egyenlőség a Leibnitz-szabály alkalmazása révén adódik; a harmadik egyenlőség első tagjában ismét felhasználtuk, hogy  $X^a$  és  $T^a$  kommutálnak, valamint, hogy

$$[\nabla_c, \nabla_b] T^a = -R_{cbd}{}^a T^d; \quad (3.5.27.)$$

a negyedik egyenlőség második tagjában felcseréltük a  $b$  és  $c$  összegző indexeket; az ötödik egyenlőség a Leibnitz-szabály értelmében áll fenn; végül a hatodik egyenlőségben felhasználtuk, hogy a geodetikus érintői egymás párhuzamos eltoltsai.

A geodetikus deviáció (3.5.20.) egyenlete kifejezi, hogy bármely geodetikus-családot jellemző relatív gyorsulás akkor és csak akkor zérus, ha a görbületi tenzor zérus;  $R_{abc}{}^d = 0$ . Ezért bizonyos szomszédos geodetikusok gyorsulva közelednek egymáshoz vagy távolodnak egymástól akkor és csak akkor, ha a sokaság görbült, azaz  $R_{abc}{}^d \neq 0$ . Ez azt is jelenti, hogy kezdetben párhuzamos szomszédos geodetikusok, azaz olyanok, amelyek relatív sebessége kezdetben  $T^b \nabla_b X^a = 0$ , akkor és csak akkor szűnnek meg párhuzamosak lenni, ha a sokaság görbült.

### 3.6. A görbületi tenzor meghatározása

Az Einstein-egyenletek explicit alakjának felírásához szükségünk lesz arra, hogy a görbületi tenzort kifejezzük a metrikával. Erre többféle módszer használatos.

#### 3.6.1. A koordináta-komponensek módszere

Az a legkézenfekvőbb, – bár sokszor meglehetősen hosszadalmas számolást igénylő – módszer, amikor valamilyen koordinátarendszert választunk és abban meghatározzuk a görbületi tenzor  $R_{\mu\nu\kappa}{}^\lambda$  koordináta-komponenseinek kifejezését a metrika és deriváltjainak komponensei segítségével. Induljunk ki a görbületi tenzor bevezetése során használt

$$[\nabla_a, \nabla_b]\omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad (3.6.28.)$$

összefüggésből, ahol  $\omega_a$  tetszőleges duális vektormező,  $\nabla_a$  pedig a  $g_{ab}$  metrika által indukált kovariáns deriváló operátor. Duális vektormező kovariáns deriváltja

$$\nabla_b \omega_c = \partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \omega_d, \quad (3.6.29.)$$

és általában a  $(0, 2)$ -tenzor kovariáns deriváltja

$$\nabla_a T_{bc} = \partial_a T_{bc} - \Gamma_{ab}^d T_{dc} - \Gamma_{ac}^d T_{bd}, \quad (3.6.30.)$$

úgyhogy

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c = \partial_a (\partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \omega_d) - \Gamma_{ab}^d (\partial_d \omega_c - \Gamma_{dc}^e \omega_e) - \Gamma_{ac}^d (\partial_b \omega_d - \Gamma_{bd}^e \omega_e). \quad (3.6.31.)$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
R_{abc}{}^d \omega_d &= [\nabla_a, \nabla_b] \omega_c \\
&= -2\partial_{[a} \Gamma^d{}_{b]c} \omega_d - 2\Gamma^d{}_{[b|c]} \partial_a \omega_d - (\Gamma^d{}_{ab} - \Gamma^d{}_{ba}) \partial_d \omega_c - 2\Gamma^d{}_{[a|c]} \partial_b \omega_d \\
&\quad + 2(\Gamma^d{}_{[ab]} \Gamma^e{}_{dc} + \Gamma^d{}_{[a|c]} \Gamma^e{}_{b]d}) \omega_e \\
&= \left( -2\partial_{[a} \Gamma^d{}_{b]c} + 2\Gamma^e{}_{c[a} \Gamma^d{}_{b]e} \right) \omega_d,
\end{aligned} \tag{3.6.32.}$$

ahol felhasználtuk, hogy a Christoffel-szimbólumok kovariáns indexeikben szimmetrikusak,  $\Gamma^d{}_{ab} = \Gamma^d{}_{ba}$ . Mivel az azonosság tetszőleges  $\omega_d$  duális vektormező esetén fennáll, a görbületi tenzor koordináta-komponenseire az adódik, hogy

$$R_{\mu\nu\kappa}{}^\lambda = \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} + \sum_\rho (\Gamma^\rho{}_{\kappa\mu} \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} - \Gamma^\rho{}_{\kappa\nu} \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}). \tag{3.6.33.}$$

Itt a Christoffel-szimbólumok a korábban ismertetett módon kifejezhetők a metrika első parciális deriváltjainak és a  $g^{ab}$  inverz-metrikának a segítségével. A görbületi tenzor lineárisan tartalmazza a metrika komponenseinek második parciális deriváltjait és bonyolult, nem lineáris módon a metrika komponenseinek első parciális deriváltjait. Ha adott koordinátarendszerben ismertek a metrika komponensei, mint a koordináták kifejezése, akkor elvileg a Christoffel-szimbólumok és a görbületi tenzor komponenseinek explicit kifejezése is kiszámíthatók.

A Ricci-tenzor komponenseit a (3.6.33.) kifejezésből kontrakcióval kapjuk:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\kappa} &= \sum_\nu R_{\mu\nu\kappa}{}^\nu \\
&= \sum_\nu \left( \frac{\partial \Gamma^\nu{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\nu{}_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} + \sum_\rho (\Gamma^\rho{}_{\kappa\mu} \Gamma^\nu{}_{\nu\rho} - \Gamma^\rho{}_{\kappa\nu} \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}) \right) \\
&= \sum_\nu \frac{\partial \Gamma^\nu{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial (\sum_\nu \Gamma^\nu{}_{\nu\kappa})}{\partial x^\mu} + \sum_{\nu,\rho} (\Gamma^\rho{}_{\mu\kappa} \Gamma^\nu{}_{\nu\rho} - \Gamma^\rho{}_{\kappa\nu} \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}).
\end{aligned} \tag{3.6.34.}$$

Néhány további fontos szabály, ami a koordináta-komponensekkel történő számolásokat megkönnyíti.

1. A  $g_{ab}$  metrika komponensei  $(g_{\mu\nu})$  mátrixba rendezhetők. Ekkor a  $g^{ab}$  inverz-metrika  $g^{\mu\nu}$  komponensei a  $(g_{\mu\nu})$  mátrix inverzének az elemei. Jelöljük a  $(g_{\mu\nu})$  mátrix determinánsát  $g$ -vel,

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \tag{3.6.35.}$$

Ekkor a metrika által az  $M$  sokaságon indukált természetes térfogatelem

$$\sqrt{|g|} dx^1 \cdots dx^n. \tag{3.6.36.}$$

2. A kontrahált  $\Gamma^a_{ab}$  Christoffel-szimbólum koordináta-komponensei:

$$\Gamma^a_{a\mu} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^\mu}. \quad (3.6.37.)$$

A kontrahált Christoffel-szimbólum megjelenik a Ricci-tenzor kifejezésében és megjelenik bármely vektormező kovariáns divergenciájának a kifejezésében.

A kontrakció eredménye:

$$\begin{aligned} \Gamma^a_{a\mu} &= \sum_\nu \Gamma^\nu_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\kappa} g^{\nu\kappa} \left( \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\kappa} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu,\kappa} g^{\nu\kappa} \left( \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu,\kappa} g^{\nu\kappa} \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (3.6.38.)$$

Határozzuk meg most a  $g$  determináns  $dg$  differenciálját, ha infinitezimálisan  $dg_{\mu\nu}$ -vel megváltoztatjuk a  $(g_{\mu\nu})$  mátrix elemeit. Legyen a  $g_{\mu\nu}$  mátrixelemhez tartozó aldetermináns  $\Delta^{(\mu\nu)}$ , ekkor  $dg = \sum_{\mu\nu} \Delta^{(\mu\nu)} dg_{\mu\nu}$ . Másrésztől tudjuk, hogy a  $(g^{\mu\nu})$  mátrix a  $(g_{\mu\nu})$  mátrix inverze, azaz  $g^{\mu\nu} = \Delta^{(\mu\nu)}/g$ , úgyhogy

$$dg = g \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} \quad (3.6.39.)$$

adódik. Ezt felhasználva írhatjuk, hogy

$$\Gamma^a_{a\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\kappa} g^{\nu\kappa} \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^\mu}, \quad (3.6.40.)$$

amit bizonyítani akartunk.

3. Tetszőleges  $V^a$  vektormező kovariáns divergenciájának kifejezése:

$$\begin{aligned} \nabla_a V^a &= \partial_a V^a + \Gamma^a_{ab} V^b = \sum_\mu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} + \sum_\mu \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^\mu} V^\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_\mu \frac{\partial (\sqrt{|g|} V^\mu)}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (3.6.41.)$$

### 3.6.2. Tetrád-módszer

A kovariáns deriválás operátorának és a görbületi tenzornak koordinátabázisban történő meghatározása mindig közvetlenül járható út, néha azonban célszerűbb ortonormált bázisban meghatározni a tenzorok komponenseit. A koordinátabázis viszont csak lapos téridőben Descartes-koordináták használata esetén ortogonális.

A tetrad-módszerben bevezetünk egy koordinátáktól független, ortonormált, sima  $(e_\mu)^a$  vektormezőkből álló  $\{(e_\mu)^a\}$  bázist, ahol a  $(\mu = 1, 2, \dots, n)$  az egyes bázisvektorokat címkézik. Definíció szerint megköveteljük, hogy a bevezetett bázisvektorok eleget tegyenek az

$$(e_\mu)^a (e_\nu)_a = \eta_{\mu\nu} \quad (3.6.42.)$$

ortonormáltsági feltételnek, ahol  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$  a Minkowski-metrika. Az  $n = 4$  dimenzióban az  $\{(e_\mu)^a\}$  bázist **tetradnak** nevezzük, amely elnevezést más dimenzióban is szokás használni.

**Állítás:** Fennáll a

$$\sum_{\mu, \nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)_b = \delta^a_b \quad (3.6.43.)$$

azonosság, ahol  $\delta^a_b$  a vektorok terén alkalmazott azonossági leképezés,  $\eta^{\mu\nu}$  pedig  $\eta_{\mu\nu}$  inverze, azaz  $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}^{-1}$ .

Hattassuk a (3.6.43.) egyenlőség bal oldalán álló kifejezést a tetszőleges  $(e_\sigma)^b$  vektorra, ekkor

$$\sum_{\mu, \nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)_b (e_\sigma)^b = \sum_{\mu, \nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)^a \eta_{\nu\sigma} = \sum_{\mu} \delta_\sigma^\mu (e_\mu)^a = (e_\sigma)^a = \delta^a_b (e_\sigma)^b, \quad (3.6.44.)$$

ahonnan kiolvasható a (3.6.43.) azonosság.

Érdemes párhuzamot vonni a görbület koordináta-módszerrel és tetrad-módszerrel történő kiszámítása között. Koordináta-módszer esetén azt használjuk ki, hogy

- (A) a deriválás operátora a metrika által meghatározott kovariáns gradiens,  $\nabla_a g_{ab} = 0$ ;
- (B) a deriválás operátora torziómentes (a kovariáns gradiens 5. tulajdonsága),  $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f \ \forall f \in \mathcal{F}$ , aminek következtében a Christoffel-szimbólumok szimmetrikusak,  $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu$ ;
- (C) a Riemann-tenzor és a kovariáns gradiens kapcsolata:  $[\nabla_a, \nabla_b] \omega_c = R_{abc}^d \omega_d \ \forall \omega_c \in \mathcal{T}(0, 1)$ .

A tetrad-módszerben az (A) és (B) tulajdonságot más alakban fogjuk kihasználni. A Christoffel-szimbólumok helyett konnexiós 1-formákat vezetünk be.

**Definíció:** Az  $\omega_{a\mu\nu}$  **konnexiós 1-formákat** a tetrad vektorainak segítségével az alábbi kifejezés definiálja:

$$\omega_{a\mu\nu} = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b, \quad \mu, \nu = 1, \dots, n. \quad (3.6.45.)$$



A konnexiós 1-formák (tetrad-bázisban vett)

$$\omega_{\kappa\mu\nu} = (e_\kappa)^a (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b \quad (3.6.46.)$$

komponenseit **Ricci-féle rotációs együtthatóknak** nevezzük.

**Állítás:** A Ricci-féle rotációs együtthatók antiszimmetrikusak,

$$\omega_{\kappa\mu\nu} = -\omega_{\kappa\nu\mu}; \quad (3.6.47.)$$

antiszimmetriájuk egyenértékű az  $(A)$  követelménnyel, azaz avval, hogy a kovariáns derivált a metrika által indukált kovariáns derivált.

Induljunk ki a (3.6.42.) ortonormáltsági feltételből, és hattassuk annak mindkét oldalára a kovariáns deriválás operátorát:

$$0 = \nabla_a ((e_\mu)^b (e_\nu)_b), \quad (3.6.48.)$$

ahonnan az  $(A)$  követelményt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\omega_{a\mu\nu} = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b = -(\nabla_a (e_\mu)^b) (e_\nu)_b = -(e_\nu)^b \nabla_a (e_\mu)_b = -\omega_{a\nu\mu}. \quad (3.6.49.)$$

Fordítva is igaz, hogy ha kiindulunk a Ricci-féle rotációs együtthatók antiszimmetriájából,

$$(e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b = -(e_\nu)^b \nabla_a (e_\mu)_b, \quad (3.6.50.)$$

és felhasználjuk a tetrad-bázis ortonormáltságát, amiből

$$\begin{aligned} (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b &= -(\nabla_a (e_\mu)^c) (e_\nu)_c = -(\nabla_a (e_\mu)_d g^{cd}) (e_\nu)_c \\ &= -(e_\nu)^d \nabla_a (e_\mu)_d + (e_\mu)_d (\nabla_a g^{cd}) (e_\nu)_c \end{aligned} \quad (3.6.51.)$$

adódik, akkor a (3.6.50.) és a (3.6.51.) jobb oldalainak összehasonlításából visszakapjuk az  $(A)$  követelményt.

**Megjegyzés:** Érdemes felfigyelni rá, hogy a Christoffel-szimbólumok szimmetrikussága nem az  $(A)$ , hanem a  $(B)$  követelményből következett. A tetrad-módszer előnye, hogy a szimmetrikus Christoffel-szimbólumok helyett az antiszimmetrikus Ricci-féle rotációs együtthatókkal dolgozik, mert  $n$ -dimenziós esetben  $n \cdot n(n+1)/2$  darab független Christoffel-szimbólum és csak  $n \cdot n(n-1)/2$  darab független Ricci-féle rotációs együttható van. Pl.  $n = 4$  dimenzióban ez 40 helyett csak 24 független együttható meghatározásának szükségességét jelenti.

A módszer következő lépéseként a Riemann-tenzort ki kell fejezni a Ricci-féle rotációs együtthatók segítségével:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = (e_\rho)^a \nabla_a \omega_{\sigma\mu\nu} - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta} [\omega_{\rho\mu\beta} \omega_{\sigma\alpha\nu} + \omega_{\rho\beta\sigma} \omega_{\alpha\mu\nu} - (\rho \Leftrightarrow \sigma)]. \quad (3.6.52.)$$

Itt a kovariáns deriválás helyettesíthető közönséges deriválással, mert az  $\omega_{\sigma\mu\nu}$  komponensek skalár-függvények. Ezután a Ricci-tenzor komponensei az

$$R_{\rho\mu} = \sum_{\sigma,\nu} \eta^{\sigma\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} \quad (3.6.53.)$$

képlettel számolhatók. A (3.6.52.) kifejezés teljes egészében megfelel a görbületi tenzor meghatározásában a  $(C)$  követelménynek, ami kiderül az alábbi levezetésből.

Felhasználva a  $(C)$  követelményt, abból indulhatunk ki, hogy a Riemann-tenzor komponensei a tetrad-bázisban,

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{abcd}(e_\rho)^a(e_\sigma)^b(e_\mu)^c(e_\nu)^d = (e_\rho)^a(e_\sigma)^b(e_\mu)^c[\nabla_a, \nabla_b](e_\nu)_c \quad (3.6.54.)$$

alakba írhatók. Itt fellép az  $(e_\mu)^c\nabla_a\nabla_b(e_\nu)_c$  kifejezés, ami a következőképpen alakítható át a (3.6.43.) azonosság segítségével:

$$\begin{aligned} (e_\mu)^c\nabla_a\nabla_b(e_\nu)_c &= \nabla_a((e_\mu)^c\nabla_b(e_\nu)_c) - (\nabla_a(e_\mu)^c)(\nabla_b(e_\nu)_c) \\ &= \nabla_a((e_\mu)^c\nabla_b(e_\nu)_c) - (\nabla_a(e_\mu)^f)\delta_f^c(\nabla_b(e_\nu)_c) \\ &= \nabla_a((e_\mu)^c\nabla_b(e_\nu)_c) - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta}(\nabla_a(e_\mu)^f)(e_\alpha)^c(e_\beta)_f(\nabla_b(e_\nu)_c). \end{aligned} \quad (3.6.55.)$$

Hasonlóképpen írható, hogy

$$(e_\mu)^c\nabla_b\nabla_a(e_\nu)_c = \nabla_b((e_\mu)^c\nabla_a(e_\nu)_c) - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta}(\nabla_b(e_\mu)^f)(e_\alpha)^c(e_\beta)_f(\nabla_a(e_\nu)_c). \quad (3.6.56.)$$

Ezeknek az összefüggéseknek a segítségével kapjuk a Riemann-tenzor komponenseinek alábbi kifejezését:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = (e_\rho)^a(e_\sigma)^b[\nabla_a\omega_{b\mu\nu} - \nabla_b\omega_{a\mu\nu} - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta}(\omega_{a\beta\mu}\omega_{b\alpha\nu} - \omega_{b\beta\mu}\omega_{a\alpha\nu})]. \quad (3.6.57.)$$

Fejezzük ki a jobboldali első tagot a Ricci-féle rotációs együtthatókkal:

$$\begin{aligned} (e_\rho)^a(e_\sigma)^b\nabla_a\omega_{b\mu\nu} &= (e_\rho)^a\nabla_a((e_\sigma)^b\omega_{b\mu\nu}) - (e_\rho)^a(\nabla_a(e_\sigma)^b)\omega_{b\mu\nu} \\ &= (e_\rho)^a\nabla_a((e_\sigma)^b\omega_{b\mu\nu}) - (e_\rho)^a\delta_c^b(\nabla_a(e_\sigma)^c)\omega_{b\mu\nu} \\ &= (e_\rho)^a\nabla_a((e_\sigma)^b\omega_{b\mu\nu}) - \sum_{\alpha,\beta} (e_\rho)^a(e_\alpha)^b(e_\beta)_c(\nabla_a(e_\sigma)^c)\omega_{b\mu\nu} \\ &= (e_\rho)^a\nabla_a((e_\sigma)^b\omega_{b\mu\nu}) - \sum_{\alpha,\beta} (e_\rho)^a(e_\alpha)^b\omega_{a\beta\sigma}\omega_{b\mu\nu} \\ &= (e_\rho)^a\nabla_a((e_\sigma)^b\omega_{b\mu\nu}) - \omega_{\rho\beta\sigma}\omega_{\alpha\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.6.58.)$$

A (3.6.57.) egyenlőség jobb oldalán a második tagot hasonlóképpen alakíthatjuk át; az eredmény a (3.6.58.) kifejezésből  $\rho \Leftrightarrow \sigma$  cserével kapható meg. Ezeket visszahelyettesítve a (3.6.57.) egyenlet jobb oldalába, megkapjuk a (3.6.52.) kifejezést.

A tetrad-módszer eddig ismertett lépéseiben kihasználtuk az  $(A)$  és  $(C)$  követelményeket a Riemann-tenzor meghatározása során. Hátra van még, hogy biztosítsuk a módszerben a kovariáns derivált torziómentességét, a  $(B)$  követelményt. Erre két lehetőség is van.

1. A torziómentesség teszi lehetővé, hogy vektorok kommutátorát

$$[v, w]^b = v^a\nabla_a w^b - w^a\nabla_a v^b \quad (3.6.59.)$$

alakban fejezhessük ki. Másrészt, ha ez az összefüggés bármely két vektormezőre teljesül egy bázisban, akkor a kovariáns deriválás operátora torziómentes. Ezért a torziómentességet a tetrad-bázisban szereplő vektormezők kommutátoraira írhattuk

$$\begin{aligned}(e_\sigma)_a [e_\mu, e_\nu]^a &= (e_\sigma)_a ((e_\mu)^b \nabla_b (e_\nu)^a - (e_\nu)^b \nabla_b (e_\mu)^a) = (e_\mu)^b \omega_{b\sigma\nu} - (e_\nu)^b \omega_{b\sigma\mu} \\ &= \omega_{\mu\sigma\nu} - \omega_{\nu\sigma\mu}\end{aligned}\quad (3.6.60.)$$

feltételekkel biztosíthatjuk. Ezek  $n^2(n-1)/2$  darab egyenletet jelentenek a Ricci-féle rotációs együtthatók meghatározására.

2. Meg lehet mutatni (ld. [1]), hogy annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a kovariáns deriválás operátora torziómentes legyen, az, hogy a tetrad-bázisban szereplő minden vektormező tegyen eleget a

$$\partial_{[a}(e_{\sigma]b]} = \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)_{[a} \omega_{b]\sigma\nu} \quad (3.6.61.)$$

feltételnek.

**Megjegyzés:** A (3.6.52.) és a (3.6.61.) összefüggések differenciál-formák nyelvén jól áttekinthető alakot öltenek. A duális vektor indexének elhagyásával vezessük be a bázis-egyformákra az  $e_\mu$ , a konnexiós 1-formákra az  $\omega_{\mu\nu}$  jelölést, a görög indexek fel- és lehúzására használjuk rendre  $\eta^{\alpha\beta}$ -t és  $\eta_{\alpha\beta}$ -t, úgyhogy pl.  $\omega_\nu^\mu = \sum_\sigma \eta^{\mu\sigma} \omega_{\nu\sigma}$ . Jelöljük továbbá az  $R_{ab\mu\nu}$  2-formákat  $\mathbf{R}_{\mu\nu}$ -vel. Ekkor a (3.6.61.) egyenlőség

$$de_\sigma = e_\mu \wedge \omega_\sigma^\mu \quad (3.6.62.)$$

alakot ölt, a (3.6.52.) egyenlőség pedig

$$\mathbf{R}_\mu^\nu = d\omega_\mu^\nu + \sum_\alpha \omega_\mu^\alpha \wedge \omega_\alpha^\nu \quad (3.6.63.)$$

alakba írható át. A (3.6.62.) és (3.6.63.) egyenleteket **szerkezeti egyenleteknek** szokás nevezni.

A torziómentesség biztosításának különböző módja miatt kétféle utat járhatunk, ha meg akarjuk határozni ortonormált bázisban, azaz tetrad-módszerrel a görbületi tenzort.

1. Az egyik eljárás az, hogy a (3.6.60.) felcserélési relációkat megoldjuk a Ricci-féle rotációs együtthatókra, majd azokat behelyettesítjük (3.6.52.) kifejezésébe.

2. A másik eljárás során a (3.6.62.) (ill. a vele azonos (3.6.61.)) egyenletből határozzuk meg a konnexiós egy-formákat, majd ezeket helyettesítjük be a (3.6.63.) (ill. a vele azonos (3.6.52.)) összefüggésbe. Ennek az eljárásnak az az előnye, hogy a (3.6.62.) egyenlet bal oldalát viszonylag egyszerű kiszámolni, és egyszerű esetekben ki lehet találni, hogy mi a megoldás a konnexiós egy-formákra.

A tetrad-módszerrel történő számolás során végül ismét be kell vezessünk koordinátarendszert. A módszer célja nem az, hogy ezt elkerüljük, hanem inkább az, hogy a tenzorokat a koordinátabázisnál kényelmesebb bázisban fejtjük ki.

**Megjegyzés:** A jelen tananyag a gravitációs mezőt a metrikus tenzorral írja le. Az általános relativitáselméletet azonban úgy is fel lehet építeni, hogy a tetrad-bázist használjuk a gravitációs mező leírására.

## 4. Az Einstein-egyenletek

### 4.1. Térgeometria és fizikai törvények a relativitáselmélet előtti fizikában

#### 4.1.1. Térgeometria

A relativitáselmélet előtti fizika felfogása szerint a tér az  $\mathbb{R}^3$  sokaság szerkezetével rendelkezik. Azt is fel szokás tenni, hogy a tér pontjaihoz a sokaság  $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$  pontjai természetes módon hozzárendelhetők egy standard vonalzókból (mértérudakból) készített merev kockarács segítségével. Az így kapott koordináták a Descartes-koordináták. A merev rács és annak rácpontjaiban elhelyezett nyugvó, szinkronizált órák jelentik a vonatkoztatási rendszereket. A fizikai méréseket valamely vonatkoztatási rendszerben nyugvó megfigyelők végzik. Sokféle merev térrács, azaz sokféle Descartes-koordinátarendszer vezethető be, amelyek egy 6-paraméteres izometria-csoport (a térbeli eltolások és elforgatások csoportjának) transzformációi révén állnak kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban. Ez azt vonja maga után, hogy az  $(x^1, x^2, x^3)$  koordináták nem a sokaság belső geometriai jellemzői, értékük változik izometria-transzformációk során. Ugyanakkor bármely két  $x$  és  $y$  pont távolságának négyzete,

$$\ell^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 \quad (4.1.1.)$$

független a Descartes-koordináták megválasztásától, azaz a sokaság belső tulajdonságának tekinthető. Alkalmazzuk ezt a távolságnégyzet-kifejezést két szomszédos pontra, amikor  $x^1 - y^1 = \delta x^1$ , stb. infinitezimálisak,

$$(\delta \ell)^2 = (\delta x^1)^2 + (\delta x^2)^2 + (\delta x^3)^2. \quad (4.1.2.)$$

Hasonlítsuk össze az elemi távolságnégyzet ezen kifejezését az általános érvényű (2.4.2.) összefüggéssel. Ekkor indokoltnak látszik az a feltevés, hogy a 3-dimenziós tér metrikus tenzora Descartes-féle koordinátabázisban

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (4.1.3.)$$

avagy indexjelöléssel

$$h_{ab} = \sum_{\mu, \nu=1}^3 h_{\mu\nu} (dx_a)^\mu (dx_b)^\nu, \quad (4.1.4.)$$

ahol a metrika komponensei a Descartes-bázisban,

$$(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.1.5.)$$

amelyek függetlenek a koordinátáktól. Ezért Descartes-féle koordináta-rendszerben a közönséges deriváló operátor  $\partial_a h_{bc} = 0$  tulajdonságú, vagyis  $\partial_a$  a metrikához tartozó kovariáns deriváló operátor. Ebből viszont az adódik, hogy a Christoffel-szimbólumok a Descartes-féle koordináta-rendszerben eltűnnek,  $\Gamma^a_{bc} = 0$ . (Ez egyébként a metrikához egyértelműen tartozó Christoffel-szimbólumok komponenseinek (3.3.11.) kifejezéséből is közvetlenül látszik.) A relativitás előtti fizika tere tehát nem görbült  $\mathbb{R}^3$  sokaság, amely lapos Riemann-metrikával rendelkezik. A geodetikusok egyenletei  $d^2x^\mu/dt^2 = 0$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ), a geodetikusok tehát egyenesek, azaz olyan görbék, amelyek pontjainak Descartes-koordinátái lineárisan függnek a  $t$  affin paramétertől. Bármely két,  $p$  és  $q$  térbeli ponthoz egyértelműen létezik az őket összekötő geodetikus,  $x^\mu(t) = p^\mu + v^\mu(t - t_1)$ , ahol  $x^\mu(t_1) = p^\mu$ ,  $x^\mu(t_2) = q^\mu$  és  $v^\mu = (p^\mu - q^\mu)/(t_2 - t_1)$ , amelynek ívhossza mentén a két pont távolsága

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} (h_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{\mu, \nu=1}^3 h_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{1/2} dt = \left( \sum_{\mu=1}^3 (p^\mu - q^\mu)^2 \right)^{1/2}. \quad (4.1.6.)$$

Ez éppen az a távolságégyzet, amelyből kiindultunk. Ezzel beláttuk a metrika alakjára tett feltevésünk helyességét.

#### 4.1.2. Általános és speciális kovariancia

A fizikai mennyiségek mérései számokat szolgáltatnak. Vannak azonban olyan esetek, amikor az egyértelmű számszerűsítés csak úgy lehetséges, ha egy vagy több irányt is megadunk a térben. Ezért általánosságban azt feltételezzük, hogy a fizikai mennyiségek tenzorok. Ekkor **a fizika törvényeit tenzoregyenletek írják le**. A relativitáselmélet előtti fizikában a tenzorok a lapos  $h_{ab}$  metrikájú  $\mathbb{R}^3$  sokaságon értelmezett tenzorok.

Mind a relativitáselmélet előtti fizikában, mind a speciális és az általános relativitáselméletben érvényes **az általános kovariancia elve**. Ez azt mondja ki, hogy a metrikus tenzor a tér (relativisztikus esetben a téridő) szerkezetét jellemző egyetlen olyan tenzormező, amely szerepelhet a fizikai törvényekben. Nem létezik semmilyen más kitüntetett vektormező, vagy kitüntetett bázisvektormező, amelyet a tér (téridő) geometriai szerkezeténél fogva tüntet ki, mint a sokaság belső tulajdonságát hordozó objektumot. Az általános kovariancia azt jelenti másrésről, hogy a fizikai mezőket leíró tenzorok és a metrikus tenzor explicit szerepeltetésével tenzor-alakban felírt egyenletek alakja általános koordináta-transzformációk során változatlan marad.

A relativitáselmélet előtti fizikában érvényes a **speciális kovariancia elve** is. A tér metrikája invariáns az izometria-transzformációk csoportjával (térbeli forgatások és eltolások) szemben. Tegyük fel, hogy megfigyelők térben elhelyezkedő

$O$  családja fizikai mennyiségeket mér valamely fizikai mezőn. Legyen  $O'$  a megfigyelők egy másik családja, amelynek tagjai izometria-transzformációkkal kaphatók meg az  $O$  család tagjaiból. A speciális kovariancia elve azt jelenti, hogy a megfigyelők  $O$  családja számára lehetséges összes mérések halmaza az  $O'$  család részére is lehetséges összes mérések halmaza. Ennek következtében az izometria-csoport a fizikai mezők állapotának transzformációjaként kell, hogy megjelenjen. A tér izometria-transzformációinak, azaz szimmetriáinak csoportja megszorítást jelent a fizikai mezőkre vonatkozó törvények alakjára nézve. Ebben áll a speciális kovariancia elvének jelentősége. A speciális kovariancia azt jelenti másrészt, hogy adott koordinátarendszerben a fizikai törvények tenzorkomponensekre vonatkozó egyenletekként felírt alakja az izometria-transzformációk során változatlan marad, ha a metrikát az egyenletekben nem implicit módon, mint  $h_{\alpha\beta}$  szerepeltetjük, hanem a metrika komponenseinek explicit kifejezéseit, mint a koordináták függvényeit, írjuk be az egyenletekbe.

**Példa:** A kovariancia-elveket a geodetikus egyenletének példáján illusztrálhatjuk. Valamely  $\psi$  koordinátarendszerben, ami nem feltétlen Descartes-féle, a geodetikusok egyenlete affin paraméterezés esetén

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} \frac{dx^\kappa}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt}, \quad (4.1.7.)$$

ahol a Christoffel-szimbólumok a (3.3.11.) összefüggés szerint vannak kifejezve a metrika  $h_{\alpha\beta}(x)$  komponenseinek koordináták szerinti parciális deriváltjaival. Hajtsunk végre általános koordinátatranszformációt, amellyel áttérünk a  $\psi$  lokális térképről egy másik  $\psi'$  térképre, azaz az  $x$  koordinátákról új  $x'$  koordinátákra. Ekkor a metrika komponensei az új koordinátabázisban  $h'_{\alpha\beta}(x')$  függvényei az új koordinátáknak, a geodetikus egyenlete pedig

$$0 = \frac{d^2 x'^\mu}{dt^2} + \Gamma'^\mu_{\kappa\lambda} \frac{dx'^\kappa}{dt} \frac{dx'^\lambda}{dt}, \quad (4.1.8.)$$

ahol a Christoffel-szimbólumok az új koordinátarendszerben ugyanazon (3.3.11.) összefüggéssel vannak kifejezve a metrika  $h'_{\alpha\beta}(x')$  komponenseivel, mint amivel  $\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}$  a  $h_{\alpha\beta}(x)$  komponensekkel. A (4.1.7.) és (4.1.8.) egyenletek alakjának azonossága tükrözi az általános kovariancia elvét.

Válasszuk most a  $\psi$  lokális térképet pl. Descartes-koordinátarendszernek. Ekkor a (4.1.7.) egyenletben  $\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}$  kiszámításakor a  $h_{\alpha\beta}(x) = \text{diag}(+1, +1, +1)$  komponenseket explicit módon írjuk be a (3.3.11.) összefüggés jobb oldalába, és a (4.1.7.) egyenlet

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = 0 \quad (4.1.9.)$$

alakúra egyszerűsödik. Ha most általános koordinátatranszformációt hajtunk végre, akkor az egyenletnek ez az alakja nem őrződik meg, hanem az új  $\psi'$  lokális koordinátarendszerben (4.1.8.) alakú lesz, ahol a  $\Gamma'^\mu_{\kappa\lambda}$  Christoffel -szimbólumok nem lesznek nullák. Ha viszont izometria-transzformációt hajtunk végre, amelynek eredménye egy másik  $\psi''$  Descartes-koordinátarendszer, amelyet a  $\psi$  Descartes-koordinátarendszerből térbeli elforgatással és

eltolással kaphatunk meg, akkor a  $\psi''$  koordináta-rendszerben a metrika komponensei változatlanul  $h''_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, +1, +1)$ , a Christoffel-szimbólumok pedig ezért változatlanul zérusok, úgyhogy az egyenlet megőrzi az alakját izometria-transzformációk során, azaz megmarad  $d^2x''^\mu/dt^2 = 0$  alakúnak. Ez tükrözi a speciális kovariancia elvének érvényesülését. Megfontolásunk során fontos volt, hogy a metrika koordinátakomponensei, mint az adott koordináták függvényei lettek beírva az egyenletbe, és hogy az izometria-transzformáció során, az izometria definíciója szerint, a metrika komponensei az eredeti  $\psi$  koordináta-rendszerben az eredeti koordinátáknak ugyanolyan függvényei, mint amilyen függvényei a metrika komponensei az új  $\psi''$  koordináta-rendszerben az új koordinátáknak.

## 4.2. A téridő geometriája és fizikai törvények a speciális relativitáselméletben

### 4.2.1. A téridő geometriája és a kovariancia elvek

A speciális relativitáselmélet szerint a téridő az  $\mathbb{R}^4$  sokaság-strukturájával rendelkezik. Vannak kitüntetett mozgások, a tehetetlenségi, azaz nem gyorsuló mozgást végző anyagi pontok mozgása. Fel szokás tenni, hogy az egymáshoz képest térben nem mozgó inerciális megfigyelők kiépíthetnek a térben méterrudak segítségével egy merev rácsot, annak rácspontjaiban nyugvó órákat helyezhetnek el, amelyeket szinkronizálni tudnak. Bármely ilyen inerciális vonatkoztatási rendszerben a nyugvó megfigyelők a téridő pontjaihoz, az egyes elemi eseményekhez az elemi esemény helyével egybeeső rácsponthoz helyzetét megjelölő  $(x^1, x^2, x^3)$  térkoordinátákat (Descartes-koordinátákat) és az elemi esemény bekövetkeztekor a szinkronizált órákon leolvasott  $t$  óraállást rendelik. A téridő pontjainak ez a leképezése  $\mathbb{R}^4$ -be **globális inerciális koordináta-rendszert** definiál. Végtelen sok különböző inerciális koordináta-rendszer létezik, amelyek egymásból a 10-paraméteres Poincaré-csoport transzformációi (valódi Lorentz-transzformációk és eltolások a téridőben) révén kaphatók meg. Az így értelmezett  $(t = x^0, x^1, x^2, x^3)$  koordináták most sem rendelkeznek a sokaság geometriai szerkezetére utaló tartalommal. A sokaság belső, geometriai jellemzésére csak a téridő tetszőleges két,  $x$  és  $y$  pontja invariáns „távolságának” négyzete,

$$I = -(x^0 - y^0)^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2, \quad (4.2.1.)$$

alkalmas, ami invariáns a Poincaré-csoport transzformációival szemben. Ennek és a metrika (2.4.2.) általános kifejezésének összehasonlítása alapján azzal a feltevéssel élünk, hogy a metrikus tenzor a fenti koordinátabázis  $(dx^\mu)_a$  (duális) vektoraival kifejezve

$$\eta_{ab} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b, \quad (4.2.2.)$$



alakú, ahol a metrika komponensei a bevezetett inerciális koordinátarendszerben  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ , amelyek nem függenek a koordinátáktól. Az inerciális koordináták szerinti  $\partial_a$  parciális derivált eleget tesz a  $\partial_a \eta_{bc} = 0$  feltételnek, ami azt jelenti, hogy a Christoffel-szimbólumok  $\Gamma^a_{bc} = 0$  eltűnnek, és az inerciális koordináták szerinti parciális derivált az  $\eta_{ab}$  metrikához egyértelműen tartozó kovariáns derivált. A téridő tehát nem görbült; lapos, Lorentz-szignatúrájú metrikával ellátott  $\mathbb{R}^4$  sokaság, az úgynevezett Minkowski-téridő.

A fizikai mennyiségek a Minkowski-téridőn értelmezett tenzorok. A fizikai törvények pedig tenzoregyenletek. Az **általános kovariancia elve** némileg módosul. A téridő-sokaságnak ugyanis a metrikán túl van további független belső jellemzője. Az időnek iránya van, ami azt jelenti, hogy létezik egy kitüntetett időszerű  $t^a$  vektormező a sokaságon, mert vannak időtükrözést sértő folyamatok. Továbbá a térnek is van irányítása, mert vannak paritássértő folyamatok, ill. folyamatok, amelyek különbséget tudnak tenni a balsodrású és a jobbsodrású rendszerek között. Utóbbit azzal lehet kifejezni, hogy értelmezve van pl. a téridőben egy folytonos, sehol el nem tűnő (pl. jobbsodrású) teljesen antiszimmetrikus  $e_{abc} = e_{[abc]}$  tenzor, amelyre  $t^a e_{abc} = 0$ . (Az utóbbi ortogonalitási reláció fejezi ki, hogy  $e_{abc}$  térbeli orientációt ír le.) Az **általános kovariancia elve** tehát azt jelenti, hogy a fizikai törvényeket tenzoregyenletek írják le és azokban a fizikai mennyiségeknek megfelelő tenzorokon túl csak a metrikus tenzor, a  $t^a$  vektormező és az  $e_{abc}$  tenzormező szerepelhetnek.

A **speciális kovariancia elve** azt jelenti, hogy a fizikai törvényeknek valamely koordinátarendszerben tenzorkomponensekre felírt alakja invariáns a Poincaré-csoport transzformációival szemben, ha a metrika komponenseit beírjuk, mint a koordináták függvényeit. Ez az invariancia azonban nem áll fenn az időtükrözésre és a tértükrözésre nézve, noha jöllehet azok is izometria-transzformációk.

#### 4.2.2. Fizikai törvények

Ebben a fejezetben néhány példát idézünk fel a speciális relativitáselméletből speciális fizikai rendszerek dinamikájára vonatkozóan.

1. *Anyagi pont mozgása.* Az anyagi pont világvonala időszerű görbe. Ha valamely  $t$  görbeparaméter esetén  $T^a$  a világvonala érintője, akkor a világvonalon történő mozgás során eltelt sajátidő (azaz az anyagi ponttal együttmozgó órán eltelt idő)

$$\tau = \int (-\eta_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt. \quad (4.2.3.)$$

Két esemény közötti sajátidőtartam a két pontot összekötő két különböző időszerű világvonalon különböző lehet; ebből származik a nevezetes ikerparadoxon. A két eseményt összekötő geodetikusan, azaz inerciális mozgás esetén telik el a leghosszabb sajátidőtartam. A világvonalat parametrizálhatjuk a  $\tau$  sajátidővel, s ekkor valamely

$K$  Minkowski-koordinátarendszerben  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  a világvonal paraméteres egyenlete. Ha a sajátidővel parametrizáljuk a világvonalat, akkor az időszerű görbe érintője az anyagi pont  $u^a$  négyessebessége, amelynek komponensei  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  és amelyre  $u_a u^a = -1$ . Szabadon eső anyagi pont geodetikusan mozog, amelynek egyenlete

$$u^a \partial_a u^b = 0, \quad (4.2.4.)$$

mivel az  $\eta_{ab}$  metrikához tartozó kovariáns derivált a globális inerciális koordinátarendszerhez tartozó közönséges parciális derivált.

Érdemes szót ejteni arról, hogy különböző megfigyelők milyen eredményt kapnak, ha az anyagi pont energiáját mérik. Legyen az anyagi pont nyugalmi tömege  $m$ , ekkor a  $K$  inerciális koordinátarendszerben az anyagi pont négyesimpulzusa  $p^a = mu^a$ . Tegyük fel, hogy a részecske tartózkodási helyén egy  $O$  megfigyelő éppen  $v^a$  négyessebességgel mozog. Ekkor az  $O$  megfigyelővel éppen együtt mozgó  $K'$  globális inerciarendszerben (az abban nyugvó)  $O$  megfigyelő  $E' = -p_a v^a$  energiát mér.

Ha a  $K'$  inerciarendszer a  $K$  inerciarendszerhez képest  $\vec{v}$  3-as sebességgel mozog, akkor választhatjuk az  $x^1$  és az  $x'^1$  koordinátatengelyeket a  $\vec{v}$  vektor irányában. Ekkor a Lorentz-transzformáció értelmében  $p'^0 = \gamma(p^0 - vp^1)$ , ahol  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$  és  $v = |\vec{v}|$ . Másrészt a megfigyelő négyessebességének komponensei a  $K$  rendszerben  $v^0 = \gamma$ ,  $v^1 = \gamma v$ ,  $v^2 = v^3 = 0$ . Ezért írhatjuk, hogy  $E' = p'^0 = -p_a v^a$ .

Ha az  $O$  megfigyelő és az anyagi pont relatív sebessége zérus, akkor  $u^a = v^a$  és a megfigyelő által mért energia  $E = -p_a u^a = -mu_a u^a = m$ . Sok alkalmazásban felmerül az a kérdés, hogy mennyinek méri az anyagi pont energiáját egy távoli  $O'$  megfigyelő. Legyen az  $O'$  megfigyelő négyessebessége  $v'^a$  a  $K$  globális inerciarendszerben. A Minkowski-tér-idő nem görbült, ezért a vektorok párhuzamos eltolása független attól a görbétől, amelyen a párhuzamos eltolást végezzük. Ezért van értelme annak, hogy az  $O'$  megfigyelő által mért energiát azonosnak tekintsük azzal az energiával, amelyet az a megfigyelő mér, amelyik éppen az anyagi pont helyén tartózkodik és  $v^a$  négyessebessége megegyezik a távoli megfigyelő négyessebességével,  $v'^a = v^a$ .

## 2. Ideális folyadék mozgása.

Tekintsünk egy folytonos anyageloszlást, amelynek az energiaimpulzus-tenzora  $T_{ab}$ . Ennek a komponensei valamely  $K$  globális inerciális koordinátarendszerben az alábbi jelentéssel bírnak: a  $K$  inerciarendszerben nyugvó megfigyelő számára  $T^{00}$  a közeg energiasűrűsége,  $T^{i0}$  az energiaáramsűrűsége,  $T^{0i}$  az impulzussűrűsége és  $T^{ij}$  a közegben ébredő mechanikai feszültség tenzorának komponensei. Az a megfigyelő, aki a  $K$  inerciarendszerből nézve  $v^a$  négyessebességgel mozog, a közeg energiasűrűségét  $T_{ab}v^a v^b$ -nek, energiaáramsűrűségét és impulzussűrűségét rendre  $-T_{ab}v^b$ -nek és  $-T_{ab}v^a$ -nak, a mechanikai feszültség tenzorának  $x - y$  komponensét pedig  $T_{ab}x^a y^b$ -nek észleli, ahol  $x^a$  és  $y^a$  két  $v^a$ -ra ortogonális vektor. Ez abból következik, hogy másodrendű tenzor komponensei úgy transzformálódnak Lorentz-transzformáció során, mint a megfelelő vektorkomponensek szorzatai. Közönséges közeg esetében a közeghez képest mozgó megfigyelő által észlelt energiasűrűség nem negatív,

$$T_{ab}v^a v^b \geq 0. \quad (4.2.5.)$$

Ideális folyadék energiimpulzus-tenzora:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(\eta_{ab} + u_a u_b), \quad (4.2.6.)$$

ahol  $u^a$  a közeg négyessebessége,  $\rho$  és  $P$  pedig rendre a közeg energiasűrűsége és nyomása a közeg saját nyugalmi rendszerében.

Ha a folyadékra nem hat külső erő, akkor mozgásegyenlete

$$\partial^a T_{ab} = 0. \quad (4.2.7.)$$

Helyettesítsük be ide az ideális folyadék energiimpulzus-tenzorának (4.2.6.) explicit alakját, majd vetítsük azt az  $u^a$  négyessebességgel párhuzamos irányra, ill. az arra merőleges hipersíkra. Ekkor az alábbi egyenletek adódnak:

$$u^a \partial_a \rho + (\rho + P) \partial^a u_a = 0, \quad (4.2.8.)$$

$$(\rho + P) u^a \partial_a u_b + (\eta_{ab} + u_a u_b) \partial^a P = 0. \quad (4.2.9.)$$

A (4.2.7.) egyenlet explicit alakja:

$$[\partial^a(\rho + P)] u_a u_b + (\rho + P)(u_b \partial^a u_a + u_a \partial^a u_b) + \partial_b P = 0. \quad (4.2.10.)$$

Vetítsük az egyenlet mindkét oldalát először a folyadék négyessebességének irányára, azaz kontraháljuk az egyenlet mindkét oldalát  $u^b$ -vel,

$$-[\partial^a(\rho + P)] u_a + (\rho + P)(-\partial^a u_a + u_a u_b \partial^a u_b) + u^b \partial_b P = 0, \quad (4.2.11.)$$

ahol  $u_b \partial^a u_b = \frac{1}{2} \partial^a (u_b u^b) = 0$ , úgyhogy megkapjuk a (4.2.8.) egyenletet. Vetítsük most a (4.2.10.) egyenletet az  $u^a$ -ra ortogonális hipersíkra. Legyen  $V^a$  tetszőleges vektor, akkor ennek  $u^a$ -ra ortogonális komponense  $V_a^\perp = (\eta_{ab} + u_a u_b) V^b$ , hiszen  $u^a V_a^\perp = u^a V_a - u_b V^b = 0$ . Ezért az  $\eta_{cb} + u_c u_b$  projektort haddatjuk a (4.2.10.) egyenlet mindkét oldalára:

$$\begin{aligned} 0 &= (\eta^{cb} + u^c u^b) \partial^a (\rho + P) u_a u_b + (\eta^{cb} + u^c u^b) (\rho + P) (u_b \partial^a u_a + u_a \partial^a u_b) \\ &\quad + (\eta^{cb} + u^c u^b) \partial_b P \\ &= (\eta^{cb} + u^c u^b) (\rho + P) u_a \partial^a u_b + (\eta^{cb} + u^c u^b) \partial_b P \\ &= (\rho + P) (u_a \partial^a u^c + u^c u_a u^b \partial^a u_b) + (\eta^{cb} + u^c u^b) \partial_b P \\ &= (\rho + P) u_a \partial^a u^c + (\eta^{cb} + u^c u^b) \partial_b P. \end{aligned} \quad (4.2.12.)$$

Ezt akartuk belátni.

A hidrodinamikai egyenletek nem relativisztikus határesetét  $P \ll \rho$ ,  $(u^\mu) = (1, \vec{v})$ ,  $|\vec{v}|(dP/dt) \ll |\vec{\nabla} P|$  közelítések jelentik, amikor a (4.2.8.) és a (4.2.9.) egyenletek rendre a tömegsűrűségekre vonatkozó kontinuitási egyenlet,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.2.13.)$$

és az ideális folyadék mozgására vonatkozó Euler-egyenlet,

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P \quad (4.2.14.)$$

alakját öltik.

**Az energiaimpulzus-tenzor négyes-divergenciájának eltűnése tehát a kontinuitási-egyenlet és az Euler-egyenlet relativisztikus általánosítását jelenti. Másrészt viszont a (4.2.7.) egyenlet az energia lokális megmaradását fejezi ki, amit a következőképpen láthatunk be.**

Gondolatban képzeljük el, hogy a folyadékon a  $K$  inerciarendszerben  $v^a$  sebességmezővel jellemzett megfigyelők serege végez méréseket, amelyek sebessége párhuzamos (kovariáns konstans), azaz  $\partial^b v^a = \nabla^b v^a = 0$ . Ekkor  $v_b \nabla^b v^a = 0$ , azaz a megfigyelők serege időszerű geodetikusokon mozog. Ezen megfigyelők által mért négyes-energiaáramsűrűség  $J_a = -T_{ab}v^b$ . Ennek divergenciája

$$\partial^a J_a = -\partial^a (T_{ab}v^b) = -T_{ab}\partial^a v^b = 0 \quad (4.2.15.)$$

eltűnik. Integráljuk ezt az egyenletet tetszőleges 4-dimenziós  $\Omega$  téridő-tartományra, amelyet a 3-dimenziós  $S$  felület határol, és legyen  $n^a$  az  $S$  felület normálisa (a Gauss-tétel alkalmazásához szükséges irányítással). Ekkor Gauss tétele értelmében

$$\int_{\Omega} \partial^a J_a = \int_S n^a J_a = 0. \quad (4.2.16.)$$

Válasszuk speciálisan az  $\Omega$  téridő-tartományt úgy, hogy azt a  $K$  inerciarendszerben a  $t$ -tengely irányában a  $t = t_i$  és  $t = t_f > t_i$  térszerű hiperfelületek, a térirányokban pedig a  $\sigma$  időszerű hiperfelület határolja. Írjuk ki az (4.2.16.) egyenletben a felületi integrált explicit alakban, ekkor

$$\int_V J^0 \Big|_{t=t_f} - \int_V J^0 \Big|_{t=t_i} = - \int_{\sigma} J_a n^a d\sigma \quad (4.2.17.)$$

adódik, ahol  $n^a$  a  $\sigma$  határfelületen a külső normális. Ez a lokális energiamegmaradás törvényének integrális alakja.

### 3. Skalármező egyenlete.

Vizsgáljunk olyan hipotetikus fizikai rendszert, amelyet a Klein<sup>33</sup>-Gordon<sup>34</sup>-egyenletnek elegendő tevé klasszikus skalármezővel lehet leírni,

$$\partial^a \partial_a \phi - m^2 \phi = 0, \quad (4.2.18.)$$

ahol  $m^2 > 0$  a mezőt jellemző paraméter. Ennek az energiaimpulzus-tenzora

$$T_{ab} = (\partial_a \phi)(\partial_b \phi) - \frac{1}{2} \eta_{ab} [(\partial^c \phi)(\partial_c \phi) + m^2 \phi^2]. \quad (4.2.19.)$$

Megmutathatjuk, hogy egyrészt  $T_{ab}v^a v^b \geq 0$ , ahol  $v^a$  a  $K$  rendszerben mozgó megfigyelők négyessebessége, és másrészt most is teljesül a  $\partial^a T_{ab} = 0$  egyenlet.

Egyrészt az energiasűrűségben szereplő kifejezés

$$T_{ab}v^a v^b = (v^a \partial_a \phi)(v^b \partial_b \phi) + \frac{1}{2} [(\partial^c \phi)(\partial_c \phi) + m^2 \phi^2], \quad (4.2.20.)$$

ami nem negatív, mert csupa nem negatív tagok összege.

<sup>33</sup>Oskar Benjamin Klein, svéd fizikus, 1894-1977

<sup>34</sup>Walter Gordon, német fizikus, 1893-1939

Másrészt a Klein-Gordon-egyenletet is felhasználva

$$\begin{aligned}
\partial^a T_{ab} &= (\partial^a \partial_a \phi)(\partial_b \phi) + (\partial_a \phi)(\partial^a \partial_b \phi) - \frac{1}{2} \eta_{ab} [2(\partial^a \partial^c \phi)(\partial_c \phi) + 2m^2 \phi \partial^a \phi] \\
&= m^2 \phi (\partial_b \phi) + (\partial_a \phi)(\partial^a \partial_b \phi) - (\partial_b \partial^c \phi)(\partial_c \phi) - m^2 \phi \partial_b \phi \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.2.21.}$$

amit be akartunk látni.

#### 4. Az elektromágneses mező.

Az elektromágneses mezőt valamely  $K$  globális inerciarendszerben nyugvó megfigyelő az  $\vec{E}$  elektromos térerősséggel és a  $\vec{B}$  mágneses indukcióval jellemzi. Ezek egybefoglalhatók az  $F_{ab}$  másodrendű antiszimmetrikus tenzorban, a **térerősség-tenzorban**. Legyen egy megfigyelő négyessebessége  $v^a$ , akkor az

$$E_a = F_{ab} v^b \tag{4.2.22.}$$

négyesvektort interpretálhatjuk úgy, mint a megfigyelő által mért térerősséget, és a

$$B_a = -\frac{1}{2} \epsilon_{ab}{}^{cd} F_{cd} v^b \tag{4.2.23.}$$

négyesvektort, mint a megfigyelő által mért mágneses indukciót, ahol  $\epsilon_{abcd}$  a pozitív orientációjú teljesen antiszimmetrikus tenzor, amelynek normálása  $\epsilon_{abcd} \epsilon^{abcd} = -24$ , úgyszólván jobbsodrású rendszerben  $\epsilon_{0123} = +1$ .

Ennek belátásához vizsgáljuk azt az esetet, amikor a megfigyelő a  $K$  inerciarendszer  $x$ -tengelye irányában  $v$  sebességgel mozog,  $(v^\mu) = (\gamma, \gamma v, 0, 0)$ . A térerősség-tenzor komponensei a  $K$  inerciarendszerben

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2.24.}$$

Egyrészt ismeretes, hogy a megfigyelővel együttmozgó  $K'$  inerciarendszerben az elektromos térerősség és a mágneses indukció a Lorentz-transzformáció miatt

$$\begin{aligned}
E'^1 &= E^1, & E'^2 &= \gamma(E^2 - vB^3), & E'^3 &= \gamma(E^3 + vB^2), \\
B'^1 &= B^1, & B'^2 &= \gamma(B^2 + vE^3), & B'^3 &= \gamma(B^3 - vE^2).
\end{aligned} \tag{4.2.25.}$$

Másrészt képezzük az  $\alpha_\mu = \sum_\nu F_{\mu\nu} v^\nu$  négyesvektor-komponenseket a  $K$  inerciarendszerben,  $\alpha_\mu = F_{\mu 0} v^0 + F_{\mu 1} v^1$ ,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \gamma v E^1 = \gamma v E'^1, \\
\alpha_1 &= -\gamma E^1 = -\gamma E'^1, \\
\alpha_2 &= -\gamma E^2 + \gamma v B^3 = -E'^2, \\
\alpha_3 &= -\gamma E^3 - \gamma v B^2 = -E'^3,
\end{aligned} \tag{4.2.26.}$$

és a  $\beta_\mu = -\frac{1}{2} \sum_{\nu, \kappa, \lambda} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} v^\nu$  komponenseket a  $K$  inerciarendszerben,

$$\beta_\mu = -[(-\epsilon_{\mu 012} B^3 + \epsilon_{\mu 013} B^2 - \epsilon_{\mu 023} B^1)\gamma + (-\epsilon_{\mu 123} B^1 - \epsilon_{\mu 102} E^2 - \epsilon_{\mu 103} E^3)\gamma v], \quad (4.2.27.)$$

amelyek részletesen kiírva

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \gamma v B^1 = \gamma v B'^1, \\ \beta_1 &= -\gamma B^1 = \gamma B'^1, \\ \beta_2 &= -\gamma(B^2 + v E^3) = -B'^2, \\ \beta_3 &= \gamma(B^3 - v E^2) = B'^3. \end{aligned} \quad (4.2.28.)$$

Látjuk tehát, hogy az  $\alpha_\mu$  komponensekből  $\vec{E}'$ , a  $\beta_\mu$  komponensekből pedig a  $\vec{B}'$  egyértelműen kiolvasható. Ez indokolja, hogy az  $\alpha_a$  és  $\beta_a$  négyesvektorokat úgy interpretáljuk, mint a  $K$ -ban  $v^a$  négyessebességgel mozgó megfigyelő által mért elektromos térerősséget és mágneses indukciót.

Az elektromágneses mező Maxwell<sup>35</sup>-egyenletei

$$\partial^a F_{ab} = -4\pi j_b, \quad (4.2.29.)$$

$$\partial_{[a} F_{bc]} = 0, \quad (4.2.30.)$$

ahol  $j_a$  a négyes-töltésáramsűrűség. A (4.2.29.) egyenlet foglalja magában a két inhomogén Maxwell-egyenletet, a Gauss-törvényt és az Ampère<sup>36</sup>-törvényt, a (4.2.30.) egyenlet pedig a homogén Maxwell-egyenleteket, a mágneses Gauss-törvényt és a Faraday<sup>37</sup>-törvényt. A (4.2.29.) egyenletből következik, hogy az elektromos töltésre lokális megmaradási törvény érvényes, amelyet a

$$\partial^a j_a = 0 \quad (4.2.31.)$$

kontinuitási egyenlet fejez ki.

A (4.2.29.) egyenlet mindkét oldalának képezzük a négyes-divergenciáját,

$$\partial^b \partial^a F_{ab} = -4\pi \partial^b j_b. \quad (4.2.32.)$$

Az elektromágneses térerősség tenzora antiszimmetrikus,  $F_{ab} = -F_{ba}$ , ezért az egyenlet bal oldala azonosan eltűnik, mint egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor kontrakciója.

Mozogjon  $q$  ponttöltés  $u^a$  négyessebességgel az elektromágneses mezőben, és legyen a ponttöltés nyugalmi tömege  $m$ . Ekkor a ponttöltésre a  $K^b = q F^b_c u^c$  Lorentz-erő hat, és a ponttöltés mozgásegyenlete

$$u^a \partial_a u^b = \frac{q}{m} F^b_c u^c. \quad (4.2.33.)$$

A ponttöltés négyesimpulzusa  $p^a = m u^a$ . Ha a ponttöltés világvonalát (időszerű görbe) a  $\tau$  sajátidővel parametrizáljuk, akkor a mozgásegyenlet  $dp^b/d\tau = m(du^b/d\tau) = K^b$  alakú. A

<sup>35</sup>James Clerk Maxwell, skót fizikus, 1831–1879

<sup>36</sup>André-Marie Ampère, francia fizikus és matematikus, 1775–1836

<sup>37</sup>Michael Faraday, angol fizikus és kémikus, 1791–1867

kovariáns deriváló operátor 4. tulajdonsága miatt  $du^b/d\tau = u^a(\partial_a u^b)$ , úgyhogy a mozgásegyenlet a (4.2.32.) alakot ölti.

Az elektromágneses mező energiainpulzus-tenzora

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} \eta_{ab} F_{de} F^{de} \right). \quad (4.2.34.)$$

**Állítás:**

(a) Az elektromágneses mező energiainpulzus-tenzora teljesíti az energiatétel,

$$T_{ab} v^a v^b \geq 0, \quad (4.2.35.)$$

ahol  $v^a$  valamely megfigyelő négyessebessége. Az elektromágneses mező energiasűrűségét tehát bármely inerciális megfigyelő nem negatívnak találja.

(b) Ha az elektromágneses mező forrásmentes, azaz  $j^a = 0$ , akkor az elektromágneses mező energiájára lokális megmaradási törvény érvényes,

$$\partial^a T_{ab} = 0, \quad \text{ha } j^a = 0. \quad (4.2.36.)$$

Amennyiben külső források is vannak jelen, akkor a lokális energiamegmaradás törvénye csak az elektromágneses mező és a töltött anyag együttes energiájára teljesül.

Kontraháljuk a (4.2.34.) tenzort a  $v^a v^b$  tenzorral,

$$T_{ab} v^a v^b = \frac{1}{4\pi} \left( (F_{ac} v^a)(F_b{}^c v^b) + \frac{1}{4} F_{de} F^{de} \right) = \frac{1}{8\pi} (E_c E^c + B_c B^c), \quad (4.2.37.)$$

ami valós kifejezések teljes négyzeteinek összege, úgyhogy nem negatív. Itt felhasználtuk, hogy  $E^c$  és  $B^c$  térszerű vektorok, továbbá, hogy a  $v^a$  sebességgel mozgó megfigyelő nyugalmi rendszerében (ahol  $v^a = (\gamma, = \vec{0}) = v_a$ )

$$E_c E^c = F^{ce} v_e F_{cb} v^b = \sum_{\mu=0}^3 F^{\mu 0} F_{\mu 0} \gamma^2 = \gamma^2 \sum_{i=1}^3 (F^{i0})^2, \quad (4.2.38.)$$

és

$$\begin{aligned} B_c B^c &= \frac{1}{4} \epsilon_{cbde} F^{de} v^b \epsilon^{cfgh} F_{gh} v_f = -\frac{3!}{4} \delta_{[b}^f \delta_d^g \delta_{e]}^h F^{de} v^b F_{gh} v_f \\ &= -\frac{1}{4} (\delta_b^f \delta_d^g \delta_e^h + \delta_d^f \delta_e^g \delta_b^h + \delta_e^f \delta_b^g \delta_d^h - \delta_e^f \delta_d^g \delta_b^h - \delta_d^f \delta_b^g \delta_e^h - \delta_b^f \delta_e^g \delta_d^h) F^{de} F_{gh} v^b v_f \\ &= -\frac{1}{4} (-F^{de} F_{de} + F^{de} F_{eb} v^b v_d + F^{de} F_{bd} v^b v_e - F^{de} F_{db} v^b v_e - F^{de} F_{be} v^b v_d \\ &\quad + F^{de} F_{ed}) \\ &= -\frac{1}{2} (-F^{de} F_{de} - F^{de} F_{be} v^b v_d - F^{de} F_{db} v^b v_e) \\ &= \frac{1}{2} F^{de} F_{de} + E^c E_c, \end{aligned} \quad (4.2.39.)$$

mivel

$$\epsilon_{cbde} \epsilon^{cfgh} = -3! 1! \delta_{[b}^f \delta_d^g \delta_{e]}^h, \quad (4.2.40.)$$

úgyhogy

$$\frac{1}{4}F^{de}F_{de} = \frac{1}{2}(B_c B^c - E^c E_c). \quad (4.2.41.)$$

**Az elektromágneses mező  $v^a$  négyessebességgel mozgó megfigyelő által mért energiasűrűségének (4.2.37.) kifejezése pontosan ugyanolyan alakú, mint az energiasűrűség kifejezése a  $K$  rendszerben. Ez is további érv a (4.2.22.) és a (4.2.23.) négyesvektorok fizikai interpretációja mellett.**

A térerősség  $F_{ab}$  tenzora definíció szerint 2-forma,  $\mathbf{F}$ , amelynek a külső deriváltja a (4.2.30.) homogén Maxwell-egyenlet értelmében eltűnik:

$$d\mathbf{F} = 0. \quad (4.2.42.)$$

Ekkor a Poincaré-lemma megfordításának értelmében létezik olyan  $\mathbf{A}$  egy-forma, amelynek  $\mathbf{F}$  a deriváltja, azaz amelyre

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A}, \quad (4.2.43.)$$

és ebből akkor következik a (4.2.30.) homogén Maxwell-egyenlet

$$d^2\mathbf{A} = 0 \quad (4.2.44.)$$

alakja. Tenzor-alakban mindez úgy foglалható össze, hogy létezik az  $A^a$  vektorpotenciálmező, amelynek segítségével a térerősség-tenzor

$$F^{ab} = \partial^a A^b - \partial^b A^a \quad (4.2.45.)$$

alakot ölt, a (4.2.30.) egyenletek automatikusan, azonosságként kielégülnek, és az inhomogén Maxwell-egyenlet

$$\partial^a(\partial_a A_b - \partial_b A_a) = -4\pi j_b \quad (4.2.46.)$$

alakot ölt.

A (4.2.45.) térerősség-tenzor invariáns az  $A^a \rightarrow A^a + \partial^a \chi$  **mértéktranszformációkkal** szemben, ahol  $\chi$  tetszőleges skalármező. Ezért azok az  $A^a$  térkonfigurációk, amelyek egymásból mértéktranszformációval megkaphatók, fizikailag ekvivalensek. A térkonfigurációk minden ilyen ekvivalencia-osztályából kiválaszthatunk egyetlen térkonfigurációt valamilyen **mértékfeltétel**, mint pl. a **Lorentz-feltétel** ki-rovásával,

$$\partial_a A^a = 0. \quad (4.2.47.)$$

Ez a feltétel mindig kielégíthető.

Legyen  $A'^a$  tetszőleges térkonfiguráció. Keressünk vele ekvivalens olyan  $A^a$  térkonfigurációt, ami kielégíti a Lorentz-feltételt, vagyis legyen  $A^a = A'^a + \partial^a \chi$  alakú, amelyre

$$0 = \partial_a A^a = \partial_a A'^a + \partial_a \partial^a \chi. \quad (4.2.48.)$$



Ilyen térkonfigurációt találunk, ha  $\chi$ -t a

$$\partial_a \partial^a \chi = -\partial_a A'^a \quad (4.2.49.)$$

egyenlet megoldásának választjuk.

Lorentz-mértékben a (4.2.46.) inhomogén Maxwell-egyenlet inhomogén hullámeqyenlet alakját ölti:

$$\partial^a \partial_a A_b = -4\pi j_b. \quad (4.2.50.)$$

Források hiányában a homogén  $\partial^a \partial_a A_b = 0$  hullámeqyenlet az elektromágneses hullámok terjedését írja le nem görbült Minkowski-téridőben. A homogén hullámeqyenlet megoldásait **geometriai optikai közelítésben**  $A_a = C_a e^{iS}$  alakban kereshetjük, ahol a  $C_a$  állandó négyesvektor a hullám amplitudója,  $S$  pedig a fázisa. Ez a hullám akkor és csak akkor megoldása a homogén hullámeqyenletnek, ha a hullám fázisa a

$$\partial^a \partial_a S = 0, \quad (\partial_a S)(\partial^a S) = 0 \quad (4.2.51.)$$

egyenlőségeket elégíti ki, továbbá a megoldás eleget kell tegyen a Lorentz-feltételnek, amiből a

$$C_a \partial^a S = 0 \quad (4.2.52.)$$

feltétel adódik.

Írjuk be az  $A_a = C_a e^{iS}$  alakot a  $\partial^a \partial_a A_b = 0$  homogén hullámeqyenletbe,

$$0 = \partial^b \partial_b (C_a e^{iS}) = i C_a \partial^b (e^{iS} \partial_b S) = i C_a e^{iS} [\partial^b \partial_b S + (\partial_b S)(\partial^b S)] \quad (4.2.53.)$$

ahol a szögletes zárójelben a második tag egy vektor normanégyzete. Ezért az egyenlőség jobb oldala, akkor és csak akkor lehet zérus, ha a (4.2.51.) feltételek teljesülnek.

A fázisfüggvény gradiense,  $\partial^a S = \nabla_a S$  ortogonális az  $S = \text{áll.}$  fázisfelületekre, mert a fázisfelület bármely  $t^a$  érintővektorára fennáll a  $t^a \nabla_a S = 0$  ortogonalitási feltétel. Ezért  $k^a = \partial^a S$  a **fázisfelületek normálisa**. Második feltételünk azt mondja, hogy a fázisfelületek normálisa nullvektor,  $k_a k^a = 0$ . Ekkor az  $S = \text{áll.}$  felületeket **null-felületeknek** nevezzük. Érdemes megjegyezni, hogy null-felület normálisa a null-felületnek egyúttal érintővektora is. Az első feltétel,  $\partial^a k_a = \partial^a \partial_a S = 0$  a megfelelő peremfeltételekkel az  $S$  fázis meghatározására szolgál. Az elektromágneses hullámok fázisfelületeinek  $k^a$  normálisai egyúttal **null-geodetikusok érintővektorai**. Ez azt jelenti, hogy az elektromágneses hullámok terjedése **null-geodetikusokkal** jellemezhető, ezek a „fényugarak világvonalai”. A null-felületeket null-geodetikusok generálják.

Képezzük a második feltétel gradiensét,

$$0 = \partial^a [(\partial^b S)(\partial_b S)] = 2(\partial_b S)(\partial^b \partial^a S) = 2k_b \partial^b k_a, \quad (4.2.54.)$$

ami olyan null-geodetikus egyenlete, amelynek érintővektora  $k^a$ .

Végül a harmadik feltétel azt jelenti, hogy a hullám  $C^a$  amplitudója merőleges a  $k^a$  normálisokra,  $C_a k^a = 0$ . A hullám  $v^a$  négyes-sebességű megfigyelő által mért **frekvenciája**

$$\omega = -v^a \partial_a S = -v^a k_a. \quad (4.2.55.)$$

A  $K$  inerciarendszerben nyugvó megfigyelő  $\omega = k^0$  (kör)frekvenciát és  $k^1 = (2\pi/\lambda)$  hullám-számot (és  $\lambda$  hullámhosszat) észlel. Tekintsünk megint az egyszerűség kedvéért olyan  $K'$  inerciarendszert, amely az adott pillanatban éppen együtt mozog a  $K$  inerciarendszerben  $(v^a) = (\gamma, \gamma v, 0, 0)$  négyes-sebességgel mozgó  $O$  megfigyelővel. Ekkor a  $K'$  rendszerben nyugvó  $O$  megfigyelő a Lorentz-transzformáció értelmében  $k'^0 = \gamma(k^0 - vk^1)$  frekvenciát észlel. Másrészt pedig

$$-v^a k_a = -(-\gamma k^0 + \gamma v k^1) = \gamma(k^0 - vk^1) = k'^0. \quad (4.2.56.)$$

Ezt akartuk belátni.

A legegyszerűbb megoldások a **síkhullámok**, amikor  $k^a = \text{áll.}$  vektormező, és Minkowski-koordinátákban

$$S = \sum_{\mu=0}^3 k_\mu x^\mu. \quad (4.2.57.)$$

A síkhullám-megoldások jelentőségét az adja, hogy a Fourier-transzformáció elmélete értelmében a Maxwell-egyenletek minden, a végtelenben kellően gyorsan lecsengő megoldása kifejezhető, mint síkhullámok lineáris szuperpozíciója.

A fentiek alapján arra lehet következtetni, hogy az elektromágneses zavarok, a fényjelek null-geodetikusok mentén terjednek. Ez valóban így is van. Az inhomogén hullámegyenlet retardált megoldásai írják le az ismert  $j^a$  áramsűrűséggel reprezentált forrásból kisugárzott elektromágneses hullámok terjedését

$$A^\mu(x) = \int d^4x' G_{\text{ret}}^{\mu\nu}(x - x') j_\nu(x') \quad (4.2.58.)$$

alakban, ahol  $G_{\text{ret}}^{\mu\nu}(x - x')$  a retardált Green<sup>38</sup>-függvény. Az integrál azonban nem terjed ki a teljes téridőre, hanem csak arra a téridő-tartományra, amelyben a retardált Green-függvény nem tűnik el. Meg lehet mutatni, hogy ez a tartomány a téridő  $x \in M$  pontjához tartozó múltbeli fénykúp.

## 4.3. Kovariancia-elvek és fizikai törvények az általános relativitáselméletben

### 4.3.1. A gravitáció az általános relativitáselméletben

A fizika törvényei tenzoregyenletek alakjában fogalmazhatók meg. Ez biztosítja az **általános relativitási elv** érvényesülését: a fizikai törvények invarianciáját általános koordinátatranszformációkkal szemben. **Az általános kovariancia elve** most is abban nyilvánul meg, hogy a fizikai törvényekben a téridő strukturáját jellemző mennyiségként csak a metrikus tenzor és a belőle származtatható mennyiségek szerepelhetnek. **A speciális kovariancia elve** pedig ismét azt jelenti, hogy a fizikai

---

<sup>38</sup>George Green, brit matematikai fizikus, 1793-1841.

törvényeket leíró egyenletek alakja nem változik olyan koordinátatranszformációk során, amelyek a téridő izometriái, ha a metrikus tenzor komponenseit, mint a koordináták függvényeit explicit módon szerepeltetjük bennük.

Lényeges koncepcionális különbség van azonban a speciális relativitáselmélet szemlélete és az általános relativitáselmélet szemlélete között. Ennek legfontosabb megnyilvánulása abban van, hogyan tekintünk a gravitációra. Az elektromágneses mező megfigyelésére a speciális relativitáselméletben olyan megfigyelők állnak rendelkezésre, akik nem töltöttek, nincsenek alávetve sem elektromágneses, sem másféle erőhatásoknak, azaz inerciális megfigyelők. Az inerciális megfigyelők a lapos (nem görbült) téridő időszerű geodetikusai (egyenes világvonalak) mentén mozognak. Ezeknek a természetes módon választható inerciális megfigyelőknek a világvonalaikhoz tudjuk ezután hasonlítani egy próbatöltés világvonalát, amelynek a geodetikustól való eltérése szolgáltat információt a próbatöltés gyorsulására elektromágneses mező jelenlétében, és ebből határozható meg a próbatöltésre az elektromágneses mező által kifejtett erő, azaz az elektromágneses térerősségtenzor komponensei. A gravitációs mező hasonló módon történő megfigyelése viszont elvileg sem lehetséges. Mivel a gravitáció minden testre, anyagra hat, elvileg nincsen olyan megfigyelő, aki ne lenne alávetve a gravitációnak. Ezért nem értelmezhetők természetes módon inerciális megfigyelők. Így nincsen mihez hasonlítani egy gravitáló próbatest világvonalát. Sőt, az **ekvivalencia elve** értelmében minden test azonos módon esik szabadon, azaz azonos módon mozog gravitációs mező hatása alatt. Ezt az elvi nehézséget a következő szemléletváltással hidaljuk át. Elfogadjuk, hogy elvileg sem tudunk semmilyen módon inerciális megfigyelőket (inerciális mozgást végző anyagi pontokat) megvalósítani, és segítségükkel a gravitációs erő erőtvényét kimérni. Egyúttal azonban elfogadjuk azt a hipotézist, hogy **a téridő metrikája nem lapos, mint ahogy a speciális relativitáselmélet feltételezi, hanem görbült, és a szabadon eső anyagi pontok pályái a görbült téridő geodetikusai**. Ezáltal a téridő geodetikusain mozgó megfigyelők, amik a speciális relativitáselméletben viszonyítási alapul szolgáltak az erőhatások alatt mozgó testek vizsgálatához, most automatikusan egybeesnek a szabadon eső anyagi pontok világvonalaival. Így nincsen lehetőségünk ebben a szemléletben arra, hogy „kívülről” határozzuk meg a gravitációs mezőt. **A gravitációt a téridő saját jellemzőjének kell tekintsük, ami a téridő szerkezetében nyilvánul meg. A gravitációs mezőt lényegében a téridő geometriát meghatározó metrikus tenzormezővel azonosítjuk.** Mindennek ellenére van értelme **relatív gravitációs erőről, az úgynevezett árapály-erőről** beszélni, amit a szomszédos, szabadon eső anyagi pontok relatív gyorsulása alapján mérhetünk. Erre vonatkozik a geodetikus deviáció egyenlete.

Az ekvivalencia elve azt mondja, hogy minden test azonos módon esik szabadon. Képzeljünk el a téridő tetszőleges pontja környezetében egy kicsiny szabadon eső űrhajót, és tegyük fel, hogy abban elengedünk egy anyagi pontot, amelyre (a gravitációt leszámítva) semmilyen erő nem hat. Akkor ez az anyagi pont maga is szabadon esik. Ezért az űrhajóhoz képest vagy nyugalomban van (ha nem adtunk

neki kezdősebességet az űrhajóhoz képest), vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az űrhajóhoz képest (ha nem volt zérus az űrhajóhoz képesti kezdősebessége). Ezért a kicsiny szabadon eső űrhajó **lokális inerciarendszernek** tekinthető. A téridő bármely pontjának kicsiny környezetében létezik tehát lokális inerciarendszer, azaz lokális Minkowski-féle koordinátarendszer, amelynek origójában a metrika komponensei a Minkowski-metrika komponensei, és amelyben a fizikai törvények ugyanolyan alakúak, mint a speciális relativitáselméletben. Ez biztosítja az összhangot az általános relativitáselmélet és a speciális relativitáselmélet között. Mivel a metrika szignatúrája nem változhat folytonosan a sokaságon, ezért a lokális inerciarendszerek léte azt is kell jelentse, hogy a metrikának az általános relativitáselméletben is Lorentz-szignatúrájának kell lennie. Természetesen a téridő minden pontjában végtelen sok lokális inerciális koordinátarendszer létezik, amelyek között a Lorentz-transzformáció teremt kapcsolatot. A lokális inerciarendszert 4 darab ortonormált bázisvektor határozza meg a Minkowski-térben, ezek a bázisvektorok alkotják a tetradot. A metrikát és a gravitációs mezőt egyértelműen meghatározza, hogy a tetrad hogyan változik a téridőn, azaz milyen a tetradmező. A gravitációs mező ezért a tetrad-mezővel is jellemezhető.

Felmerül még az a kérdés, hogy hogyan egyeztethető össze az általános relativitáselmélettel az a tény, hogy a newtoni gravitációs törvény jó közelítéssel helyes eredményt ad pl. a Nap körül mozgó bolygók pályáira, avagy a ferde hajításra a Föld felszíne közelében. Newton gravitációs törvénye mérési tapasztalaton alapul, ami mögött az az alapfeltevés húzódik meg, hogy a gravitációs erő mérhető. Hogyan egyeztethető ez össze az általános relativitáselmélet szemléletével. Vegyük pl. a bolygómozgást a Nap körül. Mint később látni fogjuk, a Nap maga körül meggörbíti a téridőt, a görbült téridő metrikáját az úgynevezett Schwarzschild-megoldás határozza meg. Egy bolygó világvonala, – ha a bolygóknak a téridő szerkezetére gyakorolt hatását elhanyagoljuk, – időszerű geodetikus a Schwarzschild-metrikájú téridőben. A Schwarzschild-metrikájú téridő sztatikus, aminek egyik jellemzője, hogy a téridő-sokaságon létezik egy 1-paraméteres izometriacsoport (az időbeli eltolások csoportja), amelynek orbitái időszerű görbék. Ez a szimmetria lehetővé teszi, hogy olyan „háttér”-megfigyelőket értelmezhessünk, akik megfigyelhetik a saját világvonalaik és a bolygómozgás időszerű geodetikusai közötti eltérést, az eltérés alapján meghatározhatják a bolygóra ható gravitációs erőt, és azt pedig jó közelítéssel összhangban levőnek találják Newton gravitációs törvényével.

**Megjegyzés:** Általában is igaz, hogy ha a téridő metrikája izometriacsoporttal, azaz a metrikát invariánsan hagyó koordinátatranszformációk csoportjával rendelkezik, akkor ez lehetővé teszi a „kitüntetett” megfigyelők seregének feltételezését. Ilyen esetben értelmes arról beszélni, hogy ezek a megfigyelők milyennek látják a fizikai jelenségeket. A téridő általában azonban nem rendelkezik izometriákkal, úgyhogy általában nem jelölhető ki kitüntetett megfigyelők serege, azaz egy olyan „háttér”, amelyhez viszonyítva beszélhetnénk a fizikai jelenségekről.

### 4.3.2. Az anyag mozgását leíró fizikai törvények alakjáról

Az előzőekben elmondott elvek általában nem teszik lehetővé, hogy azokat az egyenleteket egyértelműen általánosítsuk görbült téridőben történő mozgás esetére, amelyek a speciális relativitáselmélet keretében írják le az anyag mozgását. Az eddig elmondottak arra nézve sem adnak közvetlen útmutatást, hogy hogyan határozza meg a mozgó anyag gravitációs hatásánál fogva a téridő geometriai szerkezetét. Amikor tehát az általános relativitáselmélet kidolgozása során Einstein megfogalmazta ezeket a mozgás-törvényeket, akkor egészen általános szempontok is vezették. Frankfurt am Main városában az Alte Oper frízén a „Dem Wahren, Schönen, Guten” („Az igaznak, szépnek, jónak”) felirat olvasható ma is. A természettudományokban és speciálisan az elméleti fizikában, konkrétan az általános relativitáselméletben is van egy íratlan követelmény: a törvények legyenek **igazak** (helyesen írják le a fizikai jelenségek többé-kevésbé széles körét, és helyesen jelezzenek előre az adott jelenségkörrel kapcsolatos új jelenségeket), *szépek* (pl. tenzoregyenletek, amelyek koordinátarendszertől függetlenek) és **a lehető legegyszerűbb alakúak** (az utóbbit vehetjük a jóság szinonímájának).

Az általános relativitáselmélet szerint a téridő annyiban különbözik a speciális relativitáselmélet téridőről alkotott geometriai elképzelésétől, hogy a téridő-sokaság  $\mathbb{R}^4$  helyett most az előre nem specifikált  $M$  4-dimenziós sokaság, továbbá a metrika az  $\eta_{ab}$  Minkowski-metrika helyett az előre nem meghatározott Lorentz-szignatúrájú  $g_{ab}$  metrika, úgyhogy a téridő-sokaság görbületi tenzora általában nem zérus. A hasonlóság az, hogy mindkét esetben a téridő egy Lorentz-szignatúrájú metrikával ellátott 4-dimenziós sokaság. Ez és az általános relativitási elv azt sugallja, hogy a fizikai mennyiségeket az általános relativitáselméletben ugyanolyan típusú tenzorokkal írjuk le, mint a speciális relativitáselméletben. Kézenfekvőnek látszik az is, hogy a fizikai törvények alakját úgy kaphatjuk meg a speciális relativitáselméletben használt alakjukból, hogy az  $\eta_{ab}$  metrikához tartozó kovariáns deriválást, azaz a  $\partial_a$  deriváló operátort az egyenletekben a  $g_{ab}$  metrikához tartozó  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátorra cseréljük. **Az egyszerű helyettesítési szabály**,  $\eta_{ab} \rightarrow \nabla_a$ ,  $\partial_a \rightarrow \nabla_a$  olyan módon csatolja a részecskéket és a fizikai mezőket a gravitációhoz, ami erősen emlékeztet a  $q$  ponttöltés és az elektromágneses mező közti  $p_a \rightarrow p_a - qA_a$  „minimális csatolásra”, ahol a  $p_a$  a ponttöltés négyesimpulzusa,  $A_a$  pedig az elektromágneses mező négyesvektorpotenciálja. Ennek a szabálynak az alkalmazása azonban nem mindig mentes az önkénnytől. Lássunk néhány példát fizikai törvényekre görbült téridőben, amelyek leírják az anyag dinamikáját. Ne felejtjük el azonban, hogy az a  $g_{ab}$  metrika, ami ezekben az egyenletekben szerepel, nem adott előre, hanem az anyag mozgása határozza meg, hogy milyen lesz.

1. *Anyagi pont mozgása.* Az anyagi pont mozgását négyes-sebességének  $u^a$  vektorával jellemezhetjük, amely az anyagi pont időszerű világvonalának érintője. Ha az anyagi pont szabad mozgást végez (azaz a newtoni megfogalmazás szerint szabadon esik a

gravitációs mezőben), akkor világvonala időszerű geodetikus, amelynek egyenlete

$$u^a \nabla_a u^b = 0. \quad (4.3.1.)$$

Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést tekinthetjük a részecske  $a^b = u^a \nabla_a u^b$  gyorsulásának. Ha az  $m$  nyugalmi tömegű részecske  $a^b$  gyorsulása nem zérus, akkor mondhatjuk, hogy rá  $f^b = ma^b$  erő hat. Erre jó példa a külső elektromágneses mezőben mozgó  $m$  nyugalmi tömegű,  $q$  töltésű részecske. Jelölje  $F_{ab}$  a külső elektromágneses mező térerősségtenzorát. A részecskére a Lorentz-erő hat és a mozgásegyenlete

$$u^a \nabla_a u^b = \frac{q}{m} F^b_c u^c, \quad (4.3.2.)$$

ami a speciális relativitáselméletben érvényes egyenlet általánosítása  $\partial_a \rightarrow \nabla_a$  helyettesítéssel és azzal, hogy most a indexek fel- és lehúzása a  $g_{ab}$  metrikával és  $g^{ab}$  inverzével történik, pl.  $F^b_c = g^{bd} F_{dc}$ . A részecske négyesimpulzusára megtartjuk a

$$p^a = mu^a \quad (4.3.3.)$$

definíciót. Ha a részecske energiáját olyan  $v^a$  négyessebességű megfigyelő méri, aki mellett a részecske éppen elhalad, akkor ő a részecske energiáját

$$E = -p_a v^a = g_{ab} p^a v^b \quad (4.3.4.)$$

értékűnek méri. Az energiamérés eredményének ez a definíciója összhangban van a mérési esemény környezetében felvett lokális inerciarendszerben a speciális relativitáselmélet szerinti energia-definícióval. Az (4.3.4.) definícióban szereplő  $v^a$  és  $p^a$  vektorok a téridő ugyanazon pontjához tartozó érintőtérnek a vektorai. Fontos különbség azonban a speciális relativitáselmülethez képest, hogy a távoli megfigyelők nem tudják egyértelműen értelmezni a részecske energiáját. A párhuzamos eltolás ugyanis a görbült téridőben függ a görbétől, amelynek mentén végezzük az eltolást. Ezért nem értelmezhető egyértelműen a távoli megfigyelő  $v^a$  sebességének párhuzamos eltoltja, amikor a  $v^a$  sebességet el akarjuk párhuzamosan tolni a részecske világvonalának valamely pontjához. Márpedig a részecske energiájának (4.3.4.) alakú összefüggéssel történő értelmezéséhez ezt meg kellene tudnunk tenni, mert matematikailag nem értelmes különböző érintőterek vektorait skalárisan szorozni.

## 2. Ideális folyadék mozgása.

A folytonos közegeket most is a  $T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzorukkal jellemezhetjük. Az ideális folyadék energiaimpulzus-tenzora ugyanolyan alakú, mint a speciális relativitáselméletben,

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b), \quad (4.3.5.)$$

azzal az értelemszerű változtatással, hogy a Minkowski-metrika helyébe a téridő ismeretlen  $g_{ab}$  metrikája lép. Ha a folyadékra nem hat nem gravitációs természetű

külső erő, akkor a speciális relativitáselméletben használt mozgásegyenlet általánosítása:

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \quad (4.3.6.)$$

Elismételhetjük azt a levezetést, amit a speciális relativitáselméletben tettünk az előző fejezetben, hogy megkapjuk a kontinuitási egyenlet és az Euler-egyenlet általánosítását. A levezetés lényegében változatlan, hiszen korábban levezetésünk során a  $\partial_a$  deriváló operátornak csak azt a tulajdonságát használtuk ki, hogy az is egyfajta kovariáns deriváló operátor (az  $\eta_{ab}$  Minkowski-metrikához tartozó). Ezért a megfelelő egyenletek most is azonos alakúak csak a  $g_{ab}$  metrika és a hozzá tartozó  $\nabla_a$  kovariáns gradiens szerepel bennük:

$$u^a \nabla_a \rho + (\rho + P) \nabla^a u_a = 0, \quad (4.3.7.)$$

$$(\rho + P) u^a \nabla_a u_b + (g_{ab} + u_a u_b) \nabla^a P = 0. \quad (4.3.8.)$$

Lényeges különbség van azonban a (4.3.6.) egyenlet jelentésében. Képzeliük el a megfigyelők egy családját, amelyek négyessebességét a  $v^a$  időszerű vektormező,  $v^a v_a = -1$  írja le. Ha létezik olyan időszerű  $v^a$  vektormező, amelyik **kovariáns konstans**, azaz amelyre  $\nabla_a v_b = 0$  mindenütt a téridőben, akkor

$$\nabla^a (T_{ab} v^b) = v^b \nabla^a T_{ab} + T_{ab} \nabla^a v^b = 0, \quad (4.3.9.)$$

és akkor a megfigyelők ezen családjának bármely tagja számára a  $J_a = -T_{ab} v^b$  négyes-energiaáramsűrűség divergenciája zérus,  $\nabla^a J_a = 0$ . Ekkor alkalmazhatjuk a téridő bármely két térszerű (azaz időirányú normálissal rendelkező) hiperfelülete közötti, térben tetszőlegesen határolt tartományára a görbült téridőben érvényes Gauss-tételt. Ilyen esetben ismét megkapjuk a lokális energiamegmaradás törvényét. A változást a lapos téridő (Minkowski-téridő) esetéhez képest az jelenti, hogy görbült téridőben nem mindig létezik olyan időszerű vektormező, amelyik kovariáns konstans. Ezért általában tetszőleges téridőben nem tudunk lokális energiamegmaradási törvényről beszélni. Ez abból látszik, hogy a  $v^a$  vektormező kovariáns konstans voltának feltétele átírható  $\nabla_{(a} v_{b)} = 0$  alakba, ami viszont a Killing-egyenlet. Azoknak a megfigyelőknek a családja, akiknek létezése lehetővé tenné, hogy lokális energiamegmaradási törvény legyen érvényben, olyan négyes-sebességmezővel kell rendelkezzen, ami egy Killing-vektormező. Ilyen vektormező pedig csak akkor létezik, ha létezik a metrikának egy olyan egy-paraméteres izometria-csoportja, ami időszerű Killing-vektormezőt generál. Ilyen izometria-csoport pedig általában tetszőleges görbült téridőben nem létezik. A helyzetet fizikailag az magyarázza, hogy „csak” az ideális folyadék energiáját diszkutáljuk és nem vesszük figyelembe, hogy az ideális folyadékokra az árapály-erők hatnak, és azok változtatják az energiáját. Ha lenne lehetőség valahogyan figyelembe venni a téridő görbültségéből származó gravitációs energiát, akkor remélhetnénk egy lokális energiamegmaradási törvény kimondhatóságát. Az általános relativitáselméletben azonban nem létezik a gravitációnak értelmes energiaimpulzus-tenzora.

**Megjegyzés:** Megtehetjük, hogy a téridőnek olyan kicsiny tartományát vizsgáljuk csak, amelynek méretei a görbületi sugárhoz képest kicsinyek. Ilyen kicsiny téridő-tartományban az árapályerők munkája a folyadékon elhanyagolható és ezért a folyadék energiája közelítőleg meg kell, hogy maradjon. **Kicsiny téridő-tartományban valóban lehet mindig találni jó közelítéssel kovariáns konstans Killing-vektormezőt.** Az utóbbi által jellemzett megfigyelők családja számára ezért a (4.3.6.) egyenlet,  $\nabla^a T_{ab} = 0$ , jó közelítéssel jelenti az energia lokális megmaradását a téridő bármely elegendően kicsiny lokális tartományában. Erre támaszkodva elfogadjuk, hogy bármely anyag és fizikai mező  $T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzorának kovariáns divergenciája,  $\nabla^a T_{ab} = 0$ .

### 3. Klasszikus skalármező.

Kézenfekvő, hogy a Klein-Gordon-egyenletet az egyszerű  $\partial_a \rightarrow \nabla_a$  helyettesítési szabály alkalmazásával általánosítsuk,

$$\nabla^a \nabla_a \phi - m^2 \phi = 0. \quad (4.3.10.)$$

Ekkor a klasszikus skalármező energiaimpulzus-tenzora:

$$T_{ab} = (\nabla_a \phi)(\nabla_b \phi) - \frac{1}{2} g_{ab} [(\nabla_c \phi)(\nabla^c \phi) + m^2 \phi^2], \quad (4.3.11.)$$

ami eleget tesz a

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \quad (4.3.12.)$$

feltételnek.

Meg kell azonban említeni, hogy a Klein-Gordon-egyenletnek nem ez az egyetlen lehetséges általánosítása; egy másik lehetőség az általánosított egyenlet

$$\nabla^a \nabla_a \phi - m^2 \phi - \alpha R \phi = 0 \quad (4.3.13.)$$

alakja, ahol  $R$  a téridő Gauss-görbülete,  $\alpha$  valós állandó. Pl. az  $\alpha = 1/6$  választás különösen érdekes, mert ekkor az egyenlet konform-szimmetriával rendelkezik; az  $\alpha = 0$  eset pedig visszaadja az egyszerű helyettesítési szabály alkalmazásával kapott alakot.

### 4. Az elektromágneses mező.

A Maxwell-egyenletek görbült téridőben az egyszerű helyettesítési szabállyal

$$\nabla^a F_{ab} = -4\pi j_b, \quad (4.3.14.)$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \quad (4.3.15.)$$

alakúaknak adódnak. Az energiaimpulzus-tenzor alakjában is csak annyi a változás, hogy az  $\eta_{ab}$  metrikát a  $g_{ab}$  metrikára kell cserélni:

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{de} F^{de} \right). \quad (4.3.16.)$$



A (4.3.15.) egyenlet alapján legalább lokálisan bevezethető az  $A_a$  vektorpotenciál, amelynek segítségével

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a. \quad (4.3.17.)$$

A (4.3.15.) egyenletet átírhatjuk az elektromágneses térerősségre, mint az  $\mathbf{F}$  két-formára vonatkozó

$$d\mathbf{F} = 0 \quad (4.3.18.)$$

alakba. Ekkor viszont a Poincaré-lemma megfordításaként legalább lokálisan mindig létezik olyan  $\mathbf{A}$  egy-forma, az elektromágneses vektorpotenciál, amelynek külső deriváltjaként  $\mathbf{F}$  előállítható

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} \quad (4.3.19.)$$

alakban.

A vektorpotenciálra ekkor a (4.3.14.) egyenletből a

$$\nabla^a \nabla_a A_b - R^d_b A_d = -4\pi j_b \quad (4.3.20.)$$

egyenlet adódik a

$$\nabla^a A_a = 0 \quad (4.3.21.)$$

Lorentz-mértékben.

A (4.3.20.) egyenlet bal oldalán a Ricci-tenzort tartalmazó tag azért jelent meg, mert a tetszőleges, nem lapos  $g_{ab}$  metrikához tartozó kovariáns gradiens-operátorok nem felcserélhetők,

$$\begin{aligned} \nabla^a F_{ab} &= \nabla^a (\nabla_a A_b - \nabla_b A_a) = \nabla^a \nabla_a A_b - (\nabla_b \nabla_a A^a - R_{ab}^a A^d) \\ &= \nabla^a \nabla_a A_b - R_{bad}^a A^d = \nabla^a \nabla_a A_b - R_{bd} A^d = \nabla^a \nabla_a A_b - R_{db} A^d \\ &= \nabla^a \nabla_a A_b - R^d_b A_d. \end{aligned} \quad (4.3.22.)$$

Ha a speciális relativitáselméletben érvényes megfelelő egyenletre alkalmaztuk volna az egyszerű helyettesítési szabályt, akkor nem kaptuk volna meg a Ricci-tenzort tartalmazó tagot. Ennek azonban ott kell lennie, mert ekkor biztosított a (görbületi sugárhoz képest kellően kicsiny méretű téridő-tartományokban) a **lokális töltés-megmaradás**,

$$\nabla^b j_b = 0. \quad (4.3.23.)$$

Azt kell belássuk, hogy  $\nabla^b \nabla_a F_{ab} = 0$ . Tetszőleges koordinátabázisban írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu F^{\nu\mu} &= \nabla_\mu (\partial_\nu F^{\nu\mu} + \Gamma^\nu_{\nu\kappa} F^{\kappa\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\kappa} F^{\nu\kappa}) \\ &= \nabla_\mu (\underbrace{\nabla_\nu F^{\nu\mu} + \Gamma^\nu_{\nu\kappa} F^{\kappa\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\kappa} F^{\nu\kappa}}_{=0}) + \Gamma^\mu_{\mu\rho} (\partial_\nu F^{\nu\rho} + \Gamma^\nu_{\nu\kappa} F^{\kappa\rho} + \underbrace{\Gamma^\rho_{\nu\kappa} F^{\nu\kappa}}_{=0}) \\ &= \partial_\mu (\Gamma^\nu_{\nu\kappa} F^{\kappa\mu}) - \underbrace{\Gamma^\mu_{\mu\rho} \partial_\nu F^{\rho\nu}}_{=\Gamma^\nu_{\nu\kappa} \partial_\mu F^{\kappa\mu}} \\ &= F^{\kappa\mu} \partial_\mu \Gamma^\nu_{\nu\kappa} \\ &= F^{\kappa\mu} \partial_\mu \partial_\kappa \ln \sqrt{|g|} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.24.)$$

A 3. egyenlet felírásakor felhasználtuk, hogy  $\Gamma^\mu_{\nu\kappa} = \Gamma^\mu_{\kappa\nu}$ ,  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  és  $\Gamma^\mu_{\mu\rho} \Gamma^\nu_{\nu\kappa} F^{\kappa\rho} = 0$ .

Ha az elektromágneses mező sokkal kisebb méretskálán változik, mint a téridő görbülete, akkor várhatjuk, hogy lesz a forrásmentes  $j_b = 0$  esetben a görbült téridőben érvényes (4.3.20.) hullámegyenletnek

$$A_a = C_a e^{iS} \quad (4.3.25.)$$

alakú közelítő megoldása, ahol  $C_a$  alig változik, jó közelítéssel állandó. Ez a **geometriai optikának** megfelelő közelítés. Helyettesítsük be ezt a vektorpotenciálalakot a (4.3.20.) egyenletbe. Elhanyagolva  $C_a$  deriváltját, ami feltevésünk szerint „kicsi”, és a Ricci-tenzort tartalmazó tagokat, megint azt találjuk, hogy

$$(\nabla^a S)(\nabla_a S) = 0, \quad (4.3.26.)$$

azaz hogy a fázisfelületek null-felületek. A Minkowski-téridőben a geometriai optikai közelítésben ugyanezt kaptuk. Elismételve ottani érvelésünket, most is beláthatjuk, hogy  $k^a = \nabla^a S$  egyúttal null-geodetikusok érintője. **A fénysugarak tehát az általános relativitáselmélet szerint is null-geodetikusok mentén terjednek.**

### 4.3.3. A téridő dinamikája

Az általános relativitáselmélet felfogása szerint a gravitációs mező maga is dinamikai objektum, azonosnak tekinthető a téridő geometriájával. A gravitációs mezőt jellemző dinamikai változó a téridő  $g_{ab}$  metrikája, ami egy másodrendű szimmetrikus tenzormező. Az anyag és a fizikai mezők fenti mozgásegyenleteiben egy előre nem meghatározott  $g_{ab}$  metrika és az általa indukált kovariáns deriválás operátora szerepel. Most azzal a kérdéssel kezdünk el foglalkozni, hogy milyen törvény határozza meg magát a metrikát és rajta keresztül a téridő görbületét. Mach elképzeléseinek megfelelően a téridő nem egyszerűen „színpada” az anyag dinamikai történéseinek, hanem maga is az anyag mozgására dinamikailag „válaszoló” objektum. Ezért arra keressük a választ, hogy mi az az egyenlet, ami leírja a téridő geometriájának és az anyag mozgásának kapcsolatát. Ha van ilyen egyenlet, az írja le, hogy az anyag hogyan hat vissza a gravitációs mezőre.

A fenti kérdés megválaszolásához segítséget nyújt, ha összehasonlítjuk, mit mond az árapály-erőről a newtoni gravitációs törvény és az általános relativitáselmélet. A newtoni gravitáció szerint a gravitációs mező  $\vec{g}(\vec{r})$  térerősségét a  $\phi(\vec{r})$  gravitációs potenciálból származtatjuk,

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}). \quad (4.3.27.)$$

Az ekvivalencia-elvet figyelembe véve, két szomszédos, az  $\vec{r}$  és az  $\vec{r} + \vec{x}$  helyen szabadon eső részecske relatív gyorsulása, az árapály-effektus miatti relatív gyorsulás

$$\vec{g}(\vec{r} + \vec{x}) - \vec{g}(\vec{r}) = -(\vec{x} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi. \quad (4.3.28.)$$

Az általános relativitáselméletben a geodetikus deviáció egyenlete alapján az árapály gyorsulás,

$$a^a = -R_{cbd}{}^a v^c x^b v^d, \quad (4.3.29.)$$

ami az alábbiakat jelenti: időszerű geodetikusok egy-paraméteres seregén belül két szomszédos, szabadon eső részecskét vizsgálunk, az egyik a  $P$  pontban van, négyesebessége  $v^c(P)$ , a másik az  $x^b$  térszerű vektorral odább elhelyezkedő geodetikus  $Q$  pontjában van  $v^d(Q)$  négyesebességgel, ahol  $P$  és  $Q$  az időszerű geodetikus-seregre ortogonális valamely hiperfelület pontjai. Hasonlítsuk össze az árapály-gyorsulás (4.3.28.) és (4.3.29.) kifejezéseit. Az összehasonlítás azt sugallja, hogy a  $\partial_b \partial^a \phi$  kifejezésnek az  $R_{cbd}{}^a v^c v^d$  kifejezés az analogonja. A newtoni gravitációs potenciál másrésztől eleget tesz a

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho \quad (4.3.30.)$$

egyenletnek ( $G = 1$  esetén). Az időszerű geodetikusok egy-paraméteres családjához  $v^a$  sebességgel mozgó megfigyelők seregét köthetjük. Ezek a megfigyelők a  $\rho$  tömegsűrűséget ( $c = 1$  egységrendszerben) a  $T_{ab} v^a v^b$  energiasűrűséggel azonosítják. Mindezt figyelembe véve az alábbi analógia állítható fel:

$$R_{cad}{}^a v^c v^d \Leftrightarrow \vec{\nabla}^2 \phi \Leftrightarrow 4\pi\rho \Leftrightarrow 4\pi T_{ab} v^a v^b, \quad (4.3.31.)$$

Mivel ez az analógia a geodetikus-családhoz tartozó valamennyi megfigyelő esetén kijelenthető, az a sejtésünk támad, hogy

$$R_{cd} \Leftrightarrow 4\pi T_{cd} \quad (4.3.32.)$$

a téridő geometriája és az anyag energiaimpulzus-tenzora közötti kapcsolat. Noha kezdetben Einstein is ezt az analógiát posztulálta, mint egyenlőséget, hamar be lehet látni, hogy az  $R_{cd} = 4\pi T_{cd}$  egyenlet nem lehet a helyes egyenlet. Egyrészt, az anyag energiaimpulzus-tenzorának négyesdivergenciája zérus,  $\nabla^a T_{ab} = 0$ , másrészt a Bianchi-azonosság következtében az Einstein-tenzor négyesdivergenciája is eltűnik,  $\nabla^a (R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R) = 0$ . Ha mármint az (4.3.32.) sejtés mint egyenlet áll fenn, akkor annak kell következnie, hogy  $\nabla^a R = 0$ , azaz hogy a görbület kovariáns konstans. Ekkor pedig az anyag energiaimpulzus-tenzorának spurja szintén mindenütt kovariáns konstans kell legyen a Világegyetemben. Ez fizikailag nem elfogadható erős korlátozás lenne az anyag mozgására, úgyhogy Einstein el is vetette a görbület és az anyag energiaimpulzus-tenzora közti ezen kapcsolatot.

Az Einstein nevéhez fűződő megoldás is kézenfekvő a fenti megfontolások után. A téridő görbülete (geometriai szerkezete) és az anyag mozgása (energiaimpulzus-tenzora) közti kapcsolatot posztuláljuk

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (4.3.33.)$$

azaz

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab} \quad (4.3.34.)$$

alakban. Ez az **Einstein-egyenlet**. Ekkor összhangban vagyunk az energia lokális megmaradásával, mert a Bianchi-azonosságból következik, hogy az Einstein-tenzor divergenciája zérus, a (4.3.33.) Einstein-egyenletből pedig akkor az, hogy  $\nabla^a T_{ab} = 0$ .

**Megjegyzés:** Az (4.3.34.) egyenletet a  $G = c = 1$  egységrendszerben írtuk fel. Az egyenlet tetszőleges egységrendszerben érvényes alakja:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab} \quad (4.3.35.)$$

Néha hasznos az Einstein-egyenletet egy másik alakba is átírni. Képezzük ehhez a (4.3.34.) egyenlet mindkét oldalának spúrját,

$$-R = 8\pi T, \quad (4.3.36.)$$

ahol  $T = T^a_a$ , és helyettesítsük be a skalárgörbület innen kapott kifejezését a (4.3.34.) egyenletbe. Ekkor **az Einstein-egyenletet az alábbi alakban kapjuk:**

$$R_{ab} = 8\pi \left( T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T \right). \quad (4.3.37.)$$

**Megjegyzés:** A newtoni elméletnek olyan esetekben kell alkalmazhatónak lennie, amikor az anyag energiasűrűségét a mechanikai feszültségeknél sokkal nagyobb mértékben mérik az anyaghoz képest közelítőleg nyugvó megfigyelők. Ekkor viszont  $T \approx -\rho = -T_{ab}v^av^b$ . Ha ezt a közelítést használjuk, akkor a (4.3.37.) Einstein-egyenletből

$$R_{ab}v^av^b = 8\pi \left( T_{ab}v^av^b - \frac{1}{2}v^av_aT \right) = 8\pi \left( T_{ab}v^av^b + \frac{1}{2}T \right) \approx 4\pi T_{ab}v^av^b \quad (4.3.38.)$$

adódik. Ez pontosan az a sejtés, amihez korábban úgy jutottunk el, hogy a newtoni gravitáció és az általános relativitáselméletben érvényes geodetikus deviáció egyenlete alapján meghatározott árapály-gyorsulást hasonlítottuk össze.

Az Einstein-egyenlet birtokában az általános relativitáselmélet a következőképpen foglalható össze. **A gravitáció jelensége a téridő szerkezetében nyilvánul meg, ami meghatározza, hogyan esnek benne szabadon a részecskék, hogyan halad a fénysugár. A téridő egy  $g_{ab}$  Lorentz-szignatúrájú metrikával ellátott  $M$  sokaság. A téridő-sokaság görbületét a mozgó anyag eloszlása az anyag gravitációs hatásánál fogva alakítja ki az energiaimpulzus-tenzora révén, az Einstein-egyenlet által meghatározott módon.**

**Megjegyzés:** Az Einstein-egyenlet tényleges megoldásához választanunk kell valamilyen koordinátarendszert, és ki kell fejezzük az  $R_{\mu\nu}$  Ricci-tenzor komponenseit a metrikus tenzor  $g_{\mu\nu}$  komponenseivel ebben a koordinátabázisban. Mint láttuk,  $R_{\mu\nu}$  a metrikus tenzornak és deriváltjainak nem lineáris kifejezése, jóllehet a metrikus tenzor második deriváltjaiban lineáris. Az Einstein-egyenlet tehát a metrika komponenseire egy másodrendű, nem lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer. Erre gondolva szoktunk **Einstein-egyenletekről (többszámban!)** beszélni. Lorentz-szignatúrájú metrika esetén ezek az egyenletek hullámegyenlet jellegűek, azaz hiperbolikusak. Később külön foglalkozunk avval, hogy éppen a kellő számú egyenlet és ismeretlen szerepel az Einstein-egyenletekben ahhoz, hogy jól definiált kezdetiérték-feladatot lehessen megfogalmazni az Einstein-egyenletekkel kapcsolatban, noha ez kellő körültekintést igényel.

**Megjegyzés:** Az Einstein-egyenletek mutatnak bizonyos analógiát a Maxwell-egyenletekkel. A Maxwell-egyenleteket meg tudjuk oldani úgy, hogy előre megadjuk a  $j^a$  áramsűrűséget, mint külső forrást, ügyelve rá, hogy ne sértsük meg a lokális töltésmegmaradás  $\partial_a j^a = 0$  törvényét. Az Einstein-egyenletekben a forrás szerepét az anyag  $T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzora játssza. Még sincsen sok értelme arról beszélni, hogy előre megadjuk  $T_{ab}$ -t, hiszen annak kifejezésében az ismeretlen  $g_{ab}$  metrikus tenzor is szerepel. **Az Einstein-egyenletek tehát csak szimultán oldhatók meg az anyag mozgását leíró mozgásegyenletekkel.** Ez lényegi különbség a Maxwell-egyenletekhez képest.

**Megjegyzés:** Utolsó megjegyzésünk az általános relativitáselmélet konzisztenciájának egyik vonására mutat rá. Azzal indultunk, hogy az anyag mozgásegyenleteit, energiaimpulzus-tenzorát posztuláltuk, majd az Einstein-egyenlet révén kapcsolatba hoztuk a téridő geometriai szerkezetét az anyag energiaimpulzus-tenzorával. Az Einstein-egyenletekből azonban következik, hogy  $\nabla^a T_{ab} = 0$ , ami megszorítást jelent az anyag mozgására. Ideális folyadék (por, olyan részecskékből álló anyag, amelynek részecskéi között elhanyagolható a kölcsönhatás) esetén ez a megszorítás olyan erős, hogy  $\nabla^a T_{ab} = 0$  a mozgásegyenletek teljes fizikai tartalmát hordozza: a kontinuitási egyenletet és az Euler-egyenletet. Ebben az esetben a nyomás zérus,  $P = 0$ , és az Euler-egyenletből következik, hogy az ideális folyadék részecskéi időszerű geodetikusok mentén mozognak,  $u^b \nabla_b u^a = 0$ . Általánosan is meg lehet mutatni, hogy minden olyan testnek, amely elég kicsi ahhoz, hogy az önmagára gyakorolt gravitációs hatása elhanyagolható legyen, geodetikus mentén kell mozognia. Az Einstein-egyenletekből tehát következik az az alapfeltevésünk, hogy a szabadon eső próbatestek világvonalai geodetikusok. Természetesen a jobban kiterjedt testek mozgásának világvonala (darabkáinak világvonalai) eltér(nek) a geodetikustól az anyagdarabkák között fellépő árapály-erők következtében. Az ilyen testek mozgása is meghatározható a  $\nabla^a T_{ab} = 0$  egyenletből (az irodalmi hivatkozásokat ld. [1]).

## 5. A linearizált Einstein-egyenletek

### 5.1. Az Einstein-egyenletek linearizált alakja

Az Einstein-egyenletekben a metrikus tenzor és deriváltjai nem lineárisan szerepelnek. Ez is egy nagy különbség a gravitációs mező elmélete és a Maxwell-elmélet között. (Az utóbbiban a térmennyiség és deriváltjai lineárisan szerepelnek.) Abban az esetben azonban, amikor gyenge a gravitációs mező, akkor azt várhatjuk, hogy a téridő geometriája csak kicsit tér el a Minkowski-téridő geometriájától, csak kicsit görbült. Ekkor a metrika csak kicsit különbözik az  $\eta_{ab}$  Minkowski-metrikától, azaz

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab} \quad (5.1.1.)$$

alakba írható, ahol  $\gamma_{ab}$  „kicsi”. A helyzet olyan, mintha lenne egy Minkowski-féle háttér-téridő, amihez képesti eltérést méri a  $\gamma_{ab}$   $(0, 2)$ -tenzor. A Minkowski-háttér azt is biztosítja, hogy választható globális inerciális koordinátarendszer (végtelen sokféleképpen). Az, hogy  $\gamma_{ab}$  kicsi, azt jelenti, hogy tetszőlegesen választott globális inerciális koordinátarendszerben a  $\gamma_{\mu\nu}$  komponensek abszolút értékben egynél sokkal kisebbek,  $|\gamma_{\mu\nu}| \ll 1$ . **A gyenge gravitációs mezőkre alkalmazható közelítésünk abban áll, hogy az Einstein-egyenleteket a  $\gamma_{ab}$  tenzorban, a valódi metrika és a Minkowski-metrika eltérésében linearizáljuk.**

Olyan jelöléseket kell használnunk, hogy a  $\gamma_{ab}$ -függés mindenütt explicit legyen. Ezért  $\partial_a$  az  $\eta_{ab}$  Minkowski-metrika szerinti kovariáns deriváló operátort (a koordináták szerinti parciális deriválást) jelöli. Az indexek fel- és lehúzását pedig  $\eta_{ab}$ -vel és  $\eta^{ab}$ -vel fogjuk végezni. Egyetlen kivétel, hogy  $g^{ab}$  továbbra is az inverz-metrikát és nem  $\eta^{ac}\eta^{bd}g_{cd}$ -t jelenti. Lineáris közelítésben

$$g^{ab} = \eta^{ab} - \gamma^{ab}, \quad (5.1.2.)$$

mert ekkor

$$(\eta^{ab} - \gamma^{ab})(\eta_{bc} + \gamma_{bc}) = \delta^a_c - \gamma^a_c + \gamma^a_c + \mathcal{O}((\gamma)^2) \approx \delta^a_c. \quad (5.1.3.)$$

Az Einstein-egyenlet lineáris közelítésben a

$$G_{ab}^{(1)} = \partial^c \partial_{(b} \bar{\gamma}_{a)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial^c \partial^d \bar{\gamma}_{cd} = 8\pi T_{ab} \quad (5.1.4.)$$

alakot ölti, ahol bevezettük a

$$\bar{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \gamma \quad (5.1.5.)$$

tenzort, amelynek spúrja  $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}^a_a$ .

Lineáris közelítésben a Christoffel-szimbólumok,

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}\eta^{cd}(\partial_a\gamma_{bd} + \partial_b\gamma_{ad} - \partial_d\gamma_{ab}), \quad (5.1.6.)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{cb}^c &= \frac{1}{2}\eta^{cd}(\partial_c\gamma_{bd} + \partial_b\gamma_{cd} - \partial_d\gamma_{cb}) = \frac{1}{2}(\partial^c\gamma_{bc} + \partial_b\gamma - \partial^c\gamma_{cb}) \\ &= \frac{1}{2}\partial_b\gamma, \quad \gamma = \gamma_a^a, \end{aligned} \quad (5.1.7.)$$

elsőrendűek, a Ricci-tenzor első renddel bezárólag

$$\begin{aligned} R_{ab}^{(1)} &= \partial_c\Gamma_{ab}^c - \partial_a\Gamma_{cb}^c = \frac{1}{2}\partial^d(\partial_a\gamma_{bd} + \partial_b\gamma_{ad} - \partial_d\gamma_{ab}) - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma \\ &= \partial^c\partial_{(a}\gamma_{b)c} - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma, \end{aligned} \quad (5.1.8.)$$

az  $R^{(1)}$  skalárgörbület pedig ugyanebben a közelítésben

$$R^{(1)} = R^{(1)a}{}_a = \partial^c\partial^d\gamma_{cd} - \partial^c\partial_c\gamma, \quad (5.1.9.)$$

úgyhogy végül az Einstein-tenzor

$$\begin{aligned} G_{ab}^{(1)} &= R_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{ab}R^{(1)} \\ &= \partial^c\partial_{(a}\gamma_{b)c} - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma - \frac{1}{2}\eta_{ab}(\partial^c\partial^d\gamma_{cd} - \partial^c\partial_c\gamma) \\ &= \partial^c\partial_{(b}\left(\gamma_{a)c} - \frac{1}{2}\eta_{a)c}\gamma\right) + \frac{1}{2}\partial_{(a}\partial_{b)}\gamma - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c\left(\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial_c\gamma \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\left(\gamma_{cd} - \frac{1}{2}\eta_{cd}\gamma\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial_c\gamma + \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial_c\gamma \\ &= \partial^c\partial_{(b}\bar{\gamma}_{a)c} - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\bar{\gamma}_{cd} \end{aligned} \quad (5.1.10.)$$

alakba írható.

A diffeomorfizmusok és a metrika perturbációi közötti kapcsolatról a C. Függelékben elmondottak értelmében a linearizált Einstein-egyenletek valamely  $\gamma_{ab}$  megoldása és  $\gamma'_{ab}$  megoldása fizikailag egyenértékű, ha  $\gamma_{ab}$  és  $\gamma'_{ab}$  csupán a perturbálatlan  $\eta_{ab}$  metrika valamely infinitezimális  $\xi^a$  vektormező szerinti Lie-deriváltjában különböznek, azaz

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a\xi_b + \partial_b\xi_a. \quad (5.1.11.)$$

Ez megfelel az  $x^a \rightarrow x'^a = x^a + \xi^a(x)$  infinitezimális lokális koordináta-transzformációnak.

A perturbált metrikus tenzor infinitezimális általános koordinátatranszformáció után:

$$\begin{aligned} (\eta_{\mu\nu} + \gamma'_{\mu\nu}) &= \sum_{\kappa,\lambda} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} (\eta_{\kappa\lambda} + \gamma_{\kappa\lambda}) \\ &= \sum_{\kappa,\lambda} \left( \delta_\mu^\kappa \delta_\nu^\lambda + \delta_\mu^\kappa \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu} + \delta_\nu^\lambda \frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}((\xi)^2) \right) (\eta_{\kappa\lambda} + \gamma_{\kappa\lambda}) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}((\xi)^2), \end{aligned} \quad (5.1.12.)$$

ahonnan megkapjuk az (5.1.11.) mértéktranszformáció képletét.

Ez a mértékszabadság lehetővé teszi, hogy a  $\gamma_{ab}$  metrikákat ekvivalencia-osztályokba soroljuk. Egy ekvivalencia-osztályba tartoznak mindazok a  $\gamma_{ab}$  perturbációk, amelyek egymásból az (5.1.11.) mértéktranszformációval megkaphatók, és különböző ekvivalencia osztályokba azok, amelyek egymásból nem kaphatók meg mértéktranszformációkkal. A mértékekvivalens perturbációk közül kiválaszthatunk egyet a

$$\partial^b \bar{\gamma}_{ab} = 0 \quad (5.1.13.)$$

mértékfeltétel segítségével, ami az elektrodinamikában gyakran használt Lorentz-feltétel analogonja. (Pontosabban, az (5.1.13.) mértékfeltétel még mindig megenged egy korlátozott mértékszabadságot, amire a gravitációs hullámok vizsgálatokor még visszatérünk.)

Ez a mértékfeltétel valóban kiróható, ha ugyanis  $\xi^a(x)$ -et a

$$\partial^b \partial_b \xi_a = -\partial^b \bar{\gamma}_{ab} \quad (5.1.14.)$$

egyenlet megoldásaként választjuk, ahol  $\gamma_{ab}$  tetszőleges perturbáció, akkor a belőle az (5.1.11.) mértéktranszformációval kapott  $\gamma'_{ab}$ , ill.  $\bar{\gamma}'_{ab}$  perturbáció kielégíti az (5.1.13.) feltételt. Ekkor ugyanis az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$\begin{aligned} \gamma'_{ab} &= \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a, \\ \gamma' &= \gamma + 2\partial_a \xi^a, \\ \bar{\gamma}'_{ab} &= \gamma'_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma' = \bar{\gamma}_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a - \eta_{ab}\partial_c \xi^c, \\ \partial^b \bar{\gamma}'_{ab} &= \partial^b \bar{\gamma}_{ab} + \partial_a \partial^b \xi_b + \partial^b \partial_b \xi_a - \eta_{ab} \partial^b \partial_c \xi^c = \partial^b \bar{\gamma}_{ab} + \partial_a \partial^b \xi_b - \partial^b \bar{\gamma}_{ab} - \partial_a \partial^b \xi_b = 0. \end{aligned} \quad (5.1.15.)$$

Az (5.1.13.) mértékfeltételt felhasználva, az (5.1.4.) **linearizált Einstein-egyenletet** a

$$\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab} \quad (5.1.16.)$$

alakba tudjuk átírni. Az (5.1.16.) egyenlet analóg a

$$\partial^a \partial_a A_b = -4\pi j_b \quad (5.1.17.)$$

Maxwell-egyenlettel, ahol a vektorpotenciál eleget tesz a  $\partial^a A_a = 0$  Lorentz-feltételnek.

**Megjegyzés:** Ha a lineáris Einstein-egyenleteket az anyagmentes Világegyetemre alkalmazzuk, akkor azokat a szabad gravitációs mező klasszikus téregyenleteinek tekinthetjük. Ekkor  $T_{ab} = 0$  miatt az (5.1.16.) egyenlet az  $m = 0$  tömegű,  $s = 2$  spinű mező klasszikus téregyenletének  $\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = 0$  alakját ölti. Ezért mondhatjuk, hogy általános esetben az Einstein-egyenletek egy önkölcsönható  $m = 0$  tömegű,  $s = 2$  spinű mező klasszikus, nem lineáris téregyenletei. Ez a kijelentésünk azonban némileg „sántít”, mert azoknak a fogalmaknak, hogy egy fizikai mező tömege és spinje, csak Minkowski-téridőben, azaz csak az általános relativitáselmélet lineáris közelítésében adható egzakt jelentés.



## 5.2. A newtoni gravitáció, mint határeset

Az általános relativitáselmélet egyik próbaköve, hogy következik-e belőle Newton gravitációs törvénye olyan körülmények között, amikor az a tapasztalat szerint jó közelítéssel igaz. Ezek a körülmények az alábbiakban foglalhatók össze:

1. A gravitáció gyenge.
2. A gravitációs mező forrásainak (a gravitáló anyagnak) a sebessége kicsi a vákuumbeli fénysebességhez képest.
3. Az anyagban a mechanikai feszültségek abszolút értékben sokkal kisebbek, mint az anyag tömegsűrűsége (ami  $c = 1$  esetén azonos az anyag energiásűrűségével).

Az 1. körülmény lehetővé teszi, hogy az anyagnak a téridő geometriájára gyakorolt hatását jó közelítéssel az (5.1.16.) linearizált Einstein-egyenlettel írjuk le. A 2. és a 3. körülmény azt jelenti, hogy az energiaimpulzus-tenzornak csak az (idő-idő)-komponense nem nulla, a többi komponense elhanyagolható. Az (idő-tér)-komponensek elhanyagolása veszi figyelembe, hogy kicsi az anyag impulzussűrűsége, a (tér-tér)-komponensek elhanyagolása pedig, hogy kicsik a mechanikai feszültségek az anyagban. A fenti tulajdonságú energiaimpulzus-tenzort kézenfekvő

$$T_{ab} \approx \rho t_a t_b \quad (5.2.1.)$$

alakban felvenni, ahol  $t^a$  időszerű vektormező. Egy ilyen vektormező létezésének feltételezése azt jelenti, hogy van olyan globális inerciális koordinátarendszer a Minkowski-féle háttér-téridőben, amelyhez az érintőtérben a  $t^a = (\partial/\partial x^0)^a$  időszerű bázisvektor tartozik. A térszerű koordinátáknak megfelelő  $X_{(\mu)}^a = (\partial/\partial x^\mu)^a$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) bázisvektorokat választhatjuk  $t^a$ -ra ortogonálisan. A  $t^a$  vektormező integrálgörbéi az  $x^0$ -koordinátavonalak. A 2. körülmény értelmében az anyag „lassan” mozog, úgyhogy feltehető, hogy a metrika is csak „lassan” változik. Ezért az (5.1.16.) egyenlet olyan megoldásait keressük, amikor  $\bar{\gamma}_{ab}$  idő-koordináta szerinti deriváltjait elhanyagoljuk.

A választott globális koordinátarendszerben a linearizált Einstein-egyenletek:

$$\Delta \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu, \nu \neq 0 \\ -16\pi\rho, & \text{ha } \mu = \nu = 0 \end{cases}, \quad (5.2.2.)$$

ahol  $\Delta$  a 3-dimenziós (térkoordináták szerinti) Laplace-operátor. Ha  $\mu, \nu \neq 0$ , akkor a homogén Laplace-egyenlet egyetlen, a végtelenben jó viselkedésű megoldása

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0, \quad \text{ha } \mu, \nu \neq 0. \quad (5.2.3.)$$

(Az egyenlet egyetlen alulról és felülről is korlátos megoldása a  $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \text{const.}$  megoldás, ami mértéktranszformációval zérussá tehető.) Ha bevezetjük a

$$\phi = -\frac{1}{4}\bar{\gamma}_{00} \quad (5.2.4.)$$

**gravitációs potenciált**, akkor azt kapjuk, hogy az a

$$\Delta\phi = 4\pi\rho \quad (5.2.5.)$$

Poisson-egyenlet megoldása. Feltevésünk szerint a  $\phi$  potenciál idő szerinti deriváltja elhanyagolható, azaz  $\phi$  sztatikus potenciál, vagy ha  $\rho$  lassan változik a  $t = x^0$  időkoordináta függvényében, akkor kvázisztatikus. Megjegyezzük, hogy közelítéseinknek megfelelően a

$$(\partial/\partial x^0)\bar{\gamma}_{0\mu} + \sum_{\nu=1}^3 (\partial/\partial x^\nu)\bar{\gamma}_{\nu\mu} = 0 \quad (5.2.6.)$$

Lorentz-feltétel automatikusan teljesül. Könnyen beláthatjuk, hogy a **newtoni közelítésben az (5.2.2.) linearizált Einstein-egyenletek megoldása**

$$\gamma_{ab} = -(4t_a t_b + 2\eta_{ab})\phi \quad (5.2.7.)$$

alakban fejezhető ki a gravitációs potenciál segítségével.

Ennek belátásához használjuk fel az alábbi összefüggéseket. Induljunk ki a

$$\bar{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma \quad (5.2.8.)$$

definícióból, ahonnan spúrképzéssel

$$\bar{\gamma} = \gamma - \frac{1}{2}\eta^a_a \gamma = -\gamma, \quad (5.2.9.)$$

mert  $\eta^a_a = \eta_{ab}\eta^{ab} = 4$ . Másrészt

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_{ab}\eta^{ab} = \bar{\gamma}_{00}\eta^{00} = -\bar{\gamma}_{00} = 4\phi, \quad \gamma = -\bar{\gamma} = -4\phi, \quad (5.2.10.)$$

amit felhasználva adódik, hogy

$$\gamma_{ab} = \bar{\gamma}_{ab} + \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma = \bar{\gamma}_{ab} - 2\eta_{ab}\phi, \quad (5.2.11.)$$

ahol  $\bar{\gamma}_{ab} = \bar{\gamma}_{00}t_a t_b$  írható, mert csak az (idő-idő)-komponens nem zérus, úgyhogy végül

$$\gamma_{ab} = -4\phi t_a t_b - 2\eta_{ab}\phi = (-4t_a t_b + 2\eta_{ab})\phi. \quad (5.2.12.)$$

A fentiekből látjuk tehát, hogy a linearizált Einstein-egyenletből a newtoni gravitáció érvényességi feltételeinek megfelelő körülmények között következik a gravitációs potenciálra vonatkozó Poisson-egyenlet, ami a Newton-féle gravitációs

törvény alapja. Például ebből közvetlenül megkapjuk a pontrészcse által keltett gravitációs potenciálmezőt: a térbeli koordinátarendszer origójában nyugvó pontrészcse  $\rho = m\delta(\vec{x})$  tömegsűrűségével a

$$\Delta\phi = 4\pi m\delta(\vec{x}) \quad (5.2.13.)$$

Poisson-egyenlet megoldása a  $\phi = -\frac{m}{|\vec{x}|}$  potenciálmező.

Érdemes meghatározni egy egységnyi tömegű próbarészecske világvonalát is a newtoni közelítésben. Legyen ez a globális inerciális koordinátarendszerünkben  $x^\mu(\tau)$ , ahol  $\tau$  a részecske sajátideje. A világvonal időszerű geodetikus, amelynek egyenlete:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \sum_{\nu,\kappa} \Gamma^\mu_{\nu\kappa} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\kappa}{d\tau} = 0. \quad (5.2.14.)$$

Ha a próbatest sebessége nem relativisztikus, akkor közelítőleg  $\left(\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = (1, 0, 0, 0)$ . Ez viszont azt jelenti, hogy a próbarészecske  $\tau$  sajátideje megegyezik a  $t = x^0$  koordinátaidővel,  $\tau = t$ . A próbarészecske négyessebeségét behelyettesítjük a geodetikus egyenletébe, akkor az a

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = -\Gamma^\mu_{00} \quad (5.2.15.)$$

alakúra egyszerűsödik. A  $\mu = 1, 2, 3$  komponensek esetén

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\mu}\left(\frac{\partial\gamma_{0\mu}}{\partial x^0} + \frac{\partial\gamma_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\mu}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}, \quad (5.2.16.)$$

mivel  $\gamma_{00} = -(4-2)\phi = -2\phi$ . Ekkor viszont a geodetikus egyenletéből megkapjuk a  $\phi$  gravitációs potenciálmezőben mozgó próbarészecske Newton II. törvényének megfelelő mozgásegyenletét:

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}, \quad (\mu = 1, 2, 3). \quad (5.2.17.)$$

Ez azt is jelenti, hogy Kepler törvényei is érvényben maradnak ebben a közelítésben. **Az általános relativitáselmélet tehát teljesen összhangban van gyenge gravitációs mező és lassan mozgó anyag, azaz próbatest esetén Newton gravitációs törvényével.**

**Megjegyzés:** A geodetikus egyenletét használtuk fel, amikor a próbarészecske mozgásegyenletét lineáris közelítésben levezettük. Mint láttuk, a geodetikus hipotézis, azaz hogy a szabadon eső részecskék időszerű geodetikusok mentén mozognak, az energiainpulzus-tenzor divergenciájának eltűnéséből,  $\nabla^a T_{ab} = 0$  következik, ami viszont az Einstein-egyenletekből következő megszorítás az anyag mozgására. A linearizált Einstein-egyenletekből azonban a  $\partial^a T_{ab} = 0$  megszorítás következik, ahol  $\partial^a$  a lapos  $\eta_{ab}$  metrika által

indukált kovariáns derivált, azaz az egyszerű, koordináták szerinti parciális derivált Minkowski-koordináták használata esetén. Ebből a feltételből viszont az következne, hogy a próbatest világvonala a háttér  $\eta_{ab}$  metrika szerinti egyenes, azaz hogy a próbatest egyáltalán nem „érzi” a metrika perturbációját. Látjuk tehát, hogy mennyire körültekintően kell a közelítésünket ahhoz megválasztani, hogy a Newton gravitációs törvényének megfelelő mozgást visszkapjuk az általános relativitáselméletből.

**Megjegyzés:** Meg lehet mutatni (ld. [1]), hogy ha a mozgó anyag sebességét lineáris közelítésben figyelembe vesszük, akkor a gyenge gravitációs mezőben lassan mozgó próbatestre **magneto-gravitációs** erőhatás felléptét kapjuk, amelynek erőtvénnye a Lorentz-erőtörvénnyel azonos alakú.

## 5.3. A gravitációs sugárzás

### 5.3.1. Gravitációs hullámok

A forrásmentes elektromágneses mező egyik jellegzetes tulajdonsága, hogy benne elektromágneses hullámok terjedhetnek, azaz maga az elektromágneses mező is dinamikai objektum. Hasonló a helyzet az általános relativitáselméletben, a metrika (maga a téridő, azaz a gravitációs mező) dinamikai objektum. A téridő görbületében keltett inhomogenitások hullámszerűen terjedhetnek, amit gravitációs sugárzásnak nevezünk. A gravitációs sugárzás forrásaitól távol feltehetjük, hogy a metrika lényegében a lapos Minkowski-metrikához képest kicsit változik csak meg a sugárzás hatására. Ekkor a linearizált, forrásmentes Einstein-egyenleteket használhatjuk a gravitációs sugárzás leírására, amelyek Lorentz-mértékben

$$\begin{aligned}\partial^a \bar{\gamma}_{ab} &= 0, \\ \partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} &= 0\end{aligned}\tag{5.3.1.}$$

alakúak. Ezek hasonlóak, mint a forrásmentes elektromágneses mező egyenletei:

$$\begin{aligned}\partial^a A_a &= 0, \\ \partial^c \partial_c A_a &= 0.\end{aligned}\tag{5.3.2.}$$

A lényegi különbség annyi, hogy az elektromágneses sugárzást az  $A_a$  vektorpotenciál, egy  $(0,1)$ -tenzor, a gravitációs sugárzást pedig a  $\bar{\gamma}_{ab}$   $(0,2)$ -tenzor írja le. Az elektrodinamikában a Lorentz-mérték még nem rögzíti egyértelműen a térkonfigurációt, mert minden olyan további  $A_a \rightarrow A_a + \partial_a \chi$  mértéktranszformáció megengedett, ahol a  $\chi$  skalárfüggvény a  $\partial^c \partial_c \chi = 0$  egyenlet megoldása. Hasonlóan, a linearizált gravitáció esetében megengedett az (5.3.1.) mértékfeltétel kirovása után minden olyan további

$$\gamma_{ab} \rightarrow \gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a\tag{5.3.3.}$$

mértéktranszformáció, ahol

$$\partial^c \partial_c \xi^a = 0. \quad (5.3.4.)$$

Ennek belátásához megmutatjuk, hogy a Lorentz-feltételt kielégítő bármely  $\gamma_{ab}$  (5.3.3.) transzformáltja is kielégíti a Lorentz-feltételt, ha a transzformáció (5.3.4.) tulajdonságú. Képezzük  $\gamma'_{ab}$  divergenciáját,

$$\partial^a \gamma'_{ab} = \partial^a \gamma_{ab} + \partial^a \partial_a \xi_b + \partial_b \partial^a \xi_a = \partial^a \gamma_{ab} + \partial_b \partial^a \xi_a. \quad (5.3.5.)$$

Másrészt

$$\gamma' = \gamma'^c{}_c = \gamma + 2\partial_c \xi^c \quad (5.3.6.)$$

miatt

$$-\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^a \gamma' = -\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^a \gamma - \partial_b \partial^c \xi^c \quad (5.3.7.)$$

adódik. Vonjuk ki az (5.3.5.) egyenlet oldalából az (5.3.7.) egyenlet megfelelő oldalait:

$$\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = \partial^a \bar{\gamma}_{ab} + \partial^a \partial_b \xi_a - \partial_b \partial^c \xi_c = \partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0. \quad (5.3.8.)$$

Ezt akartuk bizonyítani.

Az elektrodinamikában a Lorentz-feltétel kirovása után megmaradt mértékszabadságot arra használhatjuk fel, hogy a téridő forrásmentes tartományában **Coulomb**<sup>39</sup> - vagy más néven **sugárzási mértéket** rögzítsünk, azaz kirovjuk az  $A_0 = 0$  további mértékfeltételt.

Ez valóban mindig lehetséges, azaz tetszőleges, a Lorentz-feltételt kielégítő  $(A^0, \vec{A})$  vektorpotenciálhoz találhatunk olyan, a  $\partial^a \partial_a \chi = 0$  egyenletet megoldó  $\chi$  függvényt, hogy  $A'_a = A_a + \partial_a \chi$  olyan, hogy kielégíti a Lorentz-feltételt és  $A'_0 = 0$  abban a tartományban, ahol az elektromágneses mezőnek nincsenek forrásai. Ehhez oldjuk meg először valamely tetszőlegesen választott  $t = t_0$  hipersíkon a

$$\vec{\nabla} \vec{A} + \Delta \chi = 0 \quad (5.3.9.)$$

egyenletet  $\chi$ -re, és jelöljük a megoldást  $\chi_0(\vec{x})$ -szel. Tekintsük ezután az alábbi kezdetiértékfeladatot a teljes téridőben:

$$\partial^a \partial_a \chi = 0, \quad \chi|_{t=t_0} = \chi_0, \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_{t=t_0} = -A_0|_{t=t_0}, \quad (5.3.10.)$$

amelynek egyértelműen létezik a  $\chi(t, \vec{x})$  megoldása. Ennek a  $\chi$  megoldásnak a segítségével képezzük az eredeti, Lorentz-feltételt kielégítő  $A_a$  vektorpotenciálnak az  $A'_a$  mértéktranszformáltját. Ekkor  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi$  és  $A'_0 = f \equiv A_0 + \frac{\partial \chi}{\partial t}$ . A képzés módjából adódik, hogy  $A'_a$  is kielégíti a Lorentz-feltételt. Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy  $A'_0 = 0$ . Az eredeti vektorpotenciál kielégíti az  $\partial^c \partial_c A_a = -4\pi j_a$  egyenletet, ahonnan  $\partial^c \partial_c A_0 = -4\pi j_0$ , úgyhogy

$$\partial^c \partial_c f = -4\pi j_0. \quad (5.3.11.)$$

---

<sup>39</sup>Charles-Augustin de Coulomb, francia hadmérnök és fizikus, 1736-1806.

Az  $f$  függvény emellett kielégíti a következő kezdeti feltételeket:

$$f|_{t=t_0} = A_0|_{t=t_0} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad (5.3.12.)$$

és

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=t_0} &= \left( \frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=t_0} = \left( \vec{\nabla} \vec{A} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=t_0} \\ &= \left( -\Delta \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=t_0} = 0, \end{aligned} \quad (5.3.13.)$$

mivel  $A_a$  kielégíti a Lorentz-feltételt, amiből  $\partial A_0 / \partial t = \vec{\nabla} \vec{A}$  adódik. Az  $f$  függvény tehát ennek a kezdetiérték-feladatnak a megoldása:

$$f(t, \vec{x}) = \int_{\Lambda_p} \frac{j_0(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS(x'), \quad (5.3.14.)$$

ahol  $x = (t, \vec{x})$  a téridő tetszőleges  $p \in M$  pontjának koordinátái, az integrálás az  $p$  téridő-ponthoz tartozó  $\Lambda_p$  múltbeli fénykúp palástjára történik. Ha egy  $\Omega$  téridő-tartomány forrásmentes, pontosabban ha e tartomány minden  $p \in \Omega$  pontjához tartozó  $\Lambda_p$  fénykúpon, a  $p$  pont és a  $t = t_0$  hiperfelület között  $j_0 = 0$ , akkor a kezdetiérték-feladat megoldása azonosan zérus,  $f|_{\Omega} = 0$  ezen az  $\Omega$  tartományon. Ezzel beláttuk, hogy forrásmentes tartományban  $A'_0 = f$  csakugyan eltűnik.

Hasonlóképpen az elektrodinamika esetéhez, a linearizált gravitáció esetében bármely, a Lorentz-feltételt kielégítő  $\gamma_{ab}$  perturbációhoz tudunk találni a még megmaradt mértékszabadságot felhasználva olyan (5.3.3.), (5.3.4.) mértéktranszformációt, amelynek segítségével  $\gamma$  és  $\gamma_{0\mu}$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) zérussá tehető a téridő forrásmentes  $\Omega$  tartományában, azaz abban a tartományban, ahol  $T_{ab} = 0$ :

$$\gamma|_{\Omega} = 0, \quad \gamma_{0\mu}|_{\Omega} = 0. \quad (5.3.15.)$$

Ennek megmutatásához a következőképpen járunk el. Először meghatározzuk  $\xi_\mu$  és  $\partial \xi_\mu / \partial t$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) olyan kezdőértékeit valamely tetszőlegesen választott  $t = t_0$  hiperfelületen, amelyek biztosítják, hogy az (5.3.3.) transzformációval előállított  $\gamma'_{ab}$  eleget tegyen az (5.3.15.) mértékfeltételnek a  $t = t_0$  hiperfelületen. Ezután az így kapott kezdőfeltételekkel megoldjuk  $\xi_\mu$ -kre ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) az (5.3.4.) parciális differenciálegyenletrendszer. Az (5.3.3.) mértéktranszformáció eredménye:

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma + 2 \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\mu} = \gamma + 2 \left( -\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \right), \\ \gamma'_{0\mu} &= \gamma_{0\mu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \gamma'}{\partial t} &= \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 2 \left( -\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 2 \left( -\Delta \xi_0 + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial \gamma'_{0\mu}}{\partial t} &= \frac{\partial \gamma_{0\mu}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t \partial x_\mu} = \frac{\partial \gamma_{0\mu}}{\partial t} + \Delta \xi_\mu + \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t \partial x_\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.3.16.)$$

Ha ezeket figyelembe vesszük, akkor a

$$\gamma'|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial \gamma'_{0\mu}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (5.3.17.)$$

feltételek kielégíthetők a  $t = t_0$  hiperfelületen, ha a  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)|_{t=t_0}$ ,  $\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}, \frac{\partial \xi_1}{\partial t}, \frac{\partial \xi_2}{\partial t}, \frac{\partial \xi_3}{\partial t}\right)\bigg|_{t=t_0}$  kezdeti adatok (mint a térkoordináták függvényei) olyanok, hogy az alábbi, a  $t = t_0$  hiperfelületen felírt differenciálegyenletrendszer megoldásai:

$$2\left(-\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}\right) = -\gamma, \quad (5.3.18.)$$

$$\frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^\mu} = -\gamma_{0\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, \quad (5.3.19.)$$

$$2\left(-\Delta \xi_0 + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad (5.3.20.)$$

$$\Delta \xi_\mu + \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t \partial x_\mu} = -\frac{\partial \gamma_{0\mu}}{\partial t}, \quad \mu = 1, 2, 3. \quad (5.3.21.)$$

Ennek a feladatnak létezik egyértelmű megoldása. A teljes téridőben ezután úgy választjuk meg a  $\xi_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) függvényeket, hogy azok az (5.3.4.) parciális differenciálegyenleteknek ezen kezdeti adatokhoz tartozó megoldása legyen. Az így meghatározott  $\xi_a$  segítségével kapott  $\gamma'_{ab}$  mértéktranszformált perturbáció konstrukciójánál fogva továbbra is ki fogja elégíteni a Lorentz-feltételt, de a téridő forrásmentes tartományában a  $\gamma' = 0$  és a  $\gamma'_{0\mu} = 0$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) további feltételeket is.

Az (5.3.15.) feltételeknek eleget tevő perturbáció  $\gamma_{00} = 0$  tulajdonsággal is rendelkezik.

Egyrészt  $\gamma = 0$  miatt  $\bar{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab}$ , másrészt  $\gamma_{0\mu} = 0$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) miatt a Lorentz-feltételből  $\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial t} = 0$  adódik. Az (idő-idő)-komponensre vonatkozó linearizált Einstein-egyenlet ekkor

$$-16\pi T_{00} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\gamma_{00} = \Delta\gamma_{00}. \quad (5.3.22.)$$

Ha  $T_{00}$  eltűnik az egész téridőben, akkor az egyenlet egyetlen megoldása  $\gamma_{00} = \text{áll.}$  Ez pedig egy további mértéktranszformációval zérussá tehető,  $\gamma_{00} = 0$ , anélkül, hogy a korábbi mértékfeltételek sérülnének.

A fent leírt sugárzási mértéket választva a linearizált Einstein-egyenletek tehát

$$\partial^a \partial_a \gamma_{\mu\nu} = 0 \quad (5.3.23.)$$

alakúak, és teljesülnek a

$$\partial^a \gamma_{a\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3), \quad \gamma = 0, \quad \gamma_{0\mu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (5.3.24.)$$

mértékfeltételek. Keressük ezeknek az egyenleteknek a **síkhullám-megoldásait**, azaz a

$$\gamma_{ab} = H_{ab} e^{i \sum_{\mu=0}^3 k_\mu x^\mu} \quad (5.3.25.)$$

alakú megoldásait, ahol  $H_{ab}$  állandók. A hullámegyenletből ekkor  $H_{ab} \sum_{\mu=0}^3 k^\mu k_\mu = 0$ , azaz  $\sum_{\mu=0}^3 k^\mu k_\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$  adódik, ami azt jelenti, hogy a gravitációs síkhullámok hullámvektorai null-vektorok. A mértékfeltételekből rendre

$$\sum_{\mu=0}^3 k^\mu H_{\mu\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3), \quad \sum_{\mu=0}^3 H^\mu_\mu = 0, \quad H_{0\mu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (5.3.26.)$$

adódik. Ez a 10 darab független  $H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}$  tenzorkomponensre 9 darab egyenlet. Azonban a  $H_{0\mu} = 0$  feltételekből automatikusan következik a  $\sum_{\mu=0}^3 k^\mu H_{\mu 0} = 0$  egyenlet, ezért csak 8 független egyenletünk van, úgyhogy összesen  $10 - 8 = 2$  darab lineárisan független síkhullámmegoldás létezik. Ez a **gravitációs síkhullám 2 polarizációs állapotának felel meg**. Bármilyen gravitációs hullámcsomag ilyen síkhullámmódusok lineáris kombinációjaként állítható elő.

A fentiekből tehát arra következtetünk, hogy a linearizált Einstein-egyenletek megengedik gravitációs hullámok terjedését a téridő anyagmentes tartományában. Továbbá, hogy a gravitációs sugárzás kétféle polarizációs állapotú síkhullámmódusok lineáris kombinációjaként áll elő. Felmerül két további fontos kérdés. Hogyan észlelhetjük a gravitációs hullámokat, és hogyan keletkeznek a gravitációs hullámok.

### 5.3.2. A gravitációs sugárzás észlelésének elvi lehetősége

Először azt kell megmutatnunk, hogy a gravitációs hullámok görbület-ingadozást hoznak létre a téridőben, vagyis olyan fizikai változást, ami további mértéktranszformációval nem tüntethető el. Ehhez elegendő megmutatni, hogy a görbületi tenzor-nak vannak el nem tűnő komponensei, pl.

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\sigma}}{\partial t^2}. \quad (5.3.27.)$$

Induljunk ki abból, hogy a linearizált elméletben, Coulomb-mértékben a Christoffel-szimbólumok elsőrendűek  $\gamma_{ab}$ -ben és

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu 0}^\sigma &= \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} \left( \frac{\partial \gamma_{0\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \gamma_{\mu\rho}}{\partial x^0} - \frac{\partial \gamma_{\mu 0}}{\partial x^\rho} \right) = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} \frac{\partial \gamma_{\mu\rho}}{\partial t}, \\ \Gamma_{00}^\sigma &= \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} \left( \frac{\partial \gamma_{0\rho}}{\partial x^0} + \frac{\partial \gamma_{0\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \gamma_{0\sigma}}{\partial x^\rho} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.3.28.)$$

Felhasználva ezeket és azt, hogy

$$R_{\mu\nu}{}^\sigma{}_\rho = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\nu\rho}^\sigma, \quad (5.3.29.)$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} R_{\mu 00}{}^\sigma &= \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{\mu 0}^\sigma - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{00}^\sigma = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial \gamma_{\mu\rho}}{\partial t}, \\ R_{\mu 00\sigma} &= \eta_{\sigma\kappa} R_{\mu 00}{}^\kappa = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\sigma}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5.3.30.)$$

Mivel a görbületi tenzor fenti komponensei nem tűnnek el a gravitációs hullámban, ezért két közeli szabadon eső test relatív gyorsulást szenved, azaz egymásra árapály-erőt gyakorol, amit a geodetikus deviáció egyenlete,

$$a^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) = -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \quad (5.3.31.)$$



ír le, ahol  $T^a$  az egy-paraméteres időszerű geodetikus-sereg érintővektor-mezeje,  $X^a$  pedig a geodetikus deviáció vektora. Az  $\eta_{ab}$  metrikájú globális inerciális koordinátarendszerben a szomszédos,  $X^\mu$  relatív koordinátájú geodetikusokon szabadon eső próbatestek relatív gyorsulásának komponensei:

$$a^\mu = \sum_{\kappa, \nu} T^\kappa \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left( T^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} X^\mu \right) = - \sum_{\nu} R_{\nu 00}{}^\mu X^\nu. \quad (5.3.32.)$$

Ha a próbatestek sebessége sokkal kisebb, mint a vákuumbeli fénysebesség, akkor a geodetikusok  $T^a$  érintővektora jó közelítéssel időirányú, azaz  $(T^\mu) \approx (1, 0, 0, 0)$  és közelítőleg

$$T^0 \frac{\partial}{\partial t} \left( T^0 \frac{\partial}{\partial t} X^\mu \right) = \frac{d^2 X^\mu}{dt^2} \approx - \sum_{\nu} R_{\nu 00}{}^\mu X^\nu. \quad (5.3.33.)$$

A geodetikus deviáció egyenletének fenti alakját úgy értelmezhetjük, mint a szomszédos geodetikusok  $X^\mu$  szeparációs távolságának oszcillációját leíró egyenletet. Elvileg tehát a gravitációs hullám kimutatható, ha pl. lézernyalábbal nyomon követjük két szomszédos, szabadon eső próbatest távolságának változásait. Egy másik detektálási elv az, hogy a két próbatest egy rugalmas rúd két végpontja. Ekkor a metrikának a gravitációs hullám okozta ingadozásai mechanikai feszültség-ingadozásokat hoznak létre a rúdban. Ha a gravitációs hullám frekvenciája megegyezik a rudat alkotó közeg rugalmas sajátfrekvenciájával, akkor rezonancia révén a rúd rugalmas rezgéseinek amplitúdója felerősödik és mérhetővé válhat, ismét lézernyalábok segítségével.

A gravitációs hullám kimutatása végül tehát azon alapszik, hogy a globális  $\eta_{ab}$  metrikájú inerciarendszerben valamely fizikailag beazonosítható távolság, mint pl. a nyugvó rúd hossza periódikusan változik. Meg lehet mérni ezt a változást? Ha olyan naív módszerre gondolnánk, hogy a hullámozó hosszúságú rúd mellé elhelyezünk egy standard vonalzót és azon olvassuk le a változást, akkor ez nem vezet eredményre, hiszen a standard vonalzót is elszorítja a tértmetrika változásainak megfelelő hosszváltozásokat. Fontos azonban tudatosítani, hogy a standard vonalzót elvileg egy idealizált merev rúd, amelynek zérus a sajátfrekvenciája, ill. amelyben végtelen a rugalmas visszatérítő erő állandója. A gyakorlatban a standard méter nem egy rúd hossza, hanem a fény vákuumbeli  $c$  sebességének és a standard atomi órával mért megfelelő időtartamnak a szorzata. Ezért az oszcilláló hosszúságú rúd hossz-ingadozásainak mérését vissza lehet vezetni olyan lézernyalábos megfigyelésre, amikor nyugvó órákon sajátidő-tartamokat kell mérni. A gravitációs hullám-dektektorok működési elveinek kidolgozása és megépítése a modern fizika rohamosan fejlődő ága. Napjainkban ez a detektálási csúcstechnika tette lehetővé a gravitációs hullámok közvetlen észlelését.

### 5.3.3. A gravitációs sugárzás forrásai

A gravitációs sugárzás általában akkor keletkezik, ha egy gravitáló objektum gravitációsan összeomlik, úgynevezett kollapszust szenved. Gravitációs sugárzást napjainkig bináris forrásokból észleltek, amikor a rendszer két tagja a közös energia-középpont körül keringve egyre közelebb kerül egymáshoz, majd végül összeolvad miközben gravitációs sugárzást bocsát ki. Viszonylag erős gravitációs sugárzás keletkezése várható szupernóva-robbanás során is (feltéve, hogy a szupernóva nem tökéletesen gömbszimmetrikus vagy tengelyszimmetrikus, ami igen valószínűtlen). A gravitációs összeomlást szenvedő testek környezetében nagyon erős a gravitációs mező, úgyhogy a sugárzás keletkezésének tényleges leírása csak a teljes nem lineáris elmélet keretében lehetséges, a lineáris közelítés nem alkalmazható. Erre nézve nincsenek megbízható módszereink.

Mégis kaphatunk némi betekintést a gravitációs sugárzás keletkezésére, ha azt az Einstein-egyenletek lineáris közelítésében vizsgáljuk. Tegyük fel, hogy a forrás jellemző  $\ell$  mérete sokkal kisebb, mint a kibocsátott sugárzás hullámhossza. Legyen továbbá  $T_{ab}$  a forrás anyagának energiaimpulzus-tenzora. Olyan esetet vizsgálunk, amikor a forrást vákuum (azaz gravitáló anyagtól mentes végtelen kiterjedésű tartomány) veszi körül, ebben terjed a sugárzás. A linearizált Einstein-egyenletek Lorentz-mértékben a

$$\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab} \quad (5.3.34.)$$

inhomogén hullámegyenlet alakját öltik. Kisméretű forrás esetén ennek a megoldása az  $\eta_{ab}$  Minkowski-metrikájú globális inerciarendszerben

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{2}{3R} \frac{d^2 q_{\mu\nu}}{dt^2} \Big|_{\text{ret}}, \quad (5.3.35.)$$

ahol  $R$  az  $\vec{x}$  pont távolsága a forrástól,  $R \gg \ell$  és  $q_{\mu\nu}$  a forrás gravitációs kvadrupólmomentuma, amelynek idő szerinti második deriváltját a  $t' = t - R$  retardált időben kell kiszámolni.

Az (5.3.35.) egyenletet  $G = c = 1$  egységrendszerben írtuk fel, tetszőleges egységrendszerben az alakja:

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{3Rc^4} \frac{d^2 q_{\mu\nu}}{dt^2} \Big|_{\text{ret}}, \quad (5.3.36.)$$

ahol a jobb oldalt a  $t' = t - (R/c)$  retardált időben kell venni.

Az inhomogén hullámegyenlet minden  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ -re megoldható. Az úgynevezett retardált megoldás kifejezhető a  $T_{\mu\nu}$  forrás segítségével, ami lineáris közelítésben a gravitációs sugárzás forrását képező anyagnak az  $\eta_{ab}$  lapos háttér-metrikájú téridőben vett energiaimpulzus-tenzora:

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu}(x) = 4 \int_{\Lambda_x} \frac{T_{\mu\nu}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS(x'), \quad (5.3.37.)$$

ahol  $\Lambda_x$  az  $x$  pont múltbeli fénykúpja, amelyen a 3-dimenziós (hiperfelületelem) térfogatelem  $dS(x') = r^2 dr d\Omega$ . A retardált megoldás automatikusan kielégíti a  $\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$  mértékfeltételt is, mivel  $\partial^a T_{ab} = 0$ . Az elektrodinamikában a forrás által keltett elektromágneses mezőt multipólus-járulékok sorának összegeként szoktuk előállítani. Abban az esetben, amikor a forrás térbeli  $R_f$  mérete sokkal kisebb, mint a sugárzás  $\lambda$  hullámhossza,  $R_f \ll \lambda$ , akkor dipólus-közelítésről szokás beszélni, mert a forrás dipólmomentuma határozza meg a forrástól nagy  $R \gg \lambda$  távolságban a sugárzás keltette elektromágneses mezőt. Most is az a célunk, hogy a gravitációs mezőt az  $R_f \ll \lambda = (2\pi/\omega) \ll R$  feltételek mellett vizsgáljuk. Képezzük ezért először  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}(t, \vec{x})$ -nek az időváltozó szerinti Fourier-transzformáltját:

$$\hat{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) e^{i\omega t} dt. \quad (5.3.38.)$$

Írjuk ki explicit módon a retardált energiaimpulzus-tenzor  $t$ -függését,

$$T_{\mu\nu}(x') = T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}'). \quad (5.3.39.)$$

Ennek Fourier-transzformáltja

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}') &= \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}') e^{i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mu\nu}(t'', \vec{x}') e^{i\omega(t'' + |\vec{x} - \vec{x}'|)} dt'' = \hat{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}') e^{i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|}, \end{aligned} \quad (5.3.40.)$$

aminek segítségével azt kapjuk, hogy a retardált megoldás Fourier-transzformáltja

$$\hat{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = 4 \int \frac{\hat{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (5.3.41.)$$

Itt az  $e^{i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|}$  szorzó azért jelent meg az integrandusban, mert a múltbeli fénykúpra kellett integrálni, amelyen  $t' = |\vec{x} - \vec{x}'|$ . Némi egyszerűsödést jelent, hogy a (tér-tér)-komponensekből a Lorentz-feltétel segítségével megkaphatjuk az (idő-tér)-komponenseket,

$$-i\omega \hat{\bar{\gamma}}_{0\mu} = \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial \hat{\bar{\gamma}}_{\nu\mu}}{\partial x^\nu}, \quad \mu = 1, 2, 3. \quad (5.3.42.)$$

Ezért az energiaimpulzus-tenzor (tér-tér)-komponenseinek meghatározásával foglalkozunk a továbbiakban.

Mivel a forrástól távol keressük a  $\hat{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x})$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ) megoldást és a sugárzás hullámhossza jóval nagyobb, mint a forrás lineáris mérete, ezért az  $e^{i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|}$  tényező csak elhanyagolható mértékben változik a forráson belül, amelyre a térfogati integrál vonatkozik. Ezért jó közelítéssel használhatjuk a retardált megoldás (5.3.41.) képletében az

$$\frac{e^{i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \approx \frac{e^{i\omega R}}{R} \quad (5.3.43.)$$

közelítést, és ezt a tényezőt kiemelhetjük az integrálás jele alól:

$$\hat{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) \approx 4 \frac{e^{i\omega R}}{R} \int \hat{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}') d^3x', \quad \mu, \nu = 1, 2, 3. \quad (5.3.44.)$$

Az energiaimpulzus-tenzor (tér-tér)-komponenseinek integrálját alakítsuk át:

$$\begin{aligned} \int \hat{T}^{\mu\nu}(\omega, \vec{x}') d^3x' &= \sum_{\alpha=1}^3 \int \hat{T}^{\alpha\nu}(\omega, \vec{x}') \delta_\alpha^\mu d^3x' = \sum_{\alpha=1}^3 \int \hat{T}^{\alpha\nu}(\omega, \vec{x}') \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\alpha} d^3x' \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \int \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\hat{T}^{\alpha\nu} x^\mu) d^3x - \int \frac{\partial \hat{T}^{\alpha\nu}}{\partial x^\alpha} x^\mu d^3x \right]. \end{aligned} \quad (5.3.45.)$$

A térfogati integrálokat formálisan a teljes 3-dimenziós térre vesszük, de el nem tűnő járuléka csak a forrás tartományából származik. A jobb oldalon a szögletes zárójelben az első integrált a 3-dimenziós Gauss-tétel segítségével felületi integrállá alakítjuk. A végtelen távoli határfelületen a forrás anyageloszlása zérussá válik, úgyhogy ennek a tagnak a járuléka zérus. A jobb oldalon a szögletes zárójelben szereplő második integrált az  $\sum_{\mu=0}^3 (\partial T^{\mu\nu}/\partial x^\mu) = 0$  feltételt, pontosabban az ebből adódó

$$\begin{aligned}\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial t} &= -\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial T^{\alpha\nu}}{\partial x^\alpha}, \\ -i\omega \hat{T}^{0\nu} &= -\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \hat{T}^{\alpha\nu}}{\partial x^\alpha}\end{aligned}\quad (5.3.46.)$$

összefüggést felhasználva alakítjuk át,

$$\int \hat{T}^{\mu\nu}(\omega, \vec{x}') d^3x' = -i\omega \int \hat{T}^{0\nu} x^\mu d^3x = -\frac{i\omega}{2} \int (\hat{T}^{0\nu} x^\mu + \hat{T}^{0\mu} x^\nu). \quad (5.3.47.)$$

Mivel  $\hat{T}^{\mu\nu}(\omega, \vec{x})$  szimmetrikus a  $\mu, \nu$  indexekben, ezért szimmetrizáltuk a kapott kifejezést. A további átalakítás során ismételten felhasználjuk a 3-dimenziós Gauss-tételt, majd a lokális energiamegmaradást. Azt találjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \hat{T}^{\mu\nu}(\omega, \vec{x}') d^3x' &= -\frac{i\omega}{2} \int (\hat{T}^{0\nu} x^\mu + \hat{T}^{0\mu} x^\nu) = -\frac{i\omega}{2} \int \left( \sum_{\beta=1}^3 \hat{T}^{0\beta} x^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} + \hat{T}^{0\mu} x^\nu \right) \\ &= -\frac{i\omega}{2} \int \left[ \sum_{\beta=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\hat{T}^{0\beta} x^\mu x^\nu) - \hat{T}^{0\beta} \delta_\beta^\mu x^\nu - \frac{\partial \hat{T}^{0\beta}}{\partial x^\beta} x^\mu x^\nu \right) + \hat{T}^{0\mu} x^\nu \right] \\ &= \frac{i\omega}{2} \int \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \hat{T}^{0\beta}}{\partial x^\beta} x^\mu x^\nu = -\frac{\omega^2}{2} \int \hat{T}^{00} x^\mu x^\nu d^3x \\ &= -\frac{\omega^2}{6} \hat{q}^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3,\end{aligned}\quad (5.3.48.)$$

ahol bevezettük a forrás anyageloszlásának kvadrupólmomentumát,

$$q^{\mu\nu} = 3 \int T^{00} x^\mu x^\nu d^3x, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3. \quad (5.3.49.)$$

Ha ezt behelyettesítjük az (5.3.44.) egyenlőség jobb oldalába, akkor megkapjuk a gravitációs sugárzásra vonatkozó (5.3.35.) képletet.

A gravitációs sugárzás keletkezésére vonatkozó, a linearizált Einstein-egyenletek alapján végzett vizsgálatunkból tehát azt látjuk, hogy a sugárzáshoz kis forrástól nagy távolságban a forrás kvadrupólmomentumának oszcillációja adja a vezető rendű járulékat. A dipólsugárzás nem jelenik meg. Utóbbi érthető, hiszen az impulzusmegmaradás megtiltja, hogy az anyag tömeg-, azaz energiaközéppontja oszcilláljon a térben, vagyis hogy oszcilláló dipólmomentum keletkezzen.

#### 5.3.4. A gravitációs sugárzásban távozó energia

A gravitációs sugárzásban távozó energia meghatározása nem nyilvánvaló. Ez abból adódik, hogy nem világos, mekkora lokális energiasűrűséget kell tulajdonítanunk a

gravitációs mezőnek. Az általános relativitáselméletben a metrika egyszerre hordozza magában a gravitációs mező dinamikai jellemzőit és a mérték-szabadságot jellemző változókat. A metrikát azonban nem tudjuk úgy felbontani, hogy ez a két dolog explicit módon szétváljon. Ennek ellenére egy **izolált rendszer teljes energiája** értelmezhető annak alapján, hogy milyen a gravitációs mező, azaz a téridő metrikája az izolált testtől nagy távolságban. Ez a teljes energia az izolált test anyagától, az általa keltett gravitációs mezőtől és az anyag és a gravitációs mező kölcsönhatásából származó energia-járulékokból nem szétválasztható módon tevődik össze. Ugyancsak értelmezhető az izolált test által keltett gravitációs sugárzásban távozó energiafluxus.

Az Einstein-egyenletek az anyagmentes téridő-tartományban a  $\gamma_{ab}$  metrikában lineáris közelítésben

$$G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd}] = 0 \quad (5.3.50.)$$

alakúak, ahol  $G_{ab}^{(1)}$  az Einstein-tenzor  $\gamma_{ab}$ -ben lineáris tagokkal bezárólag. Ha figyelembe vesszük a  $\gamma_{ab}$  perturbációban kvadratikus tagokat is, akkor a Ricci-tenzor és a skalárgörbület rendre  $R_{ab}^{(2)}$  és  $R^{(2)}$  járulékokat kapnak, amelyek a  $\gamma_{ab}$  perturbációban kvadratikusak. Ebben a közelítésben azonban az Einstein-tenzor nem fog eltűnni,  $G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd}] + G_{ab}^{(2)}[\gamma_{cd}] \neq 0$ , ahol  $G_{ab}^{(2)} = R_{ab}^{(2)} - \frac{1}{2}g_{ab}R^{(2)}$ . Ha azonban a  $\gamma_{ab}$  metrikát alkalmas  $\gamma_{ab}^{(2)}$  korrekció hozzáadásával módosítjuk, akkor elérhetjük, hogy  $G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd} + \gamma_{cd}^{(2)}] + G_{ab}^{(2)}[\gamma_{cd}] = 0$  legyen. Mivel itt az első tag  $\gamma_{cd}$ -ben lineáris, ezért a megfelelő feltétel a  $\gamma_{cd}^{(2)}$  korrekció megválasztásához

$$G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd}^{(2)}] + G_{ab}^{(2)}[\gamma_{cd}] = 0. \quad (5.3.51.)$$

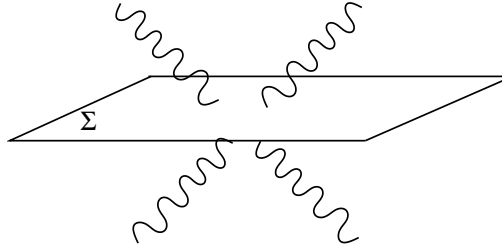
Ezt a feltételt átírhatjuk

$$G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd}^{(2)}] = 8\pi t_{ab} \quad (5.3.52.)$$

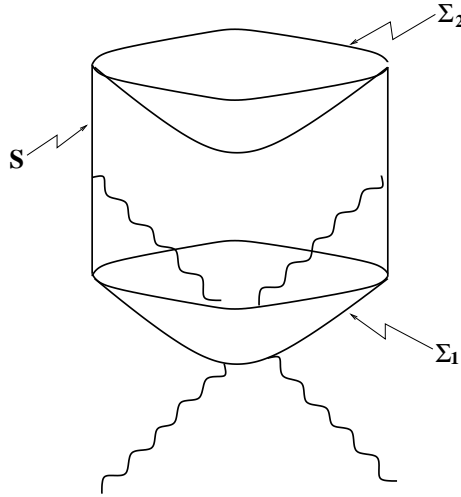
alakba, ahol

$$t_{ab} = -\frac{1}{8\pi}G_{ab}^{(2)}[\gamma_{cd}] \quad (5.3.53.)$$

formálisan olyan szerepet tölt be, mintha energiaimpulzus-tenzor lenne, ami azonban most nem az anyagtól származik, hanem a gravitációs mezőtől. Azt az értelmezést, hogy  $t_{ab}$ -t a gravitációs mező energiaimpulzus-tenzorának tekintsük még az is sugallja, hogy  $t_{ab} = t_{ba}$  szimmetrikus tenzor, továbbá hogy be lehet látni a divergenciájának eltűnését,  $\partial^a t_{ab} = 0$ , feltéve, hogy  $\gamma_{ab}$  a vákuumra vonatkozó linearizált Einstein-egyenletek megoldása. Mindez arra utal, hogy  $t_{ab}$  olyan, mintha a gravitációs mezőnek az energiaimpulzus-tenzora lenne, ami a lapos téridőhöz képesti eltérést kvadratikus tagokkal bezárólag veszi figyelembe. Ezt az értelmezést azonban nem szabad szó szerint venni, amire két dolog is utal. A  $t_{ab}$  tenzor nincsen egyértelműen meghatározva és nem mértékinvariáns, azaz megváltozik infinitezimális lokális koordináta-transzformációk során,  $\gamma_{ab} \rightarrow \gamma_{ab} + 2\partial_{(a}\xi_{b)}$ .



8. ábra. A  $\gamma_{ab}$  perturbációhoz tartozó teljes energia kiszámításakor a  $\Sigma$  térszerű hiperfelületre integrálunk.



9. ábra. A teljes kisugárzott energia meghatározásához használt felületek sematikus ábrája.

Mindezzel együtt jól definiált a  $\gamma_{ab}$  perturbációhoz tartozó **teljes energia**,

$$E = \int_{\Sigma} t_{00} d^3x, \quad (5.3.54.)$$

ahol az integrálás a  $\Sigma$  térszerű hiperfelületre történik (ld. a 8. ábrát). Az  $E$  teljes energia mértékinvariáns minden olyan lokális infinitezimális koordináta-transzformációval szemben, amely megőrzi a metrika aszimptotikus laposságát, amennyiben az  $\eta_{ab} + \gamma_{ab}$  metrika aszimptotikusan lapos, azaz a globális inerciális háttér-koordináta-rendszerben  $\gamma_{ab}$ -nek a komponensei és azok deriváltjai  $r \rightarrow \infty$  esetén kellően gyorsan zérushoz tartanak:  $\gamma_{\mu\nu} \sim 1/r$ ,  $\partial_\rho \gamma_{\mu\nu} \sim 1/r^2$ ,  $\partial_\sigma \partial_\rho \gamma_{\mu\nu} \sim 1/r^3$ . (Ezek a feltételek biztosítják az (5.3.54.) integrál konvergenciáját.) Ekkor az  $E$  teljes energia egyértelműen meghatározott annak dacára, hogy  $t_{ab}$  nincsen egyértelműen meghatározva.

A lokális energiaáram-sűrűség,  $-t^a_0$  szintén nem mértékinvariáns. A

$$\Delta E = - \int_S t_{a0} dS^a \quad (5.3.55.)$$

**teljes kisugárzott energia** azonban mértékinvariáns, ha a következő feltételek teljesülnek:

1. A téridő kezdetben és hosszú idő után stacionárius (azaz  $\eta_{ab} + \gamma_{ab}$  időtől független) és csak egy közbülső időszakban függ az időtől.
2. A kezdeti és a végső stacionárius tartományokban felvesszük a  $\Sigma_1$  és  $\Sigma_2$  aszimptotikusan (ha  $r \rightarrow \infty$ ) null-hiperfelületeket, majd az ezek közötti téridő-tartomány térbeli végtelenben elhelyezkedő  $S$  időszerű hiperfelületére integrálunk (ld. a 9. ábrát).
3. Feltételezzük, hogy  $\gamma_{ab}$ -re teljesülnek az aszimptotikus laposság feltételei az  $r \rightarrow \infty$  határesetben a  $\Sigma_1$  és  $\Sigma_2$  aszimptotikusan null-felületek mentén.

Az (5.3.53.) és (5.3.54.) összefüggéseket alkalmazva a gravitációs sugárzást jellemző (5.3.35.) perturbációra hosszadalmas számolással adódik a következő eredmény (ld. [1]):

$$\Delta E = \int P dt, \quad P = \frac{1}{45} \sum_{\mu, \nu=1}^3 \left( \frac{d^3 Q_{\mu\nu}}{dt^3} \Big|_{\text{ret}} \right)^2, \quad (5.3.56.)$$

ahol  $Q_{\mu\nu}$  a kvadrupólmomentum-tenzor spúrmentes része,  $Q_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} q$ ,  $q = \sum_{\mu=1}^3 q_\mu^\mu$ . A gravitációs sugárzás energiaáram-sűrűsége rendkívül kicsi, a [1] tankönyvben található becslés szerint az  $M$  nyugalmi tömegű,  $L$  hosszúságú, középpontja körül  $\Omega$  szögsebességgel a rúdra merőleges tengely körül forgó rúd esetében  $P = \frac{2G}{45c^5} M^2 L^4 \Omega^6$ , ahol  $G$  a Newton-féle gravitációs állandó,  $c$  vákuumbeli fénysebesség. Ha  $M = 1\text{kg}$ ,  $L = 1\text{m}$  és  $\Omega = 1\text{s}^{-1}$ , akkor  $P = 10^{-54}\text{J/s}$ . Ha a rúd lineáris mérete kozmikus méretű, még akkor is nagyon kicsi marad a kisugárzott energiaáram-sűrűség. Ahhoz, hogy mérhető effektust remélhessünk a gravitációs sugárzás során kibocsátott energiaáram-sűrűségtől, olyan forrásra van szükség, amelyben nagyon erős gravitációs mező uralkodik, mint például kozmikus objektumok gravitációs összeomlása során.

### 5.3.5. Gravitációs hullámok észlelése

1. *Gravitációs hullámot közvetett módon észleltek* <sup>40</sup> bináris rendszerben, amiért Nobel-díjat adtak a felfedzőknek. A PSR B1913-16 egy pulzár (egy erősen

---

<sup>40</sup>Russell Alan Hulse, amerikai fizikus, 1950-; Joseph Hooton Taylor Jr., amerikai fizikus, 1941-

mágnesezett, rádióhullámokat kibocsátó dipólsugárzó, tengelye körül forgó neutroncsillag), amely egy másik neutroncsillaggal együtt alkot bináris rendszert. A két neutron csillag közös tömegközéppontjuk körül kering. A pulzár a forgása miatt sugároz periódikusan, ennek periódusideje pontos óráként használható a megfigyelések során. A pulzálás periódusideje 59 ms, az elliptikus pályán a keringési idő 7,75 h. A megfigyelések kezdete óta (kb. 40 év alatt) fokozatosan csökken a bináris rendszer tagjainak legkisebb távolsága. Ennek a megfigyelt mértéke pontosan összhangban van az általános relativitáselmélet alapján végzett számítással, ami azon a feltevésen alapszik, hogy a bináris rendszer fokozatosan energiát veszít gravitációs sugárzás révén. A mért és az elméletileg becsült összehúzóási sebességek aránya  $0,997 \pm 0.002$ .

A *gravitációs hullámok* közvetlen kimutatására számos kísérlet indult kb. az 1960-es évektől kezdve, jöllehet kb. egy fél évszázadon át nem sikerült gravitációs hullámokat közvetlen módon észlelni. Az egyik detektálási elv, hogy egy fém rúd (a Weber<sup>41</sup>-rúd esetében egy 2 m hosszú, 1 m átmérőjű alumínium henger) szolgál gravitációs antennaként. Az elképzelés az, hogy a rúd rugalmas rezgéseinek sajátfrekvenciájával (1660 Hz) egyező frekvenciájú gravitációs hullám rezonanciát gerjeszt. A berendezést eredetileg az SN1987A szupernóva-robbanás során keletkezett gravitációs hullámok detektálása céljából tervezték. A detektor kb.  $10^{-16}$ m-es hosszváltozást lett volna képes érzékelni piezoelektromos szenzorok segítségével. Az elv számos továbbfejlesztése ismeretes. Eddig ezen az elven nem sikerült gravitációs hullámokat észlelni.

Egy másik elvet képviselnek a lézer-interferometriás alapon működő detektorok, amelyek két távoli, „szabadon eső” anyagi pont közötti távolság gravitációs hullámok okozta változásának kimutatását szolgálják. Ezen az elven működnek a LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, USA) és a Virgo kollaboráció (Olaszország) gravitációs hullám-detektorai. Ezek 3 darab a Föld különböző pontján elhelyezett 3 darab Michelson<sup>42</sup>-interferométert jelentenek, amelyek mindegyikének 2 m-es és 4 m-es, egymásra merőleges két karja van. Az interferométer tükreinek távolságában az interferométeren áthaladó gravitációs hullám hatására periodikus változás következik be. A karok hosszváltozását interferometriás úton mérik. A pontosságot jellemzi, hogy a 4 m-es karhossznak olyan kis megváltozását ki tudják mutatni, ami kisebb, mint a proton töltéssugarának tízezred része (kb.  $10^{-19}$  relatív hosszúság-változás). Az áthaladó gravitációs hullám a detektor egyik karját megnyújtja, a másikat összehúzza, és ez eredményez változást az interferenciaképben. A várható legerősebb gravitációs hullámok is csak  $10^{-18}$  m változást tudnak okozni a karok hosszában. A LIGO-Virgo együttműködés 2016-ban jelentette először gravitációs hullám észlelését, amelyről bebizonyo-

<sup>41</sup>Joseph Weber, amerikai fizikus, 1919-2000

<sup>42</sup>Albert Abraham Michelson, amerikai fizikus, 1852-1931.



sodott, hogy két feketelyukból álló bináris rendszer tagjainak egymásba zuhanása váltotta ki. Említésre érdemes, hogy amíg egy ilyen bináris rendszer évmilliókig kering a közös tömegközéppont körül, a közvetlenül észlelhető intenzív gravitáció hullámok az egymásbaolvadás előtti kevesebb, mint egy perc alatt emittálódnak. 2017-ben észleltek először olyan gravitációs hullámot, amelyet optikai teleszkópokkal megfigyelhető jelenség is kísért; a sugárzás két neutroncsillag összezuhanásából származott. Azóta (2018 márciusáig) további 6 gravitációs hullám-kisugárzást észleltek. A gravitációs hullámok közvetlen detektálása területén elindult tehát egy olyan rohamos fejlődés, amely új távlatokat nyit a Világegyetem megfigyelésének területén.

**Megjegyzés:** Egy fontos új fejlesztési irányt jelölt ki a LISA (Laser Interferometer Space Antenna), az első űrben telepített lézer-interferometrián alapuló gravitációs hullám-detektor. Ennek továbbfejlesztése az eLISA (Evolved Laser Interferometer Space Antenna), amely 3 darab, egy egyenlő oldalú háromszög csúcaiban elhelyezkedő, Nap körüli pályán keringő űrállomásból áll. Mindegyik űrállomáson 2 teleszkóp, 2 lézer és 2 tesztömeg található, amelyek úgy vannak a másik két űrállomás megfelelő eszközei felé irányítva, hogy mindegyik űrállomás egy-egy Michelson-interferométer centruma legyen. Az interferométerek karjait a platina-arany tesztömegek zárják le, a karok hossza 1 millió km. Az egész rendszer mérete kb. 10-szer akkora, mint a Hold pályája, és kb. a Naptól és a Földtől egyenlő távolságra (kb. 50 millió km) fog a Nap körül keringeni.

## 6. Homogén és izotróp kozmológia

### 6.1. A Robertson-Walker-metrika

#### 6.1.1. A Világegyetem homogenitását és izotrópiáját alátámasztó megfigyelések

Az általános relativitáselmélet abba a helyzetbe hozta a fizikusokat, hogy feltehették a kérdést, létezik-e az Einstein-egyenleteknek olyan megoldása, azaz olyan téridő, ami megfelel az általunk megfigyelt téridőnek, azaz a látható Világegyetemnek. Ahhoz, hogy erre a kérdésre válaszolni tudjunk, szükségünk van részben csillagászati-fizikai megfigyeléseink tapasztalataira, részben az anyag viselkedésére vonatkozó fizikai ismereteinkre, továbbá a Világegyetem természetére vonatkozó feltevésekre.

A Világegyetemre vonatkozó megfigyeléseink az utóbbi évtizedekben nagyon jelentősen gyarapodtak. Mindezzel együtt azonban tudomásul kell vegyünk, hogy megfigyelési módszereinkkel kb. addig tudunk csak „visszanézni” a Világegyetem múltjába, amikor megtörtént az elektromosan semleges (atomokba szerveződött) anyag lecsatolódása az elektromágneses sugárzásról. Az anyag fizikai viselkedésére vonatkozó fizikai ismereteink kb. olyan energiaskálákig terjednek ki a nagyenergiás irányban, ami megfelel az esetleges nagy-egyesített elmélet (GUT, azaz Grand Unified Theory) energiaskálájának. Ennek a korlátozott ismeretnek az a következménye, hogy nem ismerjük, mi volt az anyag energiaimpulzus-tenzora a Világegyetem korai fejlődése idején.

A Világegyetem természetére vonatkozó elképzelések nagy mértékben változtak a tudomány története során. Kopernikust<sup>43</sup> megelőzően az a nézet uralkodott, hogy a Világegyetem középpontjában a Föld foglal helyet, s ez kitüntetett szerepet jelent a Föld számára. Kopernikusz ismerte fel, hogy a Föld nincsen (azaz a mi emberlakta világunk nincs) kitüntetett helyzetben a Világegyetemben. Érdeemes megjegyezni, hogy továbbra is leírhatjuk a jelenségeket a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben, de ugyanúgy megtehetjük azt a Naphoz rögzített vonatkoztatási rendszerben is. A hangsúly azon van, hogy a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszer nincsen kitüntetve a fizika törvényei által semmilyen más vonatkoztatási rendszerhez képest. A newtoni mechanika egyik alapelve a Galilei-féle relativitási elv, amely szerint minden inerciarendszer egyenértékű a mechanikai törvények szempontjából. Már Galilei olyan példákat hozott a relativitási elvre, amelyből kitűnik, hogy nemcsak a mechanikai törvények, hanem a Természet törvényeinek abszolút érvényére gondolt. Ezt végül az inerciarendszerek vonatkozásában az Einstein által kidolgozott speciális relativitáselmélet fogalmazta meg a speciális relativitási elvben. Einstein az általános relativitáselméletben tovább vitte a kopernikuszi gondolatot. Nemcsak, hogy a Föld, de a Naprendszerünk, sőt a galaxisunk, a Tejútrendszer,

---

<sup>43</sup>Nicolaus Copernicus, lengyel matematikus és csillagász, 1473-1543.

amelyben helyet foglalunk, sincsen kitüntetve a Világegyetemben. Az általános relativitáselméletben Einstein a természeti törvények egyetemességének gondolatát még általánosabb alakba öntötte. A Természet törvényei nem tűntetnek ki semmilyen koordinátarendszert a téridőben, tenzoregyenletek írják le őket, amelyek alakja változatlan marad az általános koordináta-transzformációkkal szemben.

A csillagászati-fizikai megfigyelések alapján azt lehet sejteni, hogy a Világegyetem a 100 Mpc és az annál nagyobb méretskálákon homogén és izotróp. Erre több minden utal. A Világegyetem nagyléptékű szerkezetére vonatkozó mai ismereteink elsősorban a Sloan Digital Sky Survey kutatási programnak köszönhetőek, amely 2000 óta egymást követő fázisokban folyik. Ez az emberiség eddigi legnagyobb vállalkozása arra, hogy minél részletesebben és pontosabban feltérképezze a látható Világegyetemet, amelynek átmérője kb. 28 Gpc ( $\approx 91$  milliárd fényév  $\approx 8,8 \cdot 10^{26}$  m). Bár a kb. 100 Mpc méretekben kiátlagolva a Világegyetem anyagának sűrűsége állandónak látszik minden irányban minden helyen, a finomabb felbontás habszerű szerkezetet mutat, amit a Világegyetem nagyléptékű szerkezeteként (large-scale structure) vagy kozmikus hálóként (cosmic web) szoktak emlegetni. A Világegyetem nagy, kb. 10-150 Mpc átmérőjű üregekből áll, amelyeket falak határolnak, ahol a galaxisok koncentrálnak. A falakon belül kb. 10 Mpc hosszúságú ágakból álló szálas hálózatot (filament) alkotnak a galaxisok. A falak találkozásainál galaxisfürtök (galaxy cluster) alakulhatnak ki, amelyek kb. 50-1000 galaxisból álló, kb. 2-10 Mpc átmérőjű halmazok. A Világegyetem anyageloszlása azonban a 100 Mpc léptékben már homogénnek és izotrópnak látszik. Ezt több megfigyelés is alátámasztja. A rádióforrások leszámllálása alapján, továbbá a háttér Röntgen<sup>44</sup>-sugárzás és  $\gamma$ -sugárzás megfigyelése alapján a megfelelő források izotróp eloszlására lehetett következtetni. A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás (CMB, Cosmic Microwave Background Radiation) megfigyelése és részletes analízise az utóbbi évtizedekben minden eddiginél sokkal nagyobb pontossággal erősítette meg azt, hogy a Világegyetem izotróp. Ma 2,73 K hőmérsékletű háttérsugárzást észlelünk; olyan sugárzást, ami minden korábban ismert feketest-sugárzónál nagyobb pontossággal követi a Planck<sup>45</sup>-törvényt. A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás azóta terjed szabadon a Világegyetemben, hogy a töltött részecskék semleges atomokat alkottak, azaz rekombinálódtak a hűlő és táguló Világegyetemben (a protonok és az elektronok H-atomokat alkottak). Ettől a rekombinációtól napjainkig a sugárzás hőmérséklete kb. 1100-ad részére csökkent a Világegyetem tágulása következtében. A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás jelenlegi megfigyelt hőmérséklete,  $T = 2,7255 \pm 0,0006 K$   $k_B T \approx 0,23$  meV energiának felel meg. A Világegyetem különböző irányából érkező kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás hőmérsékletének relatív ingadozása  $10^{-5}$  nagyságrendű. Ez bizonyítja, hogy a Világegyetem térben nagy pontossággal izotróp. A modern kozmológia, mint a fizika és a csillagászat határterületén kifejlődött új tudományág alapelveként fogadja el, hogy a Világegyetem (térben) ho-

<sup>44</sup>Wilhelm Conrad Röntgen, német mérnök és fizikus, 1845-1923.

<sup>45</sup>Max Karl Ernst Ludwig Planck, német fizikus, 1858-1947.

mogén és izotróp. Ezt nevezik **kozmológiai elvnek** (cosmological principle).

### 6.1.2. A térben homogén és izotróp Világegyetem görbülete

A homogenitás azt jelenti, hogy „adott időpillanatban” a „tér” minden pontja „egyenértékű”, az izotrópia pedig azt, hogy a „térben” minden irány „egyenértékű”, bárhol is állunk a „térben”. A kérdés az, hogy hogyan lehet ezeknek az állításoknak pontos matematikai jelentést adni, milyen kell legyen a homogén és izotróp Világegyetemnek megfelelő téridő-sokaság. Azért tettük az időpillanat, tér és egyenértékű szavakat idézőjelbe, mert ezeknek kell pontos matematikai jelentést adni. A következő feltevésekkel fogunk élni:

1. Létezik a téridőben térszerű  $\Sigma_t$  (3-dimenziós) hiperfelületek egy-paraméteres serege;
2. Bármely  $t$  esetén és bármely két  $p, q \in \Sigma_t$  pont esetén létezik olyan izometria, amely a  $p$  pontot a  $q$  pontba transzformálja; ez a **térbeli homogenitás** feltevése;
3. Bármely pontban létezik legalább egy olyan megfigyelő, aki izotrópnak látja a Világegyetemet; ez a **térbeli izotrópia** feltevése.

A homogenitás tehát azt jelenti, hogy a téridő rétegezhető térszerű hiperfelületek egy-paraméteres seregével, és ezeken a 3-dimenziós térnek megfelelő hiperfelületeken minden pont egyenértékű, mert bármely 2 pont izometria-transzformációval egymásba átvihető. Az izotrópia azt jelenti, hogy minden  $p \in M$  téridő-pontban létezik legalább egy olyan megfigyelő, aki a teret izotrópnak látja. Az izotrópia feltevésével kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy adott  $\Sigma_t$  hiperfelület és adott  $p \in \Sigma_t$  pontban az anyaghoz képest lokálisan mozgó megfigyelők az anyag sebességeloszlását mindig anizotrópnak fogják látni. Emiatt az izotrópia feltevését körültekintően kell megfogalmazni. Akkor mondjuk, hogy a téridő minden pontjában **térbeli izotrópiával** rendelkezik, ha létezik a megfigyelőknek, azaz időszerű geodetikusoknak az egész téridőt kitöltő serege az alábbi tulajdonságokkal:

1. minden  $p \in M$  téridő-ponton áthalad pontosan egy ilyen időszerű geodetikus, jelölje  $u^a$  ennek az érintő-egységvektorát;
2. minden  $p \in M$  ponthoz és bármely két  $s_1^a, s_2^a \in V_p$  térszerű egységvektorhoz létezik olyan izometria, ami a  $p$  pontot és az  $u^a \in V_p$  érintővektort invariánsan hagyja, miközben  $s_1^a$ -t  $s_2^a$ -ba forgatja.

Ez azt jelenti, hogy izotróp Világegyetemben nem lehet az  $u^a$ -ra merőleges kitüntetett érintővektort találni. A szóbanforgó megfigyelőket **izotróp megfigyelőknek** szokták nevezni.

**Állítás:** Az izotróp megfigyelők világvonalai ortogonálisak mindenütt a  $\Sigma_t$  homogenitási hiperfelületekre.

Ha nem így lenne, azaz a  $\Sigma_t$  hiperfelület érintővektorainak  $W_p \subset V_p$  altere nem lenne ortogonális  $u^a$ -ra  $V_p$ -ben, akkor  $u^a$ -t merőlegesen vetítve  $W_p$ -re kitüntetett vektort kaphatnánk  $W_p$ -ben, ami ellentmondana a térbeli izotrópiának.

**Definíció:** A téridő  $g_{ab}$  metrikája  $h_{ab}(t)$  **indukált térmetrikát** indukál az összes  $\Sigma_t$  térszerű hiperfelületen, azáltal, hogy a  $g_{ab}$  értelmezéséhez használt  $V_p$  érintőteret a  $\Sigma_t$  hiperfelület érintővektorainak  $W_p \subset V_p$  alterére korlátozzuk.

**Állítás:** A térben homogén és izotróp téridőben **a tér görbülete állandó.**

Jelölje  ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$  a tér görbületi tenzorát, azaz a  $\Sigma_t$  hiperfelület Riemann-tenzorát. Az indukált metrikával végezhetjük az indexek fel- és lehúzását. Tekintsük tehát az  ${}^{(3)}R_{ab}{}^{cd} = {}^{(3)}R_{abc}{}^d h^{c'e}(t)$  multilineáris leképezést, ami tekinthető úgy, mint az az  $L : \mathcal{T}_A(0, 2) \mapsto \mathcal{T}_A(0, 2)$  leképezés, amely az antiszimmetrikus  $(0, 2)$ -tenzorok  $(2\text{-formák})$   $\mathcal{T}_A(0, 2)$  lineáris vektorterét képezi le önmagára. (Emlékezzünk rá,  ${}^{(3)}R_{ab}{}^{cd}$  definíció szerint antiszimmetrikus az  $(ab)$  és a  $(cd)$  indexekben.) Az  $L$  leképezés szimmetrikus, mert  ${}^{(3)}R_{abcd} = {}^{(3)}R_{cdab}$ ; az  $L$  leképezés tehát önadjungált a  $\mathcal{T}_A(0, 2)$  téren értelmezett,  $h_{ab}(t)$  által generált természetes skalárszorzatra nézve. Ekkor létezik az  $L$  sajátvektoraiból álló ortonormált bázis a  $2\text{-formák}$  terében. Ha az ezekhez a sajátvektorokhoz tartozó sajátértékek különbözők lennének, akkor ki lehetne tüntetni a  $p$  pontban a  $2\text{-formák}$  valamelyikét, és ezen keresztül egy vektort  $W_p$ -ben. Nevezetesen ki lehetne tüntetni a kitüntetett  $(0, 2)$ -tenzor axiálvektor-invariánsát. Az viszont ellentmondana az izotrópia követelményének. Az  $L$  leképezés sajátértékeinek tehát azonosaknak kell lenniük, azaz az  $L$  leképezésnek az  $\mathbb{I}$  azonossági leképezés számszorosának kell lennie:  $L = K\mathbb{I}$ , ahol  $K$   $t$ -től független valós szám. Ez azt jelenti, hogy

$${}^{(3)}R_{ab}{}^{cd} = K\delta_{[a}^c\delta_{b]}^d, \quad (6.1.1.)$$

vagyis a  $\Sigma_t$  hiperfelület Riemann-görbülete

$${}^{(3)}R_{abcd} = Kh_{c[a}h_{b]d}. \quad (6.1.2.)$$

A  $\Sigma_t$  hiperfelületek homogenitása miatt  $K$ -nak állandónak kell lennie a hiperfelületen. A 3-dimenziós térnek, azaz a  $\Sigma_t$  hiperfelületeknek a Gauss-görbülete tehát  $K = \text{áll.}$

**Állítás: Eisenhart<sup>46</sup> tétele.** Bármely két állandó görbületű tér lokálisan izomorf, ha azonos a dimenziójuk, azonos a metrikájuk szignatúrája és azonos a  $K$  skalárgörbületük.

Az állandó  $K$  görbületű terek összes lehetséges fajtája könnyen felsorolható:

1. A  $K > 0$  állandó pozitív görbületű terek izometrikusak a lapos, euklideszi  $\mathbb{R}^4$  térbe ágyazott  $R$ -sugarú, a Descartes-koordinátarendszerben

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2 \quad (6.1.3.)$$

egyenlettel adott 3-dimenziós gömbfelületekkel, amelyeken gömbi polárkoordinátákban az indukált  $h_{ab}$  metrika

$$d\ell^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (6.1.4.)$$

---

<sup>46</sup>Luther Pfahler Eisenhart, amerikai matematikus, 1876-1965

alakú.

2. A  $K = 0$  görbületű terek izomorfak a 3-dimenziós lapos Euklidesz-i térrel, amelyben Descartes-koordinátákban a metrika

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (6.1.5.)$$

3. A  $K < 0$  állandó negatív görbületű terek izomorfak a lapos, 4-dimenziós Lorentz-szignatúrájú térbe (a Minkowski-térbe) ágyazott 3-dimenziós hiperboloidokkal, amelyeken az indukált metrika hiperbolikus koordinátákban

$$d\ell^2 = d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.1.6.)$$

alakú.

Az általános relativitáselmélet felveti annak a lehetőségét, hogy homogén és izotróp Világegyetemben a tér bármelyik fenti lehetőséget megvalósíthatja azzal el-lentétben, hogy a newtoni fizika szerint is és a speciális relativitáselmélet szerint is a tér lapos, azaz nem görbült, euklideszi geometriájú ( $K = 0$ ). Az általános relati-vitáselmélet szerint a tér lehet állandó pozitív görbületű,  $K > 0$ . Ebben az esetben a tér térfogata véges, azaz **a Világegyetem zárt** noha nincsenek határai. Abban az esetben, ha a tér állandó negatív görbületű,  $K < 0$ , akkor a tér végtelen, azaz **a Világegyetem nyílt**. Ezzel együtt felmerül a jogos kérdés, hogy a Világegyetemünk zárt vagy nyílt.

### 6.1.3. Homogén és izotróp téridő metrikája

A téridő  $g_{ab}$  metrikája és a térszerű  $\Sigma_t$  hiperfelületek  $h_{ab}(t)$  indukált metrikája közötti kapcsolat

$$g_{ab} = -u_a u_b + h_{ab}(t), \quad (6.1.7.)$$

miután  $u^a$  ortogonális a  $\Sigma_t$  hiperfelületekre. Itt  $h_{ab}(t)$  komponenseit  $d\ell^2$  fenti ki-fejezéseiből tudjuk kiolvasni a megfelelő koordinátarendszerekben. A téridőmetrika koordináta-komponenseinek meghatározásához először alkalmas koordinátarendszert választunk a téridőben. Ehhez a következőképpen jutunk:

1. Először valamely rögzített  $t$ -hez tartozó  $\Sigma_t$  hiperfelületen választunk alkalmas koordinátákat, mint pl. fentebb tettük: a  $K > 0$  esetben gömbi polárkoordiná-tákat, a  $K = 0$  esetben Descartes-koordinátákat vagy gömbi polárkoordinátá-kat és a  $K < 0$  esetben hiperbolikus koordinátákat.
2. Ezután azonos térkoordinátákkal indexeljük az egyes izotróp megfigyelők világ-vonalain elhelyezkeő különböző pontokat.

3. Az önkényesen bevezetett  $t$  időparamétert, ami az egyes  $\Sigma_t$  hiperfelületeket indexeli átcserélhetjük egy tetszőlegesen kiválasztott izotróp megfigyelő óráján mért  $\tau$  sajátidőre,  $dt = d\tau/a(\tau)$ . A homogenitás következtében bármely két izotróp megfigyelő azonos sajátidő-különbséget mér ugyanazon két  $\Sigma_t$  és  $\Sigma_{t'}$  térszerű hiperfelület között.

A fentiek alapján a homogén és izotróp Világegyetemnek megfelelő  $g_{ab}$  metrika, az úgynevezett **Robertson<sup>47</sup>-Walker<sup>48</sup>-metrika**:

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \begin{cases} d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), & \text{ha } K > 0, \text{ azaz } k = +1 \\ d\psi^2 + \psi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), & \text{ha } K = 0, \text{ azaz } k = 0 \\ d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), & \text{ha } K < 0, \text{ azaz } k = -1 \end{cases}, \quad (6.1.8.)$$

ahol a  $K = 0$  esetben most gömbi polárkoordinátákat használtunk. A  $0, \pm 1$  diszkrét értékeket felvevő  $k$  paramétert az egyes térgeometriák megkülönböztetése érdekében vezettük be. A homogenitás és az izotrópia megkövetelése tehát azt jelenti, hogy a téridő metrikája Robertson-Walker-metrika. Azt reméljük, hogy az Einstein-egyenletek alapján tudjuk eldönteni, mi az ismeretlen  $a(\tau)$  függvény és milyen típusú a tér geometriája.

## 6.2. A Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-téridő (FLRW-téridő)

### 6.2.1. A Friedmann-egyenletek

A homogén és izotróp Világegyetem dinamikáját az Einstein-egyenletek megoldásával kaphatjuk meg, ha az egyenletekbe egyrészt behelyettesítjük a Robertson-Walker-metrikát, másrészt valamilyen fizikai modell alapján behelyettesítjük az anyag energiaimpulzus-tenzorának explicit alakját. A Világegyetemet kitöltő anyagról némileg leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy egymással nagyon gyengén kölcsönható galaxisokból áll, amelyek ezért jó közelítéssel szabadon esnek a Világegyetemben; jó közelítéssel ők az együttmozgó megfigyelők, akik a Világegyetemet izotrópnek látják. (A newtoni felfogásban azt mondanánk, hogy a galaxisok között gravitációs kölcsönhatás van. Az általános relativitáselmélet felfogása szerint a galaxisok gravitációs hatásuknál fogva meghatározzák a téridő geometriai szerkezetét, és ezáltal azokat a geodetikusokat is, amelyek mentén ők maguk szabadon esnek.) Az ilyen anyagot **pornak** (dust) nevezzük, amelynek az energiaimpulzus-tenzora

$$T_{ab} = \rho u_a u_b, \quad (6.2.9.)$$

<sup>47</sup>Howard Percy Bob Robertson, amerikai matematikus és fizikus, 1903-1961

<sup>48</sup>Arthur Geoffrey Walker, angol matematikus, 1909-2001

ahol  $\rho$  az anyag energiasűrűsége a saját nyugalmi rendszerében,  $u^a$  pedig az egyes porszemcsék, azaz együttmozgó galaxisok sebességvektora, a korábbi megfontolásaink szerinti izotróp, együttmozgó megfigyelők sebessége. A fenti energiaimpulzus-tenzor speciális esete az ideális (nem sűrűlő) folyadék

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b) \quad (6.2.10.)$$

energiaimpulzus-tenzorának, amelyben szerepel a folyadék  $P$  nyomása is. A por tehát olyan ideális folyadék, amelynek a nyomása zérus,  $P = 0$ . A (6.2.10.) energiaimpulzus-tenzor egyúttal a sugárzás (pl. az elektromágneses sugárzás és a neutrínó-sugárzás) leírására is alkalmas. A sugárzásban a  $P$  nyomás és az energiasűrűség kapcsolata  $P = \rho/3$ . A mai Világegyetemünkben a kozmikus háttérsugárzás elhanyagolható hányadát képviseli a teljes energiasűrűségnek. A Világegyetemnek azonban volt olyan korai szakasza, amikor a sugárzás hozzájárulása volt meghatározó a teljes energiasűrűségben. A Világegyetem fejlődésének korai időszaka **sugárzás uralta korszak** (radiation dominated epoch) volt, jelenleg a Világegyetem az **anyag uralta korszakában** (matter dominated epoch) van. A (6.2.10.) kifejezés egyúttal a homogén és izotróp közeg energiaimpulzus-tenzorának legáltalánosabb kifejezése.

Az elmondottak alapján a

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (6.2.11.)$$

Einstein-egyenletekbe tehát a (6.1.8.) metrikát és az ideális folyadék (6.2.10.) energiaimpulzus-tenzorát fogjuk behelyettesíteni.

Figyelembe véve, hogy az (6.2.11.) egyenlet mindkét oldalán szimmetrikus másodrendű tenzor áll, ez 10 darab egyenletet jelentene. Mielőtt továbblépünk, vizsgáljuk meg, hogy az izotrópiának milyen következményei vannak arra nézve, hogy hány független egyenletünk van. Mivel a  $\Sigma_t$  hiperfelületek mindenütt ortogonálisak az izotróp megfigyelők időszerű geodetikusaiba, ezért az energiaimpulzus-tenzor és az Einstein-tenzor (idő-tér)-komponensei eltűnnek,  $T_{ab}u^a s^b = 0$ ,  $G_{ab}u^a s^b = 0$ . Az izotrópia részben azt jelenti, hogy a  $-T_{ab}u^b$  energiaáram-sűrűségnek nem lehet zérustól különböző térszerű komponense. Ezért  $G_{ab}u^b$  időszerű vektor, de akkor  $G_{ab}u^a u^b = G_{\tau\tau}$  az Einstein-tenzor (idő-idő)-komponense. A térbeli izotrópia további következménye, hogy  $T_{ab}$  (tér-tér)-komponensei  $3 \times 3$ -as diagonális mátrixot alkotnak, amelyben a  $T_{**} = T_{ab}s^a s^b$  diagonális elemek azonosak, a nem diagonális elemek pedig zérusok. Ennek következménye, hogy ugyanez mondható el az Einstein-tenzor (tér-tér)-komponenseiről,  $G_{**} = G_{ab}s^a s^b$  diagonális elemekkel. Végül tehát 2 darab független egyenletet kapunk az Einstein-tenzor 2 független komponensére,  $G_{\tau\tau}$ -ra és  $G_{**}$ -ra:

$$\begin{aligned} G_{\tau\tau} &= G_{ab}u^a u^b = 8\pi T_{\tau\tau} = 8\pi\rho, \\ G_{**} &= G_{ab}s^a s^b = 8\pi T_{**} = 8\pi P. \end{aligned} \quad (6.2.12.)$$



Látjuk tehát, hogy a tér homogenitásának és izotrópiájának köszönhetően csak 2 független Einstein-egyenletünk van.

A következő lépés, hogy meghatározzuk az Einstein-tenzor független komponenseit felhasználva a Robertson-Walker-metrikát, majd azokat behelyettesítjük a 2 független Einstein-egyenletbe. Ekkor az alábbi egyenleteket kapjuk

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho - \frac{3k}{a^2}, \quad (6.2.13.)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3P), \quad (6.2.14.)$$

ahol  $a(\tau)$  a Robertson-Walker-metrika skálaparamétere,  $k = +1, 0, -1$  rendre pedig a zárt gömbi, a lapos euklideszi és a nyílt hiperbolikus térgeometriának megfelelő paraméter. Ezek a Világegyetem **Friedmann<sup>49</sup>-modelljének** egyenletei.

**Megjegyzés:** A (6.2.13.) és (6.2.14.) egyenleteket  $G = c = 1$  egységrendszerben írtuk fel. Tetszőleges egységrendszerben érvényes alakjuk:

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho - \frac{3kc^2}{a^2}, \quad (6.2.15.)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right), \quad (6.2.16.)$$

az FLWR-téridőben a skalárgörbület pedig

$$R = \frac{6}{c^2 a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + kc^2). \quad (6.2.17.)$$

Az egyszerűség kedvéért a  $k = 0$  esetben vázoljuk a Friedmann-egyenletek levezetését. A Christoffel-szimbólumok el nem tűnő komponensei Descartes-koordinátákban:

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}^\tau &= \Gamma_{yy}^\tau = \Gamma_{zz}^\tau = a\dot{a}, \\ \Gamma_{x\tau}^x &= \Gamma_{\tau x}^x = \Gamma_{y\tau}^y = \Gamma_{\tau y}^y = \Gamma_{z\tau}^z = \Gamma_{\tau z}^z = \frac{\dot{a}}{a}, \end{aligned} \quad (6.2.18.)$$

ahol  $\dot{a} = da(\tau)/d\tau$ . Ezeket felhasználva a Ricci-tenzor független komponensei:

$$R_{\tau\tau} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R_{**} = a^{-2}R_{xx} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2}. \quad (6.2.19.)$$

A téridő skalárgörbülete:

$$R = -R_{\tau\tau} + 3R_{**} = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right). \quad (6.2.20.)$$

Végül pedig az Einstein-tenzor el nem tűnő komponensei:

$$G_{\tau\tau} = R_{\tau\tau} + \frac{1}{2}R = \frac{3\dot{a}^2}{a^2}, \quad G_{**} = R_{**} - \frac{1}{2}R = -\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (6.2.21.)$$

---

<sup>49</sup>Alexander Alexadrovich Friedmann, orosz (szovjet) fizikus és matematikus, 1888-1925

Az Einstein-egyenletek ezért

$$\begin{aligned}\frac{3\dot{a}^2}{a^2} &= 8\pi\rho, \\ -\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= 8\pi P\end{aligned}\tag{6.2.22.}$$

alakot öltenek. Az első egyenletből kifejezhetjük  $\frac{\dot{a}^2}{a^2}$ -t és behelyettesíthetjük a második egyenletbe, amely akkor

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3P)\tag{6.2.23.}$$

alakot ölt.

A továbbiakban érdemes lesz megoldani a Friedmann-egyenleteket két speciális esetben, amikor a Világegyetemet (a) anyag, pontosabban  $P = 0$  nyomású por uralja, és amikor (b)  $P = \rho/3$  nyomású sugárzás uralja. Lemaître<sup>50</sup> Friedmann-tól függetlenül a Friedmann-megoldással lényegében egyező megoldást kapott a homogén és izotróp Világegyetem fejlődésére. Mielőtt azonban a Friedmann-féle megoldás részletes tárgyalására rátérünk, tehetünk néhány kvalitatív észrevételt a Friedmann-egyenletekkel kapcsolatban.

### 6.2.2. A Hubble-törvény és a sztatikus Világegyetem kérdése. A kozmológiai állandó

Ha a Világegyetemet szokásos viselkedésű anyag vagy sugárzás vagy ezek keveréke uralja, akkor  $\rho > 0$  és  $P \geq 0$ , és ekkor a Világegyetem nem lehet sztatikus.

Az említett esetben a (6.2.14.) egyenletből látjuk, hogy  $\ddot{a} < 0$ , és akkor  $\dot{a}$  szigorúan monoton csökkenő. Ez úgy lehetséges, hogy vagy  $\dot{a} < 0$  és a Világegyetem összehúzódó, vagy  $\dot{a} > 0$  és a Világegyetem táguló, vagy az is előfordulhat, hogy a táguló Világegyetem egy adott időpillanatban, amikor  $\dot{a} = 0$ , tágulóból összehúzódóvá válik.

A homogén és izotróp Világegyetem tágulása vagy összehúzódása a **Hubble<sup>51</sup>-törvénnyel** jellemezhető: Ha  $R$  két tetszőleges izotróp megfigyelő (galaxis) távolsága a  $\Sigma_\tau$  homogenitási felületen (a térben), akkor a megfigyelők (távolodását vagy közeledését jellemző) relatív sebesség

$$v \equiv \frac{dR}{d\tau} = \frac{R(\tau)}{a(\tau)}\dot{a}(\tau) \equiv H(\tau)R(\tau),\tag{6.2.24.}$$

ahol  $H(\tau)$  az úgynevezett **Hubble-paraméter**. Nyilvánvaló, hogy a Hubble-paraméter csak a térszerű  $\Sigma_\tau$  hiperfelületek mentén állandó, viszont változik, ahogy telik a  $\tau$  sajátidő az izotróp megfigyelők óráján. A Hubble-törvény fontos sajátossága, hogy a tér bármely két, egymástól adott  $R$  távolságra levő pontja azonos ütemben, az  $R$

<sup>50</sup>Georges Henri Joseph Édouard Lemaître, belga pap, csillagász és fizikus, 1894-1966

<sup>51</sup>Edwin Powell Hubble, amerikai csillagász, 1889-1953

távolsággal arányosan változik. **A tágulásnak vagy az összehúzódásnak nincsen tehát centruma.** Ez természetes következménye annak, hogy a Világegyetem homogén, hiszen egy tágulási centrum léte kitüntetett pont létezését jelentené a Világegyetemben. A távoli együttmozgó megfigyelők relatív sebessége lehet  $v > c$ , azaz meghaladhatja a vákuumbeli fénysebességet. Ez azonban nem mond ellent annak az alapfeltevésünknek, hogy sem részecske, sem sugárzás, azaz az energiának semmilyen formája nem terjedhet gyorsabban a vákuumbeli fénysebességnél. A galaxisok  $v$  relatív sebessége két különböző objektumra vonatkozó lokális mérés eredménye, nem valaminek a sebessége, hanem egy „látszólagos” sebesség.

Induljunk ki abból, hogy a  $\Sigma_\tau$  hiperfelületen levő 2 pont  $R(\tau)$  távolságának négyzete és az együttmozgó  $x^\mu$  koordinátáik  $\Delta x^\mu$  különbsége által meghatározott  $\Delta \ell^2$  együttmozgó távolságnégyzet közti kapcsolat  $R^2(\tau) = a^2(\tau)\Delta \ell^2$ , ahol két együttmozgó galaxis  $\Delta \ell$  távolsága független a  $\tau$  sajátidőtől. A fenti összefüggést differenciális alakba írhatjuk:

$$2RdR = 2a(\tau)da\Delta \ell^2 = 2a(\tau)da\frac{R^2}{a^2}, \quad (6.2.25.)$$

ahonnan

$$\frac{dR}{d\tau} = a(\tau)\frac{da}{d\tau}\frac{R}{a^2} = \frac{R}{a}\dot{a} \quad (6.2.26.)$$

adódik, amit be akartunk látni.

A Hubble-törvényre és a Világegyetem tágulásának lehetőségére először Lemaître mutatott rá. Ezt az elméleti feltételezést, ami ugyancsak összhangban van a Friedmann-egyenletek megoldásával Hubble 2 évvel későbbi felfedezése, majd az azóta napjainkig folytatott egyre pontosodó megfigyelések igazolják.

**Megjegyzés:** A Hubble-törvény felfedezésének jelentősége óriási szemléleti változást hozott világmépünkben: **fel kellett adni a sztatikus Világegyetem képét.** Eredetileg Einstein azt remélte, hogy az általános relativitáselmélet sztatikus Világegyetem képét fogja szolgáltatni. Mivel a Friedmann-megoldás nem ilyen volt, feltette a kérdést, hogy hogyan kellene ahhoz módosítani az Einstein-egyenleteket, hogy legyen sztatikus homogén és izotróp megoldásuk. Ebből a célból módosította az Einstein-egyenleteket,

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (6.2.27.)$$

azáltal, hogy feltételezte egy további alapvető természeti állandó létét, a  $\Lambda$  **kozmológiai állandóét.**

**Állítás:** Lovelock<sup>52</sup> bebizonyította, hogy a  $G_{ab}$  Einstein-tenzor és a  $g_{ab}$  metrika lineáris kombinációja a legáltalánosabb szimmetrikus, (kovariáns) divergenciamentes másodrendű tenzor, amely a metrikából és annak első és második deriváltjaiból képezhető. A (6.2.27.) egyenlet tehát az Einstein-egyenletek legáltalánosabb olyan módosítása, ami megőrzi az eredeti egyenletek főbb tulajdonságait.

<sup>52</sup>David Lovelock, angol fizikus és matematikus, 1938-

**Megjegyzés:** Az Einstein-egyenletek (6.2.27.) módosításával elérhető, hogy létezzen sztatikus homogén és izotróp megoldás. A kozmológiai állandó bevezetésének azonban nyilvánvalóan ára van, pl. módosul a lassú mozgás és gyenge gravitáció határesetében Newton gravitációs törvénye. Abban lehet reménykedni, hogy ha  $\Lambda$  értéke kicsi, akkor ezt az eltérést nem lehet megfigyelni. Az elgondolás másik gyengéje, hogy  $\Lambda$  értékét **finoman kell hangolni** ahhoz, hogy létezzen a módosított

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho - \frac{3k}{a^2} + \Lambda, \quad (6.2.28.)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3P) + \Lambda, \quad (6.2.29.)$$

Friedmann-egyenleteknek sztatikus megoldása. Megmutatták, hogy ez a sztatikus megoldás ráadásul még instabil is.

**Megjegyzés:** Az elméleti ellenérveknél azonban sokkal súlyosabban esett latba a **Hubble-törvény felfedezése. Egyértelműsítette, hogy a Világegyetem nem sztatikus.** A Hubble-törvényt az utóbbi kb. egy évszázad alatt végzett nagyszámú megfigyelés igazolja. Kellően alátámasztott tehát, hogy feladjuk azt az elképzelést, hogy a Világegyetemünk sztatikus. A megfigyelések azt igazolják, hogy a Világegyetemünk tágul, és a Hubble-állandó jelenlegi értéke kb.  $H \approx 70(\text{km/s})/\text{Mpc}$ . A kozmológiai állandó bevezetésének eredeti indoka tehát megszűnt.

A modern kozmológiában újra felmerül a kozmológiai állandó bevezetése. A tapasztalatok szerint a Világegyetem gyorsulva tágul. Ilyen eredményre a Friedmann-egyenletek alapján akkor juthatunk, ha  $P = -\rho$  állapotegyenletű, azaz negatív nyomású „valami” létezését képzeljük el, ami homogénan kitölti a Világegyetemet, avagy azt engedjük meg, hogy bár nincsen jelen sem sugárzás, sem anyag, de a vákuumot  $\Lambda \neq 0$  kozmológiai állandó jellemzi.

Csakugyan, a (6.2.28.) és (6.2.29.) egyenletek alapján figyelhetünk arra, hogy **a tágulás szempontjából a  $P = -\rho$  állapotegyenletű, hipotetikus ideális folyadék ugyanolyan szerepet játszik ( $\Lambda = 0$  esetén), mint anyag és sugárzás hiányában ( $\rho = 0$  mellett) a  $\Lambda \neq 0$  kozmológiai állandó.** Vegyük az egyszerűség kedvéért a lapos tér ( $k = 0$ ) esetét, és tegyük fel, hogy  $\Lambda \neq 0$  és  $\rho = 0$ . Ebben az esetben a (6.2.28.) és a (6.2.29.) egyenletek jobb oldalai megegyeznek, úgyhogy

$$\dot{a}^2 = a\ddot{a} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\ddot{a}}{\dot{a}}, \quad (6.2.30.)$$

ahonnan megoldásként a  $H = C = \text{áll.}$  Hubble-paraméterrel jellemzett  $a(\tau) = e^{C\tau}$  összefüggés szerinti exponenciális tágulás adódik, amelynek során a kozmológiai állandótól származó energiasűrűséget úgy azonosíthatjuk, mint a  $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi = 3H^2/8\pi$  állandót. A gyorsulva táguláshoz az szükséges, hogy  $\Lambda > 0$  legyen, s ekkor  $H = \sqrt{\Lambda/3}$ .

A kozmológiai állandó szerepe tehát hasonló, mint a  $\rho = -P$  állapotegyenletű, pozitív energiasűrűségű és negatív nyomású vákuumé, mindkettő gravitációs taszításnak felel meg a mai Világegyetem méretskáláján. A kozmológiai állandó, ill. a vákuum kicsiny pozitív (homogén) energiasűrűsége magyarázata lehet a **sötét**

**energiának**, ami a Világegyetem teljes energiasűrűségének jelenleg kb. 70 %-át teszi ki, azaz annak *döntő többségét!* A kozmológiai állandó értékének felső korlátja  $\Lambda \lesssim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ .

**Megjegyzés:** A (6.2.13.)-(6.2.14.) Friedmann-egyenletek megoldása  $\dot{a} > 0$  esetén táguló. Mivel közönséges anyag és sugárzás esetén  $\rho + 3P > 0$ , úgyhogy  $\ddot{a} < 0$ , ezért a tágulás sebessége annál nagyobb, minél korábbra megyünk vissza az időben. Ezzel kapcsolatban elmondhatjuk, hogy a Friedmann-modell, csak közönséges anyag és sugárzás jelenlétét feltételezve a Világegyetemben, lassulva táguló Világegyetemet eredményez; nem tudja megmagyarázni a gyorsulva táguló Világegyetemre vonatkozó megfigyeléseket. Ehhez vagy a  $\Lambda \neq 0$  kozmológiai állandó létezésére, vagy  $P = -\rho$  állapotegyenletű „valami” jelenlétére van szükség, bármi is legyen annak fizikai magyarázata.

**Megjegyzés:** Nem zérus kozmológiai állandó esetén a (6.2.28.) és a (6.2.29.) Friedmann-egyenletek tetszőleges egységrendszerben érvényes alakja:

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho - \frac{3kc^2}{a^2} + \Lambda c^2, \quad (6.2.31.)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \Lambda c^2, \quad (6.2.32.)$$

az FLRW-téridőben a skalárgörbület pedig továbbra is (6.2.17.).

### 6.2.3. A Nagy Bumm

Ha elhanyagoljuk a homogén és izotróp Világegyetem  $a(\tau)$  skálaparaméterének gyorsulását, azaz  $\dot{a} = \text{áll.}$  közelítéssel élünk, akkor a Hubble-állandó jelenlegi értékéből arra kell következtetnünk, hogy

$$T = \frac{a}{\dot{a}} = \frac{1}{H} \quad (6.2.33.)$$

idővel ezelőtt kezdődött a Világegyetem tágulása, amikor  $a = 0$  kellett legyen. Ez a Világegyetem kezdete kb.  $T = 13,799 \pm 0,021$  milliárd évvel ezelőtt olyan állapot volt, amelyben bármely két pont távolsága zérus volt, az anyag energiasűrűsége és a Világegyetem görbülete pedig végtelen volt. Ezt a kezdeti állapotot nevezzük **Nagy Bumnak** (Big Bang).

A Nagy Bumm pillanatában a Világegyetem és az anyag egyetlen pontba volt összehúzódva. Nincsen értelme arról beszélni, hogy milyen volt a Világegyetem állapota a Nagy Bumm előtt, ezen szinguláris állapot előtt. Ezt megelőzően nem volt téridő sem, úgyhogy a kezdet nem egy adott térben egy pontba összehúzódott anyagot jelent, amely a robbanásakor az adott pontból minden irányban szétrepül. Ez inkább egy valódi szinguláris kezdet, amelyben egyszerre születik meg a Világegyetem és vele együtt a téridő. Leginkább egy analógiával tehetjük szemléletessé a kezdetet, ill. annak a időbeli megfordítását: vegyünk egy léggömböt, fessünk a gumihártya felszínére egyenletes sűrűséggel

pontokat, majd kezdjük el kiereszteni a gázt a léggömbből; ekkor a léggömb felszínének 2-dimenziós világában „élő” megfigyelő azt veszi észre, hogy minden pont végül egy pontba kerül és a pontok felületi sűrűsége végtelenhez tart; ez a Világegyetem kezdeti szingularitásának valamiféle analogonja. A Friedmann-modellben a Nagy Bumm a táguló homogén és izotróp Világegyetem fejlődésének kezdeteként adódik a megoldásból. Volt számos elméleti próbálkozás az általános relativitáselmélet keretében annak tisztázására, hogy a kezdeti szingularitás csak a homogenitás és az izotrópia követelményének következménye, avagy akkor is meg kellett legyen a Világegyetem történetében, ha a homogenitás és az izotrópia nem teljesült. Később a kezdeti szingularitás kérdésével részletesen fogunk foglalkozni. Most csak előrebocsátjuk, hogy a téridőre és az anyagra vonatkozó meglehetősen általános feltételek mellett a kozmológiai modellekben megjelenik a kezdeti szingularitás. Erre vonatkoznak Penrosenak<sup>53</sup> és Hawkingnak<sup>54</sup> a tételei. Az általános relativitáselmélet nagyon általános feltevések mellett azt mondja tehát, hogy a Világegyetem fejlődése szingularitással kezdődött. Természetesen a fizikusokban jogosan fogalmazódik meg a kétség, hogy kielégítő-e az általános relativitáselmélet, mint olyan elmélet, amelyik a Világegyetem fejlődését szinguláris kezdettel indítja.

Általában a fizikában bebizonyosodott, hogy a Természet nem „kedveli” a szingularitásokat: ha azok megjelennek egy elméletben, akkor többnyire azt jelzik, hogy nem megfelelő a jelenség leírására tett próbálkozásunk. Ma az a sejtésünk, hogy az általános relativitáselmélet a Világegyetem történetében gondolatban visszafelé haladva valamikor érvényét veszti. Nagyjából akkor következhet ez be, amikor addig jutunk a Világegyetem történetének visszafejtésében, hogy annak mérete az  $\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,62 \cdot 10^{-35}$  m Planck-hossz nagyságrendjébe esik. A Planck-hossz egy olyan jellegzetes távolság, amit a kvantumfizikában szereplő  $\hbar \approx 6,63 \cdot 10^{-34}$  m<sup>2</sup>kg/s Planck-állandóból ( $\hbar = h/2\pi$ ), a  $G$  Newton-féle gravitációs állandóból és a  $c$  vákuumbeli fénysebességből lehet dimenzionális megfontolással képezni. Azt gondoljuk, hogy a Planck-hosszal összemérhető vagy annál kisebb méretskálákon a gravitáció és a kvantumfizika egyformán fontosak, valószínűleg maga a gravitáció is kvantumos természetű. Ha így van, akkor a Nagy Bumm a Világegyetemnek a gravitáció klasszikus fizikai elméletéből extrapolált kezdete csupán. A Világegyetem története azonban az extrapolált kezdetet követő  $t_P$  időtartamú Planck-korszakban nem érthető meg az általános relativitáselmélet keretében. Jelenleg a kvantumgravitációnak nem létezik kiforrott és fizikai-csillagászati megfigyelésekkel igazolt elmélete. Egy ilyen elmélet, ha egyszer rendelkezésre fog állni, más megvilágításba fogja helyezni a Világegyetem fejlődésének a  $t_P$  idő előtti szakaszát; vélhetően a kezdeti szingularitás problémáját is megoldja majd.

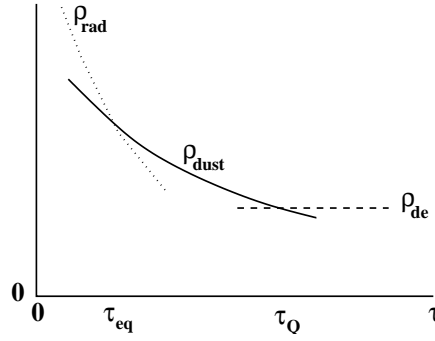
#### 6.2.4. A Világegyetem energiasűrűségének változása

A Friedmann-egyenletek alapján az energiasűrűség jellegzetes módon változik a por és a sugárzás által uralt Világegyetemben. Por uralta Világegyetemben

$$\rho a^3 = \text{áll.}, \quad (6.2.34.)$$

<sup>53</sup>Sir Roger Penrose, angol matematikus és fizikus, 1931-

<sup>54</sup>Stephen William Hawking, angol fizikus, 1942-



10. ábra. Az energiasűrűség egyes összetevőinek alakulása a Világegyetem tágulása során: a sugárzás  $\rho_{rad}$  energiasűrűsége (pontosított vonal), a por  $\rho_{dust}$  energiasűrűsége (folytonos vonal) és a sötét energia  $\rho_{de}$  sűrűsége (szaggatott vonal);  $\tau_{eq}$  és  $\tau_Q$  rendre a (sugárzás - por) és a (por - sötét energia) sűrűségei egyezésének pillanatai.

sugárzás uralta Világegyetemben pedig

$$\rho a^4 = \text{áll.} \quad (6.2.35.)$$

összefüggés szerint változik a Világegyetem skálaparaméterével az energiasűrűség. A (6.2.34.) összefüggés értelmében az egységnyi térfogatra eső porszemcsék (galaxisok) száma  $a^3$ -nel fordított arányban csökken. A (6.2.35.) összefüggést pedig az magyarázza, hogy a tágulás során nemcsak az egységnyi térfogatra eső fotonok száma csökken (szintén  $a^3$ -nel fordított arányban), hanem a fotonok energiája is csökken  $a$ -val fordított arányban, mert a fotonok vöröseltolódást szenvednek a tágulás során.

A por és a sugárzás energiasűrűségének a Világegyetem tágulása miatti változása a következőket jelenti. Először is a kezdeti  $a \rightarrow 0$  korszakban a sugárzás dominálja a Világegyetemet. Másodszor, mivel kezdetben a sugárzás uralja a Világegyetemet, ezért elkövetkezik a Nagy Bumot ( $\tau = 0$ ) követően egy  $\tau_{eq}$  pillanat, amikor megegyezik a por és a sugárzás energiasűrűsége, hiszen a sugárzás energiasűrűsége a tágulás során gyorsabban csökken, mint a poré. A sugárzás és a porszerű anyag energiasűrűségének egyenlősége kb.  $\tau_{eq} \approx 10^5$  évvel a Nagy Bumm után következett be Világegyetemünkben. A későbbiekben, azaz  $\tau > \tau_{eq}$  esetén már a por uralja a Világegyetemet egészen addig, amíg – állandó tágulás esetén – elkövetkezik majd egy pillanat, amikor a tágulás miatt a por energiasűrűsége kisebbé válik, mint a sötét energia sűrűsége. Ekkor az utóbbi veszi át az uralmat a kiüresedett Világegyetemben.

Szorozzuk meg a (6.2.13.) egyenletet  $a^2$ -tel, majd deriváljuk mindkét oldalát az izotróp megfigyelők  $\tau$  sajátideje szerint. Az így kapott egyenletbe helyettesítsük be  $\ddot{a}$ -nak a (6.2.14.) egyenletből kifejezett alakját. Ekkor azonos átalakítások után a

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \quad (6.2.36.)$$

egyenletet kapjuk.

Por uralta Világegyetemben a nyomás zérus,  $P = 0$ , úgyhogy

$$\dot{\rho} = -3H\rho = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho \quad (6.2.37.)$$

adódik, ahonnan

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}, \quad (6.2.38.)$$

azaz  $\rho a^3 = \text{áll.}$

Sugárzás uralta Világegyetemben a nyomás  $P = \rho/3$ , úgyhogy

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4\frac{\dot{a}}{a}, \quad (6.2.39.)$$

ahonnan  $\rho a^4 = \text{áll.}$  adódik.

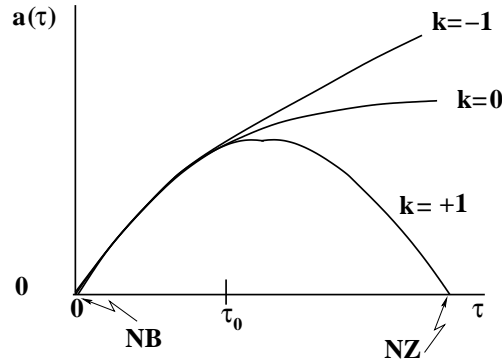
Ezt a fejezetet azzal zárhatjuk, hogy ha a tágulás tovább folyik (mint a  $k = 0$  és  $k = -1$  esetekben), akkor el kell jönnie annak a Nagy Bummot követő  $\tau_Q$  pillanatnak, amikor az anyag (a por) energiasűrűsége a sötét energia sűrűsége alá esik. Ettől kezdve a sötét energia és a vele járó gravitációs taszítás uralja a kiüresedett (lényegében elhanyagolható anyagsűrűséget és sugárzási energiasűrűséget tartalmazó) Világegyetemet.

### 6.2.5. A táguló Világegyetem jövője

A Friedmann-egyenletek alapján előrejelezhetjük a Világegyetem jövőjét, *ha az jelenleg tágul.* Tegyük fel, hogy *az anyag*  $P \geq 0$  *nyomású.* Ekkor különböző  $k$  térgeometriák esetén a Világegyetem az alábbi viselkedést mutatja a jövőben.

1. A  $k = 0$  esetben (lapos térgeometria) a (6.2.13.) egyenlet  $3\dot{a}^2 = 8\pi\rho a^2$  alakba írható át. A  $\tau \rightarrow \infty$  határesetben  $\rho$  legalább olyan gyorsan csökken, mint  $1/a^3$ , azaz  $\rho a^2 \sim 1/a \rightarrow 0$  az egyenlet jobb oldalán. Ez azt jelenti, hogy  $\dot{a} \rightarrow 0$ , ha  $\tau \rightarrow \infty$ . Ilyenkor a Világegyetem örökké tágul, de a tágulás sebessége zérushoz tart.
2. A  $k = -1$  esetben (hiperbolikus térgeometria) a (6.2.13.) egyenlet  $3\dot{a}^2 = 8\pi\rho a^2 + 3$  alakba írható. Mivel  $\tau \rightarrow \infty$  esetén a jobb oldal első tagja zérushoz tart, a távoli jövőben  $\dot{a} \rightarrow +1$  adódik. A Világegyetem ekkor is örökké tágulni fog, a tágulás sebessége állandóvá válik.
3. A  $k = +1$  esetben (gömbi térgeometria) a (6.2.13.) egyenlet  $3\dot{a}^2 = 8\pi\rho a^2 - 3$  alakba írható át. Ahogy  $\tau$  nő, az első tag csökken, és ezért létezik a skálaparaméternek olyan kritikus  $a_c = \sqrt{3/(8\pi\rho)}$  értéke, amikor a tágulás sebessége zérussá válik. Mivel az egyenlet jobb oldalának pozitívnak kell lennie, ezért teljesülnie kell az  $a(\tau) \leq a_c$  egyenlőtlenségnek. A Világegyetem skálaparamétere tehát nem nőhet korlátlanul. Amikor a Nagy Bumm utáni tágulás során eléri az  $a_c$  kritikus értéket, ami az  $a$  paraméter maximális értéke, akkor  $a(\tau)$  elkezd csökkenni. A Nagy Bumm után véges idővel a skálaparaméter ismét zérussá válik,  $a = 0$  lesz. A zárt gömbi Világegyetem története szingularitással ér véget, ez a „Nagy Zutty” (Big Crunch).





11. ábra. A Friedmann-egyenlet megoldásainak kvalitatív szemléltetése nyílt hiperbolikus ( $k = -1$ ), nyílt euklideszi ( $k = 0$ ) és zárt gömbi ( $k = +1$ ) térgeometria esetén; NB a Nagy Bumm, NZ a Nagy Zutty jelölésére szolgál. A jelenünket  $\tau_0$  illusztrálja az idő-tengelyen.

Mindezeket a kvalitatív jegyeket közvetlenül ki lehet olvasni a numerikus eredményekből, ha megoldjuk a Friedmann-egyenleteket. Akár por, akár sugárzás uralja Világegyetemet, ismerjük az anyag  $P = P(\rho)$  állapotegyenletét, ami rendre  $P = 0$  és  $P = \rho/3$ . Felhasználjuk továbbá, hogy a por és a sugárzás uralta Világegyetemben rendre  $8\pi\rho a^3/3 = C = \text{áll.}$  és  $8\pi\rho a^4/3 = C' = \text{áll.}$  Ekkor a (6.2.13.) egyenlet rendre

$$\dot{a}^2 - \frac{C}{a} + k = 0, \quad \text{ha } P = 0, \quad (6.2.40.)$$

$$\dot{a}^2 - \frac{C'}{a^2} + k = 0, \quad \text{ha } P = \rho/3 \quad (6.2.41.)$$

alakot ölt. A (6.2.14.) egyenlet már nem független, miután felhasználtuk a  $\rho = \rho(a)$  függést. Rendre a fenti közönséges elsőrendű differenciálegyenleteket kell megoldani  $a(0) = 0$  kezdőfeltétellel.

**Megjegyzés:** A csillagászati megfigyeléseinkből arra kell következtetnünk, hogy Világegyetemünk jelenlegi energiasűrűségének kb. 70 %-át sötét energia teszi ki, amelynek nem ismerjük a mibenlétét. Az anyagnak ez a komponense gyenge és térben homogén gravitációs taszítást eredményez. A sötét energia természetes jelöltje lehet a kicsiny  $\Lambda > 0$  kozmológiai állandó, aminek magyarázatát esetleg a bozonikus és fermionikus kvantummezők zérusponti energiáinak összjátéka jelenti. Egy másik elképzelés szerint a sötét energia negatív nyomású,  $P = w\rho$  ( $w < 0$ ) állapotegyenletű ideális folyadékként képzelhető el, ahol  $w$  értéke időben lassan változik, ez az úgynevezett kvintesszencia. A  $w = -1$  eset pontosan olyan ideális folyadéknak felel meg, ami fizikai hatásában megegyezik a  $\Lambda > 0$  kozmológiai állandó hatásával, ha más anyag nincsen jelen.

Vegyük a  $k = 0$ ,  $\rho = P = 0$  és  $\Lambda > 0$  esetet. Ekkor a (6.2.29.) egyenletből  $\ddot{a} = \Lambda a/3 > 0$ , azaz a tágulás gyorsul, a (6.2.28.) egyenletből pedig  $H = \sqrt{\Lambda/3} = \text{áll.}$  Hubble-paraméter adódik. Ez jellemezheti a kiüresedett Világegyetem tágulásának késői szakaszát, amikor  $\tau \gg \tau_Q$ .

Hasonló eredményre jutunk a  $k = 0$ ,  $P = -\rho$  ( $w = -1$ ) és  $\Lambda = 0$  esetben. Ekkor a (6.2.13.) és a (6.2.14.) egyenletek jobb oldalai megegyeznek  $8\pi\rho/3$ -mal, úgyhogy ismét a (6.2.30.) egyenletet és annak  $a(\tau) = e^{C\tau}$  megoldását kapjuk és  $H = C = \text{áll.}$  a Hubble-állandó. Másrészt a (6.2.13.) egyenletből  $\rho = 3H^2/8\pi = \text{áll.}$  energiasűrűség adódik. A (6.2.14.) egyenlet értelmében  $\ddot{a} = (8\pi\rho/3)a = \text{const.}e^{H\tau}$  pozitív, a tágulás most is gyorsuló.

Az Emberiséget joggal izgatja a kérdés, hogy a Világegyetem, amelyben élünk, melyik esetet valósítja meg. Örökké fog-e létezni, avagy szinguláris véget fog-e érni. Az újabb megfigyelések azt látszanak alátámasztani, hogy a Világegyetem lapos térgeometriájú. Ha ez így van, akkor a Világegyetem tágulása örökké fog tartani. Meg kell azonban jegyezni, hogy jelenleg a Világegyetem fejlődésének olyan szakaszában van, amikor a Nagy Bumm utáni feljődésben még alig jelent különbséget az, hogy melyik térgeometria valósul meg. Ezért a megfigyelések hibahatárait is figyelembe véve nem lehet egyértelmű kijelentést tenni a Világegyetem jövőjére nézve.

### 6.2.6. A kozmológiai vöröseltolódás

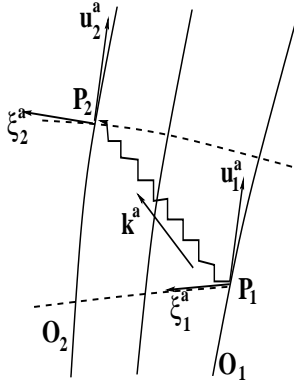
Az, hogy a Világegyetem  $a(\tau)$  skálaparamétere hogyan függ az együttmozgó megfigyelők  $\tau$  sajátidejétől, meghatározza a fény gravitációs vöröseltolódásának mértékét a táguló Világegyetemben. Jelölje a téridő  $P_1$  pontja azt az eseményt, amikor az 1-es együttmozgó megfigyelő (saját lokális mérése szerint)  $\omega_1$  frekvenciájú fényjelet bocsát ki, és a téridő  $P_2$  pontja azt az eseményt, amikor ezt a fényjelet a 2-es együttmozgó megfigyelő (saját mérése szerint)  $\omega_2$  frekvenciájúnak észleli. Legyen  $P_1 \in \Sigma_{\tau_1}$  és  $P_2 \in \Sigma_{\tau_2}$ , ahol  $\tau_2 > \tau_1$ . Ekkor a frekvenciák hányadosára fennáll az

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a(\tau_2)}{a(\tau_1)} \quad (6.2.42.)$$

összefüggés. A táguló Világegyetemben  $a(\tau_2) > a(\tau_1)$ , ezért  $\omega_2 < \omega_1$ , azaz az észlelt frekvencia kisebb, mint a kibocsátott frekvencia, azaz a fény frekvenciája a vörös felé tolódik el. **Ez a gravitációs vöröseltolódás jelensége.**

Legyen  $u_1^a$  és  $u_2^a$  rendre a két, időszerű geodetikusan mozgó megfigyelő sebességvektora,  $k^a$  pedig a fényjel hullámvektora, azaz annak a null-geodetikusként az érintővektormezeje, amely mentén a fény az 1-es megfigyelőtől eljut a 2-es megfigyelőhöz. Az egyes megfigyelők által mért frekvenciák rendre  $\omega_1 = -k_a u_1^a$  és  $\omega_2 = -k_a u_2^a$ . Az izotrópia miatt létezik  $\xi^a$  térszerű Killing<sup>55</sup>-vektormező (az adott irány körüli elforgatásokat generáló egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport orbitájának érintővektor-mezeje). A Killing-vektormezőnek és bármely geodetikus érintővektormezejének skalárszorzata állandó a geodetikus mentén, úgyhogy  $(k^a \xi_a)|_{P_1} = (k^a \xi_a)|_{P_2}$  azon null-geodetikus mentén, amelyen a fényjel eljut  $P_1$ -ből  $P_2$ -be. Tudjuk továbbá, hogy  $k^a$  fényszerű vektor, ezért időirányú vetületének nagysága meg kell egyezzen a térirányú (azaz a  $\Sigma_t$ -re vett) vetületének nagyságával, vagyis  $-k_a u_1^a|_{P_1} = k_a \xi^a / (\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_1}$  és  $-k_a u_2^a|_{P_2} = k_a \xi^a / (\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_2}$ . A Killing-vektor hossza pedig a skálaparaméter növekedésével arányosan nő,  $(\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_1} / (\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_2} =$

<sup>55</sup>Wilhelm Karl Joseph Killing, német matematikus, 1847-1923.



12. ábra. Az  $O_1$  együttmozgó megfigyelő által  $P_1$  eseményként kibocsátott  $\omega_1$  frekvenciájú fényjel  $P_2$  eseményként megérkezik az  $O_2$  együttmozgó megfigyelőhöz, aki azt  $\omega_2$  frekvenciájúnak észleli, miközben a Világegyetem tágulása miatt a fényjel vöröseltolódást szenvedett. A szaggatott vonalak a  $\Sigma_{\tau_1}$  és  $\Sigma_{\tau_2}$  térszerű hiperfelületeket illusztrálják.

$a(\tau_1)/a(\tau_2)$ . Mindebből következik, hogy

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k_a u_1^a|_{P_1}}{k_a u_2^a|_{P_2}} = \frac{k_a \xi^a}{(\xi^b \xi_b)^{1/2}} \Big|_{P_1} \frac{(\xi^b \xi_b)^{1/2}}{k_a \xi^a} \Big|_{P_2} = \frac{(\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_2}}{(\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_1}} = \frac{a(\tau_2)}{a(\tau_1)}, \quad (6.2.43.)$$

amit be akartunk látni.

**Megjegyzés:** A gravitációs vöröseltolódás a téridő görbületi sugarához ( $\approx 1/H$ ) képest kicsiny kiterjedésű téridő-tartományokban Doppler<sup>56</sup>-effektusként is értelmezhető.

Ilyenkor elhanyagolhatjuk a téridő görbületét. Úgy érvelhetünk, mint a klasszikus fizikában. A 2-es megfigyelő saját lokális inerciarendszeréből nézve azt látja, hogy a fényforrás a tágulás következtében távolodik, de a távolodás  $v_f = HR = R/(1/H) \ll 1$  sebessége kicsinynek tekinthető, ahol  $R$  a megfigyelő és a fényforrás távolsága. A megfigyelt és az észlelt frekvencia különbsége az emittált frekvencia  $(v/c)$ -szerese ( $c = 1$ ),

$$\omega_1 - \omega_2 = v_f \omega_1 = HR \omega_1, \quad (6.2.44.)$$

ahol elhanyagoltuk a Hubble-paraméter változását. Kellően kicsiny téridő-tartományban a kibocsátás és az észlelés közötti idő is kicsi,  $\tau_2 - \tau_1 \ll 1/H$ . Ekkor  $\dot{a} \approx [a(\tau_2) - a(\tau_1)]/(\tau_2 - \tau_1) = [a(\tau_2) - a(\tau_1)]/R$ , úgyhogy

$$1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} = HR \approx \frac{a(\tau_2) - a(\tau_1)}{a(\tau_2)} = 1 - \frac{a(\tau_1)}{a(\tau_2)}, \quad (6.2.45.)$$

ahonnan visszakapjuk a vöröseltolódásra a korábbi eredményt. Vegyük észre, a helyes eredményt csak akkor kapjuk meg, ha – mint azt következetesen tennünk kell – az  $a(\tau)$  paramétert a  $P_2$  pontban fejtjük sorba, hiszen a 2-es megfigyelő lokális inerciarendszeréből nézzük az eseményeket. Korábbi bizonyításunk azonban általános érvényű, bármilyen nagy téridő-tartományban érvényes.

<sup>56</sup>Christian Andreas Doppler, osztrák matematikus és fizikus, 1803-1853.

**Megjegyzés:** Be szokás vezetni a  $z$  **vöröseltolódási tényezőt**,

$$z = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} = \frac{a(\tau_2)}{a(\tau_1)} - 1 \approx HR. \quad (6.2.46.)$$

A Hubble-törvényt is ebben az alakjában fedezte fel Hubble. Az  $1 + z$  paraméter lényegében azt méri, hogy mekkora volt a Világegyetem skálaparamétere a mostanihoz képest, amikor a most észlelt sugárzást egy távoli objektum kibocsátotta.

### 6.2.7. A horizontok

Alapvető kérdés, hogy a Világegyetem mekkora részéről kaphat egy megfigyelő információt, és az is, hogy a megfigyelő fizikai történései a Világegyetem mekkora tartományának történéseire lehetnek kihatással. Egy másik fontos kérdés, hogy a görbült Világegyetem mekkora tartománya tekinthető jó közelítéssel laposnak. Ezekkel a kérdésekkel kapcsolatosak a különböző horizont-fogalmak.

- **A részecske-horizont**

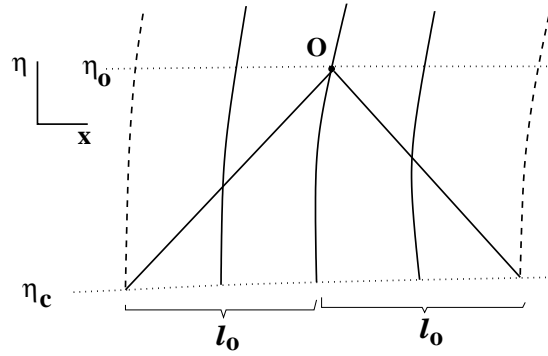
Tegyük fel azt a kérdést, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott  $O$  izotróp megfigyelő elvileg mennyire tudja megfigyelni a Világegyetemet. A Világegyetemről tetszőleges  $O$  izotróp megfigyelő történetének  $P \in M$  eseménye pillanatában rendelkezhet valamilyen mérési tapasztalattal. A maximális mérési tapasztalata azokból a, legfeljebb vákuumbeli fénysebességgel terjedő jelekből tevődhet össze, amelyeket más izotróp megfigyelők küldtek, és amely jelek elérték az  $O$  megfigyelőt eddigi története során, azaz a  $P$  esemény  $\tau_0$  pillanatában, vagyis a jelenben, vagy azt megelőzően.

**Definíció:** Legyen a Világegyetem kora  $\tau_0$ , az ennek megfelelő térszerű hiperfelület  $\Sigma_{\tau_0} \subset M$ . Ekkor a **részecske-horizont** az a határfelület a téridőben, amely az  $O$  izotróp megfigyelő világvonalának  $P \in \Sigma_{\tau_0}$  pontjából „látható” és „nem-látható” izotróp megfigyelők világvonalait elválasztja. „Látható”, ill. „nem-látható” megfigyelőn rendre olyan izotróp megfigyelőt értünk, aki tudott, ill. nem tudott olyan fényjelet küldeni, amely elérte az  $O$  megfigyelőt a  $P$  esemény pillanatában vagy annál korábban.

Az ember azt hihetné, hogy a homogén és izotróp Világegyetem kezdeti korszakában minden megfigyelő tudott jeleket cserélni minden másikkal, hiszen a Világegyetem kora véges, és kezdetben egyetlen szingularitásból indult a fejlődése. Valójában ez még sincsen így. **A FLRW-téridőben mindig létezik részecske-horizont, ha a Világegyetemet sugárzás, por vagy pornál nagyobb  $P > 0$  nyomású anyag uralja.**

A helyzet elemzéséhez érdemes bevezetni az izotróp megfigyelők  $\tau$  sajátideje helyett az  $\eta$  **konform időt**,

$$\eta = \int_{\tau_i}^{\tau} \frac{d\tau'}{a(\tau')}, \quad (6.2.47.)$$



13. ábra. A részecske-horizont sematikus ábrája a FLRW-téridő konform diagramján;  $\eta$  a konform idő,  $x$  az együttmozgó koordináta. A szaggatott vonalak azon izotróp megfigyelők világvonalai, akiknél távolabbi megfigyelőktől az  $O$  izotróp megfigyelő nem kaphatott a jelen  $\tau_0$  pillanatig fényjeleket (a  $0 \leq \tau \leq \tau_0$  intervallum megfelel a véges  $\eta_c \leq \eta \leq \eta_0$  intervallumnak). A szaggatottan jelölt világvonalak jelölik ki azt - az együttmozgó távolságban  $\ell_0$  sugarú - tartományt a  $\Sigma_{\tau_0}$  térszerű hiperfelületen, amelynek határa a jelenlegi részecske-horizont.

azaz  $d\eta = d\tau/a(\tau)$ . Itt  $\tau_0$  helyett  $\tau$  jelöli a Világegyetem változó korát, továbbá a FLRW-modellben a Világegyetem története a Nagy Bummal kezdődik, úgyhogy  $\tau_0 i = 0$ . A  $ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)d\ell^2$  Robertson-Walker-metrika ennek segítségével átírható

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + d\ell^2) \quad (6.2.48.)$$

alakba. Azt mondjuk, hogy ez a metrika **konform lapos** metrika, mert  $g_{ab} \rightarrow a^2 g_{ab}$  konform transzformációval kapható meg a Minkowski-metrikából. A Robertson-Walker-metrika szerint ezért a vektorok pontosan akkor időszerű -, térszerű - vagy null-vektorok, ha a Minkowski-metrika szerint is azok. A részecske-horizontnak  $P$ -től együttmozgó koordinátákban mért távolsága  $\ell_p(\eta) = \eta - \eta_i$ , aminek a

$$d_p(\tau) = a(\tau) \int_{\tau_i}^{\tau} \frac{d\tau'}{a(\tau')} \quad (6.2.49.)$$

fizikai távolság felel meg. Az, hogy az  $O$  megfigyelő a  $P$  esemény pillanatáig kaphatott-e jeleket az összes többi izotróp megfigyelőtől, vagy azoknak csak egy részétől, attól függ, hogy a fenti konform transzformáció az FLRW-téridőt az egész Minkowski-téridőre, vagy annak csak egy tartományára képezi le. Ez azon múlik, hogy az  $\eta$  konform idő mekkora intervallumot fut be, amíg a  $\tau$  „fizikai” időben a  $P$  eseménynek megfelelő pozitív értéktől haladunk visszafelé a  $\tau \rightarrow \tau_i = 0$  pillanatig, a Világegyetem kezdetének pillanatáig. Ha  $\tau \rightarrow 0$  határesetben  $\eta \rightarrow -\infty$ , akkor a térben  $O$ -tól végtelen (együttmozgó koordinátákban mért) távolságra ( $\ell = \int d\ell \rightarrow \infty$ ) elhelyezkedő megfigyelők is tudhattak  $P$ -be fényjelet küldeni, ha azt konform időben  $\eta = \ell \rightarrow -\infty$  pillanatban bocsátották ki. Ha  $\tau \rightarrow 0$  esetén  $\eta \rightarrow \eta_c$  véges értékhez tart, akkor a FLRW-téridőt a fenti konform transzformáció a Minkowski-téridőnek csak az  $\eta \geq \eta_c$  tartományára képezi le. Ekkor az együttmozgó izotróp megfigyelők közül csak azok tudhattak fényjelet küldeni  $P$ -be, akiknek  $O$ -tól együttmozgó koordinátákban mért távolsága  $\ell \leq \eta_c$ .

A részecske-horizont létezése tehát attól függ, hogy a konform időt definiáló integrál divergál vagy konvergál a  $\tau \rightarrow 0$  határon. Az utóbbi pedig azon múlik, hogy hogyan változik az

$a(\tau)$  skálaparaméter az együttmozgó megfigyelők óráin mért  $\tau$  sajátidő, azaz a fizikai idő függvényében. Az  $a(\tau)$ -függvény a Friedmann-egyenletek megoldása, alakját a térgeometria ( $k$  értéke) és a Világegyetem anyagának összetétele határozza meg. Vegyünk sorra néhány tanulságos esetet:

1. *Por uralta (táguló) Világegyetem* és lapos térgeometria ( $k = 0$ ) esetén a (6.2.40.) egyenletből

$$\dot{a} = \sqrt{C}a^{-1/2} \Rightarrow a^{3/2} \propto \tau, \Rightarrow a \propto \tau^{2/3} \quad (6.2.50.)$$

adódik, úgyhogy

$$\eta \propto \int_0^\tau \tau'^{-2/3} d\tau' \propto \tau^{1/3} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0. \quad (6.2.51.)$$

Ekkor a (6.2.47.) integrál konvergens, tehát létezik részecske-horizont. Ha a Világegyetem anyaga nem por, hanem  $P > 0$  nyomású más anyag, akkor meg lehet mutatni, hogy  $a(\tau) > a_{\text{por}}(\tau)$ , úgyhogy ekkor is konvergens az integrál és létezik a részecske-horizont.

Por uralta Világegyetemben hiperbolikus térgeometria ( $k = -1$ ), ill. gömbi térgeometria ( $k = +1$ ) esetén a  $\tau \rightarrow 0$  határesetben a (6.2.40.) egyenlet jobb oldalán álló ( $k$ -t tartalmazó) második tag elhanyagolhatóvá válik a végtelenhez tartó első tag mellett. Ezért a (6.2.47.) integrál viselkedése a  $\tau \rightarrow 0$  határesetben ugyanaz lesz, mint a lapos geometria esetén. Tehát ekkor is létezik a részecske-horizont.

2. *Sugárzás uralta* lapos Világegyetemben a (6.2.41.) egyenlet alapján

$$\dot{a} = \sqrt{C'}a^{-1} \Rightarrow a^2 \propto \tau, \Rightarrow a \propto \tau^{1/2} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0. \quad (6.2.52.)$$

Innen látjuk, hogy szintén létezik a részecske-horizont.

A hiperbolikus és gömbi térgeometriák esetén a (6.2.41.) egyenlet jobb oldalának második tagja ugyancsak elhanyagolhatóvá válik az első, végtelenhez tartó tag mellett a  $\tau \rightarrow 0$  határesetben. Így a viselkedés megint azonos lesz, mint lapos térgeometria esetén, vagyis létezik részecske-horizont.

**Megjegyzés:** A gömbi térgeometria zárt Világegyetemet jelent, azaz véges térfogatú Világegyetemet. Ekkor jogosnak tűnik az a kérdés, hogy megszűnik-e a részecske-horizont létezése a Nagy Zutty pillanatában. Be lehet látni [1], hogy por uralta zárt Világegyetemben valamely izotróp megfigyelő által a Nagy Bumm pillanatában kibocsátott fény éppen félúton tart a zárt Világegyetem körüljárásában, amikor annak maximális a kiterjedése, azaz a Nagy Zutty pillanatáig teljesen körbejárja a Világegyetemet. Ezért a Nagy Zutty pillanatában megszűnik a részecske-horizont létezni. Ebben az egyetlen pillanatban az  $O$  megfigyelő bármelyik irányba is néz, észlelhet olyan fényjelet, amelyet bármelyik másik izotróp megfigyelő bocsátott ki.

A por uralta zárt Világegyetem történetének végső, szingularitást jelentő pillanatát leszámítva tehát mindig létezik részecske horizont a sugárzás, por, ill. pornál nagyobb  $P > 0$  nyomású anyag által uralt FLRW-Világegyetemben. A részecske-horizont nagyságrendje hasonlóan becsülhető meg, mint a Világegyetem  $\tau_0$  kora. Ha elhanyagoljuk a skálaparaméter időfüggését, akkor a részecske-horizont fizikai mérete

$$a\ell_0 = a\eta_c \approx a\frac{\tau_0}{a} = \tau_0 \approx 1/H. \quad (6.2.53.)$$

A részecske-horizont nagyságrendje tehát a Hubble-paraméter reciprokának nagyságrendje ( $c = 1$  választás esetén).

- **Az esemény-horizont** azt mondja meg, hogy a  $\tau_0$  korú Világegyetemben mekkora annak a tartománynak a kiterjedése, ahonnan a  $\tau_0$  pillanatban indított fényjelek még elérhetik a  $P$  megfigyelőt a Világegyetem teljes további története során.

Legyen a Világegyetem mindenkor kora a konform időben  $\eta$  és legyen  $\eta_{max}$  a Világegyetem történetének vége. Ekkor az esemény-horizontnak  $P$ -től együttmozgó koordinátákban mért távolsága  $\ell_e(\eta) = \eta_{max} - \eta$ , úgyhogy az esemény-horizont fizikai távolsága

$$d_e(\tau) = a(\tau) \int_{\tau}^{\tau_{max}} \frac{d\tau'}{a(\tau')}. \quad (6.2.54.)$$

Itt a FLRW-modellben lapos és hiperbolikus térgeometria esetén  $\tau_{max} \rightarrow \infty$ , gömbi térgeometria esetén  $\tau_{max}$  véges, a Nagy Zutty pillanata.

- **A Hubble-horizonton** a mindenkor  $H$  Hubble-paraméter reciproka azonos  $d_H(\tau) = H^{-1}$  távolságot értik. Az előbb láttuk, hogy a részecske-horizont a Hubble-horizont nagyságrendjébe esik. Másrészt a FLRW-téridő görbületi sugara közelítőleg  $H^{-1}$ .

A FLRW-modellben a skalárgörbület  $R = 6(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2})$ . Ha a jobboldali zárójeles kifejezésben elhanyagolható az első és az utolsó tag a második tag mellett, akkor az állítás teljesül. Lapos vagy hiperbolikus térgeometria esetén a Világegyetem késői korában ez jó közelítéssel teljesül.

**Megjegyzés:** A részecske-horizont létezése a FLRW-Világegyetemben sajátos problémát vet fel a Világegyetem kezdeti állapotával kapcsolatban. Nevezetesen a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás nagyon alapos tanulmányozása során arra a következtetésre jutottak, hogy a Világegyetem igen nagy pontossággal homogén és izotróp volt, amikor a sugárzás lecsatolódott az anyagról. Mi magyarázza ezt a nagyfokú homogenitást és izotrópiát? Naívan azt várnánk, hogy a megszületése után rendkívül nagy energiasűrűségű Világegyetemben jelentős egyenetlenségek (véletlenszerű, kaotikus sűrűségfluktuációk) voltak. Általában az anyag inhomogenitásai véletlenszerű ütközésekben, a globális termikus (vagy termodinamikai) egyensúly elérésével egyenlítődhetnek ki. Ez azonban valószínűtlen mechanizmus olyan Világegyetemben, amelyben létezik részecske-horizont. Utóbbi esetben ugyanis a Világegyetem különböző darabkái nem tudnak egymással kölcsönhatásba lépni. A Világegyetem nagyfokú homogenitásának és izotrópiájának tehát valamilyen más oka kell legyen. Többféle elgondolás született az okokat illetően. Az egyik szerint általunk ismeretlen okból a Világegyetem eleve homogén és izotróp állapotban született meg. Ez elég valószínűtlennek tűnő feltevés, de van olyan kozmológiai modell, amely erre épít (a Penrose által megfogalmazott Ciklikus Konform Kozmológia (Cyclic Conform Cosmology)), és képes magyarázni a Világegyetemre vonatkozó eddigi ismereteinket. Egy másik, Misner<sup>57</sup> nevéhez fűződő elgondolás abból indult ki, hogy kezdetben a Világegyetem nagyon

<sup>57</sup>Charles W. Misner, amerikai fizikus, 1932-

különbözött a FLRW-féle modelttől és nem létezett benne részecske-horizont. A kezdeti inhomogenitásnak és anizotrópiának talán olyan mechanizmusok révén kellett volna lecsengenie, mint az anyag viszkózitása vagy a kvantum részecske-keltés visszahatása. Nem sikerült azonban megnyugtató magyarázatot találni arra, hogyan csengett volna le az anizotrópia, és hogyan tudott volna egy kezdetben kaotikus állapot egy homogén és izotróp állapotba fejlődni. Az is az elképzelés ellen szól, hogy a nagy méretskálán kezdetben jelenlevő anizotrópia gravitációsan önkölcsönható rendszerekben nem csökkenni, hanem nőni szokott. Pontosan ez magyarázza, hogy a sugárzás lecsatolódása idején jelenlevő kb.  $10^{-5}$  relatív amplitudójú (azaz kb. 0,001 %-os) sűrűségfluktuációkból kialakult a mai Világegyetem nagyléptékű szerkezete a maga kozmikus méretű üregeivel és falaival. Utóbbi időben az az elképzelés tűnik rendkívül sikeresnek a megfigyelések magyarázata tekintetében, amelyik abból indul ki, hogy a Világegyetem fejlődésének korai szakaszában óriási mértékben felfúvódott. Ez akkortájt történhetett, amikor a Világegyetem kora kb. a  $\tau_P$  Planck-idő nagyságrendjébe esett vagy kevéssel azután. Ekkor az  $a$  skálaparaméter eredeti értékének kb.  $e^{50} - e^{70}$ -szeresére nőtt meg viszonylag rövid idő alatt, amivel együtt a részecske-horizont is hasonló arányban megnőtt. Ez tette lehetővé, hogy a kezdetben kaotikus Világegyetem homogén és izotróp állapotba fejlődjön. Az utóbbi elképzelés a Felfúvódó Világegyetem modelljében (Inflationary Universe) fogalmazódott meg, amelynek létrejöttében Guth<sup>58</sup>, Linde<sup>59</sup>, Starobinsky<sup>60</sup> és Steinhardt<sup>61</sup> játszottak meghatározó szerepet.

**Megjegyzés:** Az anyagról és az alapvető kölcsönhatásokról a fizika eddigi fejlődése során szerzett ismereteink alapján a Világegyetem fejlődését megbízhatóan nyomon tudjuk követni egészen a Nagy Bumm utáni kb.  $10^{-14}$  s-tól napjainkig, feltételezve hogy mindvégig a Robertson-Walker-metrika volt érvényben. Ezt nevezzük a Világegyetem fejlődését leíró **Standard Kozmológiai modellnek**. Ennek a modellnek egyik lényegi vonása, hogy kezdetben a Világegyetemet a sugárzás uralta, majd bekövetkezett egy pillanat, amikor a kondenzált anyag energiasűrűsége egyenlővé vált a sugárzás energiasűrűségével. Ezután a kondenzált anyag uralta a Világegyetemet. A Standard Kozmológiai modell elsődleges célja az általunk „ma” látható Világegyetem megértése. Minél messzebbre látunk el a térben mai egyre fejlettebb távcsöveinkkel, annál korábbra nézünk vissza a Világegyetem történetében. Az égboltra „belenézni” nem más, mint egy nagy időutazást csinálni.

A Nagy Bumm utáni kb.  $10^{-14}$  s az az időpillanat, amikor a Világegyetem kb. 10 TeV hőmérsékletű volt. Az elektromágneses és erős kölcsönhatás Standard Modellje már érvényes volt, de még jóval nagyobb volt a hőmérséklet, mint az a kb. 100 GeV, amelyen az elektromágneses kölcsönhatás szimmetriájának spontán sérülése bekövetkezett. Ennél korábbi időszakra azért nem tudunk igazán megbízhatóan extrapolálni, mert nem ismerjük, milyen fizikai törvények és kölcsönhatások érvényesek a 10 TeV feletti energiaskálaikon. A Világegyetem sugárzás uralta időszakaiban használhatjuk a kozmikus háttérsugárzás hőmérsékletét is annak jellemzésére, hogy mennyi idővel vagyunk a Nagy

<sup>58</sup>Alan Harvey Guth, amerikai fizikus, 1947-

<sup>59</sup>Andrei Dmitriyevich Linde, orosz, amerikai fizikus, 1948-

<sup>60</sup>Alexei Alexandrovich Starobinsky, szovjet, orosz fizikus, 1948-

<sup>61</sup>Paul Joseph Steinhardt, amerikai fizikus, 1952-



Bumm után, hiszen a hőmérséklet a tágulás során maga is gravitációs vöröseltolódást szenved. Ha  $T_{\gamma 0} = T_{\gamma}(\tau_0)$  a mikrohullámú kozmikus háttérsugárzás jelenlegi hőmérséklete, akkor korábban  $T_{\gamma}(\tau) = T_{\gamma 0}(1+z)$  volt, (hiszen ugyanúgy változott, mint a sugárzás frekvenciája). Másrészt, ha  $a(\tau_0)$  a jelenlegi skálaparaméter, akkor  $1+z = a(\tau_0)/a(\tau)$ , de sugárzás uralta Világegyetemben  $a(\tau) \propto \tau^{1/2}$ , mint láttuk, úgyhogy  $T_{\gamma}(\tau) = T_{\gamma 0}a(\tau_0)/a(\tau) \propto \tau^{-1/2}$ . Ez mutatja, hogy a vöröseltolódást is és a hőmérsékletet is használhatjuk „óráként”. A konvenció az, hogy az így értelmezett hőmérsékletet használjuk akkor is a Világegyetem korának megjelölésére, amikor azt már nem a sugárzás uralja.

A Világegyetem fejlődésének vázlatos leírása megtalálható a Kozmológia alapjai c. oktatási segédlet 3. fejezetében.

## 7. A Schwarzschild-megoldás

### 7.1. A téridő sztatikus, gömbszimmetrikus test környezetében

Azt a kérdést szeretnénk megválaszolni, hogy milyen a téridő egy gömbszimmetrikus, sztatikus objektumon kívül, ahol az energiimpulzus-tenzor azonosan eltűnik. Ebből a célból meg akarjuk keresni az

$$R_{ab} = 0 \quad (7.1.1.)$$

Einstein-egyenletek megoldásául szolgáló összes olyan  $g_{ab}$  metrikát, amely gömbszimmetrikus és sztatikus téridőt ír le. Először pontosítjuk, hogy mit is értünk sztatikus és gömbszimmetrikus téridőn.

#### 7.1.1. A sztatikus és a sztatikus és gömbszimmetrikus téridő metrikája

**Definíció:** A téridőt **stacionáriusnak** nevezzük, ha létezik olyan egy-paraméteres  $\phi_t$  izometria-csoport, amelynek orbitái időszerű görbék. Ez egyenértékű azzal, hogy létezik egy időszerű  $\xi^a$  Killing-vektormező. A  $\xi^a$  Killing-vektorok a  $\phi_t$  izometria-csoport orbitáinak az érintővektorai.

**Megjegyzés:** A  $\phi_t$  izometria-csoport létezése azt jelenti, hogy a téridő időbeli eltolási szimmetriával rendelkezik, azaz a metrika invariáns a  $\phi_t$  időbeli eltolásokkal szemben, vagyis a  $\xi^a$  Killing-vektormező szerinti Lie<sup>62</sup>-deriváltja azonosan eltűnik,

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \nabla_b \xi_a + \nabla_a \xi_b = 0. \quad (7.1.2.)$$

**Definíció:** A téridőt **sztatikusnak** nevezzük, ha stacionárius és létezik a  $\xi^a$  Killing-vektormezőre ortogonális  $\Sigma$  térszerű hiperfelület. A Frobenius<sup>63</sup>-tétel értelmében a Killing-vektormező akkor és csak akkor hiperfelület-ortogonális, ha kielégíti a

$$\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0 \quad (7.1.3.)$$

feltételt.

Sztatikus téridőben természetes módon kínálkozik a koordinátarendszer alábbi választása. A  $\Sigma$  térszerű hiperfelületen válasszunk tetszőleges  $(x^1, x^2, x^3)$  térkoordinátákat, valamint az  $x^0 = 0$  koordinátát. Ha  $\xi^a \neq 0$  a  $\Sigma$  hiperfelületen, akkor

---

<sup>62</sup>Marius Sophus Lie, norvég matematikus, 1842-1899.

<sup>63</sup>Ferdinand Georg Frobenius, német matematikus, 1849-1917.

a  $\Sigma$ -nak van olyan környezete, amelyből vett bármely  $p$  ponton a  $\phi_t$  izometria-csoport pontosan egy, a  $\Sigma$ -t is metsző orbitája fog áthaladni. Rendeljük ekkor  $p$ -hez azon  $q \in \Sigma$  pont térkoordinátáinak értékeit, amely  $q$  pontban a  $p$ -n áthaladó orbita metszi  $\Sigma$ -t. Továbbá rendeljük  $p$ -hez azt a  $t$  paraméter-értéket, amelyhez tartozó  $\phi_t$  izometria-transzformáció viszi át a  $q \in \Sigma$  pontot  $p$ -be. A  $\Sigma_t$  felületet úgy definiáljuk, mint mindazon pontok halmazát, amelyeket ugyanazzal a  $t$  paraméter-értékkel címkéztünk meg. Az így értelmezett  $\Sigma_t$  felület a  $\Sigma$  hiperfelület  $\phi_t$  izometria által előállított képe,  $\Sigma_t = \phi_t(\Sigma)$ , és ezért szintén ortogonális a  $\xi^a$  Killing-vektormezőre. Jelöljük a Killing-vektor normanégyzetének mínusz egyszerűsítését  $V^2(x^1, x^2, x^3) = -\xi^a \xi_a > 0$ -val. Ekkor a bevezetett koordinátarendszerben a metrika

$$ds^2 = -V^2(x^1, x^2, x^3)dt^2 + \sum_{\mu, \nu=1}^3 h_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3)dx^\mu dx^\nu \quad (7.1.4.)$$

alakot ölt. Hiányzanak a  $dt dx^\mu$  típusú kereszttagok, ami annak a következménye, hogy sztatikus a téridő, azaz hogy a Killing-vektormező ortogonális a  $\Sigma$  térszerű hiperfelületre. Stacionárius, de nem sztatikus esetben ezek a tagok is fellépnének.

**Megjegyzés:** A sztatikus téridő **időmegfordítási szimmetriával** is rendelkezik. Ez abból következik, hogy a  $\Sigma$  hiperfelület a  $\Sigma_t$  hiperfelületből ugyancsak megkapható izometria-transzformációval, nevezetesen  $\phi_{-t}$  hatására:  $\Sigma = \phi_{-t}(\Sigma_t)$ . Előfordulhat azonban, hogy időtől független anyag- és sebességeloszlású anyag jelenlétében a téridő nem rendelkezik időmegfordítási szimmetriával. Ebben az esetben nem teljesül a Killing-vektormező hiperfelület-ortogonalitását biztosító (7.1.3.) feltétel, a szomszédos orbiták egymás köré csavarodnak [1]. A (7.1.3.) feltétel teljesülése szükséges és elégséges ahhoz, hogy a téridő időmegfordítási szimmetriával rendelkezzen.

**Definíció:** A téridő **gömbszimmetrikus**, ha létezik az izometria-csoportjának olyan alcsoportja, amely izomorf a 3-dimenziós euklideszi térben történő valódi forgatások  $SO(3)$  csoportjával. Ennek az orbitái 2-dimenziós gömbfelületek. (Az orbita ebben az esetben az összes olyan pont halmaza, amelyeket a téridő egy adott pontjából  $SO(3)$  izometria-transzformációkkal kaphatunk.)

Az  $SO(3)$  csoport-transzformációknak adott irányú körüli adott szögű elforgatások feleltethetők meg  $\mathbb{R}^3$ -ban. Az  $SO(3)$  csoport topológiája homeomorf az  $\mathbb{R}^3$ -ba rajzolt olyan  $\pi$  sugarú gömb topológiájával, amelynek felületén a diametrálisan átellenes pontok azonosak. A csoport orbitái (az adott szögű, összes különböző lehetséges irányú elforgatásoknak megfelelő pontok halmazai)  $\mathbb{R}^3$ -ba ágyazott 2-dimenziós gömbfelületek, amelyeken  $(\theta, \phi)$  gömbi polárkoordinátákat vezethetünk be.

A téridő  $SO(3)$ -izometriái ezért fizikailag forgatásokként értelmezhetők, és a téridő gömbszimmetrikus, ha a metrikája invariáns marad az  $SO(3)$  forgatásokkal szemben. A téridő metrikája metrikát indukál minden egyes  $SO(3)$ -orbitán, ennek

azonban a forgásszimmetria miatt az egység-sugarú 2-dimenziós gömbfelület metrikájával kell arányosnak lennie. Így az egyes orbitákon indukált metrikát kimerítően jellemzi az orbita  $A$  felülete. Gömbszimmetrikus téridőben ezért érdemes bevezetni az

$$r = \left( \frac{A}{4\pi} \right)^{1/2} \quad (7.1.5.)$$

**radiális koordinátát**, amelynek és a **gömbi polárszögeknek**, mint koordinátáknak a segítségével az orbiták metrikája

$$r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (7.1.6.)$$

**Megjegyzés:** Ha  $\Sigma$  topológiailag a 3-dimenziós euklideszi térrel homeomorf, akkor  $r$  a gömb sugarának tekinthető, azaz a gömbfelület és a gömb középpontja közötti távolságnak. Ha azonban más a tér topológiája, pl.  $\mathbb{R} \times S^2$ , akkor nincsen az orbitáknak középpontja. Ekkor az  $r$  koordináta nem hordoz olyan jelentést, hogy „középponttól mért távolság”.

**Állítás:** Ha a téridő sztatikus, gömbszimmetrikus és a  $\xi^a$  Killing-vektormező egyértelműen meghatározott (amit mi mindig fel fogunk tenni), akkor a  $\xi^a$  Killing-vektormező ortogonális az  $SO(3)$ -orbitákat jelentő 2-dimenziós gömbfelületekre.

Ha  $\xi^a$  egyértelműen meghatározott, akkor invariánsnak kell lennie valamennyi  $SO(3)$  izometria-transzformációval szemben. Akkor viszont  $\xi^a$  bármely orbitára vett vetületének zérusnak kell lennie, mert ha a vetület-vektormező a gömbfelületen nem lenne azonosan zérus, akkor nem lehetne invariáns valamennyi  $SO(3)$ -transzformációval szemben.

Az  $SO(3)$ -orbiták tehát olyan 2-dimenziós gömbfelületek, amelyek teljes egészében a  $\xi^a$ -ra merőleges  $\Sigma_t$  hiperfelületekben helyezkednek el. Ennek következtében természetes módon vezethetünk be koordinátarendszert. Válasszunk egy orbitát  $\Sigma_0$ -ban, és vezessünk be rajta  $(\theta, \phi)$  szférikus koordinátákat, aztán emeljük át ezeket a koordinátákat a többi 2-dimenziós gömbfelületre az orbitákra merőleges geodetikussereg segítségével. Utóbbiak a  $\nabla^a r$  vektormező integrálgörbéi. (Eljárásunk hasonló ahhoz, ahogy az  $(x^1, x^2, x^3)$  koordinátákat emeltük át  $\Sigma_0$ -ról a szomszédos  $\Sigma_t$  hiperfelületekre izotróp megfigyelők geodetikussai mentén a homogén és izotróp Világegyetem példáján.) Ha  $\nabla^a r \neq 0$ , akkor az  $(r, \theta, \phi)$  koordinátákat használhatjuk  $\Sigma_0$ -n, amelyeket aztán  $\xi^a$  integrálgörbéi mentén emelünk át  $\Sigma_t$ -re. Végül a  $(t, r, \theta, \phi)$  koordinátákban **a sztatikus, gömbszimmetrikus téridő metrikája**

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.1.7.)$$

alakot ölt, ahol  $f(r)$  és  $h(r)$  tetszőleges függvények, amelyek a gömbszimmetria miatt nem függenek a  $(\theta, \phi)$  szögektől. A gömbi koordinátarendszer nem használható olyan pontokban, ahol  $\xi^a = 0$  vagy  $\nabla^a r = 0$ , vagy általában ha  $\xi^a$  és  $\nabla^a$  kollineárisak.

Az  $R_{ab} = 0$  Einstein-egyenletek megoldása szempontjából ez azt jelenti, hogy a metrika 10 darab független, 4-változós komponensének meghatározása helyett a

feladat mindössze 2 darab 1-változós függvény,  $f(r)$  és  $h(r)$  meghatározására egyszerűsödött.

### 7.1.2. Téridő sztatikus, gömbszimmetrikus testen kívül

Az  $R_{ab} = 0$  Einstein-egyenletek megoldásának első lépése, hogy meg kell határozzuk a Ricci-tenzor komponenseit a (7.1.7.) metrika ismeretében, mint az egyelőre ismeretlen  $f(r)$  és  $h(r)$  függvények kifejezéseit. Ezt a tetrad-módszer 2. változatának alkalmazásával tesszük. A (7.1.7.) metrikához a  $ds^2 = \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)_a$  összefüggés alapján választhatjuk az

$$\begin{aligned} (e_0)_a &= f^{1/2}(dt)_a, \\ (e_1)_a &= h^{1/2}(dr)_a, \\ (e_2)_a &= r(d\theta)_a, \\ (e_3)_a &= r \sin \theta (d\phi)_a \end{aligned} \quad (7.1.8.)$$

ortonormált bázist. Ebben a bázisban a Ricci-tenzor  $R_{\mu\nu} = R_{ab}(e_\mu)^a (e_\nu)^b$  azonosan el nem tűnő komponensei:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{fh}} \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{f'}{rfh}, \\ R_{11} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{fh}} \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{h'}{rh^2}, \\ R_{22} &= -\frac{1}{2} \frac{f'}{rfh} + \frac{1}{2} \frac{h'}{rh^2} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{h}\right) = R_{33}, \end{aligned} \quad (7.1.9.)$$

ahol  $\dots' = d\dots/dr$ . A Ricci-tenzor többi komponense szimmetria-okoknál fogva eltűnik: a  $\Sigma_t$  hiperfelületek ortogonálisak a  $\xi^a$  Killing-vektormezőre, ezért azonosan eltűnnek a Ricci-tenzor (idő-tér)-komponensei, mert az  $R_{ab}(e_0)^b$  vektornak nem lehet térszerű komponense; a  $\nabla_a r$  vektormező integrálgörbéi ortogonálisak az  $SO(3)$ -orbitáknak megfelelő 2-dimenziós gömbfelületekre, ezért azonosan zérus  $R_{12}$  és  $R_{13}$ ; végül a gömbszimmetria miatt  $R_{23}$  is eltűnik és  $R_{22} = R_{33}$ .

A (7.1.9.) összefüggések kiszámolásához először a konnexiók egy-formákat határozzuk meg a (3.6.61.) feltételekből. Ezek bal oldalán rendre az alábbi kifejezések állnak:

$$\begin{aligned} \partial_{[a}(e_0)_{b]} &= \partial_{[a} f^{1/2}(dt)_{b]} = \frac{1}{2} f^{-1/2} f'(dr)_{[a}(dt)_{b]}, \\ \partial_{[a}(e_1)_{b]} &= \partial_{[a} h^{1/2}(dr)_{b]} = \frac{1}{2} h^{-1/2} h'(dr)_{[a}(dr)_{b]} = 0, \\ \partial_{[a}(e_2)_{b]} &= \partial_{[a} r(d\theta)_{b]} = (dr)_{[a}(d\theta)_{b]}, \\ \partial_{[a}(e_3)_{b]} &= \partial_{[a} r \sin \theta (d\phi)_{b]} = \sin \theta (dr)_{[a}(d\phi)_{b]} + r \cos \theta (d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]}. \end{aligned} \quad (7.1.10.)$$

A (3.6.61.) egyenletek

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\nu}\eta^{\mu\nu}(e_\mu)_{[a}\omega_{b]}\sigma_\nu &= -(e_0)_{[a}\omega_{b]}\sigma_0 + (e_1)_{[a}\omega_{b]}\sigma_1 + (e_2)_{[a}\omega_{b]}\sigma_2 + (e_3)_{[a}\omega_{b]}\sigma_3 \\ &= -f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]}\sigma_0 + h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]}\sigma_1 + r(d\theta)_{[a}\omega_{b]}\sigma_2 + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]}\sigma_3\end{aligned}\quad (7.1.11.)$$

jobb oldalait is részletesen kiírva, az alábbi egyenleteket kapjuk az  $\omega_{a\mu\nu} = -\omega_{a\nu\mu}$  konnexiók 1-formáira:

$$\frac{1}{2}f^{-1/2}f'(dr)_{[a}(dt)_{b]} = h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]01} + r(d\theta)_{[a}\omega_{b]02} + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]03}, \quad (7.1.12.)$$

$$0 = f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]01} + r(d\theta)_{[a}\omega_{b]12} + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]13}, \quad (7.1.13.)$$

$$(dr)_{[a}(d\theta)_{b]} = f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]02} - h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]12} + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]23}, \quad (7.1.14.)$$

$$\sin\theta(dr)_{[a}(d\phi)_{b]} + r\cos\theta(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]} = f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]03} - h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]13} - r(d\theta)_{[a}\omega_{b]23}. \quad (7.1.15.)$$

Próbálkozzunk azzal, hogy a (7.1.12.) egyenletet  $\omega_{b02} = \omega_{b03} = 0$ -val elégítsük ki, ekkor

$$\omega_{b01} = \frac{1}{2}\frac{f'}{\sqrt{fh}}(dt)_b + \alpha_1(dr)_b, \quad (7.1.16.)$$

ahol  $\alpha_1(r)$  egyelőre meghatározatlan függvény. Helyettesítsük ezt be a (7.1.13.) egyenletbe, akkor  $\alpha_1 = 0$  adódik, mert az egyenlet többi tagjaiban nem léphet fel a  $(dt)_{[a}(dr)_{b]}$  tenzor. Keressük a (7.1.13.) egyenlet megoldását

$$\begin{aligned}\omega_{b12} &= \alpha_2(d\theta)_b + \alpha_3(d\phi)_b, \\ \omega_{b13} &= \alpha_4(d\phi)_b + \frac{\alpha_3}{\sin\theta}(d\theta)_b\end{aligned}\quad (7.1.17.)$$

alakban, ahol  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  és  $\alpha_4$  egyelőre meghatározatlan függvények. A fentieket behelyettesítjük a (7.1.14.) egyenletbe, ahonnan  $\alpha_2 = -1/\sqrt{h}$  adódik, továbbá azt kapjuk, hogy

$$\alpha_3\sqrt{h}(dr)_{[a}(d\phi)_{b]} = r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]23}, \quad (7.1.18.)$$

ahonnan

$$\omega_{b23} = -\alpha_3\frac{\sqrt{h}}{r\sin\theta}(dr)_b + \alpha_5(d\phi)_b, \quad (7.1.19.)$$

ahol  $\alpha_5$  további meghatározatlan függvény. Végül a fentieket behelyettesítjük a (7.1.15.) egyenletbe:

$$\begin{aligned}\sin\theta(dr)_{[a}(d\phi)_{b]} + r\cos\theta(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]} &= -h^{1/2}(dr)_{[a}\left(\alpha_4(d\phi)_{b]} + \frac{\alpha_3}{\sin\theta}(d\theta)_{b]}\right) \\ &\quad - r(d\theta)_{[a}\left(-\alpha_3\frac{\sqrt{h}}{r\sin\theta}(dr)_{b]} + \alpha_5(d\phi)_{b]}\right),\end{aligned}\quad (7.1.20.)$$

ahonnan leolvashatjuk, hogy

$$\alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{h}}, \quad \alpha_5 = -\cos\theta. \quad (7.1.21.)$$

Mivel a kezdeti feltevéseink,  $\omega_{b02} = \omega_{b03}$  nem vezetett ellentmondásra, azért valóban megtaláltuk az *egyetlen* megoldást:

$$\begin{aligned}\omega_{b02} = \omega_{b03} = 0, \quad \omega_{b01} &= \frac{1}{2} \frac{f'}{\sqrt{fh}} (dt)_b, \quad \omega_{b12} = -\frac{1}{\sqrt{h}} (d\theta)_b, \\ \omega_{b13} &= -\frac{\sin \theta}{\sqrt{h}} (d\phi)_b, \quad \omega_{b23} = -\cos \theta (d\phi)_b.\end{aligned}\tag{7.1.22.}$$

A Ricci-féle rotációs együtthatókat behelyettesítjük az  $R_{ab\mu\nu}$  görbületi 2-formák (3.6.63.) kifejezéseibe, ahonnan

$$R_{ab\mu\nu} = 2\partial_{[a}\omega_{b]\mu\nu} + 2\sum_{\alpha}\omega_{[a|\mu}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha\nu} = -R_{ab\nu\mu}.\tag{7.1.23.}$$

Szükségünk lesz az alábbi kifejezésekre:

$$\begin{aligned}2\partial_{[a}\omega_{b]01} &= \partial_{[a}\frac{f'}{\sqrt{fh}}(dt)_{b]} = \frac{d}{dr}\frac{f'}{\sqrt{fh}}(dr)_{[a}(dt)_{b]}, \\ 2\partial_{[a}\omega_{b]02} &= 2\partial_{[a}\omega_{b]03} = 0, \\ 2\partial_{[a}\omega_{b]12} &= -2\partial_{[a}\frac{1}{\sqrt{h}}(d\theta)_{b]} = -2\frac{d}{dr}\frac{1}{\sqrt{h}}(dr)_{[a}(d\theta)_{b]} = \frac{h'}{h^{3/2}}(dr)_{[a}(d\theta)_{b]}, \\ 2\partial_{[a}\omega_{b]13} &= -2\partial_{[a}\frac{\sin \theta}{\sqrt{h}}(d\phi)_{b]} = \left(\frac{h'\sin \theta}{h^{3/2}}(dr)_{[a}(d\phi)_{b]} - \frac{2\cos \theta}{\sqrt{h}}(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]}\right), \\ 2\partial_{[a}\omega_{b]23} &= -2\partial_{[a}\cos \theta(d\phi)_{b]} = 2\sin \theta(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]},\end{aligned}\tag{7.1.24.}$$

továbbá az

$$2\sum_{\alpha}\omega_{[a|\mu}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha\nu} = -2\omega_{[a|\mu 0}\omega_{b]|\alpha\nu} + 2\omega_{[a|\mu 1}\omega_{b]|\alpha\nu} + 2\omega_{[a|\mu 2}\omega_{b]|\alpha\nu} + 2\omega_{[a|\mu 3}\omega_{b]|\alpha\nu}\tag{7.1.25.}$$

ékszorzatok alábbi kifejezéseire:

$$\begin{aligned}2\sum_{\alpha}\omega_{[a|0}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha 1} &= -2\omega_{[a|02}\omega_{b]|\alpha 1} - 2\omega_{[a|03}\omega_{b]|\alpha 1} = 0, \\ 2\sum_{\alpha}\omega_{[a|0}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha 2} &= 2\omega_{[a|01}\omega_{b]|\alpha 2} = -\frac{f'}{h\sqrt{f}}(dt)_{[a}(d\theta)_{b]}, \\ 2\sum_{\alpha}\omega_{[a|0}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha 3} &= 2\omega_{[a|01}\omega_{b]|\alpha 3} = -\frac{f'\sin \theta}{h\sqrt{f}}(dt)_{[a}(d\phi)_{b]}, \\ 2\sum_{\alpha}\omega_{[a|1}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha 2} &= -2\omega_{[a|13}\omega_{b]|\alpha 2} = -\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{h}}(d\phi)_{[a}(d\phi)_{b]} = 0, \\ 2\sum_{\alpha}\omega_{[a|1}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha 3} &= 2\omega_{[a|12}\omega_{b]|\alpha 3} = \frac{2\cos \theta}{\sqrt{h}}(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]}, \\ 2\sum_{\alpha}\omega_{[a|2}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha 3} &= -2\omega_{[a|12}\omega_{b]|\alpha 3} = -\frac{2\sin \theta}{h}(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]}.\end{aligned}\tag{7.1.26.}$$

Az azonosan el nem tűnő görbületi 2-formák végül:

$$\begin{aligned}
R_{ab01} &= \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} (dr)_{[a} (dt)_{b]}, \\
R_{ab02} &= -\frac{f'}{h\sqrt{f}} (dt)_{[a} (d\theta)_{b]}, \\
R_{ab03} &= -\frac{f' \sin \theta}{h\sqrt{f}} (dt)_{[a} (d\phi)_{b]}, \\
R_{ab12} &= \frac{h'}{h^{3/2}} (dr)_{[a} (d\theta)_{b]}, \\
R_{ab13} &= \left( \frac{h' \sin \theta}{h^{3/2}} (dr)_{[a} (d\phi)_{b]} - \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{h}} (d\theta)_{[a} (d\phi)_{b]} \right) + \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{h}} (d\theta)_{[a} (d\phi)_{b]} \\
&= \frac{h' \sin \theta}{h^{3/2}} (dr)_{[a} (d\phi)_{b]}, \\
R_{ab23} &= 2 \sin \theta (d\theta)_{[a} (d\phi)_{b]} - \frac{2 \sin \theta}{h} (d\theta)_{[a} (d\phi)_{b]} = 2 \left( 1 - \frac{1}{h} \right) \sin \theta (d\theta)_{[a} (d\phi)_{b]}. \quad (7.1.27.)
\end{aligned}$$

Ezeket felhasználva tudjuk meghatározni a Ricci-tenzor komponenseit,

$$\begin{aligned}
R_{\rho\mu} &= \sum_{\sigma,\nu} \eta^{\sigma\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = (e_\rho)^a \sum_{\sigma,\nu} \eta^{\sigma\nu} (e_\sigma)^b R_{ab\mu\nu} \\
&= (e_\rho)^a [-(e_0)^b R_{ab\mu 0} + (e_1)^b R_{ab\mu 1} + (e_2)^b R_{ab\mu 2} + (e_3)^b R_{ab\mu 3}]. \quad (7.1.28.)
\end{aligned}$$

Kiszámításukhoz szükségünk lesz a  $(dr)^a (dr)_a$ , stb. kontrakciókra, amelyeket az ortonormáltság  $(e_\mu)^a (e_\nu)_a = \eta_{\mu\nu}$  feltételéből kapunk meg. Mivel  $\mu \neq \nu$  esetén  $(e_\mu)^a (e_\nu)_a = 0$ , ezért a  $(dt)^a (dr)_a = (dt)^a (d\theta)_a = (dt)^a (d\phi)_a = (dr)^a (d\theta)_a = (dr)^a (d\phi)_a = (d\theta)^a (d\phi)_a = 0$ , továbbá a bázisvektorok normanégyszeteiből

$$\begin{aligned}
(e_0)^a (e_0)_a &= f (dt)^a (dt)_a = -1, & \Rightarrow & (dt)^a (dt)_a = -\frac{1}{f}, \\
(e_1)^a (e_1)_a &= h (dr)^a (dr)_a = +1, & \Rightarrow & (dr)^a (dr)_a = \frac{1}{h}, \\
(e_2)^a (e_2)_a &= r^2 (d\theta)^a (d\theta)_a = +1, & \Rightarrow & (d\theta)^a (d\theta)_a = \frac{1}{r^2}, \\
(e_3)^a (e_3)_a &= r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^a (d\phi)_a = +1, & \Rightarrow & (d\phi)^a (d\phi)_a = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (7.1.29.)
\end{aligned}$$

adódik. Példaként álljon itt a Ricci-tenzor  $R_{00}$  komponensének kiszámítása:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= (e_0)^a [(e_1)^b R_{ab01} + (e_2)^b R_{ab02} + (e_3)^b R_{ab03}] \\
&= f^{1/2} (dt)^a \left[ h^{1/2} (dr)^b \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} (dr)_{[a} (dt)_{b]} - r (d\theta)^b \frac{f'}{h\sqrt{f}} (dt)_{[a} (d\theta)_{b]} \right. \\
&\quad \left. - r \sin \theta (d\phi)^b \frac{f' \sin \theta}{h\sqrt{f}} (dt)_{[a} (d\phi)_{b]} \right] \\
&= f^{1/2} (dt)^a (dt)_a \left[ -\frac{1}{2} h^{1/2} (dr)^b (dr)_b \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} - \frac{1}{2} r \frac{f'}{h\sqrt{f}} (d\theta)^b (d\theta)_b \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} r \sin \theta \frac{f' \sin \theta}{h\sqrt{f}} (d\phi)^b (d\phi)_b \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{fh}} \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{f'}{rfh}, \quad (7.1.30.)
\end{aligned}$$



és hasonlóan kapjuk meg  $R_{11}$ ,  $R_{22}$  és  $R_{33}$  kifejezését.

Az Ricci-tenzor (7.1.9.) komponenseinek felhasználásával a sztatikus, gömbszimmetrikus testen kívüli téridőben a független Einstein-egyenletek

$$0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{fh}} \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{f'}{r f h}, \quad (7.1.31.)$$

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{fh}} \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{h'}{r h^2}, \quad (7.1.32.)$$

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{f'}{r f h} + \frac{1}{2} \frac{h'}{r h^2} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{h}\right) \quad (7.1.33.)$$

alakot öltenek. Adjuk össze a (7.1.31.) és (7.1.32.) egyenletek megfelelő oldalait, ekkor a

$$0 = \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} \quad (7.1.34.)$$

egyenletet kapjuk, ahonnan  $\ln f = -\ln h + \ln K$  ( $K = \text{áll.}$ ), azaz

$$f = \frac{K}{h} \quad (7.1.35.)$$

adódik. Ha átskálázzuk a  $t$  időkoordinátát,  $dt \rightarrow \sqrt{K} dt$ , ami megfelel az  $f/K \rightarrow f$  átskálázásnak, akkor  $K = 1$  választható az általánosság csorbítása nélkül. Helyettesítsük be  $h = 1/f$ -et a (7.1.33.) egyenletbe,

$$-f' + \frac{1-f}{r} = 0, \Rightarrow \frac{d}{dr}(rf) = 1, \quad (7.1.36.)$$

ahonnan

$$f = 1 + \frac{C}{r} \quad (7.1.37.)$$

adódik, ahol  $C = \text{áll.}$  Visszahelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy (7.1.37.) és  $h = 1/f$  megoldja a (7.1.31.)-(7.1.33.) egyenleteket. Megtaláltuk tehát a **sztatikus, gömbszimmetrikus téridő metrikáját, a Schwarzschild-metrikát**,

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{C}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (7.1.38.)$$

ahol  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  és  $C$  tetszőleges állandó, amelynek fizikai jelentését alább tisztázzuk.

Az alábbiakban áttekintjük a Schwarzschild-metrikájú téridő, azaz az üres vákuumban az egyetlen sztatikus, gömbszimmetrikus téridő néhány fontos tulajdonságát.

1. A Schwarzschild-téridő **aszimptotikusan lapos**, azaz az  $r \rightarrow \infty$  határesetben átmegy a Minkowski-metrikába, ami a nem görbült, sztatikus téridő metrikája. Ez teszi lehetővé, hogy a Schwarzschild-metrikát úgy interpretáljuk, mint egy izolált test által a testen kívül keltett gravitációs mezőt.
2. Az előző pontnak megfelelő értelmezés lehetővé teszi, hogy a  $C$  állandónak a Schwarzschild-téridőt keltő izolált test tömegével kapcsolatos jelentést adjunk. Az  $r \rightarrow \infty$  aszimptotikus tartományban össze kell hasonlítani egy próbatest szabadesését, azaz geodetikus mozgását ugyanezen próbatestnek a newtoni gravitáció szerinti szabadesésével. Azt, hogy a próbatest milyen geodetikus mentén esik szabadon az izolált test által keltett Schwarzschild-téridőben, alább meg fogjuk határozni. A newtoni gravitációval történő összehasonlításból kiderül, hogy  $C = -2M$  a  $G = c = 1$  egységrendszerben, ahol  $M$  az izolált test tömege. Tetszőleges egységrendszerben a  $C = -2GM/c^2$  összefüggés adódik. A Schwarzschild-metrika tehát átírható

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (7.1.39.)$$

alakba.

3. A Schwarzschild-metrika **szinguláris** az  $r = 0$  és az  $r = 2M$  helyeken. A szingularitás alapvetően kétféle lehet. **Koordináta-szingularitásról** beszélünk, ha a bevezetett koordinátarendszer valamely pontban érvényét veszti (a téridő valamely pontja nem fedhető le az adott koordinátarendszerrel). Esetünkben ez akkor következik be, ha vagy  $\xi^a = 0$ , vagy  $\nabla^a r = 0$  vagy pedig  $\xi^a$  és  $\nabla^a r$  kollineárisak. Ilyen típusú szingularitás lép fel az  $r = 2M$  helyen. Ekkor a téridő görbülete véges marad. Más, alkalmasabb koordinátarendszerre történő áttérés után a metrika komponenseinek szingularitása megszűnik. A másik típusú szingularitás fizikai, amikor a görbület végtelenné válik. Ez a szingularitás nem szüntethető meg koordináta-transzformációval. Esetünkben ilyen szingularitás lép fel  $r = 0$ -ban.

A Schwarzschild-metrika koordináta-szingularitásának helyét, az úgy nevezett **Schwarzschild-sugár** értékét érdemes számszerűen is meghatározni,

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 3\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\text{km}, \quad (7.1.40.)$$

ahol a Nap tömege  $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30}$  kg. Ezért a Nap, vagy a Föld, ill. más bolygók Schwarzschild-sugara mélyen ezen égitestek belsejében helyezkedik el, ahol a vákuum-megoldás nem érvényes. Az  $r = r_s$  és  $r = 0$  szingularitások csak akkor válnak érdekessé, ha az égitest teljes **gravitációs összeomlást, azaz kollapszust** szenvedett.

4. Végül érdemes megemlíteni, hogy az Einstein-egyenleteknek vákuumban egyetlen gömbszimmetrikus megoldása van (ha nem követeljük meg eleve a sztatikusságot), és ez a Schwarzschild-megoldás. Ez összhangban van **Birkhoff**<sup>64</sup> **tételével**, amely szerint minden gömbszimmetrikus téridő, amely megoldása a vákuumbeli  $R_{ab} = 0$  Einstein-egyenleteknek, sztatikus. Ez analóg azzal az állítással, hogy vákuumban a Maxwell-egyenletek egyetlen gömbszimmetrikus megoldása a sztatikus Coulomb-mező. Ez azt is jelenti, hogy ahogy az elektrodinamikában, úgy a gravitációs mezőben sem létezik monopólus-sugárzás, azaz gömbszimmetrikus sugárzás.

## 7.2. A téridő sztatikus, gömbszimmetrikus test belsejében

Most megkeressük izolált sztatikus, gömbszimmetrikus égitesten belül a téridő metrikáját abban az esetben, amikor az égitest anyaga ideális folyadék, amelynek energia-impulzus-tenzora

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b), \quad (7.2.41.)$$

ahol  $u^a$  a folyadék négyes-sebessége. A sztatikusság követelménye miatt az  $u^a$  négyes-sebességnek párhuzamosnak kell lennie a  $\xi^a$  Killing-vektorral, úgyhogy

$$u^a = \frac{\xi^a}{(-\xi^b \xi_b)^{1/2}} = -\sqrt{f(r)}(dt)^a = -(e_0)^a. \quad (7.2.42.)$$

A sztatikuság és a gömbszimmetria miatt most is 3 független Einstein-egyenletünk van, a többi  $0 \equiv 0$  alakú azonosság,

$$\begin{aligned} 8\pi T_{00} &= G_{00}, \\ 8\pi T_{11} &= G_{11}, \\ 8\pi T_{22} &= G_{22}, \end{aligned} \quad (7.2.43.)$$

ahol  $T_{\mu\mu} = (e_\mu)^a (e_\mu)^b T_{ab}$  és  $G_{\mu\mu} = (e_\mu)^a (e_\mu)^b G_{ab}$ .

Az energiainpulzus-tenzor diagonális komponensei

$$\begin{aligned} T_{00} &= (e_0)^a (e_0)^b T_{ab} = u^a u^b T_{ab} = \rho, \\ T_{11} &= (e_1)^a (e_1)^b T_{ab} = P(e_1)^a (e_1)^b g_{ab} = \eta_{11} P = P, \\ T_{22} &= (e_2)^a (e_2)^b T_{ab} = P(e_2)^a (e_2)^b g_{ab} = \eta_{22} P = P. \end{aligned} \quad (7.2.44.)$$

Az Einstein-tenzor komponenseinek kiszámításához felhasználjuk, hogy a Gauss-görbület

$$R = \sum_{\mu=0}^3 R_\mu^\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -R_{00} + R_{11} + 2R_{22}, \quad (7.2.45.)$$

---

<sup>64</sup>George David Birkhoff, amerikai matematikus, 1884-1944

úgyhogy a  $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$  Einstein-tenzor diagonális komponensei a tetrad-bázisban

$$\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}R = R_{00} + \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R_{00} + \frac{1}{2}R_{11} + R_{22} \\
&= \frac{h'}{2h^2} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right), \\
G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}\eta_{11}R = R_{11} - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R_{00} + \frac{1}{2}R_{11} - R_{22} \\
&= \frac{f'}{rfh} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right), \\
G_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2}\eta_{22}R = R_{22} - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R_{00} - \frac{1}{2}R_{11} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{fh}}\frac{d}{dr}\frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{f'}{2rfh} - \frac{h'}{2rh^2}.
\end{aligned} \tag{7.2.46.}$$

Az Einstein-egyenletek tehát az alábbi alakot öltik:

$$8\pi\rho = \frac{h'}{2h^2} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right), \tag{7.2.47.}$$

$$8\pi P = \frac{f'}{rfh} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right), \tag{7.2.48.}$$

$$8\pi P = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{fh}}\frac{d}{dr}\frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{f'}{2rfh} - \frac{h'}{2rh^2}. \tag{7.2.49.}$$

A (7.2.47.) egyenletben csak az ismeretlen  $h(r)$  függvény szerepel, úgyhogy ez az egyenlet a másik két egyenlettől függetlenül megoldható  $h$ -ra:

$$h(r) = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}}, \tag{7.2.50.}$$

ahol

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' \tag{7.2.51.}$$

a gömbszimmetrikus égitest  $r$  sugáron belüli tömege.

Azonos átalakítással a (7.2.47.) egyenletet átírhatjuk az alábbi alakba,

$$8\pi\rho = \frac{1}{r^2}\left(\frac{rh'}{h^2} + 1 - \frac{1}{h}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r\left(1 - \frac{1}{h}\right)\right], \tag{7.2.52.}$$

ahonnan integrálás után

$$r\left(1 - \frac{1}{h}\right) = 8\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' + 2a \equiv 2m(r) \tag{7.2.53.}$$

adódik. Innen kifejezzük  $h$ -t, amire a (7.2.50.) kifejezést kapjuk. Ha nem akarjuk, hogy a térmetrika a  $\Sigma$  térszerű hiperfelületen szinguláris legyen, akkor az  $a$  integrálási állandónak  $a = 0$ -nak kell lennie. Így megkapjuk a (7.2.51.) kifejezést.

A fentiekből úgy tűnhet, hogy  $a = 0$  egy választás következménye. Valójában nincsen lehetőségünk választani. Az  $r \rightarrow 0$  sugarú gömb felszíne

$$\oint \sqrt{{}^{(3)}g} dA = 4\pi r^2 \sqrt{h(r)} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 \rightarrow 0 \quad (7.2.54.)$$

kell legyen, ami csak akkor tud teljesülni, ha  $h(r) \rightarrow 1$  az  $r \rightarrow 0$  határesetben, azaz ha  $a = 0$ . (Felhasználtuk, hogy a  $\Sigma$  térszerű hiperfelületen indukált 3-dimenziós metrika determinánsa  ${}^{(3)}g = g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi} = h r^2 \sin^2 \theta$ , úgyhogy az invariáns térfogatelem  $\sqrt{{}^{(3)}g} dr d\theta d\phi = \sqrt{h} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  és az invariáns felületelem az  $r$  sugarú gömb felszínén  $dA = \sqrt{h} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ .)

A  $\Sigma$  hiperfelületnek a sztatikusság követelménye miatt térszerűnek kell lennie, azaz teljesülnie kell a

$$h(r) \geq 0, \quad \Rightarrow \quad r > 2m(r) \quad (7.2.55.)$$

egyenlőtlenségeknek. Ha az izolált gömbszimmetrikus test sűrűsége  $r = R$  radiális koordináta-értéknél válik zérussá, akkor itt kell a testen belüli téridő metrikájának folytonosan illeszkednie a testen kívüli Schwarzschild-metrikához. Mivel  $a = 0$ , a térmetrika

$$m(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr = M \quad (7.2.56.)$$

esetén átmegy a Schwarzschild-metrikába, ahol – mint azt a Schwarzschild-metrika  $r \rightarrow \infty$  aszimptotikusan távoli viselkedéséből tudjuk, –  $M$  az izolált test **teljes tömege** (total mass). (Ez az a súlyos tömege, amivel arányos newtoni gravitációs erőt fejt ki egy távoli próbatestre a hagyományos newtoni felfogás szerint.) Másrészt a (7.2.56.) egyenlőséggel értelmezett teljes tömeg nem azonos a test  $\rho$  tömegsűrűségéből számolt

$$M_p = \int \sqrt{{}^{(3)}g} \rho(r) r^2 dr d\Omega = 4\pi \int_0^R \frac{r^2 \rho(r) dr}{\sqrt{h(r)}} = 4\pi \int_0^R \frac{r^2 \rho(r) dr}{(1 - \frac{2m(r)}{r})^{1/2}} > M \quad (7.2.57.)$$

**teljes valódi tömeggel** (total proper mass). (Itt megint felhasználtuk, hogy a térfogatelem a  $\Sigma$  térszerű hiperfelületen  $\sqrt{{}^{(3)}g} dr d\theta d\phi = \sqrt{h} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ .) A teljes tömeg és a valódi tömeg különbsége pozitív, ami úgy értelmezhető, mint az izolált testnek az

$$E_B = E_p - E = M_p - M > 0 \quad (7.2.58.)$$

**kötési energiája**, amely a test darabkáinak egymással való gravitációs kölcsönhatásából, avagy másképpen a testnek saját gravitációs mezejével való kölcsönhatásából származik. Ez szép példa arra, hogy bár az általános relativitáselméletben az energia fogalma nem jól definiált, mégis egy (esetünkben sztatikus, gömbszimmetrikus)

izolált test teljes energiáját ki lehet egyértelműen olvasni abból, hogy a test a téridőt hogyan görbíti meg az aszimptotikusan lapos tartományban.

Helyettesítsük be a  $h(r)$  függvényre kapott kifejezést a (7.2.48.) egyenletbe és keressük annak megoldását az

$$f(r) = e^{2\phi(r)} \quad (7.2.59.)$$

alakban. Ekkor a  $\phi(r)$  függvényre a

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r[r - 2m(r)]} \quad (7.2.60.)$$

differenciálegyenletet kapjuk. A  $\phi(r)$  függvény fizikai jelentését abból olvashatjuk ki, hogy ez az egyenlet hogyan viselkedik a newtoni határesetben. Ha  $r^3 P \ll m(r)$  és  $m(r) \ll r$  (utóbbi következtében  $h \approx 1$ ), akkor a (7.2.60.) egyenlet közelítőleg

$$-\frac{d\phi}{dr} = -\frac{m(r)}{r^2} \equiv E_r(r) \quad (7.2.61.)$$

alakot ölt. Ha azt is figyelembe vesszük, hogy  $h \approx 1$  esetén  $m(r)$  megegyezik az  $r$  „sugáron” belül található tömeggel, akkor a (7.2.61.) egyenletben felismerjük a newtoni gravitációs potenciálra vonatkozó egyenletet: a térerősség a test középpontja felé mutat ( $E_r(r) = -d\phi/dr < 0$ ) és a gömbszimmetrikus test centrumától  $r$  távolságra olyan, mintha azt egy fiktív tömegpont keltené, amelyet a centrumba képzelünk akkora tömeggel, mint a test  $r$  sugáron belüli részének a tömege. A  $\phi(r) = \frac{1}{2} \ln f(r)$  függvény tehát a **newtoni gravitációs potenciál általánosítása**.

Végül a  $h(r)$  és  $f(r)$  függvényekre kapott összefüggéseket felhasználva kapható meg a (7.2.49.) egyenletből a nyomásra vonatkozó

$$\frac{dP}{dr} = -(P + \rho) \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r[r - 2m(r)]} \quad (7.2.62.)$$

egyenlet, a Tolman<sup>65</sup>-Oppenheimer<sup>66</sup>-Volkoff<sup>67</sup>-egyenlet (TOV-egyenlet). Ha a newtoni határesetben ( $P \ll \rho$ ,  $m(r) \ll r$ ) vizsgáljuk meg az egyenletet, akkor az

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho(r)m(r)}{r^2}, \quad \Rightarrow \quad [P(r + dr) - P(r)]4\pi r^2 = E_r(r)\rho(r)4\pi r^2 dr \quad (7.2.63.)$$

alakban fejezi ki a hidrosztatikai nyomás és a gravitációs erő egyensúlyát, azaz a **hidrosztatikai egyensúly feltételét**. Ebben semmi meglepő nincsen, hiszen sztatikus esetben az Euler-egyenlet a hidrosztatikai egyensúly szükséges és elégséges

<sup>65</sup>Richard Chace Tolman, amerikai matematikai fizikus és fizikai kémikus, 1881-1948

<sup>66</sup>Julius Robert Oppenheimer, amerikai fizikus, 1904-1967

<sup>67</sup>George Michael Volkoff, kanadai fizikus, 1914-2000

feltételét fogalmazza meg. **A TOV-egyenlet tehát azt a feltételt fejezi ki, hogy az izolált test hidrosztatikai egyensúlyban van a sajátmaga által keltett sztatikus, gömbszimmetrikus téridőben.**

A sztatikus, gömbszimmetrikus, ideális folyadékból álló testen belül a téridő metrikája tehát

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)}dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (7.2.64.)$$

ahol  $\phi(r)$ -t a (7.2.60.) egyenlet határozza meg,

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' \quad (7.2.65.)$$

és a (7.2.62.) egyenlet jelenti a hidrosztatikai egyensúly szükséges és elégséges feltételét.

### 7.2.1. A csillagok kritikus tömege

A fentiek alapján az ideális folyadékból álló gömbszimmetrikus égitest sztatikus konfigurációját az alábbi módon határozhatjuk meg. Tekintsük adottnak az anyag  $P = P(\rho)$  állapotegyenletét. Írjunk elő egy tetszőleges  $\rho_c$  középponti sűrűséget és ezáltal a  $P_c = P(\rho_c)$  középponti nyomást. Integráljuk a (7.2.62.) és (7.2.51.) egyenleteket kifelé, amíg valamilyen  $r = R$  mellett elérjük az égitest felszínét, ahol  $P(R) = \rho(R) = 0$  lesz. Ebben a pontban „varrjuk össze” az égitest belsejében uralkodó metrikát a Schwarzschild-metrikával. Ezután integráljuk a (7.2.60.) egyenletet  $r = R$ -tól befelé haladva, és megkövetelve, hogy  $\phi(R)$  egyezzen meg a Schwarzschild-metrikának megfelelő értékkel az égitest felületén. A newtoni elméletben is hasonlóképpen szoktak eljárni a különbséggel, hogy a (7.2.62.) egyenlet helyett a (7.2.63.) egyenletet, a (7.2.60.) egyenlet helyett pedig a (7.2.61.) egyenletet kell használni.

A newtoni elméletből és az általános relativitáselméletből a sztatikus, gömbszimmetrikus égitest (csillag) hidrosztatikai egyensúlyára kapott eredmények azonban különböznek. Az egyik különbség a következő: tegyük fel, hogy a csillagot  $P > 0$  nyomású („normális”) anyag alkotja és adott ennek az anyagnak a  $\rho(r)$  sűrűségeloszlása (azaz, hogy mekkora méretben mekkora tömeg hogyan oszlik el), akkor a középponti  $P_c$  nyomás az általános relativitáselmélet szerint mindig nagyobb, mint a newtoni elmélet szerint. Ez azt mutatja, hogy az általános relativitáselmélet szerint adott anyageloszlás esetén nagyobb a gravitációs vonzásból eredő nyomás, amit a hidrosztatikai nyomásnak kell ellensúlyoznia; úgyhogy „nehezebben” jöhet létre a hidrosztatikai egyensúly. Ez nagyon jelentős különbséget okoz például egy olyan hipotetikus csillag esetén, amelynek anyaga inkompresszibilis, azaz sűrűsége állandó. A newtoni elmélet szerint ebben az esetben bármilyen  $\rho_0$  és  $R$  sugár (azaz  $\rho_0$  és  $M = 4\pi R^3 \rho_0/3$  csillagtömeg) esetén véges a  $P_c$  középponti nyomás. Ugyanakkor, mint azt először Schwarzschild megmutatta, – az általános relativitáselmélet szerint létezik egy olyan kritikus csillagtömeg,  $M_c = 4R/9$ , hogy a  $P_c$  középponti nyomás

$M < M_c$  esetén véges, de  $M \rightarrow M_c$  esetén végtelenné válik. Ez azt jelenti, hogy nem létezhet olyan, inkompresszibilis anyagból álló (sztatikus gömbszimmetrikus) csillag, amelynek tömege  $M > M_c$ , azaz  $M$  meghaladja a kritikus értéket. Mivel tulajdonképpen az  $M/R$  hányadosra létezik felső korlát, másképpen úgy fogalmazhatunk, hogy nem képzelhető el hidrosztatikai egyensúly, ha összenyomhatatlan anyagból túl nagy tömeg túl kis térfogatban helyezkedne el.

Az, hogy az általános relativitáselmélet szerint az egyensúlyi állapotban levő gömbszimmetrikus csillagokra létezik **felső tömegkorlát**, nem csak az összenyomhatatlan anyagból álló hipotetikus csillag esetén érvényes. Be lehet látni a következőket (ld. [1]-t a további részletekről). Tegyük fel, hogy a sűrűség nem negatív és radiálisan kifelé haladva szigorúan monoton csökken. Ekkor a sztatikus, gömbszimmetrikus csillagokra kétféle felső tömeghatár létezhet. (a) Ha adott a csillag  $R$  sugara, akkor a maximális csillagtömeg az a kritikus  $M_c = 4R/9$  érték, amit homogén tömegeloszlás esetén kapunk. (b) Ha adott a  $P = P(\rho)$  állapotegyenlet „kis”  $\rho < \rho_0$  sűrűségek esetén, ahol  $\rho_0$  tetszőleges, akkor létezik egy  $M_c$  felső tömeghatár, amelynek értéke nem függ attól, hogy milyen alakú az állapotegyenlet  $\rho > \rho_0$  fölött. Természetesen ekkor  $M_c$  függ  $\rho_0$ -tól és attól is, hogy milyen alakú kis nyomásokon az állapotegyenlet. Annak, hogy a (b) típusú tömegkorlát független a nagy sűrűségek esetén érvényes állapotegyenlettől, az a jelentősége, hogy megbízható becsléseket lehet tenni a csillagok tömegére a kis nyomásokon érvényes állapotegyenlet alapján, amire nézve vannak megbízható fizikai ismereteink. Érdemes megemlíteni, hogy ha a newtoni elmélet szerint vizsgálódunk, akkor szintén találunk felső tömeghatárt, amennyiben *minden* sűrűség esetén adott az állapotegyenlet. Ezért abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy az általános relativitáselmélet a felső határra nemcsak elvileg ad jobb becslést, hanem ez a becslés gyakorlatban is megbízhatóbban végezhető el, mert nincsen szükségünk az állapotegyenletre nagy sűrűségeken, ahol azt nem ismerjük.

A fenti tömeghatárra vonatkozó becslést alkalmazhatjuk hideg,  $T \approx 0$  hőmérsékletű anyagot tartalmazó csillagra. Az így kapott felső tömeghatárnak lényeges kihatása van a csillagfejlődés végső szakaszára. Ha egy csillagban már nem zajlanak le magreakciók (nukleárisan kiégett), akkor energiát sugároz, és lehűl. Amikor hideg állapotba jutott az anyaga, azaz a termikus mozgásból származó kinetikai nyomás elhanyagolhatóvá válik a csillagban található elfajult Fermi<sup>68</sup>-gázok (neutronok, elektronok)  $T = 0$  hőmérsékleten sem eltűnő nyomásához képest, akkor vagy kisebb lehet a csillag tömege, mint a hidrosztatikai egyensúlyhoz szükséges kritikus tömeg, vagy meghaladhatja azt. Az első esetben stabil hideg csillag marad vissza (pl. neutron-csillag, v. fehér törpe), a második esetben viszont a csillag anyagának óhatatlanul gravitációs összeomlást kell szenvednie.

Amikor egy lényegében hidrogénből álló gázhalmaz összeáll és elindul egy csillag fejlődése, akkor az anyag a gravitáció hatására elkezd összezuhanni, miközben annyira felmelegszik, hogy beindulhatnak a magreakciók, amelyek a hidrogént héliummá alakítják. Kialakul egy hélium törzs, közben az anyag felmelegszik és a gáz nyomása egyensúlyt tud tartani a gravitációval. Ha a csillag elég nagy, akkor a héliumból álló törzs is elkezd összehúzódni és beindulnak olyan magreakciók, amelyek során nehezebb elemek keletkeznek és végül felépülhet egy, a legstabilabb atommagokból, azaz vasból és nikkeltől álló

---

<sup>68</sup>Enrico Fermi, olasz, amerikai fizikus, 1901-1954.



törzs. Az, hogy ez a fejlődési folyamat végig lejátszódik-e, avagy valamely ponton megszakad, attól függ, hogy elegendővé válik-e valamikor az elfajult elektrongáz nyomása ahhoz, hogy a csillagot stabilizálja. Ha a csillag tömege kisebb, mint a kritikus  $M_{c1} \approx 5M_{\odot}$  érték, akkor stabil képződmény, **fehér törpe** marad vissza. Ha a csillag tömege nagyobb, mint a kritikus  $M_{c1}$  érték, akkor, miután lényegében a csillag teljes tömege beépült a nikkelből és vasból álló törzsbe, ez a rendszer nem tudja stabilan fenntartani magát, mert ehhez nem elég a visszamaradt elfajult elektrongáz nyomása. Többé nincsenek energiafelszabadulással járó magreakciók sem. Beindul tehát a csillag összeomlása, egészen addig, amíg az anyag sűrűsége eléri az atommagok sűrűségét, a nukleáris sűrűséget. Ekkor az elfajult neutrongáz nyomása és az átlagosan taszító magerők neutroncsillag állapotban megállíthatják, vagy lelassíthatják az összeomlást, ha a csillag tömege  $M < M_{c2} \approx 2M_{\odot}$ . A csillag törzsének összeomlását lökéshullám kialakulása kísérheti, amely kifelé, a csillag köpenye felé halad. Ilyen lökéshullám vezet a szupernóva kialakulásához, amikor a csillag a köpenyét robbanásszerűen ledobja magáról, és óriási energia szabadul fel, amit az eltávozó anyag és sugárzás hordoz. Ezt követően neutroncsillag marad vissza, ha elég kicsi a visszamaradó csillag tömege. A csillagfejlődés végállapota tehát vagy **fehér törpe**, **vagy neutroncsillag állapot**, ha a csillag tömege a hideg anyagra vonatkozó (megfelelő) felső tömeghatár(ok)nál kisebb.

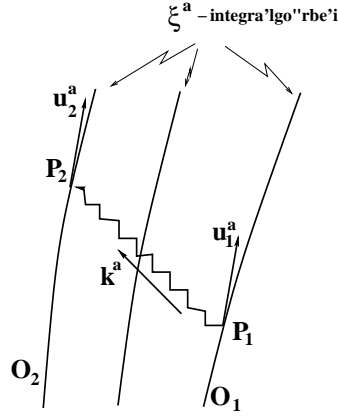
Ha a csillag tömege nagyobb, mint a hideg anyagra vonatkozó felső tömeghatár, akkor a csillag teljes gravitációs összeomlást szenved, amelynek a végkimentele gömbszimmetrikus esetben a Schwarzschild-féle feketelyuk kialakulása, amiről alább lesz szó. Ennek kialakulását is megelőzheti szupernóva-robbanás.

A neutroncsillagok létéről **pulzárok** (periódikusan sugárzó neutroncsillagok) megfigyelése révén szereztünk tudomást. Az egyik leglátványosabb csillagászati megfigyelés az 1987-ben megfigyelt SN 1987A szupernóva-robbanás, amelynek maradványait a Hubble űrteleszkóp 1994 és 2009 között még további 15 éven át megfigyelte. Világosan kirajzolódott a lökéshullám révén az űrbe kidobott, egyre növekvő sugarú gömbhéjban elhelyezkedő anyag képe (a 2-dimenziós felvételeken világító anyaggyűrű, ld. pl. a Wikipedia SN 1987A címszó alatt az eredeti felvételeket).

## 7.3. Geodetikuskok a Schwarzschild-téridőben

### 7.3.1. Gravitációs vöröseltolódás Schwarzschild-téridőben

Vizsgáljuk meg a következő problémát. Legyen  $O_1$  és  $O_2$  két sztatikus megfigyelő, akik a sztatikus, gömbszimmetrikus égitesten kívül helyezkednek el (szélsőséges esetben az  $O_1$  megfigyelő az égitest felszínén helyezkedik el). Az  $O_1$  megfigyelő világvonalának  $P_1$  pontjában  $\omega_1$  frekvenciájú sugárzást bocsát ki, amelyet az  $O_2$  megfigyelő világvonalának  $P_2$  pontjában  $\omega_2$  frekvenciájú sugárzásként észlel. Belátjuk, hogy ha az  $O_1$  és az  $O_2$  sztatikus megfigyelők radiális koordinátája rendre  $r_1$  és  $r_2$ ,



14. ábra. Gravitációs vöröseltolódás észlelésének viszonyai a Schwarzschild-téridőben. A  $P_1$  esemény: az  $r_1$  radiális koordinátájú sztatikus  $O_1$  forrás  $k^a$  hullámvektorú fényjelet bocsát ki az  $O_2$  sztatikus megfigyelő irányába. A  $P_2$  esemény: az  $r_2 > r_1$  radiális koordinátájú  $O_2$  sztatikus megfigyelő észleli a fényjelet. Az  $O_1$  és  $O_2$  sztatikus megfigyelők világvonalai egyúttal a  $\xi^a$  Killing-vektormező integrálgörbéi; a megfigyelők négyes-sebessége rendre  $u_1^a$  és  $u_2^a$ .

akkor az emittált és az észlelt frekvenciák hányadosa

$$1 + z \equiv \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}}}. \quad (7.3.66.)$$

Ez azt jelenti, hogy amennyiben az észlelő távolabb helyezkedik el a gravitációs centrumtól, mint az emitter, azaz ha  $r_2 > r_1$ , akkor az észlelt frekvencia kisebb, mint a kibocsátott frekvencia, azaz a fény „vöröseltolódást” szenved.

A fényjel null-geodetikus mentén terjed a téridő  $P_1$  pontjából a  $P_2$  pontba, amelynek érintővektora a  $k^a$  null-vektor (ld. a 14. ábrát). A sztatikus  $O_1$  és  $O_2$  megfigyelők világvonalai időszerű geodetikusok, amelyek érintőegységvektorai a  $P_1$  és a  $P_2$  pontokban rendre az  $(u_1)^a$  és az  $(u_2)^a$  négyessebességek. A sztatikus megfigyelők négyessebessége mindenütt párhuzamos a  $\xi^a$  Killing-vektormezővel, értéke a  $P_1$  és a  $P_2$  pontokban

$$(u_s)^a = -\frac{\xi^a}{\sqrt{-\xi_b \xi^b}} \Big|_{P_s}, \quad s = 1, 2. \quad (7.3.67.)$$

Tudjuk továbbá, hogy a  $k^a$  érintővektorú null-geodetikus mentén az érintő-vektormezőnek és a Killing-vektormezőnek a kontrakciója állandó, így

$$k_a \xi^a|_{P_1} = k_a \xi^a|_{P_2}. \quad (7.3.68.)$$

A fentiekből következik, hogy

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-k_a (u_1)^a|_{P_1}}{-k_a (u_2)^a|_{P_2}} = \frac{\sqrt{-\xi_b \xi^b}|_{P_2}}{\sqrt{-\xi_b \xi^b}|_{P_1}}. \quad (7.3.69.)$$

Másrészt viszont a Schwarzschild-metrikából kiolvashatjuk, hogy

$$\xi_b \xi^b = g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (7.3.70.)$$

Ezt behelyettesítve a frekvenciák hányadosának kifejezésébe, megkapjuk a vöröseltolódás igazolni kívánt összefüggését.

**Megjegyzés:** Aszimptotikusan távoli emitter és vevő esetén a vöröseltolódást úgy interpretálhatjuk, mintha a foton  $\hbar\omega$  energiája csökkenne, ahogy kijut a csillag által okozott vonzó, gravitációs potenciálgödörből, azaz mintha a foton  $\hbar\omega + U_p$  teljes energiája állandó lenne, ahol  $U_p$  a newtoni gravitáció értelmében vett negatív potenciális energia.

Írjuk át a vöröseltolódás képletét  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = \omega - \Delta\omega$  jelölések bevezetésével  $M \ll r_1 < r_2$  esetén

$$\frac{\omega}{\omega - \Delta\omega} \approx \left(1 - \frac{M}{r_2}\right) \left(1 - \frac{M}{r_1}\right) \approx 1 + \frac{M}{r_1} - \frac{M}{r_2} \quad (7.3.71.)$$

alakba, ahonnan

$$\frac{\omega - \Delta\omega}{\omega} \approx 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 1 - \frac{M}{r_1} + \frac{M}{r_2} \quad (7.3.72.)$$

adódik. Innen a relatív frekvenciaeltolódásra azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{GM}{c^2 r_1} - \frac{GM}{c^2 r_2}, \quad (7.3.73.)$$

ahol visszaírtuk a  $G$  és  $c$  állandókat. Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát  $\hbar\omega$ -val,

$$-\hbar\Delta\omega \approx (\hbar\omega_2) - (\hbar\omega_1) \frac{\hbar\omega}{c^2} \left(-\frac{GM}{r_1} + \frac{GM}{r_2}\right), \quad (7.3.74.)$$

azaz

$$\hbar\omega_1 - \frac{\hbar\omega}{c^2} \frac{GM}{r_1} \approx \hbar\omega_2 - \frac{\hbar\omega}{c^2} \frac{GM}{r_2}, \quad (7.3.75.)$$

ahol  $\hbar\omega/c^2 \equiv m_f$  a foton tömege,  $U_p = -\frac{Gm_f M}{r}$  pedig a newtoni értelemben vett potenciális energiája.

A vöröseltolódást először a Föld felszínén igazolták a Mössbauer<sup>69</sup>-effektus felhasználásával a Pound<sup>70</sup>-Rebka<sup>71</sup>-féle kísérletben 1960-ban kb. 1% pontossággal. Később, 1979-1980-ban a gravitációs vöröseltolódást kb. 0,01% pontossággal igazolták úgy, hogy rakétával lőttek fel egy hidrogén-mézert 10000 km magasra és a mézer-sugárzás frekvenciáját mérték nagy pontossággal a Földön (Vessot<sup>72</sup> és Levine<sup>73</sup>).

<sup>69</sup>Rudolf Ludwig Mössbauer, német fizikus, 1929-2011

<sup>70</sup>Robert Vivian Pound, amerikai fizikus, 1919-2010

<sup>71</sup>Glen Anderson Rebka Jr., amerikai fizikus, 1931-

<sup>72</sup>Robert Frederick Charles Vessot, amerikai fizikus, 1930-

<sup>73</sup>M. W. Levine

**Megjegyzés:** Megbecsülhetjük, hogy mekkora a csillag felszínéről érkező fénynek a csillag saját gravitációs mezeje miatti maximális vöröseltolódása. Ha a csillag sztatikus, gömbszimmetrikus, sűrűsége nem negatív és szigorúan monoton csökken a radiális koordinátával, akkor létezik a felső tömegkorlát,  $(M/R)_{\max} = 4/9$ , ezért a csillag felszínén emittált fény legnagyobb lehetséges vöröseltolódási tényezője

$$z_{\max} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Big|_{\max} - 1 = \frac{\omega_1|_{r=9M/4}}{\omega_2|_{r \rightarrow \infty}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{9M/4}}} - 1 = 2. \quad (7.3.76.)$$

Ennek a becslésnek az alapján mondhatjuk, hogy ha  $z > 2$  vöröseltolódási tényezővel észlelünk valamely csillagból származó fényt, akkor annak a vöröseltolódása nem írható kizárólag csak a csillag felszínén és a közelében uralkodó gravitáció rovására.

### 7.3.2. Az időszerű és a null-geodetikusok egyenlete

Először is vegyük észre, hogy ha egy geodetikus kezdőpontja és kezdeti érintője a  $\theta = \pi/2$  ekvatoriális (azaz egyenlítői) síkban vannak, akkor az egész geodetikus ebben a síkban fekszik a Schwarzschild-metrika  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  tértükrözési szimmetriája miatt. Ekkor viszont bármely más geodetikust be tudunk forgatni forgási izometria-transzformációval az ekvatoriális síkba. Ez annak a newtoni mechanikában is érvényes állításnak az általánosítása, hogy centrális gravitációs mezőben mozgó próbatest pályája síkmozgás, amelynek síkját a kezdeti helyzetvektor és sebességvektor feszíti ki. Elegendő tehát csak az ekvatoriális geodetikusokat vizsgálnunk.

Paraméterezzük az időszerű geodetikusokat a  $\tau$  sajátidővel, a null-geodetikusok esetében jelentse  $\tau$  az affin paramétert. A geodetikus paraméteres egyenletrendszer gömbi koordinátákban  $x^\mu(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \theta = \pi/2, \phi(\tau))$ , az érintő-vektormező pedig  $u^\mu = dx^\mu/d\tau = \dot{x}^\mu$ . Az ekvatoriális síkban futó időszerű geodetikusok és null-geodetikusok esetén

$$g_{ab}u^a u^b \equiv -\kappa = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2, \quad (7.3.77.)$$

ahol

$$\kappa = \begin{cases} +1 & \text{időszerű geodetikus,} \\ 0 & \text{null-geodetikus} \end{cases} \quad (7.3.78.)$$

esetén. Felhasználjuk továbbá, hogy a geodetikus mentén az érintővektor és a Killing-vektor kontrakciója állandó, jelöljük ezt  $E$ -vel,

$$E \equiv -\xi^a u_a = -g_{ab}\xi^a u^b = -g_{tt}u^0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}. \quad (7.3.79.)$$

**Megjegyzés:** Az  $E$  állandó fizikai jelentését a geodetikus aszimptotikus viselkedéséből olvashatjuk ki. Az infinitezimális sajátidő-tartam  $d\tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}dt$ ,

úgyhogy az  $r \gg M$  aszimptotikus tartományban  $E = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \sim 1 - (M/r)$ . Írjuk vissza a  $G$  és  $c$  állandókat a természetes egységeikben, akkor  $E \sim 1 - (GM/c^2 r)$  adódik. Időszerű geodetikus esetén szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát  $mc^2$ -tel, ahol  $m$  a szabadon eső próbarészecske tömege. Ekkor az

$$E \sim \frac{mc^2 - \frac{GMm}{r}}{mc^2}, \quad r \rightarrow \infty \quad (7.3.80.)$$

aszimptotikus összefüggést kapjuk, azaz  **$E$  a részecske egységnyi tömegre vonatkoztatott teljes energiája a gömbszimmetrikus, sztatikus égitest gravitációs terében**, a centrumtól nagy távolságban. Úgy is interpretálhatjuk ezt, hogy a végtelen távoli megfigyelőnek ekkora energiát kell adnia az  $m$  tömegű részecskének ahhoz, hogy az geodetikus pályára álljon. Null-geodetikus esetén az  $E \sim 1 - (GM/c^2 r)$  egyenlőség mindkét oldalát a foton  $\hbar\omega$  energiájával szorozzuk, és akkor  $E \sim [\hbar\omega - (GM\hbar\omega/c^2 r)]/\hbar\omega$  a fotonnak a gravitációs mezőben az egységnyi  $\hbar\omega$ -ra vonatkoztatott teljes energiáját jelenti. Ennyi lesz a „szabadon eső” foton energiája, amelynek világvonala a geometriai optikai fénysugár pályája a téridőben.

Ahogy a téridő időbeli eltolási szimmetriája eredményezi az  $E$  mozgásállandót, úgy a térbeli forgatással szembeni szimmetria is eredményez egy  $L$  mozgásállandót. Legyen  $\psi^a = (\partial/\partial\phi)^a$  az elforgatással szembeni szimmetriához (az  $SO(3)$  izometriához) tartozó Killing-vektor. Ekkor a megfelelő mozgásállandó a geodetikusok mentén

$$L = g_{ab}\psi^a u^b = g_{\phi\phi}\dot{\phi} = r^2\dot{\phi}, \quad (7.3.81.)$$

ami időszerű geodetikus esetén **az egységnyi tömegre jutó pályaimpulzusmomentumként**, null-geodetikus esetén a foton  $\hbar L$  pályaimpulzusmomentumaként interpretálható. A (7.3.81.) egyenlet lényegében **Kepler<sup>74</sup> II. törvényének általánosítása**, csak most nem köthető hozzá a felületsebesség fogalma, mert a térgeometria nem euklideszi.

Fejezzük ki  $\dot{t}$ -ot és  $\dot{\phi}$ -ot rendre  $E$ -vel a (7.3.79.) és  $L$ -lel a (7.3.81.) egyenlőségek-ből, és helyettesítsük be a kifejezésüket a (7.3.77.) egyenletbe. Ekkor **a geodetikusok radiális mozgására** az alábbi egyenletet kapjuk:

$$-\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{L^2}{r^2} = -\kappa, \quad (7.3.82.)$$

amit átrendezünk az

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} + \kappa\right) = \frac{1}{2}E^2 \quad (7.3.83.)$$

alakba.

---

<sup>74</sup>Johannes Kepler, német matematikus, csillagász és asztrológus, 1571-1630.

A kapott (7.3.83.) egyenlet megoldásában a következő klasszikus mechanikai analógia van segítségünkre. A (7.3.83.) egyenletet átírhatjuk

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = \epsilon \quad (7.3.84.)$$

alakba, ahol  $\epsilon = E^2/2$  és bevezettük a

$$V(r) = -\frac{\kappa M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} + \frac{\kappa}{2} - \frac{ML^2}{r^3} \quad (7.3.85.)$$

„potenciált”. A  $\kappa = 1$  esetben a (7.3.83.) egyenlet a (7.3.84.) alakban olyan, mint egy egységnyi tömegű részecske  $\epsilon = E^2/2$  energiájának kifejezése a klasszikus mechanikában, ha a részecske  $V(r)$  potenciálmezőben mozog. A Kepler-probléma newtoni gravitáció alapján történő tárgyalása során ugyanilyen alakú egyenletre jutotunk. Akkor is be tudtunk hasonlóan vezetni egy „effektív” potenciált, amelyben a (7.3.85.) egyenlőség jobb oldalán álló első és második tag szerepelt csak. Ezek jelentése rendre a gravitációs mező newtoni értelemben vett potenciálja a centrumtól  $r$  távolságban és az úgynevezett centrifugális energia (potenciálját). Az általános relativitáselméletben további két tag jelenik meg a „potenciálban”: a (7.3.85.) kifejezés harmadik tagja, ami egy additív állandó, és a negyedik tagja, ami kis radiális távolságok esetén vonzó jellegével „felülírja” a taszító jellegű centrifugális gátat.

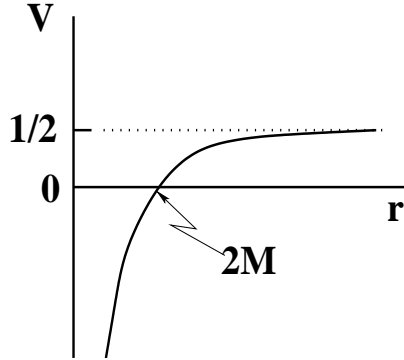
### 7.3.3. A Kepler-törvények általánosítása

Vizsgáljuk először az időszerű geodetikusok ( $\kappa = +1$ ) esetét. Láttuk, hogy a Schwarzschild-téridőben az időszerű geodetikusok beforgathatók az ekvatoriális síkba, azaz síkgörbék. Ezeken a szabadon eső próbarészecske mozgását az  $L = \text{áll. egységnyi}$  részecske-tömegre vonatkoztatott pályamomentum jellemzi. Ez Kepler I., a felületsebesség állandóságát kimondó törvényének általánosítása.

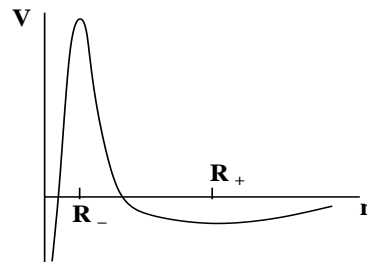
Nézzük most, hogy mit mondhatunk el a szabadon eső részecske pályájáról, azaz mi lesz Kepler II. törvényének általánosítása. A (7.3.85.) potenciál szélsőértékének helyeit a  $dV/dr = 0$  egyenletből olvashatjuk ki, amelynek gyökei

$$R_{\pm} = \frac{L^2}{2M}(1 \pm \sqrt{1 - 12(M^2/L^2)}). \quad (7.3.86.)$$

Amennyiben a pályaimpulzusmomentum kicsi, azaz  $L^2 < 12M^2$ , akkor nincsen valós gyök. A potenciál  $r \rightarrow \infty$  esetén tart  $V \rightarrow 1/2$ -hez; csökkenő  $r$  radiális koordinátával szigorúan monoton csökken,  $r \rightarrow 0$  esetén tart  $-\infty$ -hez (ld. a 15. ábrát). Ekkor a végtelenből  $E^2 \geq 1$  relatív energiával indított, szabadon eső részecske beesik az  $r = 2M$  felületre, majd onnan tovább az  $r = 0$  szingularitásba. Ez a következménye, hogy kis radiális távolságokon a (7.3.85.) potenciál negyedik tagja felülírja a centrifugális gátat.



15. ábra. A Schwarzschild-téridőben szabadon eső próbarészecske radiális mozgását meghatározó effektív  $V(r)$  potenciál az  $r$  radiális koordináta függvényében kis  $L$  pályaimpulzusmomentum, azaz  $L^2 < 12M^2$  esetén, ahol a  $M$  a sztatikus, gömb-szimmetrikus égitest teljes tömege.



16. ábra. A Schwarzschild-téridőben szabadon eső próba-részecske radiális mozgását meghatározó effektív  $V(r)$  potenciál az  $r$  radiális koordináta függvényében nagy  $L$  pályaimpulzusmomentum, azaz  $L^2 > 12M^2$  esetén, ahol a  $M$  a sztatikus, gömbszimmetrikus égitest teljes tömege.

Ha  $L^2 > 12M^2$ , akkor  $R_-$  és  $R_+$  is valós. A  $V(r)$  potenciálnak  $r = R_-$  helyen maximuma, az  $r = R_+$  helyen minimuma van. A  $r \rightarrow 0$  határesetben a potenciál most is  $-\infty$ -hez, az  $r \rightarrow +\infty$  esetben  $1/2$ -hez tart. Létezik egy geodetikus, amelynek vetülete a  $\Sigma$  térszerű hiperfelületre  $r = R_+$  sugarú stabil körpálya, továbbá a  $r = R_-$  sugarú instabil körpálya. Ha  $L \gg M$ , akkor  $R_+ = L^2/M^2$  megfelel a newtoni elmélet szerinti köralakú Kepler-pályának. Általánosságban a következőket mondhatjuk el:

1. Könnyen beláthatjuk, hogy  $R_+ > 6M$ , mivel fennállnak az

$$\frac{R_+}{6M} = \frac{L^2}{12M^2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} \right) > 1 + \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} > 1 \quad (7.3.87.)$$

egyenlőtlenségek. Ez azt jelenti, hogy nincsen  $r = 6M$ -nél kisebb sugarú stabil körpálya.

2. Az instabil körpálya sugarára fennáll a  $3M < R_- < 6M$  egyenlőtlenség, vagyis nem létezik semmilyen  $r = 3M$ -nél kisebb sugarú körpálya.
3. Kiszámolhatjuk a részecske egységnyi tömegre vonatkoztatott teljes energiáját valamely  $R$  sugarú (stabil vagy instabil) körpályán. Ekkor  $\dot{r} = 0$  miatt

$$\frac{1}{2}E^2(R) = V(R) = \frac{1}{2} \frac{(R - 2M)^2}{R(R - 3M)}, \quad (7.3.88.)$$

ahol felhasználtuk, hogy a  $dV/dr|_{r=R} = 0$  egyenletből  $L^2$  kifejezhető  $R$  és  $M$  segítségével. Innen az  $R$  sugarú körpályán mozgó részecske egységnyi tömegre vonatkoztatott teljes energiájára

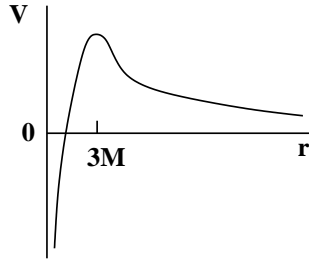
$$E(R) = \frac{R - 2M}{\sqrt{R(R - 3M)}} \quad (7.3.89.)$$

adódik. A legbelsőbb  $R_+ = 6M$  sugarú, azaz legkisebb energiájú stabil körpályán a részecske egységnyi tömegre vonatkoztatott kötési energiája

$$E_B(R = 6M) = 1 - E(R = 6M) = 1 - \sqrt{8/9} \approx 0,06. \quad (7.3.90.)$$

Általában az  $R \gg M$  pályán mozgó részecske gravitációsan sugároz, energiát veszít és a sugárzás visszahatása következtében letér a geodetikusról. Spirális pályán fokozatosan megközelíti az  $R = 6M$  sugarú legbelső stabil pályát, ott instabillá válik a mozgása és bezuhan a szingularitási centrumba. Közben, amíg  $R = 6M$  radiális „távolságra” kerül a centrumtól, energiája kb. 6%-át veszíti el gravitációs sugárzással. Alább látni fogjuk, hogy az  $r < 2M$ , azaz a Schwarzschild-sugáron belüli tartományból már semmilyen sugárzás, a szabadon eső részecske mozgására vonatkozó semmilyen információ nem juthat el a végtelen távoli megfigyelőhöz.





17. ábra. A Schwarzschild-téridőben haladó fénysugár radiális mozgását meghatározó effektív  $V(r)$  potenciál az  $r$  radiális koordináta függvényében.

4. Ha a részecske csak kicsit odább helyezkedik el az  $r = R_+$  stabil körpályát jelentő radiális koordinátájú helytől, akkor radiális irányban oszcillációk lépnek fel, amelyek harmonikusak és frekvenciájuk

$$\omega_r^2 = \left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{r=R_+}. \quad (7.3.91.)$$

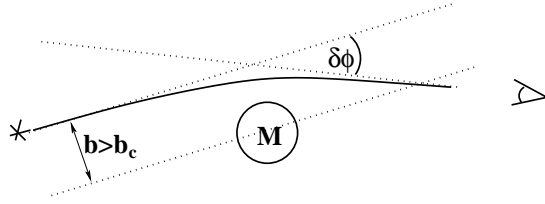
Ugyanakkor a körpályán történő mozgás keringési frekvenciája  $\omega_\phi = \dot{\phi}$ , amelyre  $\omega_\phi^2 = L^2/R_+^4$ . Meg lehet mutatni, hogy a newtoni határesetben  $\omega_r \approx \omega_\phi$ . Ha  $\omega_r = \omega_\phi$  lenne, akkor zárt pályák alakulnának ki, a bolygómozgás Kepler-pályái. A newtoni gravitáció alapján meghatározott kötött Kepler-pályák valóban zártak, ellipszis-pályák. Az általános relativitáselméletben a radiális oszcillációk és a keringési frekvencia eltérése miatt a pályák nem zártak. A közel köralakú pályák esetén a pályának a centrumhoz legközelebb eső pontja (a perihélium) precesszál  $\omega_p = \omega_\phi - \omega_r$  szögsebességgel. Ezen az elven lehet meghatározni a Merkúr megfigyelt, 43 ívmásodperc/100 év anomális precesszióját, ami sokáig rejtély maradt, miután a newtoni gravitáció alapján a többi bolygó perturbáló hatását figyelembe véve sem sikerült a perihélium-elfordulást kielégítően megmagyarázni. (A Merkúr teljes perihélium-elfordulása  $574,10 \pm 0,65$  ívmásodperc/100 év. Az általános relativitáselmélet szerinti anomáliát is figyelembe vevő számítások ezzel hibahatáron belül egyező eredményt adnak.)

#### 7.3.4. A fénygörbülés

Vizsgáljuk most meg a null-geodetikusokat ( $\kappa = 0$ ). Az effektív potenciál alakja független  $L$ -től,  $r \rightarrow \infty$  esetén zérushoz,  $r \rightarrow 0$  esetén  $-\infty$ -hez tart az értéke, és  $r = 3M$  helyen maximuma van,

$$V(r) = \frac{L^2}{2r^3}(r - 2M) \quad (7.3.92.)$$

(ld. a 17. ábrát). Ezek szerint fotonokra létezik  $r = 3M$  sugárral körpálya, azaz olyan fénysugár, ami kört ír le a sztatikus, gömbszimmetrikus égitest körül. Ez a



18. ábra. A Schwarzschild-téridőben haladó fénysugár  $\delta\phi$  szögű eltérése a kritikusnál nagyobb  $b > b_c$  látszólagos impakt-paraméter esetén;  $M$  az eltérést okozó sztatikus, gömbszimmetrikus égitest teljes tömege.

körpálya azonban instabil. Ahhoz, hogy a fénysugár ezt a körpályát írja le, legalább akkora  $E$  relatív energia szükséges, amelyre fennáll, hogy

$$\frac{1}{2}E^2 = V(R = 3M) = \frac{L^2 M}{2(3M)^3}, \quad \text{azaz} \quad \frac{L^2}{E^2} = 27M^2. \quad (7.3.93.)$$

Lapos téridőben az  $b = L/E$  hányados éppen az impakt paraméter, azaz az a legkisebb távolság, amelyre a fénysugár megközelíti az origót (az  $r = 0$  radiális koordináta-értéket). Mivel a Schwarzschild-metrika aszimptotikusan lapos, ezért a  $b = L/E$  paraméter a **látszólagos impakt paraméter** szerepét játssza az aszimptotikusan távoli megfigyelő számára az olyan fénysugarak esetén, amelyek az aszimptotikusan távoli ( $r \gg M$ ) tartományból indulnak. A  $b$  paraméter azonban a görbült Schwarzschild-téridőben nem hordozza többé a „centrum megközelítésének legkisebb távolsága” jelentést. A fentiek alapján a gravitáló test mindazokat az aszimptotikusan távolról induló fénysugarakat be fogja fogni, amelyek energiája nagyobb, mint az effektív potenciál maximumához tartozó  $E$  érték, azaz amelyeknek a látszólagos impakt paramétere  $b < b_c$ , ahol a kritikus érték  $b_c = \sqrt{27}M$ .

Azok a fénysugarak, amelyeknek a látszólagos impakt paramétere nagyobb, mint a  $b_c$  kritikus érték, nem fogódnak be, hanem újra eltávolodnak a végtelenbe (ld. a 18. ábrát). Eközben az eredetileg  $\phi_{-\infty}$  irányban (az ekvatoriális síkban) induló fénysugár a centrumon történő szóródás után a  $\phi_{+\infty}$  irányban fog a végtelenbe távozni. Ez azt jelenti, hogy ha egy távoli csillag a megfigyelőhöz képest a  $\phi_{-\infty}$  irányban helyezkedik el, akkor a megfigyelő a csillagot a eredeti helyzetéhez képest  $\delta\phi = \Delta\phi - \pi$  irányban fogja észlelni, ahol  $\Delta\phi = \phi_{\infty} - \phi_{-\infty}$ , ha a csillagból induló fénysugárnak „menetközben” el kellett haladnia pl. a Nap felszíne mellett. Ezt a jelenséget nevezik **fénygörbülésnek**. Az aszimptotikusan egyenes pályán haladó fénysugár a gravitáló centrum közelében elhaladva eredeti irányától eltérül  $\delta\phi$  szöggel. Ha a fénysugár nem „érezné” a gravitáció hatását, akkor  $\Delta\phi = \pi$  lenne (pl. Minkowski-téridőben, amikor elhanyagoljuk a gravitáló centrum téridőt görbítő hatását). A Schwarzschild-metrikájú téridőben azonban az eltérés  $\Delta\phi > \pi$  lesz. A fénysugár végtelen távoli megfigyelő által észlelt szögeltérése az  $M/b \ll 1$  esetén

elsőrendű pontossággal

$$\delta\phi = \frac{4GM}{c^2b}, \quad (7.3.94.)$$

ahol visszaírtuk  $G$ -t és  $c$ -t természetes egységeikben. A Nap mellett elhaladó távoli csillag fényének eltérése  $\delta\phi \approx 1,75$  ívmásodperc. Ezt először 1919-ben az Eddington<sup>75</sup>-expedíció mérte meg kb. 10%-os hibával teljes napfogyatkozás idején. Kvazárokból érkező rádióhullámok eltérését figyelték meg később teljes napfogyatkozás idején, amint a Nap mellett elhaladnak, így Fomalont<sup>76</sup> és Sramek<sup>77</sup> 1976-ban 1% pontossággal igazolták a (7.3.94.) összefüggést.

A fény sugar eltérése mértékét az alábbiak szerint határozhatjuk meg. Induljunk ki a (7.3.84.) egyenletből, amely  $\kappa = 0$  esetben az

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2} = \frac{1}{2}E^2 \quad (7.3.95.)$$

alakot ölti, ahonnan

$$\dot{r} = \sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2}}. \quad (7.3.96.)$$

Másrészt, mivel  $\dot{\phi} = L/r^2$ , azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2} \left(E^2 - \frac{L^2}{r^3}(r - 2M)\right)^{-1/2}. \quad (7.3.97.)$$

A fény sugar fordulópontja azon  $r = R_0$  radiális koordinátaértéknél van, amelyre  $V(R_0) = E^2/2$ , ahonnan  $(R_0 - 2M)/R_0^3 = 1/b^2$ , azaz  $R_0^3 - b^2(R_0 - 2M) = 0$  adódik. Az utóbbi egyenletnek a legnagyobb gyöke a keresett  $R_0$ ,

$$R_0 = \frac{2b}{\sqrt{3}} \cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{\sqrt{27}M}{b}\right)\right]. \quad (7.3.98.)$$

Szimmetriaokok miatt a fordulópontig elszenvedett eltérés megegyezik a fordulópont utáni eltéréssel, úgyhogy a teljes  $\Delta\phi$  szögváltozás

$$\Delta\phi = 2 \int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{[(r^4/b^2) - r(r - 2M)]^{1/2}} = 2 \int_0^{1/R_0} \frac{du}{[(1/b^2) - u^2 + 2Mu^3]^{1/2}}. \quad (7.3.99.)$$

Először is ellenőrzésképpen meghatározhatjuk az eltérést lapos téridőben, ami az  $M = 0$  esetnek felel meg. Ekkor  $R_0 = b$ , és azt kapjuk, hogy  $\Delta\phi = 2\arcsin(b/R_0) = \pi$ , ahogy azt várjuk, amikor a fény sugar nem térül el eredeti irányától. Ha  $M \neq 0$ , akkor az  $M/b \ll 1$  paraméterben első rendben megkapjuk a keresett képletet a fény sugar  $\delta\phi = \Delta\phi - \pi$  szögeltérésére.

Meg kell említeni, hogy a fénygörbülésnek tulajdonítható a **gravitációs lencse-effektus**. Ilyenkor valamilyen kiterjedt égitest, galaxisfürt (galaxy cluster) vagy

<sup>75</sup>Sir Arthur Stanley Eddington, angol csillagász, fizikus és matematikus, 1882–1944)

<sup>76</sup>Edward Fomalont, amerikai csillagász és fizikus, 1940-

<sup>77</sup>Richard Sramek

galaxis szolgál gravitációs lencseként, amelyen áthaladva a távoli objektumból érkező fénysugarak a gravitáció hatására hasonlóan görbülnek, mint az optikai lencsékben. Bár a jelenség elvi lehetősége már az 1920-as években felvetődött, első megfigyelése 1979-ben történt Walsh<sup>78</sup> és csoportja által: a „Twin Quasar” (Iker-kvazár) volt az első olyan objektum, amelynek kapcsán a gravitációs lencse-effektust sikerült igazolni. A jelenség abban áll ebben az esetben, hogy a gravitációs lencse egyetlen objektumról kettős képet állít elő. A képek szögtávolsága szokatlanul kicsi, kicsi a különbség a vöröseltolódásukban és hasonló a spektrumuk. A lencseként szolgáló galaxist is sikerült azonosítani. Az utóbbi évtizedekben a gravitációs lencse-effektus vizsgálata kiterjedt, és felhasználást nyer távoli galaxisok, galaxisfürtök felkutatásában.

## 7.4. A Kruskal-Szekeres-féle kiterjesztés. Gravitációs összeomlás

### 7.4.1. A szingularitásokról általában

Általában a sztatikus, gömbszimmetrikus égitestek anyaga kitölti az  $r \leq 2M$  tartományt vagy túl is terjed rajta, úgyhogy a vákuumban érvényes Schwarzschild-megoldás szingularitásai érdektelenek. Abban az esetben azonban, ha a gömbszimmetrikus égitest elég nagy tömegű ahhoz, hogy teljes gravitációs összeomlást szenvedjen, akkor a vákuumra vonatkozó Schwarzschild-megoldás az  $r \leq 2M$  tartományon is érdekessé válik. A szingularitás általában, – mint már említettük – kétféle lehet:

1. *valódi fizikai szingularitás*, amikor a Riemann-tenzorból képezett valamely skalár, pl.  $R_{abcd}R^{abcd}$  vagy  $R$  végtelenné válik;
2. *koordináta-szingularitás*, amikor a választott koordinátarendszer nem alkalmas a téridő-sokaság valamely tartományának lefedésére.

A 2. esetben az „eredeti” koordinátarendszer szerint nem szinguláris  $(M, g_{ab})$  téridő-tartományt alkalmas új koordinátarendszert választva kiterjesztjük egy nagyobb  $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$  téridő-tartományra, ahol  $M \subset \tilde{M}$ . A Schwarzschild-téridőnek  $r = 0$ -ban valódi fizikai szingularitása van, ahol  $R_{abcd}R^{abcd} \rightarrow \infty$ ;  $r = 2M$ -nél viszont koordináta-szingularitása van, ahol  $\xi^a$  párhuzamos a  $\nabla^a r$  vektorral.

### 7.4.2. Példa a kiterjesztésre: a 2-dimenziós Rindler-téridő

A 2-dimenziós Rindler-téridő metrikája

$$ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2, \quad (7.4.100.)$$

---

<sup>78</sup>Dennis Walsh, angol csillagász, 1933–2005

ahol a koordináták a  $-\infty < t < \infty$  és  $0 < x < \infty$  intervallumokat futják be. A metrikának az  $x = 0$ -ban szingularitása van, hiszen  $-g = x^2 \cdot 1$ , és ezért a  $g^{\mu\nu}$  inverz metrika az  $x = 0$ -ban szinguláris. Ez koordináta-szingularitás, mivel találunk olyan új, alkalmasabb koordinátarendszert, amelyben az  $x = 0$ -nak megfelelő helyen nincsen szingularitás. Az új koordinátarendszert a következő módon keressük. 2-dimenzióban a null-geodetikusoknak pontosan 2 különböző serege létezik, az úgynevezett befutó és kifutó null-geodetikusok. Sem a befutó, sem a kifutó geodetikus-sereghez tartozó geodetikusok nem metszik páronként egymást, ugyanakkor a két geodetikus-sereg teljesen behálózza a téridőt (azaz a téridő minden pontján pontosan egy befutó és egy kifutó null-geodetikus halad át). Ezeknek a geodetikusoknak az affin paramétereit keressük meg az eredeti téridő-tartományban, és terjesztjük ki egy nagyobb téridő-tartományra.

A  $k^a$  érintővektor-mezővel rendelkező null-geodetikusok egyenlete:

$$0 = g_{ab}k^ak^b = -x^2\dot{t}^2 + \dot{x}^2, \quad (7.4.101.)$$

ahol  $\dot{\phantom{x}} = d\phantom{x}/d\lambda$  a  $\lambda$  affin paraméter szerinti deriválást jelöli, a null-geodetikusok érintőjének komponensei ( $k^t = \dot{t}, k^x = \dot{x}$ ). Átrendezés után a null-geodetikusok egyenlete

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \quad (7.4.102.)$$

alakot ölt, s ennek megoldásai

$$t = \pm \ln x + C, \quad (7.4.103.)$$

ahol  $C$  =állandó és konvenció szerint a  $+$  és a  $-$  előjel rendre a kifutó és a befutó null-geodetikusoknak felel meg.

Vezessük be az

$$u = t - \ln x, \quad v = t + \ln x \quad (7.4.104.)$$

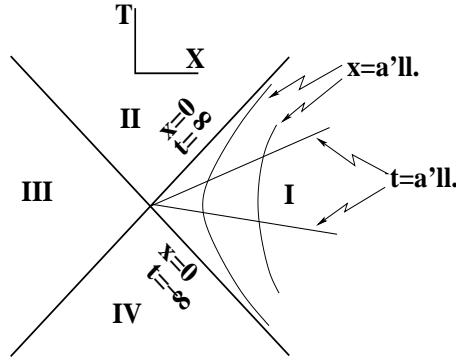
fénykúp- vagy más szóval null-koordinátákat, ahol  $-\infty < u, v < +\infty$  megfelel az  $x > 0$  tartománynak. A null-koordinátákkal kifejezett metrika:

$$ds^2 = -e^{v-u} du dv. \quad (7.4.105.)$$

Az  $u$  =áll. és a  $v$  =áll. egyenletek rendre a kifutó és a befutó null-geodetikusok egyenletei. A null-koordináták olyan koordináta-rendszerre történt áttérést jelentenek, amelynek  $u$ - és  $v$ -tengelye rendre a  $v = 0$  befutó és az  $u = 0$  kifutó null-geodetikus.

Ezután bevezetünk olyan  $U(u)$  és  $V(v)$  új koordinátákat, amelyek rendre a befutó és a kifutó null-geodetikusoknak az affin paramétereit. Használjuk ki ehhez, hogy a Rindler-téridőben létezik „időbeli” eltolási szimmetria. Ehhez a  $(\partial/\partial t)^a$  Killing-vektormező tartozik. A null-geodetikusok mentén létezik az  $E$  állandó:

$$E = -g_{ab}k^a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b = -g_{tt}k^t = x^2\dot{t} = x^2\frac{dt}{d\lambda}. \quad (7.4.106.)$$



19. ábra. A 2-dimenziós Rindler-téridő kiterjesztése, az I. szektor felel meg az eredeti Rindler-téridőnek.

Másrészt  $t = \frac{1}{2}(u + v)$  és  $v - u = 2 \ln x$ , amiből  $x^2 = e^{v-u}$ , vagyis a null-geodetikusokat jellemző állandó

$$E = \frac{1}{2}e^{v-u} \left( \frac{du}{d\lambda} + \frac{dv}{d\lambda} \right). \quad (7.4.107.)$$

Kifutó null-geodetikusokon  $u = \text{áll.}$ , azaz  $E = \frac{1}{2}e^{v-u} \frac{dv}{d\lambda}$ , ahonnan  $\frac{d\lambda}{dv} = \frac{1}{2E}e^{v-u}$ , amiből integrálással az affin paraméterre  $\lambda = \frac{1}{2E}e^{-u} \int e^v dv = \frac{1}{2E}e^{v-u} + \text{const.}$  adódik. A kifutó null-geodetikusokon használhatjuk tehát a

$$V(v) = e^v \quad (7.4.108.)$$

affin paramétert,  $0 < V(v)$ . Befutó null-geodetikusokon  $v = \text{áll.}$ , azaz  $E = \frac{1}{2}e^{v-u} \frac{du}{d\lambda}$ , ahonnan  $\frac{d\lambda}{du} = \frac{1}{2E}e^{v-u}$ , amiből integrálással az affin paraméterre  $\lambda = \frac{1}{2E}e^v \int e^{-u} du = -\frac{1}{2E}e^{v-u} + \text{const.}$  adódik. A befutó null-geodetikusokon használhatjuk tehát az

$$U(u) = -e^{-u} \quad (7.4.109.)$$

affin paramétert,  $U(u) < 0$ . Az affin paraméterek egyik oldalról korlátos tartománya mutatja, hogy az eredeti 2-dimenziós Rindler-téridő aszimptotikusan nem teljes, metrikája

$$ds^2 = -dU dV. \quad (7.4.110.)$$

A téridő-tartomány kiterjesztése azáltal történik, hogy az új  $(U, V)$  koordinátákat az egész valós számegyenesen hagyjuk futni,  $-\infty < U, V < +\infty$ . Ezután bevezetjük a

$$T = \frac{1}{2}(U + V), \quad X = \frac{1}{2}(V - U) \quad (7.4.111.)$$

Minkowski-koordinátákat, amelyek szintén bármely értéket felvehetnek a valós számegyenesen, és segítségével a kiterjesztett téridő-tartományon a metrika

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 \quad (7.4.112.)$$

alakot ölt, ami azonos a Minkowski-metrikával. Az eredeti  $(t, x)$  Rindler-koordinátákat kifejezzük a Minkowski-koordinátákkal:

$$x = \sqrt{X^2 - T^2}, \quad t = \operatorname{ar\,th}(T/X). \quad (7.4.113.)$$

Ebből látjuk, hogy a Rindler-téridő a Minkowski-téridőnek az  $X > |T|$  szektora, az  $I$  szektor, a kiterjesztés után kapott Minkowski-téridőnek azonban még 3 másik szektora is van:  $II : T > |X|$ ,  $III : -T > |X|$ ,  $IV : -X > |T|$ .

### 7.4.3. A Schwarzschild-metrika kiterjesztése

A Schwarzschild-téridő a 2-dimenziós Rindler-téridőhöz hasonlóan terjeszthető ki. Ez annak köszönhető, hogy a gömbszimmetria miatt elegendő a kiterjesztést a  $(t, r)$  síkon vizsgálni. Ezen a síkon a metrika

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2. \quad (7.4.114.)$$

A koordinátarendszer a  $-\infty < t < +\infty$  és  $2M < r$  tartományon értelmes. A 2-dimenziós  $(t, r)$  síkon a null-geodetikusoknak megint 2 serege van: a kifelé és a befelé futó radiális  $(\phi, \theta = \text{áll.})$  null-geodetikusok, amelyek egyenletei

$$0 = g_{ab}k^a k^b = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\dot{r}^2, \quad (7.4.115.)$$

ahonnan azt kapjuk, hogy

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (7.4.116.)$$

Vezessük be az

$$r_* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \quad (7.4.117.)$$

Regge<sup>79</sup>-Wheeler<sup>80</sup>-féle teknősbéka-koordinátákat. Ezeknek a segítségével a radiális null-geodetikusok egyenlete

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{dr_*}{dr} \quad (7.4.118.)$$

alakot ölt, és könnyen integrálható:

$$t = \pm r_* + C, \quad (7.4.119.)$$

---

<sup>79</sup>Tullio Eugenio Regge, olasz fizikus, 1931–2014

<sup>80</sup>John Archibald Wheeler, amerikai fizikus, 1911–2008

ahol  $C$  tetszőleges állandó. Most is bevezetjük az

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_* \quad (7.4.120.)$$

null-koordinátákat. Segítségükkel  $r_* = \frac{1}{2}(v - u)$ , ami azt jelenti, hogy ezáltal  $r$  is adott implicit módon, mint  $u$  és  $v$  kifejezése; továbbá

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dudv. \quad (7.4.121.)$$

Használjuk fel, hogy

$$\begin{aligned} \frac{r}{2M} - 1 &= \frac{r}{2M} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = e^{(r_* - r)/2M}, \\ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) &= -\frac{2M}{r} e^{-r/2M} e^{(v-u)/4M}, \end{aligned} \quad (7.4.122.)$$

és írjuk át a metrikát

$$ds^2 = -\frac{2M}{r} e^{-r/2M} e^{(v-u)/4M} dudv \quad (7.4.123.)$$

alakba. Ezzel elértük, hogy a metrikát a  $-\frac{2M}{r} e^{-r/2M}$  csak  $r$ -től függő,  $r = 2M$  helyen nem szinguláris tényező és a csak  $u$ -tól és  $v$ -től függő tényező szorzatára bontottuk.

A Rindler-téridő kiterjesztése során a null-geodetikusok menti affin paramétereket vezettük be új  $U$  és  $V$  koordinátákként. Az analógia alapján most az új koordinátákra az

$$U(u) = -e^{-u/4M} < 0, \quad V(v) = e^{v/4M} > 0 \quad (7.4.124.)$$

munkahipotézissel élünk. Ekkor  $dU = \frac{-1}{4M} U du$ ,  $dV = \frac{1}{4M} V dv$  miatt

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dU dV \quad (7.4.125.)$$

adódik. Itt ha  $r \rightarrow 2M$  felülről, akkor  $r_* \rightarrow -\infty$  miatt  $u \rightarrow \infty$  és  $v \rightarrow -\infty$ , valamint  $U \rightarrow 0$  alulról és  $V \rightarrow 0$  felülről. Az  $(U, V)$  koordinátákban tehát a metrika az  $r = 2M$  helyen véges.

A következő lépésként kiterjesztjük az  $U$  és  $V$  koordináták intervallumát minden olyan valós értékre, ami  $r > 0$ -val kompatibilis. A szingularitás  $r = 0$ -ban fizikai, azt már nem tudjuk további koordináta-transzformációval eltüntetni. Ezután, a kiterjesztés utolsó lépéseként, bevezetjük a Kruskal<sup>81</sup>-Szekeres<sup>82</sup>-féle

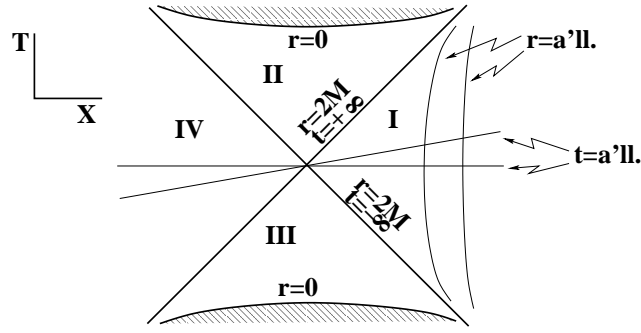
$$T = \frac{1}{2}(U + V), \quad X = \frac{1}{2}(V - U) \quad (7.4.126.)$$

---

<sup>81</sup>Martin David Kruskal, amerikai matematikus és fizikus, 1925–2006)

<sup>82</sup>Szekeres György (George Szekeres), magyar-ausztrál matematikus, 1911–2005





20. ábra. A Schwarzschild-téridő Kruskal-Szekeres-féle kiterjesztésének 2-dimenziós ábrája. Az ábra minden pontja a  $(\theta, \phi)$  gömbi szögek tekintetében egy 2-dimenziós gömbfelületnek felel meg. Az I. tartomány az eredeti Schwarzschild-téridőnek a Schwarzschild-sugáron kívüli tartománya, a II. tartomány a feketelyuk tartománya (az eredeti Schwarzschild-téridőnek a Schwarzschild-sugáron belüli tartománya). A kiterjesztés eredményeként jelent meg az aszimptotikusan lapos IV. tartomány és a III. tartomány, a fehérlyuk tartománya. A satírozott részek nem tartoznak hozzá a kiterjesztett téridő-tartományhoz.

koordinátákat. Ezekben a koordinátákban bármely  $(T_0, X_0)$  téridő-ponthoz tartozó fénykúp egyenlete  $T - T_0 = \pm(X - X_0)$  (a  $(T, X)$  „síkon” szemléltetve  $45^\circ$ -os egyenesek). A Kruskal-Szekeres-koordináták segítségével a **Schwarzschild-téridő Kruskal-Szekeres-féle kiterjesztésének metrikája**

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (7.4.127.)$$

ahol visszaírtuk a metrika gömbi szögektől függő részét. A metrika kifejezésében szereplő  $r$  koordináta implicit módon függ a  $(T, X)$  koordinátáktól. Az implicit függést az eredeti  $(t, r)$  koordináták és a Kruskal-Szekeres-koordináták közti kapcsolat,

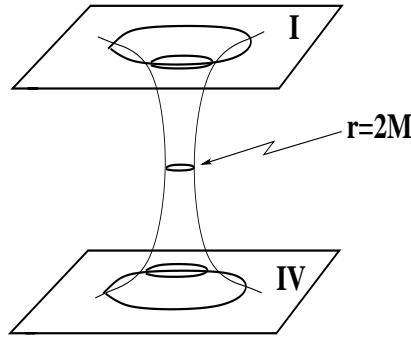
$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)e^{r/2M} = X^2 - T^2, \quad \frac{t}{2M} = \ln \frac{X+T}{X-T} = 2 \operatorname{ar} \operatorname{th} \frac{T}{X}, \quad (7.4.128.)$$

határozza meg. Innen látjuk, hogy az  $r > 0$  feltétellel a  $(T, X)$  koordináta-sík azon tartományai vannak összhangban, amelyek az  $X^2 - T^2 > -1$  feltételnek eleget tesznek. Ezért a pozitív, ill. negatív irányba nyíló, megfelelő 2 forgási hiperboloid és annak annak belseje ki van zárva a kiterjesztett téridőből. Az  $X^2 - T^2 = -1$  hiperboloidok felszíne felel meg az  $r = 0$  szingularitásnak, ezek ezért nem tartoznak a kiterjesztett téridő-sokasághoz. A téridő-sokaságnak a 2 hiperboloidon kívüli részét a  $T = \pm X$  2-dimenziós hiperfelületek négy tartományra osztják (ld. a 20. ábrát):

- *I. tartomány:*  $X > |T|$  megfelel az  $r > 2M$  radiális koordináta-értékeknek, ez az eredeti Schwarzschild-téridőnek a Schwarzschild-sugáron kívüli tartománya.

Az  $X = T$  és az  $X = -T$  hiperfelület rendre az  $r = 2M$ ,  $t = +\infty$  és az  $r = 2M$ ,  $t = -\infty$  hiperfelület. Ez a tartomány  $r \rightarrow \infty$  esetén aszimptotikusan lapos. Az  $r = \text{áll.}$  és a  $t = \text{áll.}$  hiperfelületeket a  $(T, X)$  síkon rendre  $X > 0$  irányba nyíló hiperbolák és csökkenő  $r$  esetén az origóba befutó egyenesek ábrázolják. Az I. tartományból indított bármely időszerű görbe áthalad az  $r = 2M$ ,  $t \rightarrow +\infty$  hiperfelületen. Amikor ezt a felületet pl. egy szabadon eső részecske megközelíti (időszerű geodetikusan mozog), akkor a részecske által mért véges, kicsiny  $\Delta\tau$  sajátidő-tartamnak végtelenhez tartó  $\Delta t = \Delta\tau / \sqrt{1 - (2M/r)}$  időtartam felel meg az aszimptotikusan távoli, nyugvó megfigyelő óráján. A részecske a saját órája szerint tehát véges idő alatt beleesik a II. tartományba, amit a végtelen távoli megfigyelő végtelen ideig tartó közeledésnek észlel. Hasonlóan egy a centrum felé az I. tartományból elindított fénysugár sem „észlel” szingularitást, és belép a II. tartományba. Eközben – az előző megfontolást alkalmazva – az aszimptotikusan távoli megfigyelő számára frekvenciája zérussá válik a belépés pillanatában.

- *II. tartomány:* az  $|X| < T$ ,  $T < \sqrt{X^2 + 1}$  tartomány, ami az eredeti koordinátákban a  $0 < r < 2M$  tartomány. Ez a **feketelyuk** tartománya. Ebben a tartományban az  $r = \text{áll.}$  és a  $t = \text{áll.}$  hiperfelületeket a  $(T, X)$ -síkon rendre pozitív  $T$  irányba nyíló hiperbolák és az origóból csökkenő  $r$ -rel kifutó egyenes szakaszok szemléltetik, utóbbiak az  $r = 0$  szingularitásban végződnek. A tartomány bármely pontjában a fénykúp lokálisan úgy helyezkedik el, hogy sem fényjel, sem részecske a tartományból kilépni nem tud, hanem „életét” az  $r = 0$  szingularitásba befutva végzi véges sajátidő elteltével. A feketelyuk tehát olyan téridő-tartomány, amelyből sem részecske, sem fény nem lép ki, ugyanakkor a feketelyuk felé radiálisan tartó részecskék és fénysugarak akadálytalanul lépik át az I. és a II. tartomány közti határt.
- *III. tartomány:* a  $|X| < -T$ ,  $T > -\sqrt{X^2 + 1}$  tartomány, ami a feketelyuk-tartománynak egyfajta „időtüköröztje”, az úgynevezett **fehértlyuk** tartománya. Bármely részecskének, vagy fényjelnek, amely a III. tartományban jelen van, véges sajátidő alatt kellett „kilépnie” a  $T = -\sqrt{X^2 + 1}$  ( $r = 0$ ) szingularitásból, és akadálytalanul elhagyhatja a III. tartományt a IV. tartomány irányában.
- *IV. tartomány:* a  $-X > |T|$  tartomány, amely az I. tartományhoz hasonlóan aszimptotikusan lapos tartomány. Érdekes azonban tudatosítanunk, hogy nincsen sem olyan időszerű geodetikus, sem olyan null-geodetikus, amelynek mentén összeköttetés lenne az I. és a IV. aszimptotikusan lapos tartomány között. Ez abból látszik, hogy a jövőbeli fénykúpoknak a 20. ábra bármely pontjában olyan „felfelé nyíló ékek” felelnek meg, amelyeket a jövőirányú null-geodetikusoknak megfelelő  $\pm 45^\circ$ -os egyenesek rajzolnak ki. Következésképpen az I. tartományból radiálisan befelé indított időszerű vagy fényszerű görbe, azaz minden befelé indított részecske vagy fénysugár a II. tartományba lép

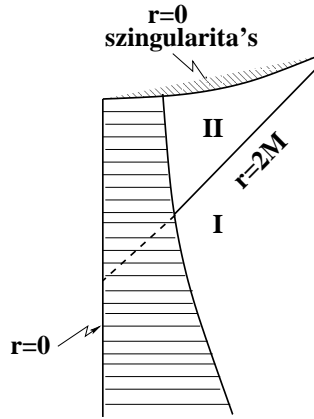


21. ábra. A Schwarzschild-féle féregjárat (azaz az Einstein-Rosen-híd) szemléltetése a Schwarzschild-téridő Kruskal-Szekeres-féle kiterjesztésében a  $t = 0$  hiperfelület topológiája révén. Az ábrán az egyik dimenzió el van nyomva, azaz az  $\mathbb{R} \times S^2$  topológiát  $\mathbb{R} \times S^1$  topológiával szemléltetjük, úgyhogy az ábrán az  $r = \text{áll.}$  körök valójában 2-dimenziós gömbfelületeknek felelnek meg. Az  $r = 2M$ -nél látható „nyak” fölötti és alatti rész rendre az aszimptotikusan lapos I. és IV. tartományhoz tartozik.

be és életét az  $r = 0$  szingularitásban végzi, ahelyett, hogy átléphetne a IV. tartományba. A  $t = 0$  hiperfelület térbeli topológiai viszonyait, az úgynevezett **Schwarzschild-féle féregjáratot**, (wormhole) vagy más néven az **Einstein-Rosen<sup>83</sup>-hidat** (bridge) a 21. ábra szemlélteti 3 helyett 2 dimenzióban.

Az valószínűsíthető, hogy a kiterjesztett Schwarzschild-téridő III. és IV. tartománya nem fizikai. Az I. tartomány bármely sztatikus, gömbszimmetrikus égitesten kívül (ami általában a Schwarzschild-sugarán kívül helyezkedik le) megvalósul. A II. tartomány pedig abban az esetben válik legalább részben fizikaivá, ha az égitest tömege meghaladja azt a kritikus értéket, amelynél nagyobb tömeg esetén bekövetkezik a teljes gravitációs összeomlás (kollapszus). Az utóbbi esetet szemlélteti a 22. ábra.

<sup>83</sup>Nathan Rosen, amerikai-izraeli fizikus, 1909–1995.



22. ábra. Gömbszimmetrikus égitest teljes gravitációs összeomlása esetén megjelenik a Schwarzschild-féle feketelyuk tartományának egy része. A vízszintesen sátozott tartományt az összeomló anyag foglalja el.

## 8. A téridő kauzális szerkezete

A továbbiakban feltesszük, hogy a téridő-sokaság parakompakt (ld. a A.1 függelékét).

### 8.1. Jövő és múlt

#### 8.1.1. Kronológikus és kauzális jövő és múlt

**Definíció:** Az  $M$  téridő-sokaság bármely  $p \in M$  pontjában a  $V_p$  érintőtér izomorf a Minkowski-téridővel. Ezért bármely  $p$  ponthoz tartozó  $V_p$  érintőtérben értelmezhető a „ $p$ -beli” **fénykúp**, ami azonban  $V_p$ -ben van és nem a téridőben. Természetesen a fénykúp csúcsa a  $V_p$  érintőtér origója (zéró-vektora). Ahogyan a Minkowski-téridőben, a fénykúp egyik és másik felét tekinthetjük rendre jövőbeli és múltbeli fénykúpoknak.

A téridő topológiája lehet nem egyszeresen összefüggő. Ekkor felmerül az a kérdés, hogy a jövő és a múlt folytonosan rendelhető-e hozzá a fénykúpokhoz, ha  $p$  befutja a teljes téridő-sokaságot. A téridőt **időben irányíthatónak**, vagy röviden **időirányíthatónak** (time orientable) nevezzük akkor és csak akkor, ha a lokális fénykúpokhoz a jövő és a múlt folytonosan rendelhető hozzá, amikor  $p$  besöpri az egész téridő-sokaságot. A továbbiakban csak az időirányítható  $(M, g_{ab})$  téridő-sokaság esetével foglalkozunk.

**8.1.1. lemma:** Ha az  $(M, g_{ab})$  téridő időirányítható, akkor létezik  $t^a$  időszerű, sima, sehol el nem tűnő vektormező  $M$ -en. Ez a vektormező azonban messze nem egyértelmű.

Mivel az  $M$  sokaság parakompakt, ezért létezik rajta  $k_{ab}$  Riemann-metrika. Tekintsük lokálisan azon  $v^a \in V_p$  vektorokat, amelyekre  $k_{ab}v^av^b = 1$ . Keressük meg ezek között azt a  $t^a$  időszerű vektort, amelyik minimalizálja  $g_{ab}v^av^b$ -t (azaz amelynek a normanégyzete minimális). Ilyen  $t^a$  vektor lokálisan egyértelműen létezik. Meg lehet mutatni, hogy ha  $p$  befutja az időirányítható sokaságot, akkor  $t^a$  sima, el nem tűnő vektormező.

A  $t^a$  egy lehetséges választása tehát olyan időszerű vektormező, amelyik az  $M$ -en értelmezett  $k_{ab}$  Riemann-metrika szerint egységvektor, és amelynek a téridő  $g_{ab}$  metrikája szerint minimális a normanégyzete.

**Definíció:** Legyenek  $S, U \subseteq M$  a téridő részhalmazai. Az  $I^+(S, U) \subset M$  halmazt **az  $S$  halmaz ( $U$ -beli) kronológikus jövőjének** nevezzük, ha mindazon  $q \in U$  pontokat tartalmazza, amelyek elérhetők valamely  $p \in S$  pontból  $U$ -ban futó, jövőirányú, időszerű görbék mentén.

Ha  $U = M$ , akkor az  $I^+(S) = I^+(S, M)$  jelölést használjuk, és  $I^+(S)$ -et az  $S$  halmaz kronológikus jövőjének nevezzük. Hasonlóan értelmezhetjük **az  $S$  halmaz  $I^-(S)$  kronológikus múltját**.

**Definíció:** Legyenek  $S, U \subseteq M$  a téridő részhalmazai. A  $J^+(S, U) \subset M$  halmazt **az  $S$  halmaz ( $U$ -beli) kauzális jövőjének** nevezzük, ha mindazon  $q \in U$  pontokat tartalmazza, amelyek valamely  $p \in S$  pontból elérhetők  $U$ -ban futó, jövőirányú, nem térszerű (azaz időszerű vagy null-, azaz közös néven kauzális) görbék mentén.

Ha  $U = M$ , akkor a  $J^+(S) = J^+(S, M)$  jelölést használjuk, és  $J^+(S)$ -et az  $S$  halmaz kauzális jövőjének nevezzük. Az  $S$  halmaz kauzális jövője a téridő azon tartománya, amelyhez tartozó eseményeket  $S$  eseményei befolyásolhatták.

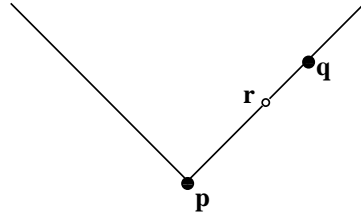
**Állítás:** Az  $S$  halmaz kronológikus jövője,  $I^+(S)$  és kronológikus múltja,  $I^-(S)$  nyílt halmazok.

**Példa:** A Minkowski-téridőben a  $p \in M$  esemény  $I^+(p)$  kronológikus jövője, azaz a  $p$ -ból induló jövőirányú időszerű görbék mentén elérhető pontok halmaza nem más, mint a jövőbeli fénykúp belseje (amihez a fénykúp palástja nem tartozik hozzá).

**Állítás:** Az  $S$  halmaz kauzális jövője,  $J^+(S)$  és kauzális múltja,  $J^-(S)$  lehet zárt és nem zárt.

**Példa:** A Minkowski-téridőben a  $p \in M$  pont kauzális jövője a jövőbeli fénykúp (annak palástját is beleértve), s ekkor  $J^+(p) = \overline{J^+(p)}$ . Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor az  $M'$  téridőt úgy kapjuk az  $M$  Minkowski-téridőből, hogy elhagyunk belőle egy  $r$  pontot,  $M' = M \setminus r$  (ld. a 23. ábrát). Legyen  $p \in M'$  olyan pont, amelyből  $M$ -ben jövőirányú fényszerű görbe megy az  $r \in M$  ponton át a  $q \in M$  pontba, ami  $M'$ -nek is pontja. Ekkor  $M'$ -ben  $q$  nem érhető el  $p$ -ból nem térszerű görbe mentén, tehát  $q \notin J^+(p)$ , ugyanakkor  $q \in \overline{J^+(p)}$ , tehát  $J^+(p)$  nem zárt ebben az esetben.

A következő tétel lényegében azt mondja ki, hogy az általános relativitáselméletben a téridők kauzális szerkezete lokálisan ugyanolyan jellegű, mint a speciális



23. ábra. Példa arra, amikor a  $p \in M'$  esemény kauzális jövője nem zárt. Az  $M'$  téridőt az  $M$  Minkowski-téridőből úgy kapjuk, hogy elhagyjuk belőle az  $r \in M$  pontot, amely a  $p \in M$  pont jövőbeli fénykúpján helyezkedik el. Az  $M'$  téridőben ekkor a  $q$  pont nem érhető el sem időszerű, sem fényszerű görbe mentén  $p$ -ből.

relativitáselméletben.

**8.1.2. tétel:** Az időirányítható  $(M, g_{ab})$  téridő az alábbi lokális tulajdonsággal rendelkezik. Bármely  $p \in M$  pontnak létezik  $U$  **konvex normál környezet**e, azaz olyan környezete, amelyre  $p \in U$  és

- $U$  nyílt,
- bármely  $q, r \in U$  esetén egyértelműen létezik olyan  $U$ -ban futó  $\gamma$  geodetikus, amely összeköti  $q$ -t  $r$ -rel.

Legyen  $I^+(p)|_U$  a  $p$  kronológikus jövője  $(U, g_{ab})$ -ben. Ekkor

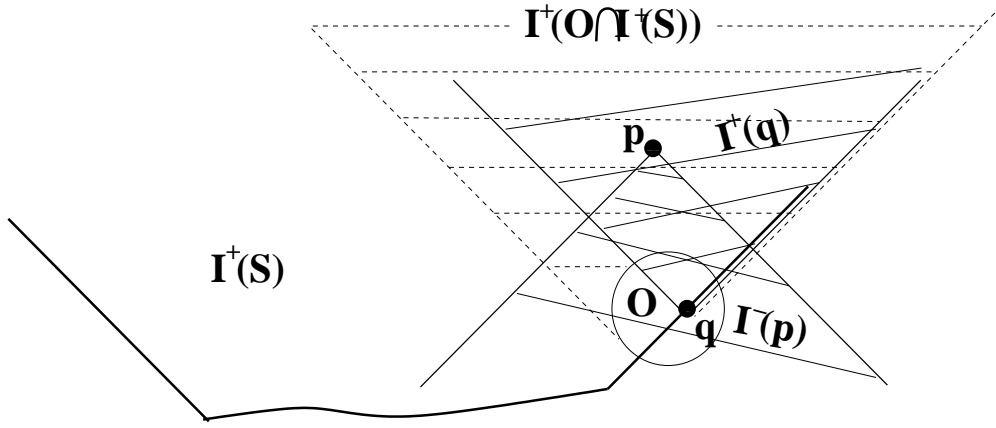
- $I^+(p)|_U$  mindazokból a  $q \in U$  pontokból áll, amelyek elérhetők  $p$ -ből  $U$ -ban futó, jövőirányú időszerű geodetikusok mentén;
- az  $\mathring{I}^+(p)|_U$  határt a  $p$ -ből induló jövőirányú,  $U$ -ban futó null-geodetikusok generálják.

Hasonlóképpen definiálhatjuk a  $p \in U$  pont  $I^-(p)|_U$  kronológikus múltját az  $U$  konvex normál környezetben.

**Megjegyzés:** Látjuk tehát, hogy bármely  $p \in M$  pont konvex normál környezete felbontható a fenti értelemben a  $p$  pont kronológikus jövőjében vagy múltjában elhelyezkedő és a  $p$  pont kronológikus jövőjének vagy múltjának határán elhelyezkedő továbbá a  $p$  pontból kauzális görbék mentén nem elérhető pontok halmazának uniójára.

**Következmény:** Ha  $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$ , akkor minden  $p$ -t  $q$ -val összekötő kauzális görbe null-geodetikus.

Legyen  $q \in J^+(p)$  és  $\gamma$  olyan kauzális görbe, ami  $p$ -t összeköti  $q$ -val. A  $\gamma$  görbe lefedhető konvex normál környezetekkel. Másrészt, a  $\gamma$  görbe egy zárt intervallum folytonos leképezése az  $M$  sokaságba, ezért kompakt halmaz, úgyhogy a fenti lefedésből kiválasztható egy véges allefedés.



24. ábra. A 8.1.3. tétel bizonyításához a viszonyok szemléltetése

Tekintsük tehát a  $\gamma$  görbe ezen véges allefedését konvex normál környezetekkel. Ha ezek mindegyikében  $\gamma$  null-geodetikus, akkor  $q$  elérhető null-geodetikus mentén  $p$ -ből, azaz akkor  $q$  nincsen benne  $I^+(p)$ -ben. Ha a konvex normál környezetek valamelyikében  $\gamma$  nem null-geodetikus, akkor ebben a környezetben  $\gamma$ -t időszerű görbévé deformálhatjuk, majd ezután hasonló deformációt végzünk a többi normál konvex környezetben is, úgyhogy végül időszerű görbével kötjük össze  $p$ -t  $q$ -val. Ekkor  $q$  benne van  $I^+(p)$ -ben.

**Következmény:** Hasonlóan láthatók be az alábbi tulajdonságok bármely  $S \subset M$  halmaz esetében:

- $J^+(S) \subset \overline{I^+(S)}$ ,
- $\overline{J^+(S)} = \overline{I^+(S)}$ ,
- $I^+(S) = \text{int}[J^+(S)]$  és  $\mathring{I}^+(S) = \mathring{J}^+(S)$ .
- $I^+[I^+(S)] = I^+(S)$ ,
- $I^+(\overline{S}) = I^+(S)$ ,

**Definíció:** Az  $S \subset M$  halmazt **akronális halmaznak** nevezzük akkor és csak akkor, ha nem létezik  $S$ -ben két olyan pont, hogy az egyik a másik kronológikus jövőjében lenne, azaz nem léteznek olyan  $p, q \in S$  pontok, hogy  $q \in I^+(p)$  lenne. Másképpen  $S$  akkor és csak akkor akronális halmaz, ha  $S$ -nek és  $S$  kronológikus jövőjének a metszete zérus, azaz  $I^+(S) \cap S = \emptyset$ .

**8.1.3. tétel:** Legyen  $M$  időirányított sokaság és  $S \subset M$  halmaz. Ekkor  $S$  kronológikus jövőjének  $\mathring{I}^+(S)$  határa (ha nem üres halmaz, akkor) akronális, 3-dimenziós,  $M$ -be ágyazott folytonos részsokaság.

Először belátjuk, hogy  $\mathring{I}^+(S)$  akronális halmaz (a bizonyításhoz használt pontok és tartományok viszonyát a 24. ábra szemlélteti). Legyen  $q \in \mathring{I}^+(S)$ . Legyen  $p \in I^+(q)$  a  $q$  kronológikus jövőjének tetszőleges pontja, akkor  $q \in I^-(p)$ , azaz  $q$  benne van  $p$  kronológikus múltjában. Az

$I^-(p)$  halmaz viszont nyílt, ezért létezik  $q$ -nak  $O \subset I^-(p)$  nyílt környezete. Mivel azonban  $q$  az  $I^+(S)$  határának a pontja, ezért  $O$  belemetsz  $I^+(S)$ -be, azaz  $O \cap I^+(S) \neq \emptyset$ . Ekkor viszont  $p \in I^+[O \cap I^+(S)] \subset I^+(S)$ . Mivel  $p$  az  $I^+(q)$  tetszőleges pontja volt, ezzel beláttuk, hogy  $I^+(q) \subset I^+(S)$ . Hasonlóan lehet belátni, hogy  $I^-(q) \subset M \setminus \overline{I^+(S)}$ . Tegyük most fel, hogy  $\dot{I}^+(S)$  nem akronális; akkor lehet találni olyan  $q, r \in \dot{I}^+(S)$  pontokat, hogy  $r \in I^+(q)$ , de akkor  $r \in I^+(S)$ . Ez azonban ellentmondás, mert  $I^+(S)$  nyílt, és ezért  $\dot{I}^+(S) \cap I^+(S) = \emptyset$ . Ez viszont azt jelenti, hogy  $\dot{I}^+(S)$  akronális.

Ezután az  $\dot{I}^+(S)$  határ sokaság-szerkezetére vonatkozó állítást bizonyítjuk. Tetszőleges  $q \in \dot{I}^+(S)$  pont környezetében  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  Riemann-koordinátákat értelmezünk, a környezetet kellően kicsinek választva, hogy abban  $(\partial/\partial x^0)^a$  mindenütt időszerű legyen. Ekkor  $(\partial/\partial x^0)^a$  minden integrálgörbéje belép  $I^+(q) \subset I^+(S)$ -be és  $I^-(q) \subset M \setminus \overline{I^+(S)}$ -be. Akkor viszont  $(\partial/\partial x^0)^a$  minden integrálgörbéje átmetszi  $\dot{I}^+(S)$ -et, ráadásul pontosan egyszer, mert  $\dot{I}^+(S)$  akronális. (Ha még egyszer belemetszene, akkor lenne  $\dot{I}^+(S)$ -nek 2 olyan pontja, amelyek időszerű görbével lennének összeköthetők, de akkor  $\dot{I}^+(S)$  nem lenne akronális.) Így az  $\dot{I}^+(S)$  határ minden pontja kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban áll annak az időszerű integrálgörbének az  $(x^1, x^2, x^3)$  adataival, amelyik az adott pontban metszi át a határt. A határ tehát 3-dimenziós sokaság. Mivel  $\dot{I}^+(S)$  akronális, a metszéspont  $x^0$  koordinátájának folytonosan kell függenie az  $(x^1, x^2, x^3)$  koordinátáktól. Az elmondottak szerint létezik tehát a  $q$  pont kellően kicsiny  $\dot{I}^+(S)$ -beli környezetének az  $\mathbb{R}^3$ -ba történő,  $\dot{I}^+(S)$  indukált topológiája szerinti homeomorf leképezése. Ha ezt a konstrukciót minden  $q \in \dot{I}^+(S)$  pont esetén elismételjük, akkor az  $\dot{I}^+(S)$ -et lefedő térképek folytonos családját kapjuk, amivel  $\dot{I}^+(S)$  beágyazott sokasággá válik.

### 8.1.2. Folytonos időszerű és kauzális görbék és kiterjeszthetőségük

Bár sok esetben elegendő megfontolásainkat sima, azaz  $C^\infty$  görbék segítségével végezni, a kauzális szerkezet vizsgálata szempontjából időnként szükségünk lesz arra, hogy az időszerű és a kauzális görbe fogalmát folytonos görbékre is kiterjesszük. A folytonos időszerű és a folytonos kauzális görbék olyanok, mintha szakaszonként lehetne őket helyettesíteni sima időszerű és sima kauzális görbeszakaszokkal. Ezt tükrözi az alábbi definíció.

**Definíció:** A  $\lambda$  görbét folytonos, jövőirányú, időszerű, ill. folytonos, jövőirányú, kauzális görbének nevezzük akkor és csak akkor, ha a görbe minden  $p \in \lambda$  pontjához létezik olyan  $U(p)$  konvex normál környezet, amelyben a görbe az alábbi tulajdonságú: ha  $\lambda(t_1), \lambda(t_2) \in U(p)$  olyanok, hogy  $t_1 < t_2$ , akkor létezik olyan sima jövőirányú, időszerű, ill. kauzális görbe  $U(p)$ -ben, amelyik  $\lambda(t_1)$ -ből  $\lambda(t_2)$ -be fut.

**Definíció:** Legyen  $\lambda(t)$  jövőirányú, kauzális görbe. A téridő  $p \in M$  pontját **a kauzális görbe jövőbeli végpontjának** nevezzük akkor és csak akkor, ha  $p$  minden  $O$  környezetéhez létezik olyan  $t_0$ , hogy  $t > t_0$  esetén a görbe minden  $\lambda(t)$  pontja benne van az  $O$  környezetben, azaz  $\lambda(t) \in O$ . Hasonlóan értelmezhető a **kauzális görbe múltbeli végpontja**.

**Megjegyzés:** A  $p$  végpont nem mindig pontja a  $\lambda$  görbének.

**Megjegyzés:** A téridő Hausdorff-féle topológiája biztosítja, hogy egy kauzális görbének legfeljebb csak egy jövőbeli (múltbeli) végpontja lehet.



Tegyük fel, hogy a  $\lambda$  jövőirányú kauzális görbének létezik egy  $p$  és egy  $q \neq p$  végpontja. Akkor  $p$ -nek minden  $U$ , ill.  $q$ -nak minden  $V$  környezetéhez létezik olyan  $t_p$ , ill.  $t_q$ , hogy ha  $t > t_p$ , ill.  $t > t_q$ , akkor minden  $\lambda(t) \in U$ , ill.  $\in V$ . Ez azonban azt jelentené, hogy elég nagy  $t$  esetén minden  $\lambda(t)$  benne van  $U$ -ban is és  $V$ -ben is.  $U$  és  $V$  viszont tetszőleges környezetek voltak, ami azt jelentené, hogy a  $p$  és  $q$  pontok bármely elegendően kis környezeteinek van közös pontja. Ez viszont ellentmondás, mert a téridő Hausdorff-féle, így bármely két pontjának van olyan környezete, amelyeknek nincsen átfedésük.

**Definíció:** A  $\lambda(t)$  kauzális görbe a jövőbe nem kiterjeszthető akkor és csak akkor, ha nincsen jövőbeli végpontja. Hasonlóképpen definiálható, hogy egy kauzális görbe mikor **nem terjeszthető ki a múltba**.

**Megjegyzés:** A fenti definíciót az indokolja, hogy amennyiben a  $\lambda(t)$  kauzális görbének van jövőbeli végpontja, akkor kiterjeszthető, azaz onnan „folytatható”. Lehet, hogy differenciálható vagy sima görbeként nem terjeszthető ki, de folytonos görbeként mindig kiterjeszthető úgy, hogy a  $p$  végpontban csatlakoztatunk hozzá egy jövőirányú folytonos görbét.

**8.1.4. lemma:** Legyen  $\lambda$  a múltba nem kiterjeszthető, kauzális görbe, ami áthalad a  $p \in M$  ponton. Ekkor létezik a  $p$  pont kronológikus jövőjében levő bármely  $q \in I^+(p)$  ponton áthaladó olyan múltba nem kiterjeszthető, időszerű  $\gamma$  görbe, amely benne van  $\lambda$  kronológikus jövőjében, azaz  $\gamma \subset I^+(\lambda)$ .

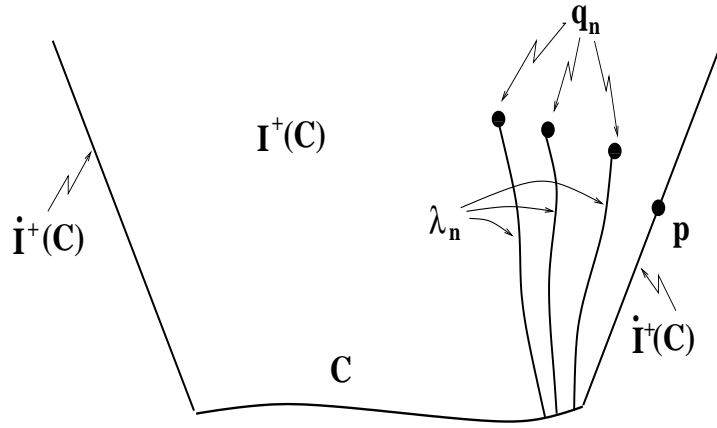
Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a  $\lambda$  görbe  $t$  paramétere a  $[0, \infty)$  intervallumot futja be. (Itt  $\lambda(t = 0)$  felel meg a  $p$  pontnak és  $t \rightarrow \infty$  a végtelen távoli múltbeli görbepontnak.) Mivel  $M$  parakompakt, választhatunk rajta tetszőleges Riemann-metrikát. Szerkesszünk ezután a  $t \in [0, 1]$  intervallumhoz tartozó olyan  $\gamma(t)$  múltirányú időszerű görbeszakaszt, amely benne fut a  $q$  pont konvex normál környezetében és egyúttal  $I^+(\lambda)$ -ban. Ez megtehető a **8.1.2. tétel** szerint, ha a következő feltételt is kielégítjük: Jelölje  $d[\gamma(t), \lambda]$  azt a Riemann-metrikában mért „távolságot”, amelyet úgy értelmezünk, hogy vesszük mindazon görbék hosszának legnagyobb alsó korlátját, amelyek összekötik a  $\gamma(t)$  pontot az egyes  $\lambda(t')$  görbepontokkal bármely  $t' \in [0, 1]$  esetén. Követeljük meg, hogy a  $\{\gamma(t) | t \in [0, 1]\}$  időszerű görbeszakaszt úgy vesszük fel, hogy a  $d[\gamma(t), \lambda] < C/(1+t)$  egyenlőtlenség teljesüljön a görbeszakasz minden  $t$  pontjában, ahol  $C$  alkalmas állandó. Ezután induktív módon folytassuk  $\gamma(t)$  kiterjesztését rendre az egyre nagyobb  $t \in [0, n]$  intervallumokra, minden  $n$  pozitív egész szám esetére (azaz  $t \in [0, \infty)$ -re), miközben a fenti tulajdonságokat mindig megköveteljük. Az eredményül kapott görbe nem lehet múltba kiterjeszthető, mert ha lenne múltbeli végpontja, akkor az  $\lambda$ -nak is múltbeli végpontja lenne, hiszen  $t$  növekedtével a megszerkesztett  $\gamma(t)$  görbe „egyre közelebb kerül”  $\lambda(t)$ -hez.

### 8.1.3. A kauzális görbék konvergenciája

Legyen  $\{\lambda_n\}$  kauzális görbék sorozata.

**Definíció:** A  $p \in M$  pont a  $\{\lambda_n\}$  sorozatnak **konvergencia-pontja** akkor és csak akkor, ha a  $p$ -t tartalmazó bármely  $O$  nyílt környezethez létezik olyan  $N$ , hogy minden  $n > N$  esetén  $\lambda_n$  belemetsz az  $O$  környezetbe, azaz  $\lambda_n \cap O \neq \emptyset$ .

**Definíció:** A  $\lambda$  görbe a  $\{\lambda_n\}$  sorozat **konvergencia-görbéje** akkor és csak akkor, ha bármely  $p \in \lambda$  a  $\{\lambda_n\}$  sorozat konvergencia-pontja.



25. ábra. Az ábra a **8.1.6. tétel** bizonyításához mutatja egy  $C$  halmaz kronológikus jövőjét, annak határán egy  $p$  pontot és a  $p$ -hez konvergáló  $q_n$  pontok sorozatát, továbbá az azokon átmenő múltirányú, időszerű  $\lambda_n$  görbéket.

**Definíció:** A  $p \in M$  pont a  $\{\lambda_n\}$  sorozatnak **határpontja** akkor és csak akkor, ha a  $p$  pont bármely  $O$  nyílt környezetét végtelen sok  $\lambda_n$  görbe metszi át.

**Definíció:** A  $\lambda$  görbe a  $\{\lambda_n\}$  sorozat **határgörbéje** akkor és csak akkor, ha kiválasztható a  $\{\lambda_n\}$  sorozatból olyan  $\{\lambda'_n\}$  részsorozat, amelynek  $\lambda$  a konvergencia-görbéje.

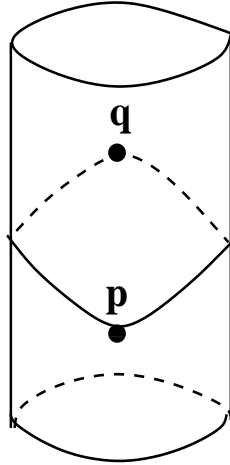
**Megjegyzés:** Ha  $\lambda$  határgörbe, akkor minden pontja határpont. Ha viszont egy  $\gamma$  görbe minden pontja határpontja a  $\{\lambda_n\}$  sorozatnak, akkor abból még nem következik, hogy  $\lambda$  határgörbe.

**8.1.5. lemma:** Legyen  $\{\lambda_n\}$  a jövőbe nem kiterjeszthető, kauzális görbék olyan sorozata, amelynek  $p \in M$  határpontja. Ekkor létezik olyan  $p$ -n áthaladó, jövőbe nem kiterjeszthető kauzális görbe, amely a  $\{\lambda_n\}$  sorozatnak határgörbéje. (A bizonyítást ld. [2]-ben.)

**Megjegyzés:** Ha a fenti lemmában  $\{\lambda_n\}$  jövőbe nem kiterjeszthető, *időszerű* görbék sorozata, akkor a határgörbéről csak annyit mondhatunk, hogy kauzális görbe, vagyis az időszerű görbék konvergálhatnak null-görbéhez. Továbbá, ha minden  $\lambda_n$  sima görbe, akkor is előfordulhat, hogy a sorozat határgörbéje csak folytonos görbe.

A kronológikus jövő határának jellemzésére vonatkozik a következő tétel, ami leegyszerűsítve azt mondja ki, hogy egy zárt halmaz kronológikus jövőjének határát null-geodetikusok generálják.

**8.1.6. tétel:** Legyen  $C \subset M$  zárt halmaz. Ekkor  $C$  kronológikus jövője határának bármely  $p \in I^+(C)$  pontja, amely nem pontja  $C$ -nek ( $p \notin C$ ), olyan  $\lambda$  null-geodetikuson fekszik, amely a kronológikus jövő határán helyezkedik el, azaz amelyre  $\lambda \subset I^+(C)$ , és amely vagy nem terjeszthető ki a múltba, vagy  $C$ -beli végponttal



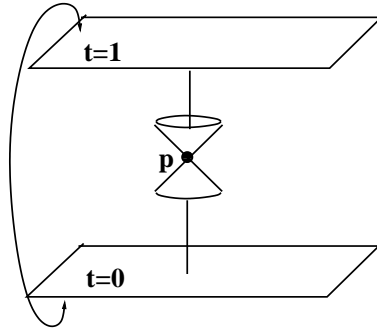
26. ábra. A 2-dimenziós, lapos,  $\mathbb{R} \times S^1$  topológiájú téridőben a  $p$  pont kauzális jövőjének határát generáló null-geodetikusok szemléltetése, ahol  $q$  a null-geodetikusok jövőbeli végpontja.

rendelkezik.

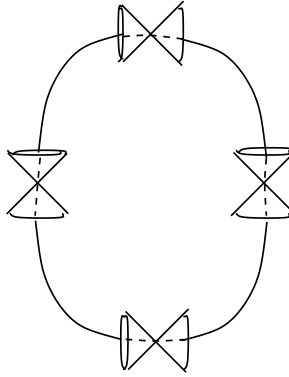
A bizonyítás a **8.1.5. lemma** felhasználásával történik. Válasszunk egy tetszőleges  $p \in \dot{I}^+(C)$  ponthoz konvergáló  $\{q_n\}$  pontsorozatot  $I^+(C)$ -ben (ld. a 25. ábrát). Minden  $q_n$ -hez keressünk egy időszerű  $\lambda_n$  görbét, ami összeköti  $q_n$ -et  $C$  egy pontjával. Mivel  $C$  zárt, azért a komplementere,  $M \setminus C$  nyílt és tekinthető egy új téridő-sokaságnak. Az  $M \setminus C$  sokaságban egyetlen  $\lambda_n$  sem terjeszthető ki a múltba, és  $p$  pedig határpontja a  $\{\lambda_n\}$  sorozatnak. Akkor viszont a **8.1.5. lemma** értelmében létezik a  $\{\lambda_n\}$  sorozatnak olyan múltba ki nem terjeszthető, kauzális  $\lambda$  határgörbéje, amely átmegy  $p$ -n. Ekkor  $\lambda$  minden pontja  $I^+(C)$ -beli pontok sorozatának határpontja, vagyis  $\lambda \subset \overline{I^+(C)}$ . Másrészt, ha a  $\lambda$  határgörbe valamely pontja benne lenne  $I^+(C)$ -ben, akkor a **8.1.2. tétel** következménye értelmében  $p \in I^+(C)$  teljesülne, mert  $p$  összeköthető lenne  $C$ -vel olyan kauzális görbe révén, ami nem null-geodetikus. Ha viszont  $p \in I^+(C)$  teljesülne, az ellentmondana annak, hogy  $p \in \dot{I}^+(C)$ . Ezért  $\lambda \subset \dot{I}^+(C)$  kell legyen. A **8.1.3. tétel** szerint  $\dot{I}^+(C)$  akronális, vagyis  $C$ -nek nincsen közös pontja  $\dot{I}^+(C)$ -vel, úgyhogy a  $\lambda$  határgörbe  $\dot{I}^+(C)$ -beli pontokat köt össze, de akkor a **8.1.2. tétel** következménye értelmében  $\lambda$  null-geodetikus. Végül, mivel  $\lambda$  az  $M \setminus C$  sokaságban nem terjeszthető ki a múltba, azért  $M$ -ben is vagy megmarad múltba ki nem terjeszthetőnek, vagy pedig van végpontja  $C$ -ben.

**Megjegyzés:** A 23. ábrán láthatunk példát arra, hogy  $q$  olyan pontja  $\dot{I}^+(p)$ -nek, amely múltba nem kiterjeszthető  $\lambda$  null-geodetikuson fekszik. Mivel  $r \notin M'$ , a  $q$ -ból induló múltirányú null-geodetikusnak nincsen végpontja  $M'$ -ben.

**Megjegyzés:** Az is előfordulhat, hogy az  $\dot{I}^+(p)$ -t generáló  $\lambda$  null-geodetikusoknak nincsen múltbeli végpontja, de van jövőbeli végpontjuk. Tekintsük pl. az  $\mathbb{R} \times S^1$  topológiájú  $M$  2-dimenziós, lapos téridőt. Ekkor a  $p \in M$  pont kauzális jövőjének határát generáló  $\lambda$  null-geodetikusoknak van jövőbeli végpontjuk (ld. a 26. ábrát). (Az ábrán látható,  $q$ -ba befutó mindkét null-geodetikus jövőirányú, így nem keletkezett zárt null-geodetikus!)



27. ábra. A Minkowski-téridő  $t = 0$  és  $t = 1$  hiperfelületének azonosítása révén előálló téridő és egy tetszőleges  $p$  ponton átmenő zárt időszerű görbe szemléltetése.

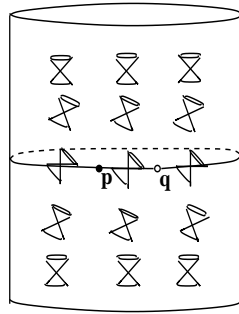


28. ábra. Zárt időszerű görbe  $\mathbb{R}^4$  topológiájú téridőben.

## 8.2. A kauzalitási feltételek

Noha a téridők kauzális szerkezete kvalitatíve ugyanolyan lokálisan, mint a speciális relativitáselméletben, ugyanakkor az általános relativitáselméletben a téridők globális kauzális szerkezete lényegesen különbözhet a Minkowski-téridőétől. Erre nem nehéz példát hozni. Tekintsük például azt az  $M'$  téridőt, amelyet az  $M$  Minkowski-téridőből úgy kapunk, hogy utóbbinak a  $t = 0$  és  $t = 1$  hiperfelületek közti tartományát vesszük és a  $t = 0$  és  $t = 1$  hiperfelületeket topológiailag azonosítjuk egymással (ld. a 27. ábrát). Ekkor a  $(\partial/\partial t)^a$  vektormező integrálgörbéi zárt időszerű görbék, és bármely  $p \in M'$  pont kronológikus múltja és jövője azonos a teljes téridővel,  $I^+(p) = I^-(p) = M'$ . Ekkor egy megfigyelő nem tud különbséget tenni múlt és jövő között, s így számára ok és okozat felcserélhető kellene, hogy legyen. Zárt időszerű görbék megjelenése nem köthető csak „mesterséges” topológiai azonosításokhoz. Akkor is megjelenhetnek, ha a fénykúpok alkalmasan elcsavarodnak, mint pl. azt a 28. ábrán illusztrált esetben látjuk, ahol a téridő topológiája  $\mathbb{R}^4$ .

Általában azt gondoljuk, hogy az olyan téridő nem fizikai, amelyben zárt ka-



29. ábra. Olyan téridő szemléltetése, amelyben a fénykúpok elfordulása miatt a  $p$  ponton átmenő null-geodetikus csak azért nem zárt, mert a sokaságból el van távolítva a  $q$  pont. Ebben a téridőben nincsenek zárt kauzális görbék, de a  $p$  ponton átmenő kauzális görbék között vannak olyanok, amelyek tetszőlegesen közel kerültek ahhoz, hogy metsszék egymást.

uzális görbék vannak. Ez elég nyilvánvaló, mert fizikai ismereteink szerint valamely fizikai esemény-sorozatban ok és okozat nem cserélhető fel. Előfordulhat azonban, hogy az olyan téridő, amelyben nincsenek zárt kauzális görbék, annak „a határán van”, hogy megsértse a kauzalitást. Ez akkor fordul elő, amikor a téridőben olyan kauzális görbék vannak, amelyek tetszőlegesen közel kerültek ahhoz, hogy metsszék egymást, noha ez még nem következett be. Ilyen esetet szemléltet a 29. ábra. Ekkor viszont a metrika kicsiny perturbációja már a kauzalitás sérülését eredményezheti. Az ilyen téridők szintén nem tekinthetők fizikaiaknak, mert „instabil” a „jó” kauzális szerkezetük a metrika perturbációival szemben. A „jó kauzális viselkedés” valamiféle stabilitását azért ésszerű megkövetelni, mert az általános relativitáselmélet feltehetően valamilyen kvantumelmélet klasszikus határesetére, és ebben a kvantumelméletben a határozatlansági reláció nem engedné meg, hogy a metrika minden pontban éles értéket vegyen fel. Ahhoz tehát, hogy a téridőt fizikainak tekinthessük, szükséges, hogy kauzális viselkedése bizonyos stabilitást mutasson: „egymástól alig különböző” (nearby) téridők közös kauzális viselkedést mutassanak.

A kauzalitási feltételekkel azt szeretnénk megfogalmazni, hogy a téridő kauzálisan „jó viselkedésű” legyen. Általában azt gondoljuk, hogy zárt kauzális görbék, ill. egymást keresztező kauzális görbék megjelenése esetén a téridő nem fizikai. A kauzális feltételekkel azt akarjuk kizárni, hogy ne legyenek zárt kauzális görbék, ill. hogy ilyenek akkor se keletkezzenek a metrika kicsiny perturbációjával, ha eredetileg már egymást csaknem keresztező kauzális görbék vannak jelen. Ennek érdekében kétféle kauzalitási feltételt fogalmazunk meg.

1. **Az erős kauzalitás feltétele (strong causality condition):** Az  $(M, g_{ab})$  téridőt **erősen kauzálisnak** nevezzük, ha bármely  $p \in M$  pontjának bármely  $O$  környezetéhez létezik  $p$ -nek olyan  $V \subset O$  környezete, amelyet egyetlen kauzális görbe sem metsz több, mint egyszer.

**Megjegyzés:** Ez a feltétel kizárja, hogy adott  $g_{ab}$  metrika esetén zárt kauzális görbék legyenek. Az erős kauzalitás feltétele kizárja az olyan eseteket, mint pl. a 27. és a 28. ábrán bemutatottak. Ezekben az esetekben *az erős kauzalitás feltétele globálisan sérül.*

**8.2.1. lemma:** Legyen az  $(M, g_{ab})$  téridő erősen kauzális és  $K \subset M$  a téridő-sokaság kompakt részhalmaza. Ekkor minden, teljes egészében  $K$ -ban futó  $\lambda$  kauzális görbének van múltbeli és jövőbeli végpontja  $K$ -ban.

Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a  $t$  görbe-paraméter  $-\infty$ -tól  $+\infty$ -ig fut. Legyen  $\{t_i\}$  egy növekvő, végtelenbe divergáló számsorozat és legyen  $p_i = \lambda(t_i)$ . Mivel  $\{p_i\}$  pontsorozat a  $K$  kompakt halmazban, ezért a Bolzano<sup>84</sup>-Weierstrass<sup>85</sup>-tétel (**A.9. tétel**) értelmében létezik a sorozatnak  $p \in K$  torlódási pontja. Tegyük fel, hogy találhatnánk a  $p$  pontnak olyan  $O$  környezetét, amelyhez nem létezik olyan  $t_0 \in \mathbb{R}$ , hogy  $\lambda(t) \in O$  minden  $t > t_0$  esetén. Akkor azonban ennek teljessé válnia kell bármely  $V \subset O$  nyílt környezetre is. Ez azt jelenti, hogy  $\lambda$  bármely ilyen  $V$  környezetbe több, mint egyszer belép, hiszen a  $\{\lambda(t_i)\}$  sorozat végtelen sok pontja benne van  $V$ -ben, de  $\lambda(t)$  sosem marad  $V$ -ben, ahogy  $t$  nő. Ez azonban ellentmond annak, hogy a téridő erősen kauzális. Ez akkor azt kell jelentse, hogy  $\lambda$ -nak a  $p$  pont jövőbeli végpontja. Hasonlóan láthatjuk be a  $q$  múltbeli végpont létezését.

**Megjegyzés:** Az erős kauzalitás fogalmából következik, hogy ha a téridő valamely  $p$  pontjában, azaz *lokálisan sérül csak az erős kauzalitás feltétele*, akkor az azt jelenti, hogy vannak olyan kauzális görbék, amelyek a  $p$  pont környezetében tetszőlegesen közel kerülnek ahhoz, hogy metsszék egymást. Ilyen esetet mutat a 29. ábra, amikor az erős kauzalitás feltétele a  $p$  pontban sérül. Ilyenkor a metrika kicsiny perturbációja is elegendő lehet ahhoz, hogy a „metszés” bekövetkezzen és zárt kauzális görbék jelenjenek meg. Ha a téridő kauzális szerkezete ennyire „instabil” a metrika perturbációival szemben, akkor azt a téridőt sem tekinthetjük fizikainak. Az ilyen eseteket az erős kauzalitás feltétele nem mindig zárja ki, a 29. ábrán bemutatott példa kivétel. A fenti értelemben instabil kauzális szerkezetű, de az erős kauzalitás feltételét kielégítő téridők kizárására szolgál a stabil kauzalitás feltétele.

2. **A stabil kauzalitás feltétele (stable causality condition):** Az  $(M, g_{ab})$  téridőt **stabilan kauzálisnak** nevezzük, ha létezik olyan folytonos, el nem tűnő, időszerű  $t^a$  vektormező, hogy az  $(M, \tilde{g}_{ab} = g_{ab} - t_a t_b)$  téridőben nincsenek zárt kauzális görbék.

**Megjegyzés:** Ez a feltétel kizárja, hogy perturbációk hatására zárt kauzális görbék keletkezzenek. A stabil kauzalitás feltétele kizárja a fizikai téridők közül az olyan téridőket, amelyek „annak a határán vannak”, hogy „rossz” kauzális szerkezetet mutassanak.

<sup>84</sup>Bernard Bolzano (Bernardus Placidus Gonzal Johann Nepomuk Bolzano), cseh matematikus, filozófus, logikatanár, teológus és katolikus pap, 1781-1848.

<sup>85</sup>Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, német matematikus, 1815-1897.

**Megjegyzés:** A tételben szereplő  $\tilde{g}_{ab} = g_{ab} - t_a t_b$  metrikáról érdemes az alábbiakat elmondani.

- $\tilde{g}_{ab}$  szintén Lorentz-szignatúrájú.
- A  $\tilde{g}_{ab}$  metrika szerinti fénykúp szigorúan nagyobb, mint a  $g_{ab}$  metrika szerinti: minden olyan vektor, amely a  $g_{ab}$  metrika szerint időszerű vagy null-vektor, a  $\tilde{g}_{ab}$  metrika szerint időszerű vektor.

Legyen  $k^a$  null-vektormező a  $g_{ab}$  metrika szerint, azaz  $g_{ab}k^a k^b = 0$ . Ekkor  $\tilde{g}_{ab}k^a k^b = -(t_a k^a)^2 < 0$ , hiszen  $t_a k^a = g_{ab}t^b k^b \neq 0$ , mert  $t^a$  időszerű. Ez azt jelenti, hogy  $k^a$  a  $\tilde{g}_{ab}$  metrika szerint időszerű vektor. Ha  $v^a$  időszerű vektor a  $g_{ab}$  szerint, akkor  $\tilde{g}_{ab}v^a v^b = g_{ab}v^a v^b - (t_a v^a)^2 < 0$ , mert két negatív szám összege. A  $g_{ab}$  szerint időszerű vektorok a  $\tilde{g}_{ab}$  metrika szerint is időszerű vektorok.

Szóhasználat nélkül, a  $\tilde{g}_{ab}$  metrika tágabbra „nyitotta” a  $g_{ab}$  metrika szerinti fénykúpokat a téridő minden pontjában. *A stabil kauzalitás feltételét teljesítő téridők ezért olyanok, hogy a fénykúpok a téridő minden pontjában „enyhén” kinyithatók anélkül, hogy zárt kauzális görbék keletkeznének. A stabil kauzalitás így „egymástól alig különböző”, azaz csak a fénykúpok nyílásszögében alig különböző téridők átlagos tulajdonságaként van értelmezve.*

**8.2.2. tétel:** Az  $(M, g_{ab})$  téridő akkor és csak akkor stabilan kauzális, ha létezik olyan  $f$  differenciálható függvény  $M$ -en, hogy  $\nabla^a f$  múltirányú, időszerű vektormező.

Először belátjuk, hogy ha létezik a tételben szereplő  $f$  függvény, akkor a téridő stabilan kauzális. Legyen  $\lambda$  tetszőleges  $v^a$  érintővektormezővel jellemzett jövőirányú (időszerű) görbe. Ekkor  $g_{ab}v^a \nabla^b f > 0$ , mert egy jövőirányú és egy múltirányú időszerű vektor skalárszorzata. (A  $\lambda$  tetszőleges pontjában bevezethetünk olyan lokális Minkowski-koordinátákat,  $x^0$  a  $v^a$  integrálgörbéjének affin paramétere legyen. A megfelelő koordinátabázisban  $(v^\mu) = (v^0, \vec{0})$  és  $\nabla^a f \equiv w^a$  komponensei  $(w^\mu) = (w^0, \vec{w})$ , ahol  $v^0 > 0$  és  $w^0 < 0$ . Ezért  $g_{ab}v^a \nabla^b f = \eta_{\mu\nu}v^\mu w^\nu = -v^0 w^0 > 0$ .) Ez viszont azt jelenti, hogy  $f$  szigorúan monoton növekvő függvénye az affin paraméternek  $\lambda$  mentén, s miután  $f$  nem veheti fel mégegyszer ugyanazt az értéket, ezért a  $\lambda$  görbe nem lehet zárt az  $(M, g_{ab})$  téridőben. Legyen  $t^a = \nabla^a f$  és legyen  $\tilde{g}_{ab} = g_{ab} - t_a t_b$ , a  $\tilde{g}_{ab}$  metrika inverze pedig akkor

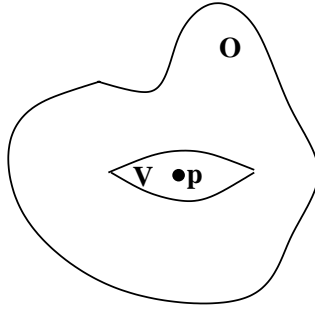
$$\tilde{g}^{ab} = g^{ab} + \frac{t^a t^b}{1 - t_c t^c}, \quad (8.2.1.)$$

ahol az indexek fel- és lehúzása  $g^{ab}$ -vel és  $g_{ab}$ -vel történik. Ekkor a

$$\tilde{g}^{ab}(\nabla_a f)(\nabla_b f) = g^{ab}t_a t_b + \frac{(t_a t^a)^2}{1 - t_c t^c} = t_a t^a + \frac{(t_a t^a)^2}{1 - t_c t^c} = \frac{t_a t^a}{1 - t_c t^c} < 0 \quad (8.2.2.)$$

egyenlőtlenség adódik, ami azt jelenti, hogy  $\tilde{g}^{ab}(\nabla_b f)$  időszerű vektor a  $\tilde{g}_{ab}$  metrika szerint. Tetszőleges  $\lambda$  időszerű görbét választva az  $(M, \tilde{g}_{ab})$ -ben, korábbi gondolatmenetünkhöz hasonlóan tudjuk belátni, hogy  $f$  szigorúan monoton változik a görbe mentén, úgyhogy  $\lambda$  nem lehet zárt görbe.

A fordított irányú állítást azáltal lehet bizonyítani [2], hogy szerkesztünk a tételben megkövetelt tulajdonságú  $f$  függvényt, ha tudjuk, hogy  $(M, g_{ab})$  stabilan kauzális. Ilyen függvényre



30. ábra. A  $p$  pont  $V \subset O$  környezete olyan, hogy minden jövőirányú, kauzális görbe mentén az  $f$  időfüggvény értéke a  $V$ -be történő belépéskor kisebb, mint a  $V$ -ból történő kilépéskor.

a következőképpen találunk ígéretes jelöltet: Felhasználva, hogy  $M$  parakompakt, meg lehet mutatni, hogy mindig létezik olyan folytonos  $\mu$  térfogati mérték, amely szerint a teljes téridő-sokaság térfogata véges,  $\mu[M] < \infty$ . Értelmezzük az  $F(p)$  függvényt, mint tetszőleges  $p \in M$  pont kronológikus múltjának a térfogatát,

$$F(p) = \mu[I^-(p)]. \quad (8.2.3.)$$

Ha  $p$  végigfut egy jövőirányú, időszerű görbe mentén, akkor  $F(p)$  szigorúan monoton nő, úgyhogy  $F$  alkalmas jelölt a globális  $f$  időfüggvény szerepére. Mégsem lehet azonban  $f$ -fel azonosítani, mert  $F(p)$  nem szükségképpen folytonos. Meg lehet azonban mutatni, hogy ha  $F$ -et átlagoljuk az egymástól alig különböző, azaz a fénykúpok nyílásszögében alig különböző téridőkre, akkor folytonos függvényt kaphatunk belőle, ami további „simitással” differenciálhatóvá tehető, és az így kapott függvényt lehet  $f$ -fel azonosítani.

**Következmény:** A stabil kauzalitásból következik az erős kauzalitás.

Legyen  $f$  az  $M$ -en értelmezett globális időfüggvény. Idézzük fel, hogy  $f$  gradiense múltirányú, időszerű vektormező. Ezért tetszőleges  $p \in M$  ponthoz, annak tetszőleges  $O$  nyílt környezetében választhatunk a  $p$  pontot tartalmazó olyan alakú  $V \subset O$  nyílt környezetet, amely a következő tulajdonságú: az  $f$  értéke bármely jövőirányú, kauzális görbe mentén a  $V$  környezetből történő kilépéskor nagyobb, mint  $f$  értéke bármely jövőirányú, kauzális görbe mentén a  $V$  környezetbe történő belépéskor (ld. a 30. ábrát). Mivel ekkor  $f$  növekszik minden jövőirányú, kauzális görbe mentén, azért egyetlen kauzális görbe sem léphet be kétszer  $V$ -be.

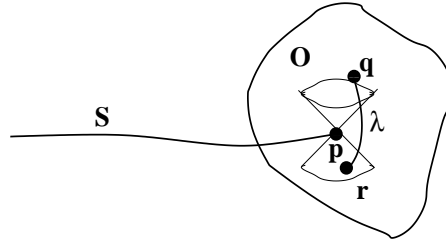
## 8.3. A függőségi tartományok, Cauchy-felület és Cauchy-horizontok

### 8.3.1. A függőségi tartományok

Legyen  $S \subset M$  zárt, akronális halmaz.

A téridő kauzális szerkezetét mélyebben megértjük, ha az alábbi kérdésekre is találunk választ:





31. ábra. A zárt, akronális  $S$  halmaz  $\text{edge}(S)$  pereméhez tartozó  $p \in \text{edge}(S)$  pont és  $O$  környezetének szemléltetése, ahol  $q \in I^+(p) \cap O$ ,  $r \in I^-(p) \cap O$  és  $\lambda \subset O$  a  $r$ -ből  $q$ -ba futó időszerű görbe, amely nem metszi  $S$ -et.

- Mi azon események halmaza, amelyeket az  $S$  halmaz eseményei „teljesen meghatároznak”? (Alább pontosítjuk, hogy mit értünk azon, hogy  $S$  eseményei más eseményeket „teljesen meghatároznak.”)
- Milyen tulajdonságú az a téridő-tartomány, amelyben minden eseményt valamely  $S$  halmaz eseményei „meghatároznak”?

Mielőtt ezen kérdések tárgyalására rátérnénk, a zárt akronális halmazok „szélének” tulajdonságaival foglalkozunk.

**Definíció:** A zárt, akronális  $S$  halmaz **peremén** ( $\text{edge}$ ) azt az  $\text{edge}(S)$  halmazt értjük, amely a következő tulajdonságú (ld. a 31. ábrát):  $\text{edge}(S)$  mindazon  $p \in S$  pontok halmaza, amelyeknek tetszőleges  $O \subset M$  környezete tartalmaz

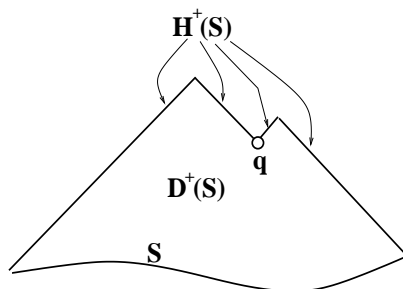
1. olyan  $q \in O$  pontot, amely benne van  $p$  kronológikus jövőjében, azaz amelyre  $q \in I^+(p)$ ;
2. olyan  $r \in O$  pontot, amely benne van  $p$  kronológikus múltjában, azaz amelyre  $r \in I^-(p)$ ;
3. továbbá olyan  $r$ -ből  $q$ -ba futó  $\lambda \subset O$  időszerű görbét, ami nem metszi  $S$ -et, azaz amelyre  $\lambda \cap S = \emptyset$ .

**Definíció:** Az olyan  $S$  zárt, akronális halmazt, amelynek pereme  $\text{edge}(S) = \emptyset$  szokás perem nélküli halmaznak vagy másképpen a téridő **szeletének** (slice) nevezni.

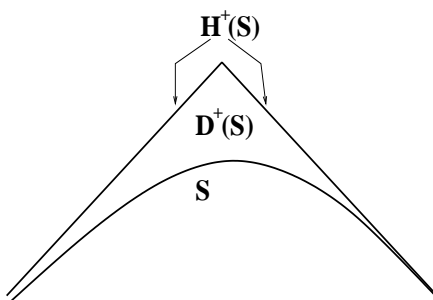
**8.3.1. tétel:** Legyen  $S$  olyan (nem üres) zárt, akronális halmaz, amelynek pereme üres halmaz,  $\text{edge}(S) = \emptyset$ . Ekkor  $S$  3-dimenziós,  $M$ -be beágyazott, folytonos részsokaság.

A bizonyítás a **8.1.3. tétel** bizonyításához hasonlóan történhet.

**Definíció:** Az  $S$  zárt, akronális halmaz  $D^+(S)$  **jövőbeli függőségi tartománya** (future domain of dependence) azon  $p \in M$  pontok halmaza, amelyeken áthaladó valamennyi múltba ki nem terjeszthető kauzális görbe metszi  $S$ -et.



32. ábra. Példa az  $S$  zárt, akronális halmaz  $D^+(S)$  jövőbeli függőségi tartományára az  $(M', \eta_{ab}) = (M \setminus q, \eta_{ab})$  téridőben, ahol  $M$  a Minkowski-téridő az  $\eta_{ab}$  Minkowski-metrikával. A jövőbeli Cauchy-horizontot  $H^+(S)$  jelöli.



33. ábra. Példa az  $S$  zárt, akronális halmaz  $D^+(S)$  jövőbeli függőségi tartományára a Minkowski-téridőben. Az  $S$  halmaz az ábra jobb oldalán „egzaktul null”, a bal oldalán „aszimptotikusan null”. A jövőbeli Cauchy-horizontot  $H^+(S)$  jelöli; az  $S$  halmaz pereme üres halmaz, de  $H^+(S) \cap S \neq \emptyset$ .

**Állítás:** Mindig fennáll az  $S \subset D^+(S) \subset J^+(S)$  tartalmazási reláció. Továbbá, mivel  $S$  akronális, azért  $D^+(S) \cap I^-(S) = \emptyset$ .

A 32. és a 33. ábrákon láthatunk példákat jövőbeli függőségi tartományokra.

**Megjegyzés:** A jövőbeli függőségi tartomány fizikai jelentősége a következőkben áll: (a) Mivel semmilyen jel nem terjedhet és semmilyen részecske sem mozoghat gyorsabban a vákuumbeli fénysebességnél, azért minden  $p \in D^+(S)$ -be küldött jel szükségszerűen regisztrálva kellett, hogy legyen  $S$ -ben. Ezért, ha megfelelő információnk van arról, hogy mik voltak a „kezdeti feltételek”  $S$ -en, akkor előrejelezhetjük, hogy mi történik  $p \in D^+(S)$ -ben. (b) Másrészt, ha  $p \in I^+(S)$ , de  $p \notin D^+(S)$ , akkor érkezhet jel  $p$ -be anélkül, hogy áthaladna  $S$ -en. Utóbbi esetben a kezdeti feltételek ismerete  $S$ -en lehet, hogy nem elegendő annak a meghatározásához, hogy mi történik  $p$  pontban. A hiperbolikus hullámegyenletek megoldásainak terjedése igazolja ezeket a várakozásokat.

**Definíció:** Az  $S$  zárt, akronális halmaz  $D^-(S)$  **múltbeli függőségi tartománya** (past domain of dependence) azon  $p \in M$  pontok halmaza, amelyeken áthaladó valamennyi jövőbe nem kiterjeszthető, kauzális görbe metszi  $S$ -et.

**Megjegyzés:** Az  $S$ -ben uralkodó kezdeti feltételekből vissza tudunk következtetni a tetszőleges  $p \in D^-(S)$  pontban érvényes fizikai feltételekre.

**Definíció:** Az  $S$  zárt, akronális halmaz jövőbeli és múltbeli függőségi tartományainak egyesítését az  $S$  halmaz  $D(S)$  **teljes függőségi tartományának** (total domain of dependence) nevezzük:

$$D(S) = D^+(S) \cup D^-(S). \quad (8.3.1.)$$

**Megjegyzés:** A  $D(S)$  teljes függőségi tartomány mindazon  $p$  események összességét jelenti, amelyek minden fizikai feltételét meg kell, hogy határozza az  $S$  halmazon érvényes feltételek ismerete.

### 8.3.2. A Cauchy-felület

**Definíció:** **Cauchy<sup>86</sup>-felületnek** nevezzük az olyan  $\Sigma$  zárt, akronális halmazt, amelynek teljes függőségi tartománya a teljes  $M$  téridő, azaz amelyre  $D(\Sigma) = M$ .

**Állítás:** Ha  $\Sigma$  Cauchy-felület, akkor a pereme üres halmaz.

Tegyük fel, hogy az  $\text{edge}(\Sigma)$  perem nem üres halmaz és legyen  $p \in \text{edge}(\Sigma)$ . Ekkor létezik  $p$ -nek olyan  $O$  környezete, amelyben van olyan  $r \in I^+(p) \cap O$  pont, amely elérhető valamely  $q \in I^-(p) \cap O$  pontból  $O$ -ban futó, de  $\Sigma$ -t nem metsző  $\lambda$  időszerű görbe mentén. Ez viszont ellentmondás, mert  $\Sigma$  Cauchy-felület, így  $r \in D(\Sigma)$ , és akkor minden  $r$ -be érkező (múltba ki nem terjeszthető) kauzális görbének át kell metszenie  $\Sigma$ -t. Az  $\text{edge}(\Sigma)$  perem-halmaznak tehát üresnek kell lennie.

---

<sup>86</sup>Augustin-Louis Cauchy báró, francia matematikus, 1789-1857

**Következmény:** Az előző állításból következik a **8.3.1. tétel** alapján, hogy  $\Sigma$  3-dimenziós,  $M$ -be beágyazott, folytonos részsokaság. Ez indokolja a Cauchy-felület elnevezést.

**Definíció:** Az  $(M, g_{ab})$  téridőt **globálisan hiperbolikusnak** nevezzük, ha létezik benne egy  $\Sigma$  Cauchy-felület.

**Megjegyzés:** Mivel a  $\Sigma$  Cauchy-felület akronális, azért úgy tekinthetjük, hogy a **Cauchy-felület a Világegyetem egy időpillanatát testesíti meg. Globálisan hiperbolikus téridőben a Világegyetem teljes jövője előrejelezhető és a teljes múltja visszakövethető, ha ismerjük a  $\Sigma$  Cauchy-felületen az általa képviselt pillanathoz tartozó feltételeket.** Ezzel ellentétben nem globálisan hiperbolikus téridő esetében hiába ismerjük kimerítően az egy adott időpillanathoz tartozó feltételeket, ez az ismeret mégsem elegendő, hogy a Világegyetem teljes múltját és jövőjét meghatározzuk. Ezért jó okunk van feltételezni, hogy **minden fizikailag realiztikus téridő globálisan hiperbolikus.**

Az  $S$  zárt, akronális halmaz jövőbeli függőségi tartományának lezártját jellemzi az alábbi állítás.

**8.3.2. tétel:** A  $p \in M$  pont akkor és csak akkor pontja az  $S$  zárt, akronális halmaz jövőbeli függőségi tartománya  $\overline{D^+(S)}$  lezártjának, azaz  $p \in \overline{D^+(S)}$ , ha minden  $p$ -n áthaladó, múltba ki nem terjeszthető, időszerű görbe áthalad  $S$ -en.

Ha létezik egy múltba ki nem terjeszthető, időszerű görbe, amely áthalad  $p$ -n és nem metszi  $S$ -et, akkor létezik a  $p$  pontnak olyan  $O$  környezete is, amelyben minden pont hasonló tulajdonságú. Ekkor azonban  $O$  nem része a  $D^+(S)$  függőségi tartománynak,  $O \cap D^+(S) = \emptyset$ , és akkor  $p \notin \overline{D^+(S)}$ , mert  $D^+(S) \subset \overline{D^+(S)}$ .

Fordítva, tegyük fel, hogy minden  $p$ -ből induló, múltba ki nem terjeszthető, időszerű görbe metszi  $S$ -et. Ekkor vagy  $p \in S \subset D^+(S) \subset \overline{D^+(S)}$ , vagy  $p \in I^+(S)$ . Ha az utóbbi a helyzet, akkor legyen  $q \in I^-(p) \cap I^+(S)$  és tegyük fel, hogy van egy olyan  $q$ -ből induló, múltba ki nem terjeszthető, kauzális  $\lambda$  görbe, amely nem metszi  $S$ -et. Ekkor két eset lehetséges:

1.  $\lambda$  teljes egészében  $I^+(S)$ -ben marad,  $\lambda \subset I^+(S)$ . A **8.1.4. lemma** szerint tudunk olyan  $p$ -ből induló, időszerű  $\gamma$  görbét találni, amelyre  $\gamma \subset I^+(\lambda) \subset I^+(S)$ .
2.  $\lambda$  metszi  $I^+(S)$ -et valamely  $r \notin S$  pontban. Ekkor a **8.1.2. tétel** következménye értelmében találhatunk  $p$ -ből  $r$ -be menő, időszerű görbét, amelyet aztán tetszőlegesen kiterjeszthetünk a múltba.

Végül tehát mindkét esetben találtunk olyan múltba ki nem terjeszthető,  $p$ -ből induló, időszerű görbét, amely nem metszi  $S$ -et. Ez azonban ellentmondás. Így minden  $q \in I^-(p) \cap I^+(S)$  pontból kiinduló, múltba ki nem terjeszthető, kauzális görbének metszenie kell  $S$ -et, de akkor minden  $q \in I^-(p) \cap I^+(S)$  pontra igaz, hogy  $q \in \overline{D^+(S)}$ . A  $p$  pontot tartalmazó minden nyílt halmaz belemetsz  $I^-(p) \cap I^+(S)$ -be, tehát  $p \in \overline{D^+(S)}$ .

**8.3.3. lemma:** Teljesülnek az alábbi relációk:

$$\begin{aligned} \text{int}[D^+(S)] &= I^-[D^+(S)] \cap I^+(S), \\ \text{int}[D(S)] &= I^-[D^+(S)] \cap I^+[D^-(S)]. \end{aligned} \tag{8.3.2.}$$

**Megjegyzés:** A Cauchy-felület definíciójából következik, hogy ha  $\Sigma$  Cauchy-felület, akkor minden ki nem terjeszthető kauzális görbe metszi  $\Sigma$ -t. Ennél azonban erősebb állítás is igaz:

**8.3.4. tétel:** Legyen  $\Sigma$  Cauchy-felület és  $\lambda$  nem kiterjeszthető, kauzális görbe. Ekkor  $\lambda$  metszi  $\Sigma$ -t,  $I^+(\Sigma)$ -t és  $I^-(\Sigma)$ -t.

Tegyük fel, hogy  $\lambda$  nem metszi  $I^-(\Sigma)$ -t. Ekkor a **8.1.4. lemma** alapján találhatunk olyan múltba ki nem terjeszthető, időszerű  $\gamma$  görbét, amelyre  $\gamma \subset I^+(\lambda) \subset I^+[\Sigma \cup I^+(\Sigma)] = I^+(\Sigma)$ . Ez a  $\gamma$  görbe még akkor sem metszi  $\Sigma$ -t, ha korlátlanul kiterjesztjük a jövőbe, mert az sértené  $\Sigma$  akronalitását. Másrészt, mivel minden kauzális görbe metszi  $\Sigma$ -t, azért ilyen  $\gamma$  görbe nincsen. Ez viszont azt jelenti, hogy  $\lambda$ -nak be kell lépnie  $I^-(\Sigma)$ -ba. Hasonlóan láthatjuk be, hogy  $\lambda$ -nak be kell lépnie  $I^+(\Sigma)$ -ba.

### 8.3.3. A Cauchy-horizontok

**Definíció:** A zárt, akronális  $S$  halmaz **jövőbeli Cauchy-horizontja:**

$$H^+(S) = \overline{D^+(S)} \setminus I^-[D^+(S)], \quad (8.3.3.)$$

azaz az  $S$  jövőbeli függőségi tartományának lezártjából kivonjuk (halmaz-műveleti értelemben) a jövőbeli függőségi tartomány kronológikus múltját. Hasonlóan definiáljuk  $S$  múltbeli Cauchy-horizontját, mint a

$$H^-(S) = \overline{D^-(S)} \setminus I^+[D^-(S)] \quad (8.3.4.)$$

halmazt.

A 32. és a 33. ábrán példákat mutatunk Cauchy-horizontokra.

**Állítás:** A  $H^+(S)$  Cauchy-horizont zárt, mert két zárt halmaz metszete,

$$H^+(S) = \overline{D^+(S)} \cap (M \setminus I^-[D^+(S)]). \quad (8.3.5.)$$

(Mivel  $I^-[D^+(S)]$  nyílt halmaz, azért a komplementere zárt.)

**Állítás:** A  $H^+(S)$  Cauchy-horizont akronális halmaz.

Érvényesek az alábbi relációk:

$$I^-[H^+(S)] \subset I^-[D^+(S)] = I^-[D^+(S)] \subset M \setminus H^+(S). \quad (8.3.6.)$$

Innen viszont következik, hogy  $I^-[H^+(S)] \cap H^+(S) = \emptyset$ , azaz  $H^+(S)$  akronális.

**Állítás:** Be lehet látni, hogy

$$H^+(S) = [I^+(S) \cup S] \cap \overset{\circ}{I}^-[D^+(S)], \quad (8.3.7.)$$

azaz a jövőbeli Cauchy-horizont a  $D^+(S)$  jövőbeli függőségi tartomány múltja határának az a darabja, amelyet  $S$  és annak kronológikus jövője metsz ki.

**8.3.5. tétel:** A jövőbeli Cauchy-horizont minden  $p \in H^+(S)$  pontja olyan  $\lambda$  null-geodetikuson fekszik, amely vagy nem terjeszthető ki a múltba, vagy van múltbeli végpontja  $S$  peremén.

A bizonyítás lényegében ugyanazon az ötleten alapul, mint a **8.1.6. tétel** bizonyítása. Legyen  $p \in H^+(S)$  olyan pont, amely nem pontja  $S$  peremének,  $p \notin \text{edge}(S)$ . Ekkor vagy (a)  $p \in I^+(S)$ , vagy (b)  $p \in S$ , de  $p \notin \text{edge}(S)$ . Először megmutatjuk, hogy mindkét esetben létezik  $H^+(S)$ -ben futó, nem triviális,  $p$ -én átmenő, múltirányú null-geodetikus.

Az (a) esetben  $p \in H^+(S)$  és  $p \in I^+(S)$  miatt  $p \notin I^-[D^+(S)]$ , de akkor minden  $q \in I^+(p)$ -hez létezik olyan  $q$ -ból induló, múltba ki nem terjeszthető, kauzális  $\lambda$  görbe, amely nem metszi  $S$ -et. Legyen  $\{q_n\}$  a  $q$ -hoz konvergáló pontsorozat  $I^+(p)$ -ben, és legyen  $\{\lambda_n\}$  a  $q_n$ -ból induló azon múltirányú, kauzális görbék sorozata, amelyek nem metszik  $S$ -et. Mivel  $p$  a határpontja a  $\{\lambda_n\}$  sorozatnak, azért a **8.1.5. tétel** értelmében létezik a  $\{\lambda_n\}$  sorozatnak  $p$ -n átmenő, múltba ki nem terjeszthető, kauzális  $\lambda$  határgörbéje. Tegyük most fel, hogy  $\lambda$  belép az  $I^+(S) \cap I^-[D^+(S)] \subset D^+(S)$  nyílt halmazba. Akkor elég nagy  $n$  esetén lennének olyan  $\lambda_n$  görbék, amelyek szintén belépnének oda. Ez viszont ellentmondás, mert  $\lambda_n \cap D^+(S) = \emptyset$  kell legyen, hiszen egyetlen  $\lambda_n$  sem metszi  $S$ -et. Tehát  $\lambda$  nem lép be  $I^+(S) \cap I^-[D^+(S)]$ -be, de akkor  $I^-[D^+(S)]$ -be sem. Másrészt viszont  $I^-(p) \subset I^-[D^+(S)] = I^-[D^+(S)]$ , úgyhogy  $\lambda$  nem léphet be  $I^-(p)$ -be sem. Tehát  $\lambda$  olyan múltirányú, kauzális görbe  $I^+(S)$ -ben, amely  $p$ -ból indul és nem lép be  $I^-(p)$ -be. Ekkor a **8.1.2. tétel** következménye értelmében,  $\lambda$ -nak null-geodetikusként kell lennie  $I^+(S)$ -ben. Továbbá, ha lenne olyan múltirányú, időszerű görbe, ami  $\lambda$ -nak  $I^+(S)$ -beli szegmense valamely  $q$  pontjából indul, azaz  $q \in \lambda \cap I^+(S)$  pontból és nem metszi  $S$ -et, akkor tudnánk ugyanilyen tulajdonságú  $p$ -ból induló, múltirányú, időszerű görbét is szerkeszteni. Ez azonban nem lehetséges, mert  $p \in D^+(S)$  és akkor a **8.3.2. tétel** értelmében minden  $p$ -ból induló, múltba ki nem terjeszthető, időszerű görbének metszenie kell  $S$ -t, ill. ekkor a  $\lambda \cap I^+(S)$  görbeszegmens benne kell legyen  $D^+(S)$ -ben. Tehát,  $\lambda \cap I^+(S) \subset \overline{D^+(S)}$ , bár  $[\lambda \cap I^+(S)] \cap D^+(S) = \emptyset$ , úgyhogy  $\lambda \cap I^+(S) \subset H^+(S)$ . Összegezve, azt kaptuk tehát, hogy bármely  $p \in H^+(S) \cap I^+(S)$  pontból indítható egy nem triviális, múltirányú null-geodetikus, amelynek egy szegmense  $H^+(S)$ -ben van.

A (b) esetben a perem definícióját használhatjuk fel annak belátására, hogy tetszőleges  $p \in S$ ,  $p \notin \text{edge}(S)$  esetén léteznie kell a  $p$  pontot tartalmazó olyan  $O$  nyílt halmaznak, amelyben nincsen olyan  $q \in I^+(p) \cap O$ -ból induló, múltirányú, kauzális görbe, amely  $S$  átmetszése nélkül lépne be  $I^-(S) \cap O$ -ba. Ezután az (a) esethez hasonló érveléssel lehet belátni, hogy létezik  $p$ -ból induló, nem triviális múltirányú null-geodetikus, amely  $H^+(S)$ -ben fut.

Végül tegyük fel, hogy egy múltirányú  $\lambda$  null-geodetikus elhagyja  $H^+(S)$ -et, vagyis tegyük fel, hogy a  $\lambda$  görbe  $H^+(S)$ -ben futó szegmensének van  $r$  végpontja. Mivel  $H^+(S)$  zárt, ezért  $r \in H^+(S)$  kell legyen. Tegyük fel, hogy  $r \notin \text{edge}(S)$ . Ekkor viszont találhatunk  $r$ -ból induló,  $H^+(S)$ -ben futó, nem triviális, múltirányú  $\lambda'$  nullgeodetikus-szegmenst. Ha azonban  $\lambda'$  nem  $\lambda$  folytatása, akkor a **8.1.2. tétel** értelmében találhatnánk olyan időszerű görbét, amely a  $\lambda$  szegmens valamely pontját összekötné a  $\lambda'$  szegmens valamely pontjával. Ez azonban sértene  $H^+(S)$  akronalitását. Ezzel beláttuk, hogy ha  $\lambda$ -nak van végpontja, akkor az az  $\text{edge}(S)$  perem pontja kell legyen.

**Definíció:** Az  $S$  zárt, akronális halmaz teljes Cauchy-horizontja  $H(S) = H^+(S) \cup H^-(S)$ .

**8.3.6. tétel:** A teljes Cauchy-horizont a teljes függőségi tartomány határa:  $H(S) = \dot{D}(S)$ .

**Következmény:** Ha az  $M$  téridő összefüggő, akkor egy nem üres, zárt, akronális  $\Sigma$  halmaz akkor és csak akkor Cauchy-felület, ha a teljes Cauchy-horizontja üres halmaz, azaz  $H(\Sigma) = \emptyset$ .

Ha  $H(\Sigma) = \dot{D}(\Sigma) = \emptyset$ , akkor  $\overline{D(\Sigma)} = \text{int}[D(\Sigma)] = D(\Sigma)$ , úgyhogy  $D(\Sigma)$  egyszerre nyílt és zárt. Másrészt  $D(\Sigma) \supset \Sigma \neq \emptyset$ , és az  $M$  összefüggő, amelyben az egyedüli, egyszerre nyílt és zárt halmazok  $\emptyset$  és  $M$ , ezért  $D(\Sigma) = M$  kell legyen. Ez a gondolatsor oda-vissza érvényes.

**Megjegyzés:** A **8.3.6. tétel** fenti következménye alapján azt mondhatjuk, hogy  $H^\pm(S)$  azáltal, hogy mennyire nem üresek, azt mérik, hogy  $S$  mennyire tér el a Cauchy-felülettől.

**8.3.7. tétel:** Ha  $\Sigma$  zárt, akronális, perem nélküli halmaz, akkor  $\Sigma$  akkor és csak akkor Cauchy-felület, ha minden ki nem terjeszthető null-geodetikus metszi  $\Sigma$ -t, és belép  $I^+(\Sigma)$ -ba és  $I^-(\Sigma)$ -ba.

A tétel „csak akkor” állítása a **8.3.4. tétel** speciális esete. A tétel „akkor” állítása az alábbiak szerint bizonyítható. Megmutatjuk, hogy ha  $\Sigma$  nem Cauchy-felület, akkor van legalább egy olyan null-geodetikus, amely nem lép be  $I^+(\Sigma)$ -ba vagy  $I^-(\Sigma)$ -ba. Ha azonban  $\Sigma$  nem Cauchy-felület, akkor  $H^+(\Sigma)$ -nak és  $H^-(\Sigma)$ -nak legalább az egyike nem üres (kivéve, ha  $M$  nem összefüggő és  $\Sigma$  nem metsz bele  $M$  egyik komponensébe, amikor is az eredmény triviális). Legyen mondjuk  $H^+(\Sigma) \neq \emptyset$ . Ekkor a **8.3.5. tétel** értelmében létezik olyan  $\lambda$  a múltba ki nem terjeszthető null-geodetikus, amely végig  $H^+(\Sigma)$ -ban marad, mivel  $\Sigma$ -nak a pereme  $\text{edge}(\Sigma) = \emptyset$ . Így  $\lambda$  sosem lép be  $I^-(\Sigma)$ -ba. Ha ezt a  $\lambda$  null-geodetikust a végtelenségig kiterjesztjük a jövőbe, akkor sem léphet be  $I^-(\Sigma)$ -ba, mert akkor  $\Sigma$  nem lehetne akronális.

#### 8.3.4. A globálisan hiperbolikus téridő jellemzői

Először azt vizsgáljuk, hogy a globálisan hiperbolikus téridő eleget tesz-e a kauzalitási feltételeknek. Ha  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő, amelynek  $\Sigma$  a Cauchy-felülete, akkor nem létezhetnek zárt időszerű görbék  $M$ -ben. Ha létezne olyan zárt időszerű görbe, amely átmetszi  $\Sigma$ -t, az megsértené  $\Sigma$  akronalitását. Ha létezne zárt időszerű (vagy akár kauzális) görbe, amely nem metszi  $\Sigma$ -t, az megsértené a globális hiperbolicitást, mert a görbén körbe-körbe járva olyan ki nem terjeszthető, kauzális görbét definiálhatnánk, amely nem metszi  $\Sigma$ -t. Be fogjuk – némi előkészület után – látni, hogy a globálisan hiperbolikus téridő stabilan kauzális.

**8.3.8. lemma:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő, akkor  $(M, g_{ab})$  erősen kauzális.

Ha  $\Sigma$  a globálisan hiperbolikus téridő Cauchy-felülete, akkor teljesül, hogy  $M = I^+(\Sigma) \cup \Sigma \cup I^-(\Sigma)$ . Tegyük fel, hogy az erős kauzalitás megsérül valamely  $p \in I^+(\Sigma)$  pontban. Az erős kauzalitás definíciójából következik, hogy annak a  $p \in I^+(\Sigma)$  pontban történő sérülése esetén lehetséges a következő: találhatunk a  $p$  pontnak  $U \in I^+(\Sigma)$  konvex normál környezetét és abban a nyílt  $O_n \subset U$  halmazok olyan  $p$ -hez konvergáló sorozatát, hogy minden  $n$ -hez található legyen  $\lambda_n$  jövőirányú, időszerű görbe, amely  $O_n$ -ben kezdődik, elhagyja  $U$ -t, majd  $O_n$ -ben végződik. Ezen görbék határpontja  $p$ , úgyhogy a **8.1.5. lemma** szerint létezik a görbesorozat  $\lambda$  határgörbéje, amely áthalad  $p$ -n. Bár minden  $\lambda_n$  kiterjeszthető, a  $\lambda$  határgörbének jövőbe ki nem terjeszthetőnek kell lennie, ami vagy automatikusan így van, vagy  $\lambda$  zárt és akkor  $\lambda$  mentén körbe-körbe járva ki nem terjeszthetővé tehetjük. Mivel egyetlen  $\lambda_n$  sem léphet be  $I^-(\Sigma)$ -ba anélkül, hogy  $\Sigma$  akronalitása sérülne, azért  $\lambda$  sem léphet be  $I^-(\Sigma)$ -ba. Ez azonban ellentmond a **8.3.4. tétel**nek, amely szerint minden ki nem terjeszthető, kauzális görbének be kell lépnie  $I^-(\Sigma)$ -ba is. Tehát az erős kauzalitás nem sérülhet meg valamely  $p \in I^+(\Sigma)$  pontban. Hasonlóan belátható, hogy semelyik  $p \in I^-(\Sigma)$

pontban sem sérülhet az erős kauzalitás. Ha  $p \in \Sigma$ , akkor választhatjuk az  $\{O_n\}$  sorozatot úgy, hogy minden  $O_n$ -ből induló, jövőirányú, időszerű görbe  $I^+(\Sigma)$ -ban lépjen ki  $O_n$ -ből. Megint azt fogjuk találni, hogy a  $\lambda$  határgörbe nem lép be  $I^-(\Sigma)$ -ba, ami ellentmond a **8.3.4. tételnek**.

A továbbiak számára hasznos bevezetni azon kauzális görbék terét, amelyek a globálisan hiperbolikus téridőben összekötnek két pontot, és ezen görbék terén topológiát értelmezni.

**Definíció:** Legyen  $(M, g_{ab})$  erősen kauzális téridő, és  $p, q \in M$  pontok. Defináljuk a  $p$ -ből induló és  $q$ -ba érkező, jövőirányú, kauzális görbék halmazát:

$$C(p, q) = \{ \text{a } p\text{-ből } q\text{-ba futó, folytonos, jövőirányú, kauzális görbék} \}. \quad (8.3.8.)$$

Ha két görbe csak a parametrizálásban különbözik, akkor azokat azonosaknak tekintjük. Természetesen  $C(p, q)$  üres halmaz, ha  $q \notin J^+(p)$ .

**Definíció:**  $\mathcal{T}$  topológiát definiálunk a  $C(p, q)$  halmazon, amivel azt  $(C(p, q), \mathcal{T})$  topológikus térré tesszük:

1. Legyen  $U \subset M$  nyílt halmaz, és legyen  $O(U) \subset C(p, q)$  olyan, hogy mindazon  $p$ -ből  $q$ -ba futó, jövőirányú, kauzális görbéket tartalmazza, amelyek benne vannak  $U$ -ban, azaz

$$O(U) = \{ \lambda \in C(p, q) \mid \lambda \subset U \}. \quad (8.3.9.)$$

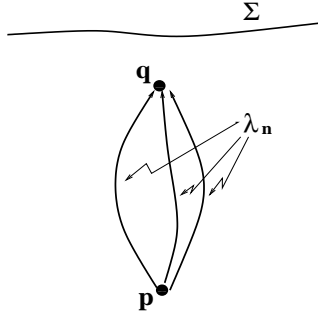
2. Az  $O \subset C(p, q)$  halmazt nyíltnek nevezzük, ha előállítható az 1. pont szerinti  $O(U)$  halmazok egyesítéseként, azaz ha  $O = \cup O(U)$ .

**Megjegyzés:** Mivel  $O(U_1) \cap O(U_2) = O(U_1 \cap U_2)$ , be lehet látni, hogy a fenti nyílt halmazokkal valóban topológiát értelmeztünk  $C(p, q)$ -n.

**Megjegyzés:** A  $(C(p, q), \mathcal{T})$  topológikus tér néhány jellemzője:

- Ha nincsenek zárt kauzális görbék a téridőben, akkor a  $\mathcal{T}$  topológia Hausdorff-féle, ami annak a következménye, hogy ha  $\lambda \in C(p, q)$  és  $\lambda' \in C(p, q)$  különböző görbék, akkor  $\lambda \subset M$  és  $\lambda' \subset M$  diszjunkt részhalmazok.
- Ha nincsenek zárt kauzális görbék a téridőben, akkor a  $\mathcal{T}$  topológia másodlagosan megszámlálható, ami azt jelenti, hogy létezik  $C(p, q)$  nyílt halmazainak olyan megszámlálható együttese, amelyek közül vett nyílt halmazok uniójaként bármely nyílt halmaz előállítható.
- A  $\mathcal{T}$  topológiában értelmezhető a konvergencia: akkor mondjuk, hogy  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ , ha bármely  $U \subset M$  nyílt halmazhoz, amely tartalmazza  $\lambda$ -t,  $\lambda \subset U$ , létezik olyan  $N$ , hogy minden  $n > N$  esetén  $\lambda_n \subset U$ . Ez a konvergencia-fogalom





34. ábra. A  $p$ -ből  $q$ -ba menő, jövőirányú, kauzális görbék  $\{\lambda_n\}$  sorozatának szemléltetése, ha  $\Sigma$  a Cauchy-felület és  $p, q \in D^-(\Sigma)$ .

erősen kauzális téridőben megegyezik a 8.1.3. fejezetben definiált kovergencia-fogalommal. Hasonlóan a 8.1.3. fejezetben definiált határgörbe-fogalom megegyezik a  $\mathcal{T}$  topológia szerinti torlódási pont fogalmával a  $(C(p, q), \mathcal{T})$  topológikus térben.

**8.3.9. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő és  $p, q \in M$ . Ekkor  $C(p, q)$  kompakt a fent definiált  $\mathcal{T}$  topológiára nézve.

Mivel  $C(p, q)$  a  $\mathcal{T}$  topológiával másodlagosan megszámlálható, azért az **A.9. tétel** (azaz a Bolzano-Weierstrass-tétel) értelmében elegendő azt megmutatni, hogy  $C(p, q)$  minden végtelen  $\{\lambda_n\}$  sorozatának (görbék sorozata) létezik  $\lambda$  torlódási pontja  $C(p, q)$ -ban (azaz létezik  $\lambda$  határgörbéje). Legyen  $\Sigma$  Cauchy-felület az  $(M, g_{ab})$  téridőben.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor  $p, q \in D^-(\Sigma)$ . A  $\{\lambda_n\} \subset C(p, q)$  sorozatot a 34. ábra szemlélteti. Ha gondolatban eltávolítjuk (átmenetileg) a  $q$  pontot, akkor  $\{\lambda_n\}$  jövőirányban nem kiterjeszthető,  $p$ -ből induló, kauzális görbék sorozatává válik. Ekkor a **8.1.5. lemma** értelmében létezik  $(M \setminus q)$ -ban a sorozatnak  $p$ -ből induló, jövőbe ki nem terjeszthető  $\lambda$  határgörbéje. Mivel egyik  $\lambda_n$  sem lép be  $I^+(\Sigma)$ -ba, azért  $\lambda$  sem léphet oda be. Ha most visszatesszük a  $q$  pontot, akkor  $M$ -ben  $\lambda$  vagy (a) marad jövőirányban ki nem terjeszthető, vagy (b)  $q$  a  $\lambda$  végpontja lesz. Az (a) eset azonban kiesik, mert a **8.3.5. tétel** értelmében minden jövőirányban nem kiterjeszthető, kauzális görbének globálisan hiperbolikus téridőben be kell lépnie  $I^+(\Sigma)$ -ba, már pedig  $\lambda$  ezt nem teszi. Ezért  $\lambda$  a  $q$  ponttal, mint határponttal, a keresett határgörbe.

A  $p, q \in D^-(\Sigma)$  esetben a keresett határgörbe az előző esethez hasonlóan szerkeszthető meg.

Marad még az az eset, amikor  $p \in D^-(\Sigma)$  és  $q \in I^+(\Sigma)$ . Ha adott a  $\{\lambda_n\} \in C(p, q)$  sorozat, akkor az előző szerkesztéssel kapunk egy jövőirányú  $\lambda$  határgörbét, amely  $p$ -ből indul és belép  $I^+(\Sigma)$ -ba. Válasszunk ezután egy  $r \in \lambda \cap I^+(\Sigma)$  pontot, majd válasszunk ki egy olyan  $\{\lambda'_n\}$  részsorozatot, hogy  $\lambda$   $p$  és  $r$  pontok közötti szegmensének minden pontja ennek a részsorozatnak konvergencia-pontja legyen. Fordítsuk most meg az eljárást, és tekintsük  $M \setminus p$ -ben a  $q$ -ból induló, múltirányban ki nem terjeszthető, kauzális  $\lambda'_n$  görbék sorozatát. A fentebbi érveléssel belátható, hogy a  $\{\lambda'_n\}$  sorozat határgörbéje belép  $I^-(\Sigma)$ -ba. Ekkor viszont  $\lambda'$ -nek át kell mennie  $r$ -en, mert egyrészt  $r$  konvergencia-pontja a  $\{\lambda'_n\}$  sorozatnak, másrészt, ha  $\lambda'$  nem terjedne ki  $r$ -ig, akkor  $\lambda' \subset I^+(r) \subset I^+(\Sigma)$  kellene teljesüljön, de akkor  $\lambda$  nem lépne be  $I^-(\Sigma)$ -ba. Ha tehát a  $\lambda$   $p$ -ből  $r$ -be menő szegmenséhez csatoljuk a  $\lambda'$   $r$ -ből  $q$ -ba menő szegmensét, akkor megkapjuk a keresett határgörbét.

A  $C(p, q)$  halmaz kompaktsága közvetlenül maga után vonja, hogy  $J^+(p) \cap$

$J^-(q)$  is kompakt az  $M$  topológiájára nézve:

**8.3.10. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő és  $p, q \in M$ . Ekkor  $J^+(p) \cap J^-(q)$  kompakt.

Az  $M$  parakompakt sokaság másodlagosan megszámlálható. Ekkor viszont az **A.9. tétel** (Bolzano-Weierstrass-tétel) értelmében elegendő megmutatnunk, hogy minden  $J^+(p) \cap J^-(q)$ -ból választott bármely  $\{r_n\}$  pontsorozatnak van  $r$  torlódási pontja. Ebből a célból válasszuk a  $p$ -ből  $q$ -ba menő kauzális görbék olyan  $\{\lambda_n\}$  sorozatát, hogy  $\lambda_n$  menjen át  $r_n$ -en. Mivel  $C(p, q)$  kompakt és elsődlegesen megszámlálható, azért az **A.9. tétel** értelmében a  $\{\lambda_n\}$  sorozatnak létezik olyan  $\{\lambda'_n\}$  részsorozata, amely konvergál egy  $\lambda \in C(p, q)$  görbéhez. Tekintsük most  $\lambda$ -t, mint  $M$  részhalmazát.  $\lambda \subset M$  kompakt halmaz, mert  $\mathbb{R}$  egy zárt intervallumának képe. Ekkor létezik  $\lambda$ -nak olyan  $U \subset M$  nyílt környezete, amelynek  $\overline{U}$  lezártja kompakt. — Fedjük le  $\lambda$ -t olyan  $O_\alpha$  nyílt környezetekkel, amelyekre  $\overline{O_\alpha}$  kompakt. Mivel  $\lambda$  kompakt, kiválaszthatunk egy  $\{O'_\alpha\}$  allefedést  $\{O_\alpha\}$ -ból, majd  $U$ -t ezen allefedés intervallumai egyesítésekként definiáljuk. — A konvergencia definíciójából következik, hogy az  $U$  nyílt környezethez létezik olyan  $N$ , hogy minden  $n > N$  esetén  $\lambda'_n \subset U$ . Így, mivel  $r'_n \in \lambda'_n$  és  $U \subset \overline{U}$ , azért az  $\{r'_n\}$  részsorozat benne van  $\overline{U}$ -ban. Mivel azonban  $\overline{U}$  kompakt, ezért van az  $\{r'_n\}$  részsorozatnak  $r \in \overline{U}$  torlódási pontja. Ha  $r$  nem lenne pontja  $\lambda$ -nak, az ellentmondana annak, hogy  $\lambda$  a  $\{\lambda'_n\}$  sorozat határgörbéje. Tehát  $r \in \lambda \subset J^+(p) \cap J^-(q)$ , úgyhogy  $r$  az  $\{r_n\}$  sorozat keresett torlódási pontja.

**Következmény:** Globálisan hiperbolikus téridőben  $J^+(p) \cap J^-(q)$  zárt.

**8.3.11. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő és  $K \subset M$  kompakt. Ekkor  $J^+(K)$  zárt.

Bármely  $S \subset M$  részhalmaz esetén fennállnak a következő relációk:  $I^+(S) \subset J^+(S) \subset \overline{I^+(S)}$ . A **8.3.11. tétel** értelmében ezért az  $M$  globálisan hiperbolikus téridő  $K \subset M$  kompakt részhalmaza esetén  $J^+(K) = \overline{I^+(K)}$ . Ebből következik, hogy  $\overline{I^+(K)} \subset J^+(K)$ , és ezért a **8.1.6. tétel** állítása szigorítható: minden  $p \in \overline{I^+(K)}$  pont összeköthető  $K$ -val egy múltirányú null-geodetikus mentén, amely  $I^+(K)$ -ban fut. Ezért a 23. ábrán mutatott helyzet nem állhat fenn globálisan hiperbolikus téridőben kompakt halmaz esetén.

**Definíció:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő, amelynek  $\Sigma$  a Cauchy-felülete. A Cauchy-felület jövőbeli függőségi tartományának bármely  $q \in D^+(\Sigma)$  pontjához definiáljuk a  $C(\Sigma, q)$  halmazt, mint a  $\Sigma$ -ból  $q$ -ba futó folytonos, jövőirányú, kauzális görbék halmazát. A  $C(\Sigma, q)$  halmazon ugyanúgy lehet topológiát értelmezni, mint a  $C(p, q)$  halmazon. A **8.3.9. tétel**hez hasonlóan belátható, hogy  $C(\Sigma, q)$  kompakt, és a **8.3.10. tétel** bizonyításához hasonlóan be lehet látni az alábbi tételt:

**8.3.12. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő a  $\Sigma$  Cauchy-felülettel és  $q \in D^+(\Sigma)$ . Ekkor  $J^+(\Sigma) \cap J^-(q)$  kompakt.

A bizonyítás a **8.3.10. tétel** bizonyításához hasonlóan történhet.

Végül két tétel következik a globálisan hiperbolikus téridő Cauchy-felületeinek topológiájáról és a globálisan hiperbolikus téridő kauzális szerkezetéről.

**8.3.13. tétel:** Ha  $\Sigma$  és  $\Sigma'$  Cauchy-felületek az  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridőben, akkor  $\Sigma$  és  $\Sigma'$  homeomorfak.

A **8.1.1. lemma** értelmében  $M$ -en létezik egy sima, sehol el nem tűnő, időszerű  $t^a$  vektormező. Mivel  $\Sigma$  és  $\Sigma'$  Cauchy-felületek, ezért  $t^a$  minden integrálgörbéjének pontosan egy metszéspontja kell legyen  $\Sigma$ -val és  $\Sigma'$ -vel is. Az a  $\phi : \Sigma \mapsto \Sigma'$  leképezés, amelyik úgy van definiálva, hogy az egyes integrálgörbék  $\Sigma$ -val való metszéspontját képezi le a  $\Sigma'$ -vel való metszéspontjukba, folytonos, kölcsönösen egyértelmű, folytonos inverzzel rendelkező leképezés, azaz a keresett homeomorfizmus.

**8.3.14. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő. Ekkor  $(M, g_{ab})$  stabilan kauzális. Továbbá, ekkor választható olyan  $f$  időfüggvény, amelyhez tartozó  $f = \text{áll.}$  felületek mind Cauchy-felületek. Tehát  $M$  Cauchy-felületekkel rétegezzhető (can be foliated), és  $M$  topológiája  $\mathbb{R} \times \Sigma$ , ahol  $\Sigma$  bármelyik Cauchy-felület lehet.

A bizonyítás vázlatosan a következőképpen történik. Mint a **8.2.2. tétel** bizonyítása során, most is bevezetjük a  $\mu$  térfogati mértéket úgy, hogy  $\mu(M) < \infty$  legyen. Ezután definiáljuk az

$$f^-(p) = \mu[I^-(p)] \quad (8.3.10.)$$

függvényt. Felhasználva, hogy bármely  $q \in M$  esetén  $J^+(q)$  és  $J^-(q)$  zárt, meg lehet mutatni, hogy  $f^-(p)$  folytonos. (Nincs szükség olyan átlagolásra, mint a **8.2.2. tétel** bizonyítása során.) Az  $f^-(p)$  tehát egy folytonos globális időfüggvényt szolgáltat, amely „simítással” differenciálható globális időfüggvénnyé tehető. Ez bizonyítja a stabil kauzalitást.

Definiáljuk továbbá az

$$f^+(p) = \mu[I^+(p)] \quad (8.3.11.)$$

és az

$$f(p) = \frac{f^-(p)}{f^+(p)} \quad (8.3.12.)$$

függvényeket. Ekkor  $f$  folytonos és minden  $f = \text{áll.}$  felület egy akronális halmaz.

Ezután azt kell még megmutatnunk, hogy minden ki nem terjeszthető, kauzális görbe minden  $f = \text{áll.}$  felületet pontosan egyszer metsz. A metszésnek akkor kell bekövetkeznie, amikor  $f^-(p)$  eltűnik minden múltba ki nem terjeszthető, kauzális görbe mentén, ill.  $f^+(p)$  eltűnik minden jövőbe nem kiterjeszthető, kauzális görbe mentén, mert ekkor  $f$  minden értéket fel fog venni a  $[0, \infty)$  intervallumban bármely ki nem terjeszthető, kauzális görbe mentén. Hogy ezt belássuk, tegyük fel, hogy  $\lambda$  egy  $q$ -ból induló, múltba ki nem terjeszthető, kauzális görbe, amelynek mentén  $f^-$  nem tart zérushoz a múltban. Ekkor léteznie kell olyan  $p$  pontnak, hogy  $p \in I^-(r)$  bármely  $r \in \lambda$  esetén. Innen az adódik, hogy  $\lambda \subset J^-(q) \cap J^+(p)$ . A  $J^-(q) \cap J^+(p)$  halmaz a **8.3.10. tétel** értelmében kompakt és a **8.3.8. tétel** értelmében pedig az erős kauzalitás feltétele teljesül, ezért a **8.2.1. lemma** értelmében a  $\lambda$  kauzális görbének van múltbeli végpontja  $J^-(q) \cap J^+(p)$ -ben. Ez viszont ellentmond annak, hogy  $\lambda$  nem terjeszthető ki a múltba. Tehát  $f^-$ -nak zérushoz kell tartania a múltban. Hasonló tulajdonsággal rendelkezik  $f^+$  a jövőben.

**Megjegyzés:** A globális hiperbolicitásnak másféle, ekvivalens definíciói is lehetségesek. Erre nézve ld. [1]-t.

## 9. Szingularitások

### 9.1. A szingularitások kérdésköre

Az Einstein-egyenletek olyan erősen szimmetrikus téridő-megoldásai, mint amilyenek a FLRW-téridő és a Schwarzschild-téridő, valódi fizikai szingularitást mutatnak. Joggal tehető fel a kérdés, hogy ezek a szingularitások csupán azért jelentek-e meg, mert magasfokú szimmetriával rendelkező megoldásokat kerestünk. Vajon, ha a szimmetria-követelményeken enyhítünk, akkor is mutatnak-e a kozmológiai, ill. az anyag teljes összeomlását modellező megoldások ilyen szingularitásokat. A szingularitási tételeknek, amelyekkel ebben a fejezetben meg fogunk ismerkedni, az a fő üzenete, hogy a szingularitás a kozmológiai megoldásoknak és az anyag teljes összeomlását leíró megoldásoknak általános jellemzője, nem pedig az esetleg „erőszakolt” szimmetria-feltevés következménye.

Az a sejtésünk, hogy téridő szingularitása közelében az általános relativitáselmélet nem marad érvényben, mert az a gravitáció és az anyag klasszikus (azaz nem kvantumfizikai) leírásán alapul. Az általános relativitáselmélet várhatóan akkor veszti érvényét, amikor a téridő görbülete  $\ell_P^{-2}$  nagyságrendűre nő, ahol  $\ell_P = (\hbar G/c^3)^{1/2} \approx 10^{-35}$  m a Planck-hossz. Bár a szingularitási tételekből nem következik, hogy a görbület korlátlanul nő, mégis azt sejtetik, hogy olyan feltételek jönnek létre, amikor a kvantum- és esetleg más effektusok fontos szerepet kezdenek játszani, és emiatt az általános relativitáselmélet érvényét veszti.

Bár speciális esetekben, mint a FLRW-téridő vagy a Schwarzschild-téridő esetében, elég nyilvánvaló, mit jelent a szingularitás, mégis rendkívül nehéz a szingularitás fogalmát általánosan definiálni. Az alábbiakban amellet fogunk érvelni, hogy a szingularitás kritériumaként azt tekinthetjük, hogy a téridőben vannak nem teljes időszerű geodetikusok és null-geodetikusok. Jóllehet, ez a kritérium is hagy maga után kívánnivalót.

A szingularitási tételek megfogalmazása két fő logikai lépésben történik.

- (A) A 3.5.3. fejezetben megmutattuk, hogy a téridő 2 pontját összekötő extrémális hosszúságú görbék geodetikusok. A téridőnek azonban lehet olyan geometriája, hogy a szomszédos geodetikusok összetartanak és valahol metszik egymást. Ezért előfordulhat, hogy 2 pontot összekötő geodetikus nem az extrémális hosszúságú. Most olyan feltételeket fogalmazunk meg, amikor 2 pontot összekötő időszerű geodetikus, vagy 3-dimenziós felületet és pontot összekötő időszerű geodetikus lokálisan nem maximális „hosszúságú” (nem jelenti a sajátidő maximumát), továbbá amikor egy null-geodetikus nem marad egy pont, vagy egy 2-dimenziós felület jövőjének a határán. Az Einstein-egyenletek felhasználásával, az energiaimpulzus-tenzor pozitivitását figyelembe véve, feltételeket fogalmazunk meg, hogy „elegendően hosszú” időszerű

geodetikus mikor nem maximális hosszúságú, ill. hogy „elegendően hosszú” null-geodetikus mikor nem marad meg egy pont, vagy egy 2-dimenziós felület múltjának vagy jövőjének a határán.

- (B) Másrészt, a kauzális görbék terének kompaktságából kiindulva megmutatjuk, hogy globálisan hiperbolikus téridőben léteznek maximális hosszúságú időszerű geodetikusok, ill. belátjuk, hogy globálisan hiperbolikus téridőben a null-geodetikusok a múlt és a jövő határain maradnak.

Az állítások (A) és (B) csoportjának ellentmondása vezet el a szingularitási tételekhez: meghatározott, de nagyon általános feltételek mellett kell, hogy létezzenek nem „elegendően hosszú” időszerű geodetikusok, ill. nem „elegendően hosszú” null-geodetikusok. Ez azt jelenti, hogy vannak nem teljes időszerű és a null-geodetikusok, ami pedig a szingularitás kritériuma.

## 9.2. Szingularitások és jellemzőik

Speciális szinguláris megoldások gondos analízise alapján alakult ki a szingularitásoknak az a jellemzése, amelyet alább ismertetünk.

Fontos tudatosítanunk, hogy a téridő szingularitásai alapvetően más jellegűek, mint amilyen szingularitásokkal esetleg más fizikai problémák kapcsán találkozhatunk. Utóbbiakban a szingularitás azt szokta jelenteni, hogy valamilyen fizikai mennyiség a tér vagy a téridő bizonyos pontjában vagy pontjaiban végtelenné válik, vagy valamilyen egyéb okból nincsen értelmezve. A téridő szingularitása ettől nagyon különbözik:

- A szingularitás nem egy „hely” a téridőben, azaz a szingularitás nem pontja a téridőnek. Az általános relativitáselméletben egyszerre keressük az  $M$  téridő-sokaságot és a rajta *mindenütt értelmezett*  $g_{ab}$  metrikát. Ebben a felfogásban egy esemény csak akkor van értelmezve, ha a sokaság-szerkezet és a metrika jól definiált körülötte. Ezért pl. a FLRW-téridő szingularitása, a Nagy Bumm, nem tekinthető a sokaság részének; ez sem nem egy hely, sem nem egy időpont. Hasonlóképpen a Schwarzschild-metrika  $r = 0$  szingularitása nem egy hely; a Schwarzschild-téridőhöz, mint sokasághoz csak az  $r > 0$  pontok tartoznak hozzá.

Meg kell jegyezni, hogy az FLRW-téridő és a Schwarzschild-téridő példája alapján az az ötlet életképesnek látszik, hogy egészítsük ki a téridő-sokaságot szinguláris határral, amelynek pontjai hozzátartoznak egy bővebb topológikus térhez, vagy akár egy határral rendelkező sokasághoz, bár a metrika ezen a határon nincsen értelmezve. Az említett két „egyszerű” példában ezt meg

is lehet tenni. Ennek ellenére egy szinguláris határ pontos matematikai definíciójának megadása komoly nehézségekbe ütközik, noha arra számos próbálkozás történt, amelyek eddig nem jártak eredménnyel (részletesebben ld. [1]).

- A görbületi tenzorból és annak deriváltjaiból képezett mennyiségek „felrobbanása” nem jellemzi kielégítően a szingularitást: részben azért, mert a szinguláris viselkedés lehet a „szerencsétlenül” választott koordinátarendszer használatának a következménye, másrészt azért, mert előfordulhat, hogy ezek a mennyiségek végesek maradnak és mégis van szingularitás. (További részletekért ld. [1].)

A szingularitás jellemzésére talán az tűnik messze a legkielégítőbb megoldásnak, ha azt a „lyukat” jellemezzük, amely a téridőben a szingularitás eltávolítása után keletkezik. Egy ilyen „lyuk” észrevehetővé kell hogy váljon azáltal, hogy lesznek geodetikusok, amelyek affin paraméterben mért hossza véges, pontosabban amelyek legalább egy irányban nem kiterjeszthetők, de az affin paraméterük (ebben az irányban) csak véges intervallumot fut be. Mi a szingularitást ilyen, *nem teljes geodetikus* létezésével fogjuk jellemezni.

**Definíció: Nem teljes geodetikuson** olyan, legalább egyik irányban nem kiterjeszthető geodetikust értünk, amelynek a „hossza” mégis az affin paraméter véges értékével jellemezhető.

**Definíció: A téridőt szingulárisnak nevezzük,** ha van benne legalább egy nem teljes geodetikus.

A téridő szingularitásait a következőképpen osztályozhatjuk:

1. **skalár-görbületi szingularitásról** beszélünk, ha a nem teljes geodetikus mentén a görbületi tenzorból és, ill. vagy annak deriváltjaiból polinomiálisan képezett skalár felrobban;
2. **párhuzamosan propagált görbületi szingularitásról** beszélünk, ha az előző pontban említett skalárok végesek maradnak, de a görbületi tenzor valamely komponense(i) vagy annak deriváltja(i) robban(nak) fel egy párhuzamosan eltoltt tetrad mentén;
3. és végül **nem görbületi szingularitásról** beszélünk, ha az előző két pontban említett mennyiségek végesek maradnak, de létezik nem teljes geodetikus.

A szingularitásnak nem teljes geodetikusok révén történő beazonosításával szemben több ellenvetést is meg lehet fogalmazni, noha még mindig ez a jellemzés látszik a legmegalapozottabbnak.

- Az egyik ellenvetés az, hogy így akkor is szinguláris téridőt kaphatunk, ha egy nem szinguláris téridőből elhagyunk egy pontot. Ez az ellenvetés azonban azzal kivédhető, hogy csak **nem kiterjeszthető téridőkre** szorítkozunk,

azaz olyan téridőkre, amelyek nem izometrikusak egy nem szinguláris téridő valamely részhalmazával.

- Komolyabb az az ellenvetés, hogy a téridő úgy is lehet geodetikusan nem teljes (amikor csak a térszerű geodetikuskok között van nem teljes), hogy ez a tulajdonsága olyan szingularitással hozható kapcsolatba, amelyet semmilyen megfigyelő vagy semmilyen fényjel sem tud soha elérni. (Erre vonatkozóan ld. a [1]-ban bemutatott példát.)
- Van olyan téridő is (ld. [1]), amely geodetikusan teljes mind az időszerű, mind a null- és a térszerű geodetikuskok tekintetében, viszont mégis léteznek benne olyan jövőbe ki nem terjeszthető, időszerű görbék, amelyek mentén a gyorsulás korlátos, és amelyek hossza véges. Ha egy rakétát elegendő, de véges üzemanyaggal ellátva ilyen pályára állítunk, akkor a benne ülő megfigyelő véges idő alatt meg fog szűnni létezni. További ellenpéldák is adhatók, amikor a téridő geodetikusan teljes, mégis vannak megfigyelők, akik léte véges (saját)idő alatt megszűnik. Az ilyen téridők az általunk elfogadott kritérium szerint mégsem számítanak szingulárisnak.

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy az a kritérium, hogy a téridő nem teljes az időszerű vagy a null-geodetikuskok tekintetében, nem általános jellemzője a szingularitásoknak; elegendő, de nem szükséges feltétele a szingularitásnak. Az ellenérvek dacára is abban biztosak lehetünk, hogy a geodetikusan nem teljességen alapuló kritérium elégséges feltétel. Az olyan téridőben, amelyben van nem teljes, időszerű vagy null-geodetikuskok, lehetséges az, hogy legalább egy szabadon eső részecske vagy foton véges „idő” (azaz az affin paraméter értékének véges intervallumán) belül fejezze be létét vagy, hogy léte véges idővel korábban kezdődött. Az ilyen téridőket tehát jogosan nevezzük szingulárisoknak. A geodetikusan nem teljesség az a tulajdonság, amellyel a téridők nagyon általános feltételek mellett mindig rendelkeznek a szingularitási tételek értelmében. Ha bizonyosak vagyunk abban, hogy egy téridőben van nem teljes időszerű geodetikuskok vagy nem teljes null-geodetikuskok, akkor szeretnénk többet tudni a szingularitás természetéről: hogy az görbületi vagy nem görbületi típusú. Erre vonatkozóan azonban a szingularitási tételek nem adnak semmilyen felvilágosítást; „csupán” a szingularitás létezését állítják.

### 9.3. Az időszerű geodetikuskok és a null-geodetikuskok kongruenciái

#### 9.3.1. Az időszerű geodetikuskok kongruenciái és deformációjuk

**Definíció:** Legyen  $O \subset M$  nyílt halmaz. **Görbék  $O$ -beli kongruenciáján** olyan görbe-családot értünk, amelyet az jellemez, hogy bármely  $p \in O$  ponton pontosan egy görbe halad át.

**Következmény:** Kongruencia érintővektorai egy vektormezőt határoznak meg  $O$ -ban, és fordítva, ha adott  $O$ -ban egy vektormező, akkor annak integrálgörbéi (pontosabban azok  $O$ -ba eső szegmensei) egy kongruenciát alkotnak (generálnak)  $O$ -ban.

**Definíció:** A kongruenciát **simának nevezzük**, ha a kongruenciát generáló vektormező sima.

Ebben a fejezetben az a célunk, hogy értelmezzük az időszerű geodetikusok és a null-geodetikusok kongruenciájának térfogati tágulását (expansion), nyírását (shear) és csavarodását (twist), majd pedig olyan egyenleteket vezessünk le, amelyek meghatározzák a tágulás, nyírás és csavarodás „sebességét”, ahogy haladunk a kongruenciákhoz tartozó görbék mentén. A kongruenciák deformációjának jellemzésére bevezetett fogalmak a rugalmas közegek deformációját jellemző hasonló mennyiségek megfelelői; a tágulásnak ott a relatív térfogatváltozás felel meg.

Tekintsük először sima, időszerű geodetikusok kongruenciáját. Legyenek a geodetikusok a  $\tau$  sajátidővel parametrizálva, úgyhogy a kongruenciához tartozó  $\xi^a$  érintővektor-mező  $\xi_a \xi^a = -1$  szerint van normálva. Mivel a normanégyszet kovariáns konstans, fennáll, hogy  $\xi^a \nabla_b \xi_a = 0$ . Ezért a  $B_{ab} = \nabla_b \xi_a$  tenzormező „ortogonális”  $\xi^a$ -ra, azaz térszerű:  $B_{ab} \xi^a = B_{ab} \xi^b = 0$ . A  $B_{ab}$  tenzormező fizikai jelentése az alábbiakból derül ki. Legyen  $\gamma_s(\tau)$  a kongruencián belüli geodetikusok egy egy-paraméteres alosztálya. Legyen továbbá  $\eta^a$  a kongruencia ezen alosztályán belüli, a  $\xi^a$ -ra ortogonális geodetikus eltérés vektora. Ez méri az alosztályhoz tartozó  $\gamma_s(\tau)$  geodetikusoknak valamely önkényesen kiválasztott  $\gamma_0(\tau)$  geodetikustól mért infinitezimális eltérését, úgyhogy

$$\mathcal{L}_\xi \eta^a = 0. \quad (9.3.1.)$$

Ebből következik, hogy  $[\xi, \eta]^a = \xi^b \nabla_b \eta^a - \eta^b \nabla_b \xi^a = 0$ , úgyhogy

$$\xi^b \nabla_b \eta^a = \eta^b \nabla_b \xi^a = B^a_b \eta^b. \quad (9.3.2.)$$

A  $B^a_b$  tenzormező tehát azt méri, hogy  $\eta^a$  mennyire nem párhuzamosan eltolt vektormező a  $\xi^a$  irányban.

A  $\gamma_0$  geodetikuson mozgó megfigyelő úgy látja, hogy a szomszédos  $\eta^a$  eltérésvektorú geodetikus meg van nyújtva vagy zsugorítva, el van csúsztatva és el is van forgatva hozzá képest, amint azt a  $B^a_b$  lineáris leképezés meghatározza. A  $B^a_b$  lineáris leképezéshez hasonlóval találkozunk az infinitezimális rugalmas deformáció leírása során, ahol  $\eta^a$ -nak az elmozdulás-vektormező felelt meg, a  $\xi^b \nabla_b \eta^a$  kifejezésnek pedig a közeg szomszédos pontjai elmozdulás-vektorainak a különbsége. A lineáris leképezés szimmetrikus részének a kiszemelt infinitezimális anyagdarabka valódi deformációjának tenzora felelt meg, amely felbontható volt tiszta térfogati deformációra és tiszta nyírásra; a lineáris leképezés antiszimmetrikus része pedig az infinitezimális anyagdarabka merevtestszerű elfordulását (az anyag „csavarodását”)



jellemezte. Most ugyanilyen módon bontjuk fel a  $B^a_b$  lineáris leképezést. Mivel  $B^a_b$  térszerű, először bevezetjük az érintőtér  $\xi^a$ -ra merőleges alterének vektorain értelmezett  $h_{ab}$  „térmérikát”,

$$h_{ab} = g_{ab} + \xi_a \xi_b, \quad (9.3.3.)$$

amelynek definíció szerint  $\xi^a$  irányú komponense zérus,  $h_{ab}\xi^a\xi^b = 0$ , továbbá  $(\xi - \eta)$ -komponensei is nullák,  $h_{ab}\xi^a\eta^b = 0$ . Ezért az érintőtér  $\xi^a$ -ra merőleges alterére vetítő projektor  $h^a_b = g^{ac}h_{cb}$ .

Legyen lokálisan  $v^a$  tetszőleges érintővektor. Ekkor a  $w^a = h^a_b v^b = g^{ac}h_{cb}v^b$  vektorról meg tudjuk mutatni, hogy merőleges  $\xi^a$ -ra, mert fennáll, hogy

$$g_{ab}w^a\xi^b = g_{ab}g^{ac}h_{cd}v^d\xi^b = h_{bd}v^d\xi^b = 0. \quad (9.3.4.)$$

Valóban, a  $v^d$  vektor felbontható a  $\xi^a$ -val párhuzamos  $v_{\parallel}^d = -(v^c\xi_c)\xi^d$  és arra merőleges  $v_{\perp}^d$  komponensekre, úgyhogy  $h_{bd}v^d\xi^b = h_{bd}v_{\parallel}^d\xi^b = -(v^c\xi_c)h_{bd}\xi^b\xi^d = 0$ .

Ezekután bontsuk fel a fentebb említett módon a (9.3.2.) lineáris leképezést,

$$B_{ab} = B_{(ab)} + B_{[ab]} = \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}, \quad (9.3.5.)$$

ahol

$$\theta = B^{ab}h_{ab} \quad (9.3.6.)$$

a kongruencia „relatív térfogatváltozását”, azaz térfogati tágulását, ill. zsugorodását (másképpen negatív tágulását),

$$\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3}\theta h_{ab} \quad (9.3.7.)$$

a kongruencia „nyírási deformációját”, azaz a szomszédos geodetikusok egymáson való „elcsúszását”,

$$\omega_{ab} = B_{[ab]} \quad (9.3.8.)$$

pedig a kongruencia elcsavarodását írja le.

**Állítás:** A kongruencia lokálisan akkor és csak akkor hiperfelület-ortogonális, ha  $\omega_{ab} = 0$  teljesül.

A  $\xi^a$  vektormező akkor és csak akkor hiperfelület ortogonális a Frobenius-tétel következménye értelmében, ha fennáll, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{[a}\nabla_b\xi_{c]} = \frac{1}{3!}[\xi_a\nabla_b\xi_c + \xi_b\nabla_c\xi_a + \xi_c\nabla_a\xi_b - \xi_c\nabla_b\xi_a - \xi_b\nabla_a\xi_c - \xi_a\nabla_c\xi_b] \\ &= \frac{1}{3!}[\xi_a(\nabla_b\xi_c - \nabla_c\xi_b) + \xi_b(\nabla_c\xi_a - \nabla_a\xi_c) + \xi_c(\nabla_a\xi_b - \nabla_b\xi_a)] \\ &= \frac{1}{3}(\xi_a\omega_{cb} + \xi_b\omega_{ac} + \xi_c\omega_{ba}), \end{aligned} \quad (9.3.9.)$$

mert  $\omega_{ab} = B_{[ab]} = \frac{1}{2}(B_{ab} - B_{ba}) = \frac{1}{2}(\nabla_b \xi_a - \nabla_a \xi_b)$ . A kapott egyenlőség viszont akkor és csak akkor áll fenn, ha lokálisan  $\omega_{ab} = 0$ .

**Állítás:** A nyírás és a csavarodás tenzora tisztán térszerű, azaz  $\sigma_{ab}\xi^b = \omega_{ab}\xi^b = 0$ .

Definíció szerint írhatjuk, hogy

$$\omega_{ab}\xi^b = \frac{1}{2}(\xi^b \nabla_b \xi_a - \xi^b \nabla_a \xi_b) = 0, \quad (9.3.10.)$$

és

$$\sigma_{ab}\xi^b = \frac{1}{2}(\xi^b \nabla_b \xi_a + \xi^b \nabla_a \xi_b) - \frac{1}{3}\theta h_{ab}\xi^b = 0, \quad (9.3.11.)$$

ugyanis  $\xi^b \nabla_b \xi_a = 0$ , mert  $\xi^a$  geodetikus érintője;  $\xi^b \nabla_a \xi_b = 0$ , mert  $\xi^b \xi_b = -1$ ; és  $h_{ab}\xi^b = g_{ab}\xi^b - \xi^a = 0$ .

**Állítás:** A  $B_{ab}$  tenzormező fenti felbontásának tagjai az érintővektortér  $\xi^a$ -ra merőleges alterét további „ortogonális” alterekre bontják, azaz  $h_{ab}\sigma^b_a = h_{ab}\omega^b_a = \sigma_{ab}\omega^b_a = 0$ .

**Megjegyzés:** A kongruencia deformációjának az alábbi módon adhatunk szemléletes jelentést. A kongruencia bármely geodetikus mentén a szomszédos geodetikusok „folyamának térfogati” tágulását, azaz relatív „térfogatváltozását”  $\theta$  méri; az  $\omega_{ab}$  a szomszédos geodetikusok elcsavarodását jellemzi:  $\omega_{ab}$  axiálvektor-invariánsa az elcsavarodás infinitezimális szöge. Jelöljük ki egy egységsugarú gömböt az érintőtérben, és azt Lie-transzportáljuk  $\xi^a$  integrálgörbéi (azaz a kongruencia geodetikusai) mentén. Ekkor ez ellipszoiddá torzul, amit a  $\sigma_{ab}$  nyírási deformáció jellemez:  $\sigma^a_b$  sajátvektorai jelölik ki az ellipszoid főtengelyeit, sajátértékei pedig az egyes irányokban a tengelyek egységtől való relatív eltérését.

**Állítás:** Az alábbi egyenletek határozzák meg a kongruencia deformációját jellemző  $\theta$ ,  $\sigma_{ab}$  és  $\omega_{ab}$  mennyiségek változási sebességét, ahogy haladunk a sajátidőben a kongruencia mentén:

$$\xi^c \nabla_c \theta \equiv \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}\xi^c \xi^d, \quad (9.3.12.)$$

$$\xi^c \nabla_c \sigma_{ab} = -\frac{2}{3}\theta \sigma_{ab} - \sigma_{ac}\sigma^c_b - \omega_{ac}\omega^c_b + \frac{1}{3}h_{ab}(\sigma_{cd}\sigma^{cd} - \omega_{cd}\omega^{cd}) + C_{cbad}\xi^c \xi^d + \frac{1}{2}\tilde{R}_{ab}, \quad (9.3.13.)$$

$$\xi^c \nabla_c \omega_{ab} = -\frac{2}{3}\theta \omega_{ab} + 2\sigma^c_{[b}\omega_{a]c}, \quad (9.3.14.)$$

ahol  $\tilde{R}_{ab} = h_{ac}h_{bd}R^{cd} - \frac{1}{3}h_{ab}h_{cd}R^{cd}$  a Ricci-tenzor térszerű, spúrmentes része,  $C_{abcd}$  pedig a Weyl-tenzor. A (9.3.12.) egyenlet a **Landau<sup>87</sup>-Raychaudhuri<sup>88</sup>-egyenlet (RE)**, amely kulcsszerepet játszik a szingularitási tételek bizonyításában.

<sup>87</sup>Lev Davidovich Landau, szovjet fizikus, 1908-1968.

<sup>88</sup>Amal Kumar Raychaudhuri, indiai fizikus, 1923-2005.

Nyilvánvaló, hogy a geodetikus deviáció

$$a^a = \xi^c \nabla_c (\xi^b \nabla_b \eta^a) = -R_{cbd}{}^a \eta^b \xi^c \xi^d \quad (9.3.15.)$$

egyenlete meghatározza  $\theta$ ,  $\sigma_{ab}$  és  $\omega_{ab}$  változási sebességét, ahogy haladunk a sajátidőben a kongruencia mentén. A kongruencia deformációjának változási sebességét azonban egyszerűbben is megkaphatjuk, ha közvetlenül a  $B_{ab}$  tenzormezőnek az időszerű geodetikusok menti párhuzamos eltolásából indulunk ki:

$$\xi^c \nabla_c B_{ab} = \xi^c \nabla_c (\nabla_b \xi_a) \quad (9.3.16.)$$

Használjuk fel az egyenlet jobb oldalán a görbületi tenzor definícióját, amely szerint  $\nabla_c \nabla_b \xi_a = \nabla_b \nabla_c \xi_a + R_{cba}{}^d \xi_d$ . Ha ezután azt is figyelembe vesszük, hogy  $\xi^a$  geodetikus érintővektora, azaz  $\xi^c \nabla_c \xi^a = 0$ , akkor az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\begin{aligned} \xi^c \nabla_c B_{ab} &= \xi^c (\nabla_b \nabla_c \xi_a + R_{cba}{}^d \xi_d) \\ &= \nabla_b (\xi^c \nabla_c \xi_a) - (\nabla_b \xi^c) (\nabla_c \xi_a) + R_{cba}{}^d \xi^c \xi^d \\ &= -B_b{}^c B_{ac} + R_{cba}{}^d \xi^c \xi^d. \end{aligned} \quad (9.3.17.)$$

Képezzük a (9.3.17.) egyenlőség bal és jobb oldalának spúrját ( $R_{cba}{}^d = g^{de} R_{cbae} = -g^{de} R_{cbea}$  miatt a tenzor  $ab$  indexekben vett spúrja  $-g^{de} R_{ce} = -R_c{}^d$ ):

$$\begin{aligned} \xi^c \nabla_c \theta &= -B_a{}^c B_{ac} - R_{cd} \xi^c \xi^d \\ &= -\frac{1}{9} \theta^2 h_a{}^c h_c{}^a - \sigma_a{}^c \sigma_c{}^a - \omega_a{}^c \omega_c{}^a - R_{cd} \xi^c \xi^d \\ &= -\frac{1}{3} \theta^2 - \sigma_{ab} \sigma^{ab} + \omega_{ab} \omega^{ab} - R_{cd} \xi^c \xi^d, \end{aligned} \quad (9.3.18.)$$

ahol felhasználtuk, hogy  $B_{ab}$  felbontása „ortogonális” részekre történt, továbbá, hogy

$$h_a{}^c h_c{}^a = g^{ca} g_{ac} + 2g^{ca} \xi_a \xi_c + \xi^c \xi^a \xi_c \xi_a = +4 - 2 + 1 = 3. \quad (9.3.19.)$$

Ezzel megkaptuk a keresett (9.3.12.) egyenletet.

A (9.3.13.), ill. (9.3.14.) egyenletet rendre úgy kapjuk meg, hogy vesszük a (9.3.17.) egyenlet mindkét oldalának szimmetrikus, spúrmentes, ill. antiszimmetrikus részét.

### 9.3.2. Az energia-feltételek

A (9.3.12.) egyenlet meghatározó szerepet játszik a szingularitási tételek bizonyításában. Az egyenlet jobb oldalának utolsó tagja ebből a szempontból különös figyelmet érdemel. Ha feltesszük, hogy olyan téridőket vizsgálunk, amelyek az Einstein-egyenletek megoldásai, akkor az  $R_{ab} \xi^a \xi^b$  tag kifejezhető az energiaimpulzus-tenzorral:

$$R_{ab} \xi^a \xi^b = 8\pi \left( T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) \xi^a \xi^b = 8\pi \left( T_{ab} \xi^a \xi^b + \frac{1}{2} T \right). \quad (9.3.20.)$$

Itt  $T_{ab} \xi^a \xi^b \geq 0$ , ha a Világegyetem anyaga a szokásos fizikai tulajdonságú, mert  $T_{ab} \xi^a \xi^b / (-\xi^c \xi_c)$  az az energiasűrűség, amit a  $\xi^a / (-\xi^b \xi_b)^{1/2}$  négyessebességű megfigyelő mér, ahol  $-\xi^c \xi_c > 0$ .

**Definíció:** A  $T_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$  egyenlőtlenséget, ahol  $\xi^a$  tetszőleges időszerű négyesvektor, **gyenge energia-feltételnek** (weak energy condition) nevezzük. A gyenge energia-feltétel tehát azt fejezi ki, hogy az anyag energiasűrűsége nem negatív.

Általában az is józan feltevés, hogy a mechanikai feszültségek nem olyan nagyok, hogy  $R_{ab}\xi^a\xi^b$ -t negatívvá tegyék. Ebből adódik az erős energia-feltétel.

**Definíció:** A  $T_{ab}\xi^a\xi^b \geq -\frac{1}{2}T$  egyenlőtlenséget, ahol  $\xi^a$  tetszőleges időszerű négyesvektor, **erős energia-feltételnek** (strong energy condition) nevezzük. Az erős energia-feltétel tehát azt fejezi ki, hogy a Ricci-tenzor (idő-idő)-komponense nem negatív,  $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$ .

További józan feltevés az is, hogy a  $\xi^a/(-\xi^b\xi_b)^{1/2}$  négyessebességű megfigyelő az anyag energiaáram-sűrűségét időszerű négyesvektornak vagy null-vektornak kell, hogy észlelje. Ez egy újabb energia-feltételhez vezet.

**Definíció:** Ha  $\xi^a$  tetszőleges jövőirányú, időszerű négyesvektor, akkor azt a követelményt, hogy  $-T^a_b\xi^b$  jövőirányú, időszerű vagy null-vektor legyen, **domináns energia-feltételnek** (dominant energy condition) nevezzük.

**Megjegyzés:** A domináns energia-feltétel úgy értelmezhető, hogy az energiaáramlás sebessége nem lehet nagyobb, mint a fénysebesség a vákuumban. Ezt a felfogást alátámasztja a következő állítás:

**Állítás:** Ha az energiaimpulzus-tenzor megmaradó, azaz  $\nabla^a T_{ab} = 0$ , továbbá eleget tesz a domináns energia-feltételnek, és eltűnik az  $S$  zárt, akronális felületen, akkor eltűnik  $S$  teljes  $D(S)$  függőségi tartományában (ld. [2]).

**Megjegyzés:** A domináns energia-feltételből következik a gyenge energia-feltétel, de ettől eltekintve a különböző energia-feltételek független matematikai feltételek. Például az erős energia-feltételből nem következik a gyenge energia-feltétel.

A  $T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzor szimmetrikus, viszont a  $g_{ab}$  metrika nem pozitív definit. Ezért az érintőtér vektorainak  $T^a_b = g^{ac}T_{cb} : V_p \mapsto V_p$  lineáris leképezése általában nem diagonalizálható. A „jó viselkedésű” anyag (vagy fizikai mező) energiaimpulzus-tenzora azonban diagonalizálható, azaz a  $T^a_b$  leképezésnek létezik 4 független, ortonormált sajátvektora,  $t^a$ ,  $(x_i)^a$ , ahol  $i = 1, 2, 3$ , amelyekre

$$T^a_b t^b = \rho t^a, \quad T^a_b (x_i)^b = p_i (x_i)^a, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9.3.21.)$$

teljesül, úgyhogy az energiaimpulzus-tenzor lokálisan

$$T_{ab} = \rho t_a t_b + \sum_{i=1}^3 p_i (x_i)_a (x_i)_b \quad (9.3.22.)$$

alakba írható át, ahol  $\rho$  az anyag energiasűrűsége,  $p_i$  pedig a főtengelyirányú nyomások az anyag lokális nyugalmi rendszerében, az energiaimpulzus-tenzor spúrja pedig

akkor

$$T = \sum_{i=1}^3 p_i - \rho. \quad (9.3.23.)$$

(Kivételt képez az úgynevezett null-folyadék, amikor

$$T_{ab} = \rho l_a l_b + \sum_{j=1}^2 p_j (y_j)_a (y_j)_b, \quad (9.3.24.)$$

ahol  $l^a$  null-vektor és  $(y_i)^a$  az  $l^a$ -ra merőleges, térszerű ortonormált vektorok. Ekkor  $T = p_1 + p_2$ .)

**Állítás:** Ha a téridőt fizikailag realiztikus anyag hozza létre, akkor az energiafeltételek a nyugalmi energiasűrűségre és a főtengetyirányú nyomásokra az alábbi egyenlőtlenségeket jelentik:

- a **gyenge energia-feltétel** akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\rho \geq 0, \quad \rho + p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (9.3.25.)$$

- az **erős energia-feltétel** akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \geq 0, \quad \rho + p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (9.3.26.)$$

- a **domináns energia-feltétel** akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\rho \geq |p_i|, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.3.27.)$$

Az energia-feltételekben szereplő tetszőleges, normált  $\xi^a$  időszerű vektort felbontjuk a  $\{t^a, (x_1)^a, (x_2)^a, (x_3)^a\}$  ortonormált bázisban:

$$\xi^a = \xi_t t^a + \sum_{i=1}^3 \xi_i (x_i)^a, \quad \xi_t = t_a \xi^a, \quad \xi_i = (x_i)_a \xi^a \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.3.28.)$$

Ekkor a

$$\xi_a \xi^a = -\xi_t^2 + \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 = -1 \quad (9.3.29.)$$

normálási feltételből azt kapjuk, hogy

$$\xi_t^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \xi_i^2. \quad (9.3.30.)$$

Ezt felhasználva az egyes energia-feltételek az alábbi egyenlőtlenségek alakját öltik:

- a gyenge-energiafeltétel:

$$0 \leq T_{ab}\xi^a\xi^b = \rho\xi_t^2 + \sum_{i=1}^3 p_i\xi_i^2 = \rho + \left(\rho + \sum_{i=1}^3 p_i\right)\xi_i^2, \quad (9.3.31.)$$

- az erős energia-feltétel:

$$\begin{aligned} 0 &\leq T_{ab}\xi^a\xi^b + \frac{1}{2}T = \rho\xi_t^2 + \sum_{i=1}^3 p_i\xi_i^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^3 p_i - \rho\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\rho + \sum_{i=1}^3 p_i\right) + \sum_{i=1}^3 (\rho + p_i)\xi_i^2; \end{aligned} \quad (9.3.32.)$$

- a domináns energiafeltétel:

$$\begin{aligned} 0 &\geq (-T^a_b\xi^b)(T_{ac}\xi^c) \\ &= \left(-\rho\xi_t t^a + \sum_{i=1}^3 p_i\xi_i(x_i)^a\right)\left(-\rho\xi_t t_a + \sum_{i=1}^3 p_i\xi_i(x_i)_a\right) \\ &= -\rho^2(\xi_t)^2 + \sum_{i=1}^3 p_i^2(\xi_i)^2 \\ &= -\rho^2 + \sum_{i=1}^3 (-\rho^2 + p_i^2)(\xi_i)^2. \end{aligned} \quad (9.3.33.)$$

Helyesnek fogadva el azt a józan feltevést, hogy  $\rho$  és  $p_i$  nem negatívak, ezek az egyenlőtlenségek éppen a keresett egyenlőtlenségekre vezetnek az egyes esetekben.

A (9.3.12.) egyenlet jobb oldalán szereplő  $-R_{ab}\xi^a\xi^b$  tag járuléka mindenütt negatív vagy zérus, ha teljesül az erős energia-feltétel és érvényesek az Einstein-egyenletek. Ez a tag fejezi ki, hogy az anyagban uralkodó gravitációs vonzás az időszerű geodetikusok kongruenciáját összetartóvá igyekszik tenni, ahogy telik a sajátidő a geodetikusok mentén. Ennek az alábbi következménye lehet. Tegyük fel, hogy a kongruencia hiperfelület-ortogonális, azaz hogy  $\omega_{ab} = 0$ . Ekkor a (9.3.12.) egyenlet a

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 = -\sigma_{ab}\sigma^{ab} - R_{ab}\xi^a\xi^b \quad (9.3.34.)$$

alakot ölti. Ha  $-R_{ab}\xi^a\xi^b \leq 0$ , mint feltételeztük, akkor fennáll tehát a

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0 \quad (9.3.35.)$$

egyenlőtlenség, ahonnan

$$\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{\theta^2}\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\frac{1}{\theta} \quad (9.3.36.)$$

adódik. Integráljuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát valamely  $[0, \tau]$  véges intervallumon. Ekkor az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk eredményül:

$$\frac{1}{\theta(\tau)} \geq \frac{1}{\theta(0)} + \frac{\tau}{3}. \quad (9.3.37.)$$

A kapott eredménynek van egy nagyon fontos következménye. Tegyük fel, hogy valamely geodetikus valamely pontjában  $\theta$  negatív. Válasszuk ebben a pontban  $\tau$ -t zérusnak, továbbá alkalmazzuk erre a geodetikusra és a szomszédos időszerű geodetikusokra a kapott egyenlőtlenséget. Ekkor azt a meglepő eredményt kapjuk, hogy a szóbanforgó ponttól

$$\tau_c \leq -\frac{3}{\theta(0)} \quad (9.3.38.)$$

sajátidőben mért „távolságon” belül  $1/\theta(\tau) \rightarrow 0$  negatív értékeken keresztül, azaz hogy  $\theta(\tau) \rightarrow -\infty$ , ha  $\tau \rightarrow \tau_c$ . Ez szemléletesen szólva azt jelenti, hogy a szomszédos geodetikusok mintegy összefutnak egyetlen görbébe, az úgynevezett **kausztikába**, ha a geodetikusok fenti konvergenciája valahol megjelenik a kongruenciában. Az elnevezés a geometriai optikából származik, ahol a kausztika olyan görbét jelent, amely a fénysugarak burkológörbéje, azaz amelyhez képest egy nyalábon belül minden fénysugár érintőlegesen halad. A fenti levezetéssel beláttuk tehát az alábbi lemmát:

**9.2.1. lemma:** Legyen  $\xi^a$  egy hiperfelület-ortogonális, időszerű geodetikusok alkotta kongruencia érintő-vektortere. Tegyük fel, hogy  $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$ , ami teljesül, ha érvényesek az Einstein-egyenletek, és fennáll az erős energia-feltétel. Ekkor, ha  $\theta$  negatív  $\theta_0 < 0$  értéket vesz fel a kongruencia valamelyik geodetikusának valamelyik pontjában, akkor  $\theta \rightarrow -\infty$  a geodetikus mentén  $\tau \leq 3/|\theta_0|$  véges sajátidőn belül.

**Megjegyzés:** Amit beláttunk, az csupán azt jelenti, hogy a kongruenciában jelenik meg szingularitás, vagyis kausztika alakul ki a kongruenciában, azaz valamely geodetikus kis környezetében valamennyi geodetikus belesimul egy közös burkológörbébe. Ez nem okvetlenül jár azonban együtt azzal, hogy a téridőnek szingularitása van. A **9.2.1. lemma** állítása szingularitástól mentes téridőben is érvényes. Más, globális állításokkal együtt jelentheti azonban azt, hogy szinguláris a téridő.

### 9.3.3. A null-geodetikusok kongruenciái és az energia-feltételek

Vizsgáljuk meg most a null-geodetikusok kongruenciáinak viselkedését. Legyen  $k^a$  egy ilyen kongruenciához tartozó érintő-vektormező,  $k_a k^a = 0$ . Paraméterezzük a null-geodetikusokat a  $\lambda$  affin paraméterrel. Az időszerű geodetikusok esetével szemben, most  $k^a$  normálása nem ad lehetőséget arra, hogy összehangoljuk a különböző geodetikusokon a  $\lambda$ -skálákat. Az időszerű esetben a  $\xi^a$  normált érintő-vektormezőre ortogonális  $\eta^a$  eltérés-vektormezővel jellemeztük a szomszédos geodetikusokat a kongruenciában. Ez két körülmény miatt volt lehetséges:

- (a) A  $\xi_a \eta^a$  skalárszorzat állandó a geodetikusok mentén, és ezért  $\eta^a$ -nak az esetleges  $\xi^a$ -val párhuzamos  $(\eta_\xi)^a$  komponense a kongruencia deformációja szempontjából érdektelen, mert  $\xi_a \eta^a = \xi_a (\eta_\xi)^a = \text{áll.}$  a geodetikusok mentén.

A skalárszorzat megváltozása a geodetikus mentén történő párhuzamos eltolás során:

$$\xi^a \nabla_a (\xi_b \eta^b) = \xi^a (\nabla_a \xi_b) \eta^b + \xi^a \xi_b \nabla_a \eta^b = \xi^a \xi_b \nabla_a \eta^b = \xi_b \mathcal{L}_\xi \eta^b + \eta_a \xi_b \nabla_a \xi^b = 0, \quad (9.3.39.)$$

mert a jobboldali első tag eltűnik az eltérés-vektor egyenlete miatt, a második tag pedig a  $\xi_b \xi^b = -1$  normálási feltétel miatt.

- (b) Azok az  $\eta^a$  és  $\eta'^a$  eltérés-vektorok, amelyek csak a  $\xi^a$  érintővektor számszorosában különböznek, azaz amelyekre  $\eta'^a - \eta^a = c \xi^a$ , ahol  $c \in \mathbb{R}$ , egyenértékűek, vagyis ugyanannak a szomszédos geodetikusnak a jellemzésére szolgálnak. Ez abból látszik, hogy  $\mathcal{L}_\xi \eta^a = \mathcal{L}_\xi \eta'^a = 0$ . Ezért a  $\xi_a \eta^a = 0$  ortogonalitási feltétel egy természetes mértékfeltételként szolgál, hogy az ekvivalens eltérés-vektorok közül egy reprezentánst kiválasszunk.

Látjuk tehát, hogy mindkét kíváncsi elemet tettünk annak az egyetlen feltételnek a kirovásával, hogy az eltérés-vektor legyen a geodetikusok érintővektorára mindenütt ortogonális. Ezért a kongruencia bármely geodetikusának bármely  $p \in M$  pontjában az  $\eta^a$  vektor a  $V_p$  érintőtérnek  $\xi^a$ -ra ortogonális 3-dimenziós alterében van benne.

Null-geodetikusok kongruenciája esetében mind az (a), mind a (b) követelmény érvényben marad. Valamely null-geodetikus érintő-vektormezeje és a szomszédos geodetikusok eltérését jellemző  $\eta^a$  eltérés-vektor skalárszorzata most is állandó a null-geodetikus mentén,

$$k^a \nabla_a (k_b \eta^b) = k^a (\nabla_a k_b) \eta^b + k^a k_b \nabla_a \eta^b = k^a k_b \nabla_a \eta^b = k_b \mathcal{L}_k \eta^b + \eta_a k_b \nabla_a k^b = 0, \quad (9.3.40.)$$

úgyhogy az eltérés-vektornak csak a  $k^a$ -ra merőleges komponense érdekes, vagyis kiróhatjuk a  $k_a \eta^a = 0$  ortogonalitási feltételt. Továbbra is igaz, hogy  $\mathcal{L}_k \eta^a = \mathcal{L}_k \eta'^a = 0$  miatt bármely két  $\eta^a$  és  $\eta'^a$  eltérés-vektor ugyanazt a null-geodetikust jellemzi, ha csak a  $k^a$  érintővektor számszorosában különböznek, azaz  $\eta'^a - \eta^a = c k^a$ , ahol  $c \in \mathbb{R}$ . Az ortogonalitási feltétel azonban nem teszi lehetővé, hogy az ekvivalens eltérés-vektorok közül egy-egy reprezentánst kiválasszunk, mivel  $k^a$  önmagára is ortogonális. További feltételre van tehát szükség a reprezentáns eltérés-vektor kiválasztásához. Ezáltal a nem-ekvivalens eltérés-vektorok egy 2-dimenziós vektortérből kerülnek ki. A helyzet pontos matematikai megfogalmazása a következőképpen lehetséges:

**Definíció:** Legyen  $V_p$  a  $p \in M$  pontban az érintőtér. Jelölje  $\tilde{V}_p \subset V_p$  az érintőtér azon vektorainak 3-dimenziós alterét, amelyek ortogonálisak  $k^a$ -ra. Az



$x^a, y^a \in \tilde{V}_p$  vektorokat ekvivalenseknek nevezzük, ha létezik olyan  $c \in \mathbb{R}$  szám, hogy  $x^a - y^a = ck^a$ . Definiáljuk a „kalapos”  $\hat{V}_p$  vektorteret, mint  $\tilde{V}_p$  vektorai ekvivalenciaosztályainak 2-dimenziós vektorterét.

A számunkra érdekes deviációs vektorok tehát a  $\hat{V}_p$  vektortér elemei, nem azonosíthatók természetes módon  $V_p$  valamely alterével. Egy tetszőleges  $t^a \in V_p$  érintővektorhoz nem tudunk természetes módon hozzárendelni egy érintővektort  $\tilde{V}_p$ -ben, mert nem tudjuk  $t^a$ -t egyértelműen felbontani a  $k^a$  null-vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőkre. Ha viszont  $t^a \in \tilde{V}_p$ , azaz  $t^a k_a = 0$ , akkor  $t^a$ -hoz természetes módon tartozik egy megfelelő  $\hat{t}^a \in \hat{V}_p$  vektor, nevezetesen  $t^a$  ekvivalenciaosztálya.

**Definíció:** A továbbiakban tudunk „kalapos” duális vektorteret definiálni, majd pedig „kalapos” tenzorokat. Tetszőleges  $\mu_a \in V_p^*$  duális vektorhoz, mint a  $V_p$  vektortér lineáris leképezéséhez, egyértelműen tartozik egy  $\tilde{\mu}_a \in \tilde{V}_p^*$  duális vektor azáltal, hogy a leképezés értelmezési tartományát  $V_p$ -ről  $\tilde{V}_p \subset V_p$ -re szűkítjük. A  $\tilde{\mu}_a \in \tilde{V}_p^*$  duális vektorhoz viszont akkor és csak akkor tartozik egy megfelelő  $\hat{\mu}_a \in (\hat{V}_p)^*$  duális vektor, ha a  $\tilde{\mu}_a k^a = \mu_a k^a = 0$  feltétel teljesül.

A  $\hat{\mu}_a$  akkor és csak akkor eleme a  $(\hat{V}_p)^*$  duális vektortérnek, ha olyan  $\tilde{V}_p$ -n ható lineáris leképezés, amely bármely ekvivalencia osztály tetszőleges  $x^a, y^a \in \tilde{V}_p$  vektoraira azonos módon hat, azaz amelyre

$$\hat{\mu}_a y^a = \hat{\mu}_a (x^a + ck^a) = \hat{\mu}_a x^a \quad (9.3.41.)$$

bármely inekvivalens  $x^a \in \tilde{V}_p$  és tetszőleges  $c \in \mathbb{R}$  esetén. Ez akkor és csak akkor állhat fenn, ha  $\hat{\mu}_a k^a = 0$ .

Általánosan tetszőleges,  $V_p$  (és  $V_p^*$ ) felett értelmezett  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzorhoz akkor és csak akkor tartozik egyértelműen egy  $\hat{V}_p$  (és  $(\hat{V}_p)^*$ ) felett értelmezett  $\hat{T}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzor, ha zérust ad minden olyan kontrakció, amikor  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  valamely indexét  $k_a$ -val vagy  $k^a$ -val kontraháljuk, a többi indexet pedig olyan vektorokkal vagy duális vektorokkal kontraháljuk, amelyekhez tartozik vektor  $\hat{V}_p$ -ben, ill. duális vektor  $(\hat{V}_p)^*$ -ben. Ilyen tenzorok esetében felcserélhető a külső szorzás és a „kalapos” tenzorok terére történő „vetítés”:  $\widehat{T_1 T_2} = \hat{T}_1 \hat{T}_2$ . Olyan tenzorok esetében, amelyek eleget tesznek a szigorúbb követelménynek, hogy bármely indexük  $k_a$ -val vagy  $k^a$ -val történő kontrakciója zérust ad, felcserélhető a kontrakció és a „kalapos” tenzorok terére történő „vetítés” is:  $\widehat{\mathcal{C}T} = \mathcal{C}\hat{T}$ .

**Állítás:** A  $g_{ab}$  metrikus tenzorhoz tartozik egy  $\hat{V}_p \times \hat{V}_p$ -n értelmezett  $\hat{h}_{ab}$  tenzor, ami pozitív definit, ++ szignatúrájú metrika  $\hat{V}_p$ -n. A  $\hat{h}^{ab}$  inverz-metrika a  $g^{ab}$  inverz-metrikához tartozó „kalapos” tenzor.

Valóban, bármely  $v^a \in V_p$  esetén  $g_{ab} k^a v^b = g_{ab} v^a k^b = 0$ , úgyhogy létezik a  $g_{ab}$ -hez tartozó  $\hat{h}_{ab}$  tenzor. Válasszunk egy lokális tetrad-bázist, amelyben  $g_{\mu\nu} = g_{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b$  diagonális. A tetrad-bázisból (nem egyértelműen) szerkeszthetünk olyan bázist, amelyben 2 null-vektor van,  $(e_\pm)^a = (e_0 \pm e_1)^a / \sqrt{2}$ , továbbá 2 térszerű bázisvektor,  $(e_2)^a$  és  $(e_3)^a$ . Az utóbbiak által kifeszített altér  $V_p$ -ben izometrikus  $\hat{V}_p$ -vel. Ezért  $\hat{h}_{ij} = g_{ab}(e_i)^a(e_j)^b$ , ahol  $i, j = 2, 3$ , úgyhogy a kapott tenzor

pozitív definit, ++ szignatúrájú metrika ezen a 2-dimenziós vektortéren.

Vezessük be megint a

$$B_{ab} = \nabla_b k_a \quad (9.3.42.)$$

tenzort a null-geodetikusok kongruenciájának jellemzésére. Ennek létezik  $\hat{B}_{ab}$  „kalapos” megfelelője.

Tetszőleges  $v^a \in V_p$  érintővektor esetén  $B_{ab}k^a v^b = k^a v^b \nabla_b k_a = v^b \nabla_b (\frac{1}{2}k_a k^a) = 0$ , mert  $k_a k^a = 0$ , és  $B_{ab}v^a k^b = v^a k^b \nabla_b k_a = 0$ , mert  $k^a$  null-geodetikus érintővektora.

A  $\hat{V}_p$  2-dimenziós vektortéren ható  $\hat{B}_b^a$  lineáris leképezést megint felbonthatjuk egyértelműen szimmetrikus és antiszimmetrikus részre, továbbá a szimmetrikus részét egy zérus spúrú részre és annak kiegészítőjére:

$$\hat{B}_{ab} = \frac{1}{2}\theta\hat{h}_{ab} + \hat{\sigma}_{ab} + \hat{\omega}_{ab}. \quad (9.3.43.)$$

ahol

$$\theta = \hat{h}^{ab}\hat{B}_{ab}, \quad (9.3.44.)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{B}_{(ab)} - \frac{1}{2}\theta\hat{h}_{ab}, \quad (9.3.45.)$$

$$\hat{\omega} = \hat{B}_{[ab]} \quad (9.3.46.)$$

hasznló jelentéssel bírnak, mint a megfelelő mennyiségek időszerű geodetikusok kongruenciája esetén. (Az időszerű esetben fellépő  $\theta h_{ab}/3$  tag helyére  $\theta \hat{h}_{ab}/2$  lépett, ahol a számfaktor azért változott, mert  $\hat{B}_b^a$  2-dimenziós vektortéren hat és nem 3-dimenzióson, mint  $B_b^a$ .)

Hasonló lépések során, mint ahogy időszerű kongruencia esetén a (9.3.17.) egyenlőséget levezettük, most a

$$k^c \nabla_c B_{ab} + B_b^c B_{ca} = R_{cba}{}^d k^c k_d \quad (9.3.47.)$$

egyenlőséget kapjuk. A  $\hat{V}$  vektortér feletti tenzorok terére történő „vetítés” után ebből a

$$k^c \nabla_c \hat{B}_{ab} + \hat{B}_b^c \hat{B}_{ca} = \widehat{R_{cba}{}^d k^c k_d} \quad (9.3.48.)$$

egyenletet kapjuk. Végül a (9.3.48.) egyenletbe behelyettesítjük a (9.3.43.) felbontást, és vesszük rendre mindkét oldal spúrját, szimmetrikus spúr nélküli részét és antiszimmetrikus részét. Ekkor a következő egyenleteket kapjuk:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} + \hat{\omega}_{ab}\hat{\omega}^{ab} - R_{cd}k^c k^d, \quad (9.3.49.)$$

$$k^c \nabla_c \hat{\sigma}_{ab} = -\theta\hat{\sigma}_{ab} + \widehat{C_{cbad}k^b k^d}, \quad (9.3.50.)$$

$$k_c^\nabla \hat{\omega}_{ab} = -\theta\hat{\omega}_{ab}, \quad (9.3.51.)$$

ahol  $C_{abc}{}^d$  a Weyl-tenzor, azaz a görbületi tenzor spúrmentes része.

A (9.3.49.) egyenlet a (9.3.12.) egyenlet megfelelője null-geodetikusok kongruenciája esetén. Ha érvényesek az Einstein-egyenletek, akkor a (9.3.49.) egyenlet jobb oldalának utolsó tagja

$$R_{ab}k^ak^b = 8\pi T_{ab}k^ak^b, \quad (9.3.52.)$$

mert  $k^a$  null-vektor.

**Állítás:** Ha az anyag akár a gyenge, akár az erős energia-feltételt kielégíti, akkor  $T_{ab}k^ak^b \geq 0$ , azaz  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$ , ami a (9.3.49.) egyenlet jobb oldalán negatív járulékot eredményez.

A gyenge energia-feltétel értelmében minden  $\xi^a$  időszerű vektorra fennáll a  $T_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$  egyenlőtlenség, de akkor  $T_{ab}k^ak^b \geq 0$  is teljesülni fog bármely  $k^a$  null-vektorra, mert a  $T_{ab}$  tenzor (legalább) folytonos leképezés. Hasonlóan, ha fennáll, hogy  $T_{ab}\xi^a\xi^b + \frac{1}{2}T\xi_a\xi^a \geq 0$ , akkor a folytonosság okán  $T_{ab}k^ak^b \geq 0$  ismét teljesül bármely  $k^a$  null-vektorra.

**Állítás:** Bármely diagonalizálható, azaz (9.3.21.) tulajdonságú energiainpulzus-tenzor esetén a gyenge vagy az erős energia-feltétel kielégülésének szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\rho + p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.3.53.)$$

legyen.

Ebben az esetben fennáll, hogy

$$T_{ab}k^ak^b = \rho(k_t)^2 + \sum_{i=1}^3 p_i(k_i)^2, \quad (9.3.54.)$$

ahol  $k_t = k_at^a$  és  $k_i = k_a(x_i)^a$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Másrészt viszont  $0 = k_ak^a = -k_t^2 + \sum_{i=1}^3(k_i)^2$ , ahonnan  $k_t^2 = \sum_{i=1}^3(k_i)^2$ , amit behelyettesítve  $T_{ab}k^ak^b$  kifejezésébe

$$T_{ab}k^ak^b = \sum_{i=1}^3(\rho + p_i)(k_i)^2 \quad (9.3.55.)$$

adódik, ahol minden  $(k_i)^2$  nem negatív (hiszen valós szám négyzete). Ezért a  $T_{ab}k^ak^b \geq 0$  egyenlőtlenség akkor és csak akkor állhat fenn (nem negatív  $\rho$  és  $p_i$ -k esetén), ha a keresett egyenlőtlenségek fennállnak.

Végül, hasonló érveléssel, mint ahogy a 9.2.1. **lemmához** jutottunk, az alábbi lemmát kapjuk:

**9.2.2. lemma:** Legyen  $k^a$  egy hiperfelület-ortogonális, null-geodetikusokból álló kongruenciának az érintő-vektormezeje. Tegyük fel, hogy fennáll az  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  egyenlőtlenség, ami teljesül mindig, ha érvényesek az Einstein-egyenletek, és az anyag kielégíti vagy a gyenge, vagy az erős energia-feltételt. Ekkor, ha a kongruencia  $\theta$  tágulása  $\theta_0 < 0$  negatív értéket vesz fel a kongruenciához tartozó valamely null-geodetikus valamely pontjában, akkor  $\theta \rightarrow -\infty$  ezen null-geodetikus mentén véges,  $\lambda \leq 2/|\theta_0|$  affin távolságon belül.

## 9.4. A konjugált pontok

### 9.4.1. A konjugált pontok fogalma

**Definíció:** Legyen  $M$  téridő-sokaság, amelyen konnexió van értelmezve; legyen  $\gamma$  geodetikus, amelynek  $v^a$  az érintő-vektormezeje. Ekkor a geodetikus deviáció

$$v^a \nabla_a (v^b \nabla_b \eta^c) = -R_{abd}{}^c \eta^b v^a v^d \quad (9.4.1.)$$

egyenletének  $\eta^a$  megoldását a  $\gamma$  geodetikuson értelmezett **Jacobi**<sup>89</sup>-**mezőnek** nevezzük.

**Definíció:** A  $\gamma$  geodetikus  $p \in \gamma$  és  $q \in \gamma$  pontjait **konjugált pontoknak** nevezzük, ha létezik olyan Jacobi-mező, amely nem azonosan zérus, de a  $p$  és a  $q$  pontban eltűnik, azaz  $\eta_p = \eta_q = 0$ .

**Példa:** A gömbfelület északi és déli pólusai a hosszúsági geodetikusok konjugált pontjai.

**Megjegyzés:** Ha  $p$  és  $q$  konjugált pontok, akkor az nem okvetlenül jelenti, hogy van olyan másik geodetikus, amelyik metszi  $\gamma$ -t  $p$ -ben is és  $q$ -ban is. Ez csupán azt jelenti, hogy létezik egy Jacobi-mező, amely eltűnik  $p$ -ben is és  $q$ -ban is. Fordítva, ha a  $p$  és  $q$  pontokon áthaladó  $\gamma$  geodetikus mellett van másik olyan geodetikus is, amelyik szintén áthalad ezeken a pontokon, akkor az még nem jelenti, hogy  $p$  és  $q$  konjugált pontok.

A konjugált pontok azért érdekesek, mert megjelenésük jellemzi azt a helyzetet, amikor két pontot összekötő időszerű geodetikus megszűnik lokálisan a leghosszabb görbe lenni, ill. amikor egy pontból kiinduló null-geodetikus nem marad a pont jövőjének határán. Riemann-geometriájú sokaság esetén a konjugált pontok azt a helyzetet jellemzik, amikor a geodetikus megszűnik lokálisan, két pont között a legrövidebb (azaz a legkisebb ívhosszúságú) görbe lenni.

### 9.4.2. Konjugált pontok időszerű geodetikusokon

Keressük először arra a kérdésre a választ, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy időszerű geodetikuson konjugált pontok jelenjenek meg.

**Állítás:** Legyen  $\gamma$  időszerű geodetikus, amelynek érintő-vektormezeje  $\xi^a$ , és legyen  $p \in \gamma$  a geodetikus pontja. Tekintsük az összes  $p$ -n áthaladó geodetikus kongruenciáját. (Ez a kongruencia természetesen szinguláris a  $p$  pontban.) Ekkor minden olyan Jacobi-mező, amelyik  $p$ -ben eltűnik, a szóbanforgó kongruencia egy eltérés-vektora. Ekkor a  $p$  pont jövőjében fekvő  $q \in I^+(p)$  pont akkor és csak akkor  $p$ -hez konjugált pont, ha a kongruencia  $\theta$  tágulása tart  $-\infty$ -hez a  $q$  pontban.

---

<sup>89</sup>Carl Gustav Jacob Jacobi, német matematikus, 1804–1851.

Vezessük be az ortonormált, térszerű  $e_1^a$ ,  $e_2^a$ ,  $e_3^a$  vektormezőket, amelyek merőlegesek  $\xi^a$ -ra, és párhuzamosan vannak transzportálva  $\gamma$  mentén. Ebben a bázisban az  $\eta^a$  eltérés-vektormező  $\eta^\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) komponensei a

$$\frac{d^2 \eta^\mu}{d\tau^2} = - \sum_{\alpha, \beta, \nu} R_{\alpha\beta\nu}{}^\mu \xi^\alpha \eta^\beta \xi^\nu \quad (9.4.2.)$$

deviációs egyenletet elégítik ki. Ez közönséges, elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet, amelynek megoldásai, az eltérés-vektormezők a  $p$  pontban kirótt  $\eta^\mu(0)$  és  $(d\eta^\mu/d\tau)(0)$  kezdőfeltételektől függenek, mégpedig lineárisan. Mivel a  $p$  pontból szétfutó geodetikuskongruenciája esetén  $\eta^\mu(0) = 0$ , ezért léteznie kell olyan  $A^\mu{}_\nu(\tau)$   $3 \times 3$ -as mátrixnak, hogy

$$\eta^\mu(\tau) = \sum_{\nu=1}^3 A^\mu{}_\nu(\tau) \frac{d\eta^\nu}{d\tau}(0). \quad (9.4.3.)$$

Helyettesítsük ezt be a Jacobi-mező egyenletébe. Ekkor az  $A^\mu{}_\nu(\tau)$  mátrixra az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2 A^\mu{}_\nu}{d\tau^2} = - \sum_{\alpha, \beta, \sigma} R_{\alpha\beta\sigma}{}^\mu \xi^\alpha \xi^\sigma A^\beta{}_\nu. \quad (9.4.4.)$$

Az eltérés-vektorra kirótt kezdőfeltételeknek megfelelő kezdőfeltételek  $A^\mu{}_\nu(0) = 0$  és  $(dA^\mu{}_\nu/d\tau)(0) = \delta^\mu{}_\nu$ . Ezután a  $q$  pont akkor és csak akkor konjugált pont, ha léteznek olyan nem triviális (azaz  $(d\eta^\mu/d\tau)(0) \neq 0$ ) kezdőfeltételek, amelyek esetén  $\eta^\mu = 0$  a  $q$  pontban. (A triviális kezdőfeltétel kizárása kizárja az azonosan eltűnő Jacobi-mezőt, mint megoldást.) Ez akkor és csak akkor következik be, ha  $\det A^\mu{}_\nu = 0$  a  $q$  pontban, mint az a (9.4.3.) lineáris egyenletből következik. Ezért  $\det A^\mu{}_\nu$  eltűnése a  $p$ -hez konjugált pont létezésének szükséges és elégséges feltétele. A konjugált pontok között azonban  $\det A^\mu{}_\nu \neq 0$ , úgyhogy ott létezik  $A^\mu{}_\nu$  inverze.

Az  $A^\mu{}_\nu$  mátrix nyilvánvalóan kapcsolatban van a kongruenciát jellemző  $B_{ab} = \nabla_b \xi_a$  tenzor-mezővel. Ennek a kapcsolatnak a megkeresése céljából képezzük az eltérés-vektor sajátidő szerinti deriváltját,

$$\begin{aligned} \frac{d\eta^\mu}{d\tau} &= \xi^a \nabla_a \eta^\mu = \xi^a \nabla_a [(e_\mu)_b \eta^b] \\ &= (e_\mu)_b \xi^a \nabla_a \eta^b \\ &= (e_\mu)_b B^b{}_a \eta^a \\ &= \sum_\alpha B^\mu{}_\alpha \eta^\alpha, \end{aligned} \quad (9.4.5.)$$

ahol a második sorban felhasználtuk, hogy párhuzamosan transzportált bázisban dolgozunk. Másrészt viszont a (9.4.3.) egyenlet mindkét oldalát  $\tau$  szerint deriválva azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\eta^\mu}{d\tau} = \sum_\nu \frac{dA^\mu{}_\nu}{d\tau} \frac{d\eta^\nu}{d\tau}(0). \quad (9.4.6.)$$

Ezért a (9.4.5.) egyenletből a következő egyenlőséget nyerjük:

$$\sum_\nu \frac{dA^\mu{}_\nu}{d\tau} \frac{d\eta^\nu}{d\tau}(0) = \sum_{\alpha, \nu} B^\mu{}_\alpha A^\alpha{}_\nu \frac{d\eta^\nu}{d\tau}(0), \quad (9.4.7.)$$

amelynek tetszőleges  $(d\eta^\nu/d\tau)(0)$  kezdőfeltétel esetén fenn kell állnia. Innen a

$$\frac{dA}{d\tau} = BA, \Rightarrow B = \frac{dA}{d\tau} A^{-1} \quad (9.4.8.)$$

mátrix-összefüggéseket kapjuk. A kongruencia tágulása tehát

$$\begin{aligned}\theta &= \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} \left( \frac{dA}{d\tau} A^{-1} \right) = \frac{1}{\det A} \frac{d}{d\tau} \det A \\ &= \frac{d}{d\tau} \ln |\det A|.\end{aligned}\tag{9.4.9.}$$

Itt kihasználtuk, hogy  $A$  nem szinguláris mátrix a  $p$  és  $q$  pontok között. Mivel  $A$  közönséges lineáris differenciálegyenlet megoldása,  $d\det A/d\tau$  nem válhat végtelenné  $\gamma$  mentén. Ezért, ha  $\theta \rightarrow -\infty$  a  $q$  pontban, akkor ott  $\det A \rightarrow 0$ ; és fordítva, ha  $\det A \rightarrow 0$  a  $q$  pontban, akkor ott  $\theta \rightarrow -\infty$ . Ezzel beláttuk a bizonyítani kívánt állítást.

A  $p$  pontból kifutó, időszerű geodetikusok kongruenciája hiperfelület-ortogonális. Be lehet látni (ld. [2]), hogy a  $p$  pont konvex normál környezetén belül ezek a geodetikusok ortogonálisak a geodetikusok menti állandó  $\tau$  sajátidőhöz tartozó felületekre. A (9.3.14.) egyenletből pedig következik, hogy ha  $\omega_{ab} = 0$  egy sajátidőpillanatban, akkor mindig eltűnik, ezért tehát a kongruencia mindenütt hiperfelület-ortogonális. Ekkor viszont alkalmazható a **9.2.1. lemma**, amelynek értelmében az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg:

**9.3.1. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  olyan téridő, amely minden  $\xi^a$  időszerű vektormező esetén eleget tesz az  $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$  egyenlőtlenségnek. Legyen  $\gamma$  időszerű geodetikus és  $p \in \gamma$  annak egy pontja. Tegyük fel, hogy a  $p$ -ből kifutó, időszerű geodetikusok kongruenciája valamely a  $p$  pont jövőjében fekvő  $r \in \gamma$  pontban negatív  $\theta_0 < 0$  tágulás-értékkel jellemezhető. Ekkor  $r$ -ből indulva  $\gamma$  mentén  $\tau \leq 3/|\theta_0|$  sajátidőn belül létezik  $p$ -hez konjugált  $q$  pont, feltéve, hogy a geodetikus kiterjed odáig.

**Megjegyzés: (Jövőirányban) teljes az a (jövőirányban) nem kiterjeszthető geodetikus,** amelynek affin paramétere végtelenig fut. Az, hogy teljes, időszerű  $\gamma$  geodetikus esetén létezik konjugált pontpár  $\gamma$ -n, a **9.3.1. tétel**nél enyhébb feltételek mellett is igaz. Ha  $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$  mindenütt a geodetikus mentén és legalább egy  $r \in \gamma$  pontban  $R_{ab}\xi^a\xi^b > 0$ , akkor létezik konjugált pontpár  $\gamma$ -n [1, 2].

**Definíció:** Azt mondjuk, hogy az  $(M, g_{ab})$  téridő eleget tesz az **általános időszerűségi feltételnek**, ha minden időszerű geodetikuson létezik legalább egy olyan pont, amelyben  $R_{abcd}\xi^a\xi^b \neq 0$ .

**Megjegyzés:** A fizikailag realiztikus, „általános” téridőkben kézenfekvőnek látszik az általános időszerűségi feltétel teljesülése. (Nevezetesen, ha  $\rho$  és minden  $p_i$  határozottan pozitív minden időszerű geodetikusnak legalább egy pontjában, akkor a feltétel teljesül. *Saját megjegyzés.*)

**9.3.2. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  olyan téridő, amely eleget tesz az általános időszerűségi feltételnek, és tegyük fel, hogy  $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$  bármely  $\xi^a$  időszerű vektormező esetén. Ekkor bármely teljes, időszerű geodetikuson létezik egy konjugált pontpár. (Ez a teljes, időszerű geodetikusokra vonatkozó fentebbi megjegyzés következménye.)

A konjugált pontok létezése és két pontot összekötő időszerű geodetikus extrémális hossza között kapcsolat van. Legyen  $p, q \in M$  pontok a téridőben, ahol  $q \in I^+(p)$ , és tekintsük a  $p$ -ből  $q$ -ba menő, sima, időszerű görbék  $\lambda_\alpha(t)$  egy-paraméteres családját. Válasszuk a  $t$  paramétert úgy, hogy  $\lambda_\alpha(a) = p$  és  $\lambda_\alpha(b) = q$  legyen minden  $\alpha$ -ra. Jelölje a  $(\partial/\partial t)^a$  érintő-vektormezőt  $T^a$ , a  $(\partial/\partial \alpha)^a$  eltérés-vektormezőt  $X^a$ . Ekkor  $X^a|_p = X^a|_q = 0$  és mindenütt  $\mathcal{L}_T X^a = T^b \nabla_b X^a - X^b \nabla_b T^a = 0$ . Az egyes görbék ívhossza (ill. az a sajátidő, amely alatt a rajtuk szabadon eső próbarészecske eljut  $p$ -ből  $q$ -ba)

$$\tau(\alpha) = \int_a^b f(\alpha, t) dt, \quad (9.4.10.)$$

ahol  $f = (-T^a T_a)^{1/2}$ . Korábban beláttuk, hogy annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy ebben a kongruenciában a  $\gamma = \lambda_0$  görbén a sajátidő szélsőérték legyen, az, hogy  $\gamma$  legyen a két pontot összekötő időszerű geodetikus. Most az ívhossz második variációját is meghatározva az alábbi tételt tudjuk belátni.

**9.3.3. tétel:** Legyen  $\gamma$  sima, időszerű görbe, amely összeköti a  $p \in M$  és  $q \in M$  pontokat. Ekkor annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy  $\gamma$ -n (lokálisan) maximális legyen a  $p$ -ből  $q$ -ba jutás alatt eltelt sajátidő, az, hogy  $\gamma$  olyan geodetikus legyen, amelyen nincsen a  $p$  és a  $q$  pontok között  $p$ -hez konjugált pont.

Ismételjük most el a számolást koordináta-invariáns módon, és határozzuk meg az ívhossz második variációját is. Az első variáció meghatározásához írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\alpha} &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha} dt = \int_a^b X^a \nabla_a (-T_b T^b)^{1/2} dt = - \int_a^b \frac{1}{f} T_b X^a \nabla_a T^b dt \\ &= - \int_a^b \frac{1}{f} T_b T^a \nabla_a X^b dt = - \int_a^b T^a \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_b X^b \right) dt + \int_a^b X^b T^a \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_b \right) dt \\ &= \int_a^b X^b T^a \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_b \right) dt, \end{aligned} \quad (9.4.11.)$$

ahol felhasználtuk, hogy  $T^a \nabla_a (T_b X^b / f) = \partial(T_b X^b / f) / \partial t$  és  $X^b$  eltűnnek a végpontokban. Innen látjuk, hogy tetszőleges  $X^b$  esetén  $d\tau/d\alpha$  akkor és csak akkor tűnik el  $\alpha = 0$ -ra, ha  $T^a \nabla_a (f^{-1} T_b) = 0$ , ha  $\alpha = 0$ . Ez éppen a geodetikus egyenlete.

A sajátidő második variációja:

$$\frac{d^2 \tau}{d\alpha^2} = \int_a^b X^c \nabla_c \left[ X^b T^a \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_b \right) \right] dt. \quad (9.4.12.)$$

Számoljuk ezt ki  $\alpha = 0$  esetén és használjuk fel, hogy  $\lambda_0$  geodetikus,  $X^c \nabla_c X^b = 0$ , továbbá a

geodetikus deiváció  $\mathcal{L}_T X^b = 0$  egyenletét:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2 \tau}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} &= \int_a^b X^b (X^c \nabla_c T^a) \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_b \right) dt + \int_a^b X^b T^a X^c \nabla_c \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_b \right) dt \\
&= \int_a^b X^b (T^c \nabla_c X^a) \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_b \right) dt + \int_a^b X^b T^a X^c \nabla_a \nabla_c \left( \frac{1}{f} T_b \right) dt \\
&\quad + \int_a^b X^b T^a X^c R_{cab}{}^d \left( \frac{1}{f} T_d \right) dt \\
&= \int_a^b X^b (T^c \nabla_c X^a) \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_b \right) dt + \int_a^b X^b T^c X^a \nabla_c \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_b \right) dt \\
&\quad + \int_a^b X^b T^a X^c R_{cab}{}^d \left( \frac{1}{f} T_d \right) dt \\
&= \int_a^b X^b T^c \nabla_c \left[ X^a \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_b \right) \right] dt + \int_a^b X^b T^a X^c R_{cab}{}^d \left( \frac{1}{f} T_d \right) dt. \quad (9.4.13.)
\end{aligned}$$

A jobb oldalon a szögletes zárójelben álló kifejezést azonosan átalakíthatjuk:

$$\begin{aligned}
X^a \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_b \right) &= \frac{1}{f} X^a \nabla_a T_b - \frac{1}{f^2} X^a T_b \nabla_a f \\
&= \frac{1}{f} T^a \nabla_a X_b + \frac{1}{2f^2} T_b T^a \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_c X^c \right), \quad (9.4.14.)
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy  $\mathcal{L}_T X^b = 0$ , és hogy  $\alpha = 0$  esetén

$$\begin{aligned}
T^a \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_c X^c \right) &= T^a \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_c \right) + \frac{1}{f} T_c T^a \nabla_a X_c = \frac{1}{f} T_c T^a \nabla_a X_c = \frac{1}{f} T_c X^a \nabla_a T_c \\
&= -\frac{1}{f} X^a \nabla_a (-T_c T^c) = -\frac{1}{f} X^a \nabla_a f^2 = -2X^a \nabla_a f. \quad (9.4.15.)
\end{aligned}$$

Az  $\alpha = 0$  esetén

$$X^a \nabla_a \left( \frac{1}{f} T_b \right) = \frac{1}{f} T^a \nabla_a X_b. \quad (9.4.16.)$$

Válasszuk a paraméterezést úgy, hogy a  $\lambda_0$  geodetikus mentén  $f = 1$  legyen és  $X^a$  legyen ortogonális  $T^a$ -ra. Ekkor azt kapjuk, hogy

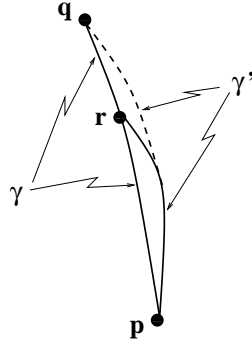
$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2 \tau}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} &= \int_a^b X^b T^c \nabla_c [T^a \nabla_a X_b] dt + \int_a^b X^b T^a X^c R_{cab}{}^d T_d dt \\
&= \int_a^b X^b [T^c \nabla_c (T^a \nabla_a X_b) T^a X^c R_{cab}{}^d T_d] dt \\
&= \int_a^b X^b (\mathcal{O}X)_b dt. \quad (9.4.17.)
\end{aligned}$$

Itt  $\mathcal{O}$  az az operátor, ami az  $\eta^a$  Jacobi-mező, ill. a geodetikus deiváció (9.4.1.) egyenletében megjelenik, amelynek tömör alakja  $(\mathcal{O}\eta)_b = 0$ .

Az

$$\left. \frac{d^2 \tau}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} = \int_a^b X^b (\mathcal{O}X)_b dt \quad (9.4.18.)$$





35. ábra. A  $p$ -ből  $q$ -ba menő  $\gamma$  geodetikuson van  $p$ -hez konjugált  $r$  pont. Ekkor szerkeszthető olyan időszerű  $\gamma'$  görbe, amelynek  $p$  és  $q$  közti ívhossza nagyobb, mint a  $\gamma$  geodetikus ívhossza ezen pontok között.

összefüggést felhasználva tudjuk belátni a **9.3.3. tételt**. Ha a  $p$ -ből  $q$ -ba menő, időszerű  $\gamma$  görbe nem geodetikus, akkor a fentiek szerint szerkeszthetünk egy olyan egy-paraméteres  $\lambda_\alpha(t)$  görbecsaládot, amelyben  $\lambda_0 = \gamma$  és  $d\tau/d\alpha > 0$ , ha  $\alpha = 0$ . Ekkor  $\gamma$  nem teszi szélsőértékké a  $p$ -ből  $q$ -ba jutás sajátidejét. Ha  $\gamma$  geodetikus, amely rendelkezik  $r$  konjugált ponttal  $p$  és  $q$  közt, akkor találhatunk olyan  $X_0^a$  eltérés-vektort, amelyre egyrészt  $(\mathcal{O}X_0)^a = 0$ , másrészt pedig amelyre  $X_0^a|_r = X_0^a|_p = 0$ . Tekintsük azt a  $\gamma''$  görbét, amely  $X^a = X_0^a$  a  $p$  és  $r$  pontok közt és  $X^a = 0$  az  $r$  és  $q$  pontok közt. Fenti eredményünk értelmében  $\gamma''$  és  $\gamma$  ívhossza megegyezik  $\alpha$ -ban másodrendű tagokkal bezárólag. Az  $r$  pontnál levő „szögletet lekerekíthetjük” úgy, hogy végül sima  $\gamma'$  görbét kapjunk, amelyre  $\alpha = 0$ -ban  $d^2\tau/d\alpha > 0$ , azaz amelynek ívhossza másodrendű pontossággal nagyobb, mint  $\gamma$ , ill.  $\gamma''$  ívhossza. Ekkor tehát  $\gamma'$ -n a  $p$  és  $q$  közti sajátidő nagyobb, mint  $\gamma$ -n. A konjugált ponttal rendelkező geodetikus tehát megint nem a maximális ívhosszúságú görbe  $p$  és  $q$  között.

Fordítva, ha  $\gamma$  olyan geodetikus, amelyen nincsen konjugált pont  $p$  és  $q$  között, akkor a fentebb bevezetett  $A$  mátrix nem szinguláris  $p$  és  $q$  között. Ezért definiálhatjuk az  $Y^\mu = (A^{-1})^\mu_\nu X^\nu$  vektort. Ha  $\sum_\nu A^\mu_\nu Y^\nu$ -t helyettesítjük  $X^\mu$  helyére  $d^2\tau/d\alpha^2$  eredményül kapott kifejezésében, akkor meg lehet mutatni, hogy  $d^2\tau/d\alpha^2$  határozottan negatív definit  $\alpha = 0$ -ban (a részletes bizonyítást ld. proposition 4.5.8 alatt [2]-ben). Az ilyen geodetikus tehát a maximális ívhosszúságú görbe  $p$  és  $q$  között.

### 9.4.3. Konjugált pontok hiperfelület-ortogonális időszerű geodetikuson

Legyen  $\Sigma$  sima (vagy legalább  $C^2$ ), térszerű hiperfelület (azaz a téridő-sokaságba beágyazott 3-dimenziós felület). Most értelmezni fogjuk időszerű geodetikuson a rá merőleges, térszerű hiperfelülethez konjugált pontot. Legyen  $\xi^a$  a  $\Sigma$  hiperfelületre ortogonális, időszerű geodetikusok kongruenciájának érintő-vektormezeje. Tekintsük a  $\Sigma$  hiperfelület

$$K_{ab} = \nabla_a \xi_b = B_{ba} \quad (9.4.19.)$$

külső görbületét.

A hiperfelület külső görbületének néhány fontos tulajdonsága:

1.  $K_{ab}$  térszerű, azaz  $K_{ab}\xi^b = K_{ab}\xi^a = 0$ ;
2.  $K_{ab}$  szimmetrikus, azaz  $K_{ab} = K_{ba}$ ;
3. fennáll a

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi h_{ab} \quad (9.4.20.)$$

összefüggés, amelynek értelmében  $K_{ab}$  azt „méri”, hogy a kongruenciára ortogonális hiperfelületeken hogyan változik a térmetrika, ahogy hiperfelületről hiperfelületre haladunk, vagyis hogy „hogyan görbül”  $\Sigma$ , ahogyan haladunk a kongruencia mentén;

4. Gauss-féle normál-koordinátákban a külső görbület komponensei

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}; \quad (9.4.21.)$$

5. a  $\Sigma$ -ra ortogonális időszerű geodetikusok kongruenciájának tágulása

$$\theta = K = K^a_a = h^{ab}K_{ab}. \quad (9.4.22.)$$

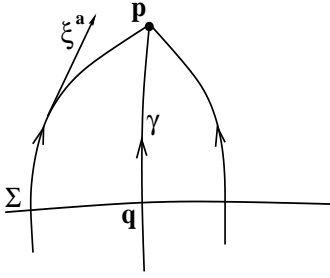
Nyilvánvalóan teljesül az 1. tulajdonság, mert egyrészt  $\xi^b \nabla_b \xi^a = 0$ , hiszen  $\xi^a$  geodetikus érintővektormezeje, másrészt mert  $\xi^a \nabla_b \xi^a = \frac{1}{2} \nabla_b (\xi^a \xi_a) = 0$ . A geodetikusok kongruenciája hiperfelület-ortogonális, ezért  $\omega_{ab} = 0$ , ahonnan  $K_{ab} = K_{ba}$ , úgyhogy fennáll a 2. tulajdonság. A 2. tulajdonság miatt írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2}(K_{ab} + K_{ba}) = \frac{1}{2}(\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g_{ab} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi (h_{ab} - \xi_a \xi_b) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi h_{ab}, \end{aligned} \quad (9.4.23.)$$

ahol kihasználtuk, hogy  $\mathcal{L}_\xi \xi^a = [\xi, \xi]^a = 0$ . A Gauss-féle normálkoordinátákban a (9.4.23.) egyenlőség  $K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial h_{\mu\nu} / \partial t$  alakúra egyszerűsödik, ami a keresett 4. tulajdonság. Az 5. tulajdonság nyilvánvaló, hiszen  $\theta = h^{ab}B_{ba} = h^{ab}K_{ab} = K$ .

**Definíció:** A  $\Sigma$  hiperfelületre ortogonális, időszerű geodetikusok kongruenciájának  $\gamma$  geodetikusán levő  $p$  pontot a  $\Sigma$  **hiperfelülethez konjugált pontnak** nevezzük, ha létezik a kongruenciának olyan, a  $\xi^a$  érintő-vektormezőre merőleges  $\eta^a$  eltérés-vektora, amely  $\Sigma$ -n nem tűnik el, de  $p$ -ben zérus.

**Megjegyzés:** Szemléletesen a  $\Sigma$  hiperfelülethez konjugált  $p$  pont olyan, amelyben bármely két,  $\Sigma$ -ra ortogonális, infinitezimálisan közeli geodetikus metszi egymást (ld. a 36. ábrát). Hasonló érveléssel, mint azt időszerű geodetikuson konjugált pontpár esetén tettük, be lehet látni, hogy akkor és csak akkor létezik a  $\Sigma$  hiperfelülethez konjugált  $p$  pont, ha a hiperfelület-ortogonális geodetikusok kongruenciájának  $\theta$  tágulása a  $p$  pontban  $-\infty$ -hez tart. Mivel hiperfelület-ortogonális kongruenciával van dolgunk, alkalmazható a **9.2.1. lemma**, és így érvényes a következő tétel.



36. ábra. Szemléltető ábra a  $\Sigma$  térszerű hiperfelülethez konjugált  $p$  pont definíciójához. Erős torzítással az ábra a hiperfelület-ortogonális  $\gamma$  időszerű geodetikushoz infinitezimálisan közeli két másik időszerű geodetikust is ábrázol; a geodetikuskok a  $p$  pontban metszik egymást.

**9.3.4. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  olyan téridő, amelyben bármely  $\xi^a$  időszerű vektormezőre teljesül az  $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$  egyenlőtlenség. Legyen  $\Sigma$  térszerű hiperfelület, és tegyük fel, hogy valamely  $q \in \Sigma$  pontban a külső görbület  $K = \theta < 0$ . Ekkor a  $q$  ponton áthaladó, hiperfelület-ortogonális  $\gamma$  geodetikuson véges  $\tau \leq 3/|K|$  sajátidőn belül létezik a  $\Sigma$  hiperfelülethez konjugált  $p$  pont, feltéve, hogy  $\gamma$  kiterjed odáig.

Továbbá a **9.3.3. tétel**hez hasonlóan bizonyítható az alábbi tétel.

**9.3.5. tétel:** Legyen  $\gamma$  sima, időszerű görbe, amely összeköti a  $p \in M$  pontot és a  $\Sigma$  sima, térszerű hiperfelület  $q \in \Sigma$  pontját. Ekkor annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy  $\gamma$  lokálisan maximálissá tegye a  $p$  és  $\Sigma$  (azaz a  $p$  és  $q$ ) közti sajátidőt, az, hogy  $\gamma$  olyan a  $\Sigma$ -ra ortogonális geodetikus kell legyen, amelyen nincsen  $\Sigma$ -hoz konjugált pont  $q$  és  $p$  között.

#### 9.4.4. Konjugált pontok null-geodetikuson

Legyen  $\mu$  null-geodetikus, amelynek  $k^a$  az érintő-vektormezeje. A geodetikus deviáció egyenletéből az  $\eta^a$  Jacobi-mező egyenlete:

$$k^c \nabla_c (k^b \nabla_b (k^a \eta_a)) = 0. \quad (9.4.24.)$$

A geodetikus deviáció egyenlete:

$$k^c \nabla_c (k^b \nabla_b \eta^a) = -R_{cbd}{}^a \eta^b k^c k^d. \quad (9.4.25.)$$

Ezt felhasználva és azt, hogy  $k^b \nabla_b k^a = 0$ , írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} k^c \nabla_c (k^b \nabla_b (k^a \eta_a)) &= k^c \nabla_c (\eta_a k^b \nabla_b k^a + k^a k^b \nabla_b \eta_a) = k^c \nabla_c (k^a k^b \nabla_b \eta_a) \\ &= (k^c \nabla_c k^a) k^b \nabla_b \eta_a + k^a (k^c \nabla_c (k^b \nabla_b \eta_a)) = k^a (k^c \nabla_c (k^b \nabla_b \eta_a)) \\ &= -R_{cbda} k^a k^c k^d \eta^b = 0, \end{aligned} \quad (9.4.26.)$$

mert  $R_{cbda} = -R_{bcda}$ .

Innen következik, hogy

1. Az  $\eta^a$  Jacobi-mező nem tűnhet el két különböző ( $p$  és  $q \neq p$ ) pontban, kivéve, ha  $k^a \eta_a = 0$  a  $\mu$  null-geodetikus mentén mindenütt.

Ha  $\lambda$  a null-geodetikus affin paramétere, akkor a geodetikus deviáció egyenlete  $d^2(k^a \eta_a)/d\lambda^2 = 0$  alakba írható, ahonnan  $d(k^a \eta_a)/d\lambda = \text{áll.}$ , azaz  $k^a \eta_a = c_1 + c_2 \lambda$ , ahol  $c_1$  és  $c_2$  valós állandók. Nyilvánvaló, hogy  $\eta^a$  két különböző  $\lambda$  értékre akkor és csak akkor tűnhet el, ha  $c_1$  és  $c_2$  is zérus, azaz ha  $k^a \eta_a = 0$  a  $\mu$  null-geodetikus mentén mindenütt.

2. Ha  $\eta^a$  Jacobi-mező, akkor  $\eta^a + (a + b\lambda)k^a$  is az, ahol  $a, b \in \mathbb{R}$  állandók.

Az elmondottak alapján a következő definíciót adhatjuk null-geodetikuson elhelyezkedő konjugált pontpárra.

**Definíció:** A  $\mu$  null-geodetikus  $p$  és  $q \neq p$  pontjait akkor és csak akkor nevezzük **konjugált pontoknak**, ha létezik olyan  $\eta^a$  Jacobi-mező, hogy az  $\eta^a$  deviációs vektor  $p$ -ben és  $q$ -ban is csak  $k^a$  számszorosával különbözik zérustól.

A definíciót ekvivalens módon fogalmazhatjuk át a  $\hat{V}_p$  vektorterek ( $\forall p \in M$ ) felhasználásával:

**Definíció:** A  $\mu$  null-geodetikus  $p \in \mu$  és  $q \in \mu$  pontjai akkor és csak akkor konjugáltak, ha létezik olyan nem triviális  $\hat{\eta}^a \in \hat{V}$  vektormező, amely kielégíti a geodetikus deviáció egyenletét és eltűnik  $p$ -ben és  $q$ -ban.

Minden olyan  $\hat{\eta}^a$  eltérés-vektormező, amely eltűnik  $p$ -ben, a null-geodetikusok egy olyan kongruenciájából kell származzon, amely tartalmazza a  $p$ -ből kiinduló null-geodetikusok 2-dimenziós családját. Ekkor viszont az időszerű esethez hasonló megfontolásból adódik a következő állítás.

**Állítás:** A  $\mu$  null-geodetikuson levő  $q$  pont akkor és csak akkor konjugált a  $p \in \mu$  ponthoz, ha a  $p$ -ből kiinduló null-geodetikusoknak  $\mu$ -t is tartalmazó kongruenciája a  $q \in \mu$  pontban  $-\infty$  távulással rendelkezik.

Ekkor a **9.2.2. lemma** maga után vonja az alábbi tétel érvényességét.

**9.3.6. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  olyan téridő, amely eleget tesz az  $R_{ab}k^a k^b \geq 0$  egyenlőtlenségnek tetszőleges  $k^a$  null-vektor esetén a téridő minden pontjában. Legyen  $\mu$  null-geodetikus és  $p \in \mu$  annak egy pontja. Tegyük fel továbbá, hogy a  $p$ -ből kiinduló null-geodetikusok kongruenciájának  $\theta$  távulása valamely  $\mu \in r$  pontban  $\theta_0 < 0$  értéket vesz fel. Ekkor a  $\mu$  null-geodetikuson létezik az  $r \in \mu$  ponttól  $\lambda \leq 2/|\theta_0|$  affin (paraméterben mért) távolságon belül a  $p$  ponthoz konjugált  $q$  pont, feltéve, hogy  $\mu$  legalább odáig kiterjed.

**Megjegyzés:** Most is megfogalmazható egy erősebb állítás, akárcsak az időszerű esetben, ha a  $\mu$  null-geodetikus teljes: Ha  $R_{ab}k^a k^b \geq 0$  mindenütt egy teljes  $\mu$  null-geodetikuson és létezik legalább egy  $r \in \mu$  pont, ahol vagy  $R_{ab}k^a k^b > 0$ , vagy  $k_{[e}C_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c \neq 0$ , akkor  $\mu$ -n létezik konjugált pontpár.

**Definíció:** Azt mondjuk, hogy az  $(M, g_{ab})$  téridő eleget tesz az **általános null-feltételnek**, ha minden null-geodetikuson létezik legalább egy olyan pont, amelyben

vagy  $R_{ab}k^ak^b > 0$ , vagy  $k_{[e}C_{a]bc[d}k_{f]}k^bk^c \neq 0$ , azaz amelyben  $k_{[e}R_{a]bc[d}k_{f]}k^bk^c \neq 0$ .

Ekkor a **9.3.2. tétel**hez hasonlóan:

**9.3.7. tétel:** Ha az  $(M, g_{ab})$  téridő kielégíti az általános null-feltételt és  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  minden  $k^a$  null-vektormezőre a téridő minden pontjában, akkor minden teljes null-geodetikuson van konjugált pontpár.

Az időszerű esetben megmutattuk, hogy a konjugált pontok létezése esetén a  $\gamma$  időszerű geodetikus variációjával kaphatunk olyan időszerű görbét, amely hosszabb „utat” jelent két  $p \in M$  és  $q \in M$  pont között, mint maga a geodetikus. Ha létezik egy  $r$  konjugált pont  $p$  és  $q$  között, akkor úgy járunk el, hogy a  $p$  és  $r$  közötti görbeszakaszt egy infinitezimálisan közeli geodetikusra deformáljuk, míg az  $r$  és  $q$  közti darabon az eredeti  $\gamma$  geodetikust követjük, majd pedig az  $r$  pontnál kapott „szögletet lekerekítjük”. Teljesen hasonlóan, null-geodetikuson a konjugált pontpár létezése azt jelzi, hogy a  $p$ -t  $q$ -val összekötő  $\mu$  null-geodetikus kis variációval a  $p$  és  $q$  pontot összekötő, infinitezimálisan közeli időszerű görbébe deformálható. Ha van egy  $r$  konjugált pont  $p$  és  $q$  között, akkor  $\mu$ -nek a  $p$  és  $r$  közti szakaszát egy infinitezimálisan közeli null-geodetikusra deformáljuk, miközben  $r$  és  $q$  között követjük  $\mu$ -t, majd az  $r$ -nél keletkezett „szögletet” megint „lekerekítjük”, hogy egy  $p$ -ből  $q$ -ba menő időszerű görbét kapjunk. Ekkor a következő tétel adódik.

**9.3.8. tétel:** Legyen  $\mu$  sima, kauzális görbe és  $p, q \in \mu$ . Ekkor akkor és csak akkor nem létezik a kauzális görbék olyan  $\lambda_\alpha$  egy-paraméteres,  $p$ -t és  $q$ -t összekötő családja, amelyben  $\lambda_0 = \mu$  és  $\lambda_\alpha$  időszerű  $\forall \alpha > 0$  esetén, (azaz a  $\mu$  kauzális görbe akkor és csak akkor nem deformálható folytonosan időszerű görbébe), ha  $\mu$  olyan null-geodetikus, amelyen nincsen  $p$ -hez konjugált pont  $p$  és  $q$  között.

#### 9.4.5. 2-dimenziós, térszerű felülethez konjugált pont null-geodetikuson

Legyen  $S$  2-dimenziós, térszerű felület (azaz beágyazott részsokaság). Ekkor minden  $q \in S$  pontban 2 (független)  $S$ -re merőleges null-vektor létezik,  $k_1^a$  és  $k_2^a$ . Ha  $S$  irányítható, akkor  $k_1^a$  és  $k_2^a$  folytonos vektormezőkként értelmezhetők  $S$ -en. Ezek null-geodetikusok 2 családját definiálják, amelyek egyikét „kifutó”, a másikat „befutó” null-geodetikusok családjának nevezzük. Mind a két családot null-geodetikusok kongruenciájának fogjuk nevezni, noha nem egy nyílt téridő-tartományt feszítenek ki, hanem csak egy-egy null-hiperfelületet. Ezek a kongruenciák tartalmazzák a  $k^a$  érintő-vektormezőre ortogonális összes  $\eta^a$  eltérés-vektorhoz tartozó null-geodetikust. Így mindkét (hiperfelület-ortogonális) kongruencia esetén  $\theta$ ,  $\hat{\sigma}_{ab}$  és  $\hat{\omega}_{ab} = 0$  jól definiált.

**Definíció:** Legyen  $\mu$  null-geodetikus valamelyik kongruenciában. A  $p \in \mu$  pontot a **2-dimenziós, térszerű  $S$  felülethez konjugált pontnak** nevezzük akkor és csak akkor, ha a  $\mu$  null-geodetikus mentén létezik olyan  $\hat{\eta}^a$  eltérés-vektormező, amely nem zéró  $S$ -en, de eltűnik  $p$ -ben.

Ekkor a **9.3.4. tétel**hez és a **9.3.5. tétel**hez hasonló tételek érvényesek.

**9.3.9. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  olyan téridő, amely mindenütt eleget tesz az  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  feltételnek minden  $k^a$  null-vektormezőre. Legyen  $S$  sima, 2-dimenziós, térszerű részsokaság, amelyen a „kifutó” null-geodetikusok kongruenciájának  $\theta$  tágulása  $\theta_0 < 0$  értéket vesz fel a  $q \in S$  pontban. Ekkor a  $q$ -n áthaladó null-geodetikuson  $\lambda \leq 2/|\theta_0|$  affin paraméterben mért távolságon belül létezik az  $S$ -hez konjugált  $p$  pont.

**9.3.10. tétel:** Legyen  $S$  sima, 2-dimenziós, térszerű részsokaság, és legyen  $\mu$  az  $S$ -ből  $p$ -be futó, sima, kauzális görbe. Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy  $\mu$  nem deformálható folytonosan  $S$ -ből  $p$ -be tartó, infinitezimálisan közeli időszerű görbébe, az, hogy  $\mu$  legyen az  $S$  felületre ortogonális olyan null-geodetikus, amelyen nincsen  $S$ -hez konjugált pont  $S$  és  $p$  között.

A **9.3.10. tétel** és a **8.3.11. tétel** értelmében a szingularitási tételek bizonyítása szempontjából fontos tételt mondhatunk ki.

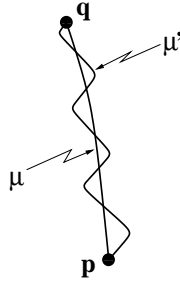
**9.3.11. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő, és legyen  $K$  kompakt, irányított, 2-dimenziós, térszerű részsokaság  $M$ -ben. Ekkor bármely  $p \in \dot{I}^+(K)$  pont olyan  $K$ -ból induló, jövőirányú null-geodetikuson fekszik, amely ortogonális  $K$ -ra, és amelyen nincsen  $K$ -hoz konjugált pont  $K$  és  $p$  között.

A **8.3.11. tétel** utáni bekezdés értelmében bármely  $p \in \dot{I}^+(K)$  pont null-geodetikus mentén köthető össze  $K$ -val. Ha ez a null-geodetikus nem lenne ortogonális  $K$ -ra, vagy lenne rajta  $K$ -hoz konjugált pont, akkor a **9.3.10. tétel** értelmében  $p \in I^+(K)$  lenne, vagyis nem lehetne  $\dot{I}^+(K)$  pontja. A  $p$ -t  $K$ -val összekötő null-geodetikusnak tehát ortogonálisnak kell lennie  $K$ -ra és nem lehet rajta  $K$  és  $p$  közt  $K$ -hoz konjugált pont.

## 9.5. Maximális hosszúságú görbék létezése

Az előző 9.3. fejezetben „lokális” megfontolásokkal megadtuk annak a szükséges és elégséges feltételét, hogy egy időszerű görbe két pont között (**9.3.3. tétel**), ill. egy pont és egy térszerű  $\Sigma$  hiperfelület között (**9.3.5. tétel**) a maximális hosszúságú görbe legyen, továbbá, hogy ezek a feltételek milyen körülmények között nem teljesülhetnek (a konjugált pont létezésére vonatkozó **9.3.1. tétel**ben és a **9.3.4. tétel**ben). Ebben a fejezetben a kauzális görbék  $C(p, q)$  és  $C(p, \Sigma)$  tereinek kompaktságát kihasználva globális megfontolások alapján belátjuk, hogy globálisan hiperbolikus téridőben léteznek maximális hosszúságú görbék. A következő fejezetben további feltevések mellett megmutatjuk, hogy a „lokális” és a „globális” megfontolásokon alapuló eredmények ellentmondásra vezetnek, ha minden geodetikus teljes. Ebből az fog következni, hogy nem lehet minden geodetikus teljes, azaz a téridőnek szingulárisnak kell lennie. Így jutunk majd a szingularitási tételekhez.

Először is az ívhossz fogalmát általánosítjuk sima (ill. legalább  $C^1$ ) görbékről



37. ábra. Annak szemléltetése, hogy a  $\mu$  sima, időszerű görbéhez található a  $C(p, q)$  topológiájában infinitezimálisan közeli olyan  $\mu'$  sima, időszerű görbe, amelyen a  $p$  és  $q$  pontok közti sajátidő tetszőlegesen közel lehet zérushoz.

folytonos görbékre. Sima, kauzális  $\lambda$  görbe esetén a  $\tau[\lambda]$  ívhossz

$$\tau[\lambda] = \int (-T^a T_a)^{1/2} dt, \quad (9.5.1.)$$

ahol  $T^a = (\partial/\partial t)^a$  a geodetikus érintő-vektormezeje. Azért kell általánosítanunk az ívhossz fogalmát folytonos kauzális görbékre, hogy az ívhossz  $C(p, q)$  minden görbéjére értelmezve legyen. Legyen  $\tilde{C}(p, q)$  a  $C(p, q)$  tér azon részhalmaza, amely csak a sima, időszerű görbéket tartalmazza, és tekintsük  $\tilde{C}(p, q)$ -t a  $C(p, q)$  által indukált topológiával. Tekintsünk el azoktól az esetektől, amikor a  $p$  és  $q$  pontot null-geodetikusok kötik össze. Ekkor  $\tilde{C}(p, q)$  sűrű  $C(p, q)$ -ban, azaz kivéve bizonyos null-geodetikusokat, minden  $p$ -t  $q$ -val összekötő folytonos kauzális görbe előállítható sima, időszerű  $\lambda_n$  görbék sorozatának határértékeként ( $C(p, q)$  topológiája szerint). Ha  $\tau$  folytonos lenne a sima, időszerű görbék  $\tilde{C}(p, q)$  halmazán, akkor folytonos függvényként terjeszthetnénk ki  $C(p, q)$ -ra a

$$\tau[\mu] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau[\lambda_n] \quad (9.5.2.)$$

határértékkal, ahol  $\mu \in C(p, q)$  és  $\{\lambda_n\}$  a sima, időszerű görbék olyan sorozata  $\tilde{C}(p, q)$ -ban, amely  $\mu$ -höz konvergál. A  $\tau[\mu]$  ívhossz azonban nem folytonos  $\tilde{C}(p, q)$ -n, mert pl. bármely  $\mu$  sima, időszerű görbéhez találhatunk olyan, a  $C(p, q)$  topológiájában infinitezimálisan közeli  $\mu'$  sima, időszerű görbét, amely „csaknem null-görbék darabjaiból” áll, és amelyen az ívhossz csaknem zérus (ld. a 37. ábrát). A  $\tau[\lambda] : \tilde{C}(p, q) \mapsto \mathbb{R}$  függvény azonban **felülről szemifolytonos**.

**Definíció:** a  $\tau[\lambda] : \tilde{C}(p, q) \mapsto \mathbb{R}$  függvényt **felülről szemifolytonosnak** nevezzük, ha minden  $\lambda \in \tilde{C}(p, q)$ -hoz és minden  $\epsilon > 0$ -hoz létezik  $\lambda$ -nak olyan nyílt  $O \subset \tilde{C}(p, q)$  környezete, hogy bármely  $\lambda' \in O$  esetén  $\tau[\lambda'] \leq \tau[\lambda] + \epsilon$ .

**Állítás:** Ha elfogadjuk, hogy  $\tau$  felülről szemifolytonos a  $\tilde{C}(p, q)$  halmazon (amit alább a **9.4.1. tétel** bizonyítása során be is látunk), akkor kiterjeszthetjük  $\tau$ -t felülről szemifolytonos függvényként  $C(p, q)$ -ra.

Legyen  $\mu \in C(p, q)$  és  $O \subset C(p, q)$  a  $\mu$ -nek nyílt környezete, és definiáljuk a  $T[O]$ -t, mint

$$T[O] = \text{l.u.b.}\{\tau[\lambda] | \lambda \in O, \lambda \in \tilde{C}(p, q)\}, \quad (9.5.3.)$$

ahol l.u.b. a legkisebb felső korlátot (least upper bound) jelöli. Tehát  $T[O]$  a  $\mu$  folytonos kauzális görbe  $O$  környezetében található sima, időszerű görbék ívhosszainak legkisebb felső korlátja. Definiáljuk ezután a  $\mu$  görbe ívhosszát, mint  $T[O]$  legnagyobb alsó korlátját, ha  $O$  végigfut  $\mu$  össze nyílt környezetein,

$$\tau[\mu] = \text{g.l.b.}\{T[O] | O \text{ nyílt környezet, } \mu \in O\}, \quad (9.5.4.)$$

ahol g.l.b. a legnagyobb alsó korlátot (greatest lower bound) jelöli.

**9.4.1. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  erősen kauzális téridő. Legyenek  $p, q \in M$  olyan pontok, hogy  $q \in I^+(p)$ . Ekkor a  $\tau$  ívhossz-függvény felülről szemifolytonos  $\tilde{C}(p, q)$ -n.

Legyen  $\lambda \in \tilde{C}(p, q)$ , parametrizáljuk  $\lambda$ -t a sajátidővel, és jelöljük az érintőjét  $u^a$ -val. Minden  $r \in \lambda$  pont konvex normál környezetében az  $u^a$ -ra merőleges, térszerű geodetikusok egy 3-dimenziós térszerű hiperfelületet képeznek. A  $\lambda$  görbének egy kellően kicsiny  $U \subset M$  nyílt környezetében ezek a térszerű hiperfelületek rétegzik  $U$ -t: azaz pontosan egy ilyen hiperfelület fog áthaladni  $U$  bármely pontján. Értelmezzünk most egy  $F$  függvényt  $U$ -n: minden  $p \in U$  ponthoz azt az  $F(p)$  értéket rendeljük, ami megegyezik azzal a sajátidővel, amely  $\lambda$ -nak és annak a hiperfelületnek a metszéspontjához tartozik, amelyen  $p$  helyet foglal. Ekkor  $\nabla^a F$  mindenütt időszerű  $U$ -ban, továbbá  $\lambda$ -n  $u^a = -\nabla^a F$ , úgyhogy  $(\nabla_a F)(\nabla^a F) = -1$  a  $\lambda$ -n.

Legyen most  $\rho \in \tilde{C}(p, q)$  olyan, hogy  $\rho \in U$ . Parametrizáljuk  $\rho$ -t  $F$ -fel, és jelöljük az érintőjét  $v^a$ -val. A paraméterezés következtében

$$v^a \nabla_a F = 1. \quad (9.5.5.)$$

Bontsuk fel  $v^a$ -t időszerű és térszerű  $m^a$  komponensre,

$$v^a = \alpha \nabla^a F + m^a, \quad (9.5.6.)$$

ahol  $m^a \nabla_a F = 0$  és  $\alpha$  valós paraméter, amelyre

$$1 = v^a \nabla_a F = \alpha (\nabla_a F)(\nabla^a F), \Rightarrow \alpha = \frac{1}{(\nabla_a F)(\nabla^a F)}, \quad (9.5.7.)$$

úgyhogy végül

$$v^a = \frac{\nabla^a F}{(\nabla_b F)(\nabla^b F)} + m^a \quad (9.5.8.)$$

adódik. Ebből következik, hogy

$$v_a v^a = \frac{1}{(\nabla_a F)(\nabla^a F)} + m^a m_a \geq \frac{1}{(\nabla_a F)(\nabla^a F)}, \quad (9.5.9.)$$

mert  $m^a$  térszerű. Így viszont fennáll a

$$(-v_a v^a)^{1/2} \leq [-(\nabla_a F)(\nabla^a F)]^{-1/2} \quad (9.5.10.)$$

egyenlőtlenség. Mivel  $\nabla_a F$  folytonos, minden  $\epsilon > 0$ -hoz választhatjuk  $\lambda$  olyan  $U' \subset U$  környezetét, amelyben  $[-(\nabla_a F)(\nabla^a F)]^{-1/2} \leq 1 + (\epsilon/\tau[\lambda])$  az  $U'$ -ben. Ekkor minden olyan  $\rho \in \tilde{C}(p, q)$  esetén, amely benne van az  $U'$  által definiált  $O' \subset \tilde{C}(p, q)$  nyílt környezetben, a

$$\tau[\rho] = \int (-v_a v^a)^{1/2} dF \leq \tau[\lambda] + \epsilon \quad (9.5.11.)$$



egyenlőtlenség teljesül, ami igazolja, hogy  $\tau$  felülről szemifolytonos.

Korábban megmutattuk, hogy annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy *sima* görbe két pont vagy egy pont és egy hiperfelület között a távolságot maximálissá tegye, az, hogy a görbe konjugált pontok nélküli geodetikus legyen. Miután most kiterjesztettük az ívhossz fogalmát folytonos görbékre, felmerül annak a lehetősége, hogy egy *folytonos, nem sima* görbe két pont vagy egy pont és egy hiperfelület között nagyobb ívhosszú lehet, mint bármely geodetikus. Ez a lehetőség azonban kizárható.

Közvetlen számolással belátható (ld. [2] proposition 4.5.3-at), hogy bármely  $U$  konvex normál környezetben az egyértelműen meghatározott  $\gamma$  geodetikusnak, amely összeköt két kauzálsan elkülönült  $r, s \in U$  pontot, határozottan nagyobb az ívhossza, mint bármely más, szakaszonként *sima* görbének, amely összeköti ugyanezt a két pontot. Ekkor viszont amiatt, hogy az ívhossz felülről szemifolytonos, az  $r$  és  $s$  pontot  $U$ -ban összekötő bármely  $\mu$  folytonos kauzális görbe ívhosszára  $\tau[\mu] \leq \tau[\gamma]$  teljesül.

Tegyük fel, hogy az egyenlőség teljesülne valamely  $\mu \neq \gamma$ -ra, és legyen  $q \in \mu$  olyan pont, amelyre  $q \notin \gamma$ . Legyenek  $\gamma_1$  és  $\gamma_2$  azok a geodetikus-darabok, amelyek összekötik rendre  $r$ -et  $q$ -val és  $q$ -t  $s$ -sel. Miután  $\gamma_1$  maximalizálja az ívhosszat  $r$  és  $q$  között,  $\gamma_2$  pedig  $q$  és  $s$  között,  $\tau[\gamma_1] + \tau[\gamma_2] \geq \tau[\mu] = \tau[\gamma]$  adódik. Ez az egyenlőtlenség viszont ellentmond annak, hogy  $\gamma$  ívhossza határozottan hosszabb kell legyen, mint az  $r$  és  $s$  közti bármely szakaszonként *sima* görbe ívhossza. Tehát csak a  $\tau[\mu] > \tau[\gamma]$  egyenlőtlenség állhat fenn, ha  $\mu \neq \gamma$ .

Beláttuk tehát, hogy bármely konvex normál környezetben belül két kauzálsan elválasztott pontot összekötő, egyértelműen meghatározott geodetikus ívhossza határozottan nagyobb, mint bármely más, ugyanezen pontokat összekötő, folytonos kauzális görbéé. Ezért bármely két pontot összekötő, tetszőleges folytonos, kauzális görbe sem lehet maximális ívhosszú, hacsak nem geodetikus. Ha ugyanis valamely pontban nem lenne geodetikus, akkor annak konvex normál környezetében olyan görbébe deformálhatnánk, amelynek nagyobb az ívhossza. Így a **9.3.3. tétel** alapján az alábbi eredményre jutunk.

**9.4.2. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  erősen kauzális téridő. Legyenek  $p, q \in M$  olyan pontok, amelyekre  $q \in J^+(p)$ , továbbá legyen  $\tau$  a folytonos, kauzális görbék  $C(p, q)$  terén értelmezett ívhossz-függvény. Annak a szükséges feltétele, hogy  $\tau$  felvegye a maximális értékét a  $\gamma \in C(p, q)$  görbén, az, hogy  $\gamma$  legyen olyan geodetikus, amelyen nincsen  $p$ -hez konjugált pont  $p$  és  $q$  között

**9.4.3. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  erősen kauzális téridő. Legyen  $p \in M$ , és legyen  $\Sigma$  akronális, *sima*, térszerű hiperfelület. Legyen továbbá  $\tau$  a  $C(\Sigma, p)$  halmazon értelmezett  $\tau$  ívhossz-függvény. Annak a szükséges feltétele, hogy  $\tau$  felvegye a maximális értékét a  $\gamma \in C(\Sigma, p)$  görbén, az, hogy  $\gamma$  legyen a  $\Sigma$ -ra ortogonális olyan geodetikus, amelyen nincsen  $\Sigma$ -hoz konjugált pont  $\Sigma$  és  $p$  között.

A **9.4.2. tétel** és a **9.4.3. tétel** csak annak a szükséges feltételéről szól, hogy  $\tau$  valamely *sima* görbén felvegye két pont között, vagy egy pont és egy térszerű hiperfelület között a maximális értékét. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a szükséges

feltétel teljesülése esetén van is olyan  $\gamma$ , amelyen az ívhossz felvesz egy maximális értéket. Globálisan hiperbolikus téridőben azonban  $\tau$  mindig fel is vesz egy maximális értéket.

**9.4.4. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő, és legyenek  $p, q \in M$  olyan pontok, amelyekre  $q \in J^+(p)$ . Ekkor létezik olyan  $\gamma \in C(p, q)$  görbe, amelyen  $\tau[\gamma]$  maximális értéket vesz fel  $C(p, q)$ -n.

A **8.3.9. tétel** értelmében  $C(p, q)$  kompakt. Ekkor a **9.4.1. tétel** és az azt megelőző állítás értelmében  $\tau$  felülről szemifolytonos  $C(p, q)$ -n. Az **A.6. tétel** kis módosítása révén akkor  $\tau$  korlátos függvény, úgyhogy felveszi a maximumát.

**9.4.5. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő, és legyen  $p \in M$ , továbbá legyen  $\Sigma$  Cauchy-felület. Ekkor létezik olyan  $\gamma \in C(\Sigma, p)$  görbe, amelyen  $\tau$  maximális értéket vesz fel  $C(\Sigma, p)$ -n.

A bizonyítás váza megint az, hogy  $C(\Sigma, p)$  kompakt, akkor  $\tau$  felülről szemifolytonos  $C(\Sigma, p)$ -n, de akkor korlátos, úgyhogy van olyan  $\gamma \in C(\Sigma, p)$  görbe, amelyen  $\tau$  maximális értéket vesz fel.

## 9.6. Szingularitási tételek

Az eddig belátott „lokális” és „globális” megfontolásokon alapuló tételekből a következő ellentmondás bontakozik ki. Ha egy  $p \in M$  pontból, vagy egy  $\Sigma$  térszerű hiperfelületről ortogonálisan kiinduló, időszerű geodetikusok kongruenciája valamely  $r \in M$  pontban összetartó, akkor az  $r$ -en áthaladó geodetikuson van  $p$ -hez, ill.  $\Sigma$ -hoz konjugált  $q$  pont. Ekkor viszont a geodetikus  $p$  és  $q$ , ill.  $\Sigma$  és  $q$  közti ívhossza nem lehet maximális. Másrészt viszont globálisan hiperbolikus téridőben minden *teljes* geodetikus  $p$  és  $q$ , ill.  $\Sigma$  és  $q$  között maximális ívhosszúságú. Ezt az ellentmondást az oldhatja fel, ha *nem minden geodetikus teljes* a téridőben. Ha ez bekövetkezik, akkor viszont a téridő szinguláris.

### 9.6.1. A táguló Világegyetemre alkalmazható szingularitási tételek

Az első szingularitási tétel leegyszerűsítve azt állítja, hogy ha a Világegyetem globálisan hiperbolikus és a  $\theta$  tágulása egy adott pillanatban mindenütt pozitív, akkor a Világegyetem történetének véges idővel ezelőtt egy szingularitással kellett kezdődnie.

**9.5.1. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő, amelyben tetszőleges  $\xi^a$  időszerű vektormezőre teljesül az  $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$  egyenlőtlenség, ami megvalósul, ha az Einstein-egyenletek fennállnak és az anyag kielégíti az erős energiafeltételt. Tegyük fel, hogy létezik olyan sima (vagy legalább  $C^2$ ), térszerű  $\Sigma$  Cauchy-felület, amelynek minden pontjában a külső görbület spúrja (a múltirányú, hiperfelület-ortogonális geodetikusok kongruenciájára nézve) eleget tesz a  $K \leq C < 0$  egyenlőtlenségnek, ahol  $C$  állandó. Ekkor nem létezik olyan  $\Sigma$ -ból induló, múltirányú

geodetikus, amelynek ívhossza nagyobb lenne, mint  $3/|C|$ . Másképpen fogalmazva, egyetlen múltirányú geodetikus sem teljes.

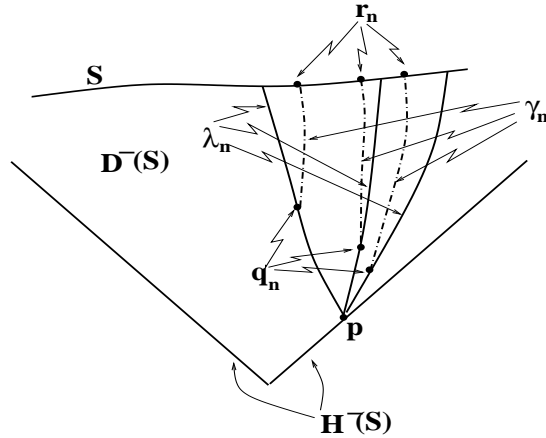
Tegyük fel, hogy létezik olyan  $\Sigma$ -ból induló, múltirányú, időszerű  $\lambda$  görbe, amelynek ívhossza nagyobb, mint  $3/|C|$ . Legyen  $p \in \lambda$  olyan pont, amely  $\Sigma$ -tól mérve  $3/|C|$ -nél nagyobb ívhosszban mért távolságra fekszik  $\lambda$ -n. A **9.4.5. tétel** értelmében létezik  $p$ -ből  $\Sigma$ -ba futó maximális hosszúságú  $\gamma$  görbe, amelynek hossza nyilvánvalóan szintén nagyobb kell legyen, mint  $3/|C|$ . A **9.4.3. tétel** értelmében  $\gamma$ -nak olyan geodetikusnak kell lennie, amelyen nincsen  $\Sigma$ -hoz konjugált pont  $p$  és  $\Sigma$  között. Ez azonban ellentmond a **9.3.4. tételnek**, amelynek értelmében  $\gamma$ -n kell lennie  $\Sigma$ -hoz konjugált pontnak  $p$  és  $\Sigma$  között. Ez tehát azt jelenti, hogy a feltételezett tulajdonságú  $\lambda$  görbe nem létezhet.

**Megjegyzés:** A **9.5.1. tételben** a legerősebb feltevés, hogy a Világegyetem globálisan hiperbolikus. A tétel alapján arra hajlanánk, hogy inkább elvessük ezt a feltevést, semmint elfogadjuk, hogy a mindenütt táguló Világegyetem kezdete szinguláris volt. Mivel a **9.4.3. tételt** erősen kihasználtuk a bizonyítás során, ezért elképzelhető, hogy a globális hiperbolicitás feltevésének feladása esetén nem jutnánk arra a konklúzióra, hogy a Világegyetem története szingularitással kezdődött. Alább azonban belátunk egy Hawkingtől származó tételt, amelynek értelmében a kezdeti szingularitásnak nem szükséges feltétele az, hogy a téridő globálisan hiperbolikus legyen. Az ár, amit fizetünk a globális hiperbolicitás feltételének eltávolításáért, egyrészt az a járulékos feltevés, hogy  $\Sigma$  kompakt (azaz a Világegyetem „zárt”), másrészt az, hogy gyengébb kijelentést tudunk csak tenni: nem minden múltirányú, időszerű geodetikusról látjuk be, hogy nem teljes, hanem csak azt tudjuk belátni, hogy van legalább egy nem teljes, múltirányú, időszerű geodetikus.

**9.5.2. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  erősen kauzális téridő, amelyben tetszőleges  $\xi^a$  időszerű vektormezőre teljesül az  $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$  egyenlőtlenség, ami megvalósul, ha az Einstein-egyenletek fennállnak és az anyag kielégíti az erős energia-feltételt. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan perem nélküli, akronális, sima, térszerű  $S$  hiperfelület, hogy az  $S$ -ből kiinduló, múltirányú, hiperfelület-ortogonális geodetikusok kongruenciájára nézve  $S$  külső görbülete  $S$ -en mindenütt  $K < 0$ . Legyen  $K$  maximális értéke  $S$ -en olyan  $C$ , hogy  $K \leq C < 0$ . Ekkor legalább egy  $S$ -ből induló, múltba ki nem terjeszthető olyan múltirányú, időszerű geodetikus létezik, amelynek  $S$ -től mért ívhossza nem nagyobb, mint  $3/|C|$ .

Tegyük fel, hogy minden  $S$ -ből induló, múltba ki nem terjeszthető, múltirányú, időszerű geodetikus ívhossza nagyobb, mint  $3/|C|$ . Miután a  $(\text{int}[D(S)], g_{ab})$  téridő teljesíti a **9.5.1. tétel** feltételeit, azért minden  $S$ -ből induló, múltba ki nem terjeszthető, időszerű geodetikusként ki kell lépnie  $\text{int}[D(S)]$ -ből. A **8.3.6. tétel** értelmében  $H(S)$  a teljes  $D(S)$  függőségi tartomány határa. Ezért minden  $S$ -ből induló, múltba ki nem terjeszthető, időszerű geodetikusként metszenie kell  $H^-(S)$ -et mielőtt az ívhossza nagyobb lesz, mint  $3/|C|$ . Ez azt jelenti, hogy  $H^-(S) \neq \emptyset$ . Először megmutatjuk, hogy  $H^-(S)$  kompakt, utána pedig azt, hogy ez ellentmondásra vezet.

Annak belátásához, hogy  $H^-(S)$  kompakt, szükségünk lesz arra a tényre, hogy minden  $p \in H^-(S)$  ponthoz tartozik egy  $S$ -ből  $p$ -be futó,  $S$ -re ortogonális, maximális ívhosszú geodetikus. Abból indulunk ki, hogy bármely  $S$ -ből  $p \in H^-(S)$ -be futó kauzális görbe  $\tau$  ívhosszának  $3/|C|$  a felső korlátja. Akkor viszont az  $S$ -ből  $p \in H^-(S)$ -be futó görbék halmazán létezik  $\tau$ -nak legkisebb felső korlátja, legyen ez  $\tau_0$ . Szeretnénk olyan  $S$ -re ortogonális,  $S$ -ből  $p$ -be futó geodetikust találni,



38. ábra. A **9.5.2. tétel** bizonyításához használt pont- és görbesorozatok szemléltetése.

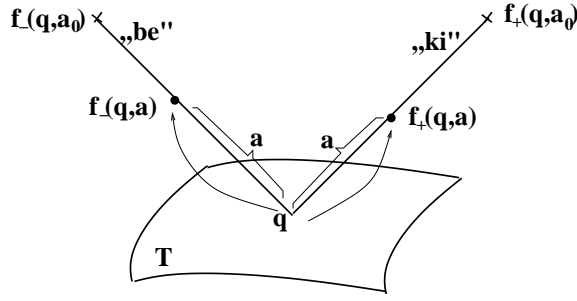
amelynek hossza éppen  $\tau_0$ . Legyen  $\{\lambda_n\}$  az  $S$ -ből  $p$ -be futó, időszerű görbék olyan sorozata, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau[\lambda_n] = \tau_0$ . Válasszunk minden  $\lambda_n$  görbén egy  $q_n \in \lambda_n$  pontot úgy, hogy a  $\{q_n\}$  sorozat  $p$ -hez konvergáljon. Mivel  $q_n \in I^+(p)$ , azért  $q_n \in \text{int}[D^-(S)]$ . Akkor a **9.4.5. tétel** értelmében minden  $q_n$ -hez létezik olyan az  $S$ -ből  $q_n$ -be futó,  $S$ -re ortogonális  $\gamma_n$  geodetikus, amely maximális ívhosszú az összes  $S$ -ből  $q_n$ -be futó kauzális görbék között. Így nyilvánvalóan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau[\gamma_n] = \tau_0$ . Jelölje  $r_n$  a  $\gamma_n$  geodetikus és  $S$  metszéspontját. Mivel  $S$  kompakt, azért létezik az  $\{r_n\}$  sorozatnak az  $r \in S$  torlódási pontja. Legyen  $\gamma$  az  $r \in S$ -ből  $S$ -re ortogonálisan induló geodetikus. Tekintve, hogy a geodetikusok folytonosan függenek a kezdőpontjuktól és kezdeti érintővektoruktól,  $\gamma$ -nak  $H^-(S)$ -et  $p$ -ben kell metszenie, és fenn kell állnia, hogy  $\tau[\gamma] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau[\gamma_n] = \tau_0$ . Tehát megtaláltuk azt a  $\gamma$  időszerű, az  $S$ -re merőleges geodetikust, amely maximálissá teszi az ívhosszat  $S$  és  $p$  között.

Most belátjuk, hogy  $H^-(S)$  kompakt. Ehhez megmutatjuk, hogy minden  $H^-(S)$ -beli  $\{p_n\}$  sorozatnak van  $p \in H^-(S)$  torlódási pontja. Legyen  $\{\tilde{\gamma}_n\}$  az  $S$ -ből  $p_n$ -be futó,  $S$ -re ortogonális, maximális ívhosszú geodetikusok sorozata. Lényegében elismételjük az előző bekezdés végén leírt gondolatmenetet. Legyen  $\tilde{r}_n$  a  $\tilde{\gamma}_n$  és  $S$  metszéspontja, és legyen  $\tilde{r}$  az  $\{\tilde{r}_n\}$  sorozat torlódási pontja. Legyen  $\tilde{\gamma}$  az  $\tilde{r}$ -ből  $S$ -re merőlegesen induló geodetikus, és legyen  $p$  a  $\tilde{\gamma}$  és  $H^-(S)$  metszéspontja. Ekkor  $p$  a  $\{p_n\}$  sorozat torlódási pontja. Ezzel beláttuk, hogy  $H^-(S)$  kompakt.

Mivel azonban  $\text{edge}(S) = \emptyset$ , a **8.3.5. tétel** értelmében  $H^-(S)$  tartalmaz egy jövőbe nem kiterjeszthető null-geodetikust. Ugyanakkor ez lehetetlen a **8.2.1. lemma** értelmében, ha  $H^-(S)$  kompakt, mert  $(M, g_{ab})$  erősen kauzális. Így ellentmondáshoz vezetett az a feltevésünk, hogy minden  $S$ -ből induló, múltirányú, nem kiterjeszthető, időszerű geodetikus ívhossza nagyobb, mint  $3/|C|$ .

### 9.6.2. A gravitációs összeomlásra alkalmazható szingularitási tételek

A következő tétel olyan feltételek mellett állítja, hogy a téridő null-geodetikusai nem teljesek, amelyek a gravitációs összeomlás esetére jellemzőek. Ebben a tételben fontos szerepet játszik az úgynevezett **csapdázott felület**.



39. ábra. A **9.5.3. tétel** bizonyításához használt  $f_{\pm}(q, a)$  leképezések szemléltetése. A csapdázott felület  $T$ , a  $q \in T$  pontból  $T$ -re ortogonálisan kiinduló be- és kifutó null-geodetikusok  $[0, a_0]$  affin-hosszúságú darabjait a „be”, ill. „ki” felíratú egyenes szakaszok szemléltetik, ahol  $a_0 = 2/|\theta_0|$  és  $a$  jelöli az affin paramétert.

**Definíció:** Az olyan kompakt, 2-dimenziós, sima, térszerű  $T$  részsokaságot nevezzük **csapdázott felületnek** (trapped surface), amely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a  $T$ -re merőlegesen „befutó” és „kifutó”, jövőirányú null-geodetikusok mindkét kongruenciájának  $\theta$  tágulása mindenütt negatív.

**Megjegyzés:** Például a Schwarzschild-megoldásban a II. tartományban, azaz a feketelyuk tartományában minden  $r = \text{áll.}$  gömbfelület csapdázott felület. Ez jól látszik a 20. ábrán, ahol a II. tartományban a be-, ill. kifutó jövőirányú null-geodetikusok kongruenciáját jobbra, ill. balra dőlő  $45^\circ$ -os egyenes szakaszok szemléltetik, amelyek az  $r = \text{áll.}$  felületeket merőlegesen metszik, és növekvő affin paraméterhez tartozó pontjaik egyre kisebb  $r$ -hez tartozó felületen vannak, ami mutatja, hogy a kongruenciák összetartóak.

Később meg fogjuk mutatni, hogy gravitációs összeomlás során mindig keletkeznek csapdázott felületek, ha a kollapszus kezdeti feltételei elég közel vannak a gömbszimmetrikus gravitációs összeomlás kezdeti feltételeihez. A következő tétel azt fogalmazza meg, hogy bizonyos feltételek mellett a csapdázott felületek keletkezése maga után vonja, hogy szingularitásnak kell megjelennie a téridőben. Történetileg ez a tétel volt az első általánosan megfogalmazott szingularitási tétel, bizonyítása Penrosetól származik.

**9.5.3. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  összefüggő, globálisan hiperbolikus téridő, amelyben létezik egy nem kompakt  $\Sigma$  Cauchy-felület. Tegyük fel, hogy teljesül minden  $k^a$  null-vektormezőre az  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  egyenlőtlenség, ami így van, ha  $(M, g_{ab})$  az Einstein-egyenletek megoldása és az anyag kielégíti a gyenge vagy az erős energiafeltételt. Tegyük fel továbbá, hogy  $M$  tartalmaz egy  $T$  csapdázott felületet. Tegyük fel, hogy a  $T$ -re ortogonális null-geodetikusok mindkét halmazában a  $\theta$  tágulás maximális értéke  $\theta_0 < 0$ . Ekkor legalább egy  $T$ -ből induló,  $T$ -re merőleges, jövőirányú, a jövőbe nem kiterjeszthető olyan null-geodetikus létezik, amelynek ívhossza (affin hossza) nem nagyobb, mint  $2/|\theta_0|$ .

Tegyük fel, hogy minden jövőbe nem kiterjeszthető,  $T$ -re merőleges, jövőirányú null-geodetikus affin hossza nagyobb, mint  $a_0 = 2/|\theta_0|$ . Először megmutatjuk, hogy az  $\dot{I}^+(T)$  kompakt halmaz. Értelmezzük az  $f_+(q, a) : T \times [0, a_0] \mapsto M$  leképezést úgy, hogy a  $q \in T$  ponthoz és az affin paraméter  $a$  értékéhez a  $q$  pontból „kifutó” ortogonális null-geodetikuson, a  $q$  ponttól  $a$  affin távolságra jövőirányban fekvő pontot rendeljük hozzá (ld. a 39. ábrát). Hasonlóképpen értelmezzük a „befutó” ortogonális null-geodetikus segítségével az  $f_-(q, a)$  leképezést. Mivel  $T \times [0, a_0]$  kompakt halmaz és  $f_\pm$  folytonos leképezések, azért képhalmazaik

$$A = f_+(T \times [0, a_0]) \cup f_-(T \times [0, a_0]) \quad (9.6.1.)$$

uniója is kompakt halmaz (ld. az **A.5. tételt**). A **9.3.9. tétel** értelmében az  $A$  halmazon belül minden  $T$ -ből induló „be-”, ill. „kifutó” null-geodetikuson léteznie kell  $a_0$ -nál kisebb affin távolságon belül konjugált pontnak, másrészt  $\dot{I}^+(T)$  minden  $p$  pontjának is ezeken a null-geodetikuson kell feküdnie a **9.3.11. tétel** értelmében, mégpedig olyan affin távolságon belül, hogy  $q$  és  $p$  között ne legyen konjugált pont. Ebből következik, hogy  $\dot{I}^+(T) \subset A$ , vagyis a csapdázott felület (időszerű) jövőjének határa  $A$ -nak valódi részhalmaza. Mivel  $\dot{I}^+(T)$  zárt halmaz, így a kompakt  $A$  halmaz zárt részhalmazaként maga is kompakt (ld. az **A.3. tételt**).

A következő lépésben megmutatjuk, hogy  $\dot{I}^+(T)$  zártága ellentmond annak, hogy létezzen nem kompakt  $\Sigma$  Cauchy-felület. Felhasználva, hogy a globálisan hiperbolikus téridő időirányítható, a **8.1.1. lemma** értelmében választunk egy sehol el nem tűnő, sima, időszerű  $t^a$  vektormezőt  $M$ -en. Mivel  $\dot{I}^+(T)$  akronális, azért  $t^a$  minden integrálgörbéje  $\dot{I}^+(T)$ -t legfeljebb egyszer, míg  $\Sigma$ -t pontosan egyszer metszi át. Így  $t^a$  (azon) integrálgörbéit követve  $\dot{I}^+(T)$ -tól  $\Sigma$ -ig, (amelyek metszik  $\dot{I}^+(T)$ -t,) értelmezhetjük a  $\psi : \dot{I}^+(T) \mapsto \Sigma$  leképezést. Legyen ennek a leképezésnek a képhalmaza  $S \subset \Sigma$ , azaz  $S = \psi[\dot{I}^+(T)]$ . Legyen továbbá  $S$  topológiája a  $\Sigma$  topológiája által indukált topológia. Ekkor  $\psi : \dot{I}^+(T) \mapsto S$  egy homeomorfizmus, úgyhogy mivel  $\dot{I}^+(T)$  kompakt, azért  $S$  is kompakt kell legyen, de akkor, mint  $\Sigma$  részhalmaza az **A.2. tétel** tétel értelmében zárt kell legyen. Másrésztől a **8.1.3. tétel** értelmében  $\dot{I}^+(T)$  egy folytonos (azaz  $C^0$ ), beágyazott, 3-dimenziós részsokaság  $M$ -ben. Ezért  $\dot{I}^+(T)$  minden pontjának van olyan környezete, amely homeomorf egy  $\mathbb{R}^3$ -beli nyílt gömbbel. Miután  $\psi$  homeomorfizmus, ugyanez a tulajdonság  $S$  minden pontjára is vonatkozik. Ekkor viszont  $S$ -nek, mint  $\Sigma$  részhalmazának, nyílt halmaznak kell lennie. Az  $M$  téridő összefüggő, ami a rétegezhetőségére vonatkozó **8.3.14. tétel** alapján azt is jelenti, hogy a  $\Sigma$  Cauchy-felület is összefüggő. Összefüggő halmaz egydedűli olyan részhalmazai, amelyek egyszerre zártak és nyíltak, az üres halmaz és maga a teljes halmaz; esetünkben viszont  $\dot{I}^+(T) \neq \emptyset$ , ezért  $S \neq \emptyset$ , úgyhogy  $S = \Sigma$  kell teljesülnön. Az utóbbi viszont lehetetlen, mert  $S$  kompakt,  $\Sigma$  pedig nem kompakt.

Beláttuk tehát, hogy ellentmondásra vezet az a feltevés, amely szerint minden jövőbe nem kiterjeszthető,  $T$ -re merőleges, jövőirányú null-geodetikus affin hossza nagyobb, mint  $a_0 = 2/|\theta_0|$ . Ezért léteznie kell legalább egy olyan jövőbe nem kiterjeszthető,  $T$ -re merőleges, jövőirányú null-geodetikusknak, amelynek affin hossza nem nagyobb, mint  $a_0$ .

**Megjegyzés:** A **9.5.3. tétel** megint tartalmazza a globális hiperbolicitás feltételét. Hawkingtól és Penrosetól származik a tétel olyan módosítása, amelyben ezt a feltevést elhagyták, néhány egyéb feltétel árán.

**9.5.4. tétel:** Tegyük fel, hogy az  $(M, g_{ab})$  téridő eleget tesz az alábbi feltételeknek:

1.  $R_{ab}v^av^b \geq 0$  minden  $v^a$  időszerű és null-vektormezőre, ami be is következik, ha érvényesek az Einstein-egyenletek és az anyag eleget tesz az erős energiafeltételnek;

2. az általános időszerű és null-feltételek teljesülnek;
3. nincsenek zárt időszerű görbék;
4. az alábbi három tulajdonság közül legalább az egyik teljesül:
  - (a)  $(M, g_{ab})$ -ben található egy kompakt, akronális, perem nélküli halmaz (az- az  $(M, g_{ab})$  egy zárt Világegyetem térideje);
  - (b)  $(M, g_{ab})$ -ben található egy csapdázott felület;
  - (c) létezik olyan  $p \in M$  pont, hogy az abból kiinduló jövőirányú (vagy múltirányú) null-geodetikusok kongruenciájának tágulása ezen kongruencia minden null-geodetikus mentén negatív.

Ekkor az  $(M, g_{ab})$  téridőben léteznie kell legalább egy nem teljes, időszerű vagy null-geodetikusnak.

### 9.6.3. A szingularitási tételek feltételeiről

A **9.5.4. tétel** tulajdonképpen általánosabb, semhogy csak a gravitációs összeomlás esetére lehetne alkalmazni. A **9.5.2. tétel**hez képest az általános időszerű és null-feltételek teljesülését veszi be a tétel feltételei közé, ugyanakkor eltávolítja annak megkövetelését, hogy a Világegyetem mindenütt táguló legyen. A **9.5.4. tétel** a **9.5.3. tétel**hez képest az általános időszerű és null-feltételek teljesülését veszi be a tétel feltételei közé, és azt, hogy  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  minden  $k^a$  null-vektormezőre, viszont eltávolítja a globális hiperbolicitás feltételét. A **9.5.4. tétel** tehát szélesebb körben alkalmazható, mint a **9.5.1. tétel**, a **9.5.2. tétel** és a **9.5.3. tétel**, az állítása azonban gyengébb, mint az utóbbi tételeké, mert nem mondja meg, melyik időszerű vagy null-geodetikus nem teljes. A szingularitási tételeknek további, általánosított változatai születtek egészen napjainkig.

A **9.5.4. tétel** megerősíti abbéli vélelmünket, hogy a Világegyetemünk szingularis. A fizikai-csillagászati megfigyeléseink meggyőzőek abban a tekintetben, hogy Világegyetemünk, vagy legalábbis annak a mi kauzális múltunkba eső része, jó közelítéssel leírható a FLRW-modellekkel (pontosabban ilyen modellek  $k = 0$  lapos térmetrikájú változatával), és ez a közelítő leírás jól működik időben visszafelé haladva egészen addig, amikor az elektromágneses sugárzás lecsatolódt az anyagról. Arról, hogy milyen volt a Világegyetem az elektromágneses sugárzás lecsatolódásának pillanatában, a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás (Cosmic Microwave Background Radiation) hordoz közvetlen információt. A FLRW-típusú modellek az anyag állapotára vonatkozó feltevésekben különbözhetnek. Abban azonban megegyeznek, hogy ezekben a modellekben a minket a jelen pillanatban reprezentáló téridő-pontból kiinduló múltirányú null-geodetikusok kongruenciájának tágulása a jelen pillanathoz közelebbi pillanatban válik negatívvá, mint amilyen

messze van időben visszafelé a háttérsugárzás lecsatolódásának pillanata. Ezért joggal tehetjük fel, hogy a **9.5.4. tétel** 4.(c) feltétele teljesül a Világegyetemünkben. Várakozásunknak az is megfelel, hogy a **9.5.4. tétel** (1)-(3) feltételei is teljesülnek. Így minden okunk megvan azt feltételezni, hogy Világegyetemünk szinguláris. Ebből viszont az is következik, hogy számolnunk kell azzal, hogy Világegyetemünk történetének teljesebb megértéséhez fel kell tegyünk, hogy valamikor időben visszafelé haladva, az általános relativitás elmélete szerint jóslott szingularitás felé közeledve a gravitáció eme klasszikus fizikai elmélete érvényét vesztheti.



## 10. Az aszimptotikusan lapos téridő

### 10.1. Izolált test az általános relativitáselméletben

Az általános relativitáselmélet keretében sokszor azt szeretnénk vizsgálni, hogy egy égitest hogyan viselkedik, miközben elhanyagoljuk a Világegyetem méretskáláján a téridő görbületét és más égitesteknek a kiszemelt égitestre gyakorolt hatását. Egy ilyen **izolált rendszer** gravitációs tulajdonságainak vizsgálatához hasznos az **aszimptotikusan lapos téridő** fogalma. Naívan az a várakozásunk, hogy az izolált testtől távol a téridő közelítőleg olyan lesz, mintha nem lenne jelen anyag, azaz lapos. Ugyanezt kicsit pontosabban fogalmazva, az a várakozásunk, hogy az izolált testtől távolodva a téridő egyre jobban megközelíti a lapos, Minkowski-téridőt. Most a „távol” kifejezésünknek, és az „egyre jobban megközelíti a lapos téridőt” kijelentésünknek próbálunk majd pontos jelentést adni az általános relativitáselmélet keretein belül.

Hasonló kérdés az elektrodinamikában, hogy milyen az az elektromágneses mező, amelyet egy izolált töltésrendszer nagy távolságban kelt. Az izolált töltésrendszert jellemző  $j^a$  áramsűrűség egy kompakt tartójú világcsövön kívül eltűnik, a töltésrendszer által keltett elektromágneses mező térerőssége pedig a töltésrendszer-től nagy  $r \rightarrow \infty$  távolságban  $F_{\mu\nu} \propto 1/r^2$ -tel arányosan, a fényszerű geodetikusok mentén pedig  $F_{\mu\nu} \propto 1/r$ -rel arányosan cseng le. Az elektromágneses mező nagy távolságokon mutatott aszimptotikus viselkedésének részletes leírása az  $A^a$  vektorpotenciál multipol-kifejtésének segítségével lehetséges. Az egyes multipólusok értékét a töltés- és árameloszlás egyértelműen meghatározza. Ugyancsak a multipolkifejtés alapján határozhatjuk meg, hogy mennyi energiát sugároz ki valamely nem stacionárius töltésrendszer, ha nincsen bejövő sugárzás. Hasonló leírást szeretnénk találni az izolált testek gravitációs mezejének jellemzésére is.

Az izolált testek vizsgálata az általános relativitáselmélet keretében már mindjárt a kezdeteknél nehézségekbe ütközik, hiszen pontosan meg kellene mondanunk, hogy mit is értünk izolált testen. Naívan, – az elektrodinamikai izolált töltésrendszerekkel kapcsolatos multipolsorfejtés analógiája alapján, – az a várakozásunk, hogy az izolált test gravitációs mezeje a végtelenben kellően gyorsan lecseng, pontosabban, hogy a téridő metrikája a végtelenben lecseng. Az egyik nehézség az, hogy nincsen egy  $\eta_{ab}$  háttér-metrika, amelyhez képest vizsgálhatnánk a vizsgált test körüli téridőben az igazi  $g_{ab}$  metrika lecsengését. A másik nehézség az, hogy általában nincsen természetes módon kitüntetett koordinátarendszer sem, amelyben értelmet tudnánk adni az  $r$  radiális koordinátának. Mondhatnánk esetleg azt, hogy akkor beszélünk izolált testről, ha van a téridőben olyan  $\{x^\mu\}$  koordinátarendszer, amelyben a metrika komponensei  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}((1/r))$  tulajdonságúak, ha az  $r = \sqrt{\sum_{\mu=1}^3 x^\mu x^\mu}$  „radiális távolság” tart a végtelenhez,  $r \rightarrow +\infty$ . Az izolált test ilyen meghatározása azonban számos kényelmetlenséget, pontosabban nehézséget

rejt magában. Először is ebben a koordináta-rendszerben nehéz dolgozni, mert bármilyen eredményt is kapunk, azt csak akkor tekinthetjük fizikainak, ha be tudjuk látni, hogy független a koordináta-rendszer megválasztásától. Ezt a függetlenséget akkor minden egyes eredmény esetén külön kellene igazolni. Másrészt sokszor olyan mennyiségek  $r \rightarrow \infty$  viselkedését kell vizsgálni, amelyek a radiális koordináta szerinti deriváltakat is tartalmazznak. Ezzel kapcsolatban felmerül az a kérdés, hogy mi a deriválás és a határértékképzés helyes sorrendje. Ilyen problémába ütköznénk, ha meg akarnánk határozni a test által kisugárzott energiafluxust. Mindez azt sugallja, hogy az izolált test és az aszimptotikusan lapos téridő fogalmát célszerű koordináta-invariáns módon értelmezni. Ezt úgy fogjuk elérni, hogy a téridőhöz „hozzáveszünk” olyan pontokat, amelyek a „végtelent” képviselik, majd az ilyen módon a „végtelennel kiegészített” téridőben definiáljuk az aszimptotikus laposság fogalmát. Utóbbit Ashtekar<sup>90</sup> és Hansen<sup>91</sup> módszerét követve vezetjük be.

Stacionárius anyageloszlás esetében meg lehet mutatni, hogy az aszimptotikusan lapos téridőben a metrika az anyageloszlástól „távol” multipólsorba fejthető, és az egyes multipólmomentumokat az anyageloszlás határozza meg. A multipólkifejtés azonban nem stacionárius anyageloszlás esetében nem működik. Az izolált test „teljes gravitációs tömege” ilyenkor is értelmezhető a metrika távoli viselkedéséből kiindulva, és a teljes tömeg változása ismeretében meghatározható a gravitációs hullámok révén kisugárzott energiafluxus. A sugárzás energiafluxusa azonban nincsen egyértelmű kapcsolatban az anyageloszlás multipólmomentumaival, mert a gravitációs mező maga is forrása a gravitációs sugárzásnak, amit jól tükröz, hogy az Einstein-egyenletek nem lineárisak.

## 10.2. A konform végtelen

### 10.2.1. A „végtelen” a Minkowski-téridőben

A **konform végtelen** fogalmának bevezetésével egyrészt sikerül az aszimptotikusan lapos téridő fogalmát koordináta-rendszertől függetlenül definiálni, másrészt meg tudjuk válaszolni azt a kérdést, hogy hogyan kell határértéket képezni, ha tartunk a végtelenhez. Az utóbbihoz az ötletet annak a diszkussziója adja, hogy hogyan viselkedik a nem gravitációs természetű fizikai mező, pl. a tömeg nélküli klasszikus Klein-Gordon-mező a végtelenben Minkowski-téridőben. Ez a példa segít abban, hogy görbült téridőben is megoldjuk a „végtelenbeli határértékképzés” problémáját, majd megoldást találjunk az aszimptotikus laposság értelmezésére is.

Induljunk ki a Minkowski-téridő metrikájának gömbi koordinátákban felírt

---

<sup>90</sup>Abhay Vasant Ashtekar, indiai fizikus, 1949-

<sup>91</sup>R.O. Hansen

alakjából,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (10.2.1.)$$

és abból, hogy a tömeg nélküli  $\phi$  Klein-Gordon-mezőben terjedő sugárzást akarjuk a végtelenben vizsgálni. Ehhez olyan határértékekre van szükség, amelyeket úgy kell képezni, hogy null-irányokban tartunk a végtelenhez. Ezért célszerű bevezetni a retardált hullámmegoldásban szereplő

$$u = t - r \quad (10.2.2.)$$

retardált null-koordinátákat és az avanszált hullámmegoldásban szereplő

$$v = t + r \quad (10.2.3.)$$

avanszált null-koordinátákat. Az  $(u, v, \theta, \phi)$  koordináta-rendszerben a Minkowski-metrika:

$$ds^2 = -du dv + \frac{1}{4}(v - u)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (10.2.4.)$$

Tegyük fel, hogy pl. a kifutó sugárzást akarjuk tanulmányozni. Ekkor rögzített  $u$  mellett azt kell vizsgálnunk, hogy a  $\phi$  térmennyiség és a sugárzás energiasűrűsége hogyan csökken a  $v \rightarrow \infty$  határesetben. Például a sugárzás energiáját a  $\phi$  térmennyiség  $1/v$ -vel arányosan csökkenő része határozza meg. Annak vizsgálata, hogy a sugárzást jellemző mennyiségek hogyan viselkednek ebben a határesetben, nehézkes, és nehezen általánosítható a görbült téridő esetére. (Például nem mindegy, hogy előbb képezzük a térmennyiség aszimptotikus alakját és abból, meg a deriváltjaiból építjük fel a sugárzást jellemző vizsgált mennyiséget, mint pl. az energiaáram-sűrűséget, avagy először képezzük a térmennyiségből és deriváltjaiból a vizsgált mennyiséget és annak vesszük az aszimptotikus viselkedését.) Sokkal egyszerűbb lenne a vizsgálatunk, ha a „végtelen” egy jól meghatározott hely lenne a téridőben, mert akkor a térmennyiséget és a deriváltjait „ezen a helyen” csak ki kellene számolni, nem kellene határértéket képezni.

Célunk elérése érdekében naívan eljárhatnánk úgy, hogy  $v$  helyett bevezetnénk a  $V = 1/v$  koordinátát. Ekkor a végtelen  $v \rightarrow \infty$  esetének a végesben található  $V = 0$  hely lenne megfelelően. Sajnos azonban az  $(u, V, \theta, \phi)$  koordinátákban a metrika,

$$ds^2 = \frac{1}{V^2} du dV + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{V} - u \right)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (10.2.5.)$$

nem kívánatos módon szingulárisá válik a  $V = 0$  pontban. A Minkowski-téridő tehát nem terjeszthető ki erre a pontra. Akkor viszont tenzorokat sem tudunk ott úgy értelmezni, mintha  $V = 0$  egy „hely” lenne. Természetesen a szingularitás

annak tudható be, hogy „rossz koordinátát” vezetünk be. A helyzet azonban orvosolható. Vizsgáljunk egy másik, nem fizikai  $\bar{g}_{ab}$  metrikát, amelyet az  $\eta_{ab}$  Minkowski-metrikából a

$$\bar{g}_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}, \quad \Omega = V = 1/v \quad (10.2.6.)$$

konform transzformációval kapunk (ld. D. függelék). Ekkor az új, nem fizikai metrika,

$$\overline{ds}^2 = du dV + \frac{1}{4}(1 - uV)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (10.2.7.)$$

jó viselkedésű a  $V = 0$  helyen. Az eljárásunk tehát a következő:

- a Minkowski-féle téridő-sokasághoz hozzávesszük a  $V = 0$  pont;
- mivel a Minkowski-metrika nem terjeszthető ki a  $V = 0$ -ra sima metrikaként, ezért tekintsük a nem fizikai  $\bar{g}_{ab}$  metrikát, amit olyan konform transzformációval kapunk a Minkowski-metrikából, hogy az új  $\bar{g}_{ab}$  metrika már simán terjeszthető ki a  $V = 0$  pontra;
- ezután a  $V = 0$  pontban ugyanúgy értelmezhetünk tenzorokat, mint a téridő bármely más pontjában.

Ezzel az eljárással elértük, hogy a „végtelent” (pontosabban az  $u = \text{áll.}$  mellett vett  $v \rightarrow \infty$  végtelent) véges távolságra transzformáltuk. Ezután a térmennyiség értékét és a nem fizikai  $\bar{g}_{ab}$  metrika szerinti kovariáns deriváltjait meg tudjuk határozni a  $V = 0$  pontban. A kapott eredményt azonosíthatjuk a fizikai téridőben alkalmas eljárással képezett határértékkel, aminek a közvetlen úton történő képzését azonban így el tudjuk kerülni.

Az eddigi eljárásunkon még javítanunk kell. Egyrészt el kell kerülnünk azt, hogy az  $\Omega$  konform szorzó szükségtelenül felrobbanjon az eredeti téridőben  $v = 0$ -nál; másrészt, hogy ne csak egyedül az  $(u = \text{const.}, v = 2t - \text{const.} \rightarrow \infty)$  típusú, úgynevezett **jövőbeli null-végtelent** tudjuk végesbe transzformálni, hanem a  $(v = \text{const.}, u = 2t - \text{const.} \rightarrow -\infty)$  típusú, úgynevezett **múltbeli null-végtelent** és a  $(t = \text{const.}, r \rightarrow \infty)$  **térbeli végtelent** is. Mindezt elérhetjük, ha ügyesebben választjuk meg az  $\Omega$  függvényt. Legyen

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}, \quad (10.2.8.)$$

ahol

$$\Omega^2 = \frac{4}{(1 + u^2)(1 + v^2)}. \quad (10.2.9.)$$

Ekkor  $\tilde{g}_{ab}$  sima metrika az eredeti Minkowski-sokaságon, az  $(\mathbb{R}^4, \tilde{g}_{ab})$  téridő pedig simán kiterjeszthető egy olyan nagyobb téridővé, amelyben a Minkowski-tartomány határa pontosan megfelel a végtelen(ek)nek. Ennek belátásához bevezetjük a Minkowski-téridőben a

$$\begin{aligned} T &= \arctan v + \arctan u, \\ R &= \arctan v - \arctan u \end{aligned} \quad (10.2.10.)$$

koordinátákat az értékkészletük

$$-\pi < T + R < \pi, \quad (10.2.11.)$$

$$-\pi < T - R < \pi, \quad (10.2.12.)$$

$$0 \leq R \quad (10.2.13.)$$

megszorításaival. A  $\tilde{g}_{ab}$  metrika komponensei ebben a koordinátarendszerben

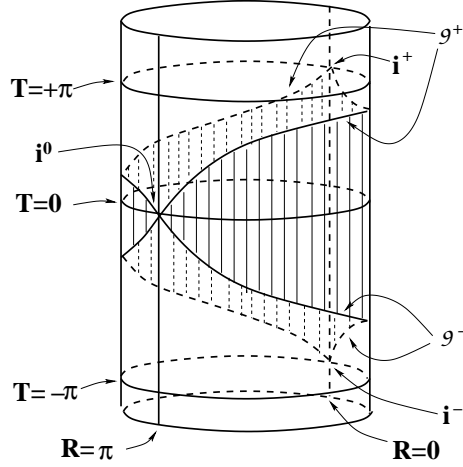
$$\tilde{ds}^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (10.2.14.)$$

Ez a metrika nem más, mint a természetes Lorentz-metrika az  $S^3 \times \mathbb{R}$  sokaságon, ha eltekintünk a (10.2.11.) és a (10.2.12.) megszorításoktól, és a téridő az úgynevezett **Einstein-féle sztatikus Világegyetem**. Mivel most a (10.2.11.) és a (10.2.12.) megszorítások is érvényben vannak, ezért az Einstein-féle sztatikus Világegyetem egy nyílt tartományát kaptuk eredményül. Összefoglalva tehát a következőket mutattuk meg:

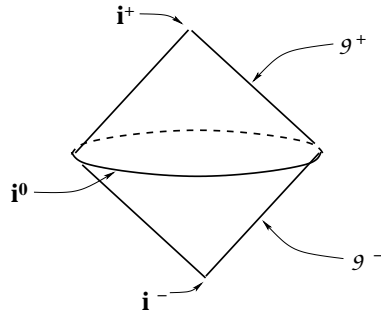
**Állítás:** Létezik olyan konform izometria<sup>92</sup>, amely az  $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$  Minkowski-téridőt az  $(S^3 \times \mathbb{R}, \tilde{g}_{ab})$  Einstein-féle sztatikus Világegyetem azon  $O$  nyílt tartományára képezi le, amelyet a (10.2.11.) és a (10.2.12.) megszorítások határoznak meg. A Minkowski-téridő konform végtelene ekkor az  $O$  tartomány  $\hat{O}$  határa. A  $\hat{O}$  határ több darabból áll (ld. a 40. ábrát):

- az  $i^-$  pontból:  $R = 0$ ,  $T = -\pi$ , elnevezése **múltbeli időszerű végtelen**;
- a 3-dimenziós  $\mathcal{J}^-$  (scri-minus) null-hiperfelületből:  $T = -\pi + R$ , ahol  $0 < R < \pi$ , elnevezése **múltbeli null-végtelen**;
- az  $i^0$  pontból:  $R = \pi$ ,  $T = 0$ , elnevezése **térbeli végtelen**;
- a 3-dimenziós  $\mathcal{J}^+$  (scri-plus) null-hiperfelületből:  $T = \pi - R$ , ahol  $0 < R < \pi$ , elnevezése **jövőbeli null-végtelen**;
- az  $i^+$  pontból:  $R = 0$ ,  $T = \pi$ , elnevezése **jövőbeli null-végtelen**.

A Minkowski-téridő minden időszerű geodetikusa  $i^-$ -ből indul és  $i^+$ -ba fut be; minden térszerű geodetikusa  $i^0$ -ból indul és oda tér vissza; és minden null-geodetikusa



40. ábra. Az Einstein-féle sztatikus Világegyetem sematikus ábrája. Az ábrán a  $T = \text{const.}$  körök valójában  $S^3$  gömbfelületeket reprezentálnak. A sátrózott tartomány,  $O = I^+(i^-) \cup I^-(i^+)$  konform izomorf a Minkowski-téridővel. Az  $O$  tartomány  $\bar{O}$  határa az  $i^-$ ,  $i^0$ ,  $i^+$  pontok és a  $g^+ = \mathcal{J}^+$ ,  $g^- = \mathcal{J}^-$  null-hiperfelületek uniója, ez képezi a Minkowski-téridő „végtelenjének” pontos meghatározását.



41. ábra. Az Einstein-féle sztatikus Világegyetem  $\bar{O}$  tartományának két darab fénykúpbeli ábrázolása, amelyek alaplapjai egybeesnek. Az ábrázolás félrevezető, mert az  $i^0$  pontnak az ábrán gömbfelület felel meg.

$\mathcal{J}^-$ -ről indul és  $\mathcal{J}^+$ -on végződik. Az  $O$  tartomány  $\bar{O}$  lezártjának kényelmesebb ábrázolását mutatja az 41. ábra.

Miután a fenti módon sikerült pontosan értelmezni a Minkowski-téridő „végtelenjét”, a fizikai mezőkre vonatkozó aszimptotikus feltételek is megfogalmazhatók  $\bar{O}$ -n értelmezett tenzorok segítségével: megköveteljük, hogy a fizikai mező  $\Omega^{-\alpha}$ -szorosa kellően jól viselkedő módon kiterjeszthető legyen az  $\bar{O}$  konform végtelenbe. Az  $\alpha$  kitevő értéke attól függ, hogy milyen fizikai mezőre mennyire szigorú aszimptotikus feltételt akarunk kiróni. Ha ezeket a feltételeket kirójuk, akkor azok a mennyiségek, amelyeket a Minkowski-téridőben az  $r \rightarrow \infty$  vagy a  $v \rightarrow \infty$  határértékképzéssel kellene értelmezni, most az  $\bar{O}$  határon értelmezett tenzormezőkkel reprezentálhatók.

### 10.2.2. Az aszimptotikus laposság definíciója

Térjünk most rá arra, hogy hogyan lehet az aszimptotikus laposságot görbült téridő esetében definiálni. Mint láttuk, Minkowski-téridő esetén az alapötlet az volt, hogy leképeztük konform izometria segítségével a Minkowski-téridőt az Einstein-féle sztatikus Világegyetem egy korlátos tartományára, amelynek határa felelt meg a Minkowski-téridő „végtelenjének”. Az ötlet kivitelezhetősége alapvetően a Minkowski-téridő „végtelenben mutatott viselkedésének” volt köszönhető. Ez azt sugallja, hogy az olyan téridőt fogjuk aszimptotikusan laposnak nevezni, amelynek esetében egy hasonló konstrukció megvalósítható. Nevezetesen, **definíció szerint a téridőt aszimptotikusan laposnak nevezzük, ha konform izometria révén olyan nem fizikai téridőbe képezhető le, amelynek tulajdonságai a végtelenben hasonlóak a Minkowski-téridő konform izometriával történő leképezésével kapott nem fizikai téridő végtelenben mutatott tulajdonságaihoz.** Ezzel egyrészt el tudjuk érni, hogy az aszimptotikus laposságot koordinátarendszertől függetlenül definiáljuk. Másrészt a fizikai téridő konform izometriával kapott képének határa a nem fizikai téridőben lehetővé teszi a végtelenbeli viselkedésnek a matematikailag kielégítő leírását, a „végtelenben” a tenzoranalízis módszereinek alkalmazását. A görbült téridőben alkalmazható konstrukció azonban két részletben különbözni fog a Minkowski-téridő esetében tárgyalttól.

- Azt meg fogjuk követelni, hogy a téridő aszimptotikusan lapossá váljon, ha tér-irányokban, vagy ha null-irányokban tartunk a végtelenhez. Azt azonban nem akarjuk általában kikötni, hogy adott helyen a végtelen távoli múltban és a végtelen távoli jövőben a téridő aszimptotikusan lapos legyen, mert vizsgálhatunk olyan esetet, amikor az izolált test a végtelen távoli múltban és jövőben is jelen van. Ezért nem várhatjuk el, hogy a görbült téridő a múltbeli és a jövőbeli időszerű végtelenben ugyanolyan tulajdonságú legyen, mint a Minkowski-téridő. Ezért a görbült téridő konform végtelenjének tulajdonságaira nem teszünk

---

<sup>92</sup>A konform izometria definícióját ld. a C. függelékben

olyan megszorítást, ami megfelelne az  $i^-$  és  $i^+$  pontok létezésének.

- A metrikától megköveteljük, hogy a térbeli végtelenben aszimptotikusan lapossá váljon, az azonban – mint alább kiderül, – túl erős követelmény lenne, hogy megköveteljük a konform transzformált metrika simaságát, vagy akár még a differenciálhatóságát is a térbeli végtelenben. Ezért ugyan meg fogjuk követelni az  $i^0$  pont létezését a nem fizikai téridő határán, de ebben a pontban a Minkowski-téridő esetében érvényes simasági követelményt lényegesen gyengíteni fogjuk.

Az aszimptotikus laposság többféleképpen is definiálható. Mi az [1] tankönyvet követve az Ashtekar-féle definíciót fogjuk használni.

**Definíció:** Ha vákuum van jelen, az  $(M, g_{ab})$  **téridőt a null-végtelenben és a térbeli végtelenben aszimptotikusan laposnak** nevezzük, ha létezik olyan  $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$  nem fizikai téridő, ahol  $\tilde{g}_{ab}$  mindenütt  $C^\infty$  (sima), kivéve esetleg az  $i^0$  pontot, ahol  $C^{>0}$ , és létezik olyan, az  $\Omega$  konform faktorról jellemzett  $\psi : M \mapsto \psi[M]$  konform izometria, hogy  $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 \psi^* g_{ab}$  a  $\psi[M]$ -ben, amelyek eleget tesznek az alábbi feltételeknek:

1.  $\overline{J^+(i^0)} \cup \overline{J^-(i^0)} = \tilde{M} \setminus M$ , azaz az  $i^0$  pont kauzális jövője és múltja lezártjának uniója azon pontokból áll, amelyek a nem fizikai téridő-sokaságban,  $\tilde{M}$ -ben benne vannak, de nincsenek benne a fizikai téridő-sokaság  $\psi[M]$  képében. (Itt és alább  $\psi[M]$  és  $\psi[\tilde{M}]$  helyett a jelölés egyszerűsítése érdekében rendre  $M$ -et és  $\tilde{M}$ -ot írunk.) Következésképpen (a) az  $i^0$  pont és  $M$  bármely pontja térszerűen elválasztottak, és (b)  $M$ -nek az  $\tilde{M}$  határa az  $i^0$  pont, a  $\mathcal{J}^+ \equiv \dot{J}^+(i^0) - i^0$  null-felület és a  $\mathcal{J}^- \equiv \dot{J}^-(i^0) - i^0$  null-felület egyesítése:  $\tilde{M} = i^0 \cup \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$ .
2. Az  $\tilde{M}$ -nak van olyan  $V$  nyílt környezete  $\tilde{M}$ -ban, hogy a  $(V, \tilde{g}_{ab})$  téridő erősen kauzális.
3. Az  $\Omega$  konform faktor a teljes nem fizikai  $\tilde{M}$  téridőre kiterjeszthető úgy, hogy  $i^0$ -ban  $C^2$ , mindenütt máshol  $C^\infty$  legyen.
4. (a) A  $\mathcal{J}^+$ -on és  $\mathcal{J}^-$ -on, azaz a jövőbeli és a múltbeli null-végtelen hiperfelületeken  $\Omega = 0$  és  $\tilde{\nabla}_a \Omega \neq 0$ . (Itt  $\tilde{\nabla}_a$  a  $\tilde{g}_{ab}$  metrikához tartozó gradiens-operátor, de a feltétel független a derivált-operátor megválasztásától.) (b) Az  $i^0$  pontban pedig fennáll, hogy  $\Omega(i^0) = 0$ ,  $\lim_{i^0} \tilde{\nabla}_a \Omega = 0$  és  $\lim_{i^0} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \Omega = 2\tilde{g}_{ab}(i^0)$ . (Itt határértéket képezünk, mert  $i^0$ -ban  $\tilde{g}_{ab}$  nem kell, hogy  $C^1$  (differenciálható) legyen, úgyhogy  $\tilde{\nabla}_a$  sem kell, hogy értelmezve legyen  $i^0$ -ban.)
5. (a) Az  $i^0$  pontban vett null-irányoknak az  $n^a \equiv \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_b \Omega$  vektormező  $\mathcal{J}^+$  és  $\mathcal{J}^-$ -beli integrálgörbéinek terére történő leképezése diffeomorfizmus. (b) Ha  $\omega$  olyan függvény, amely sima  $(\tilde{M} \setminus i^0)$ -ban, pozitív ( $\omega > 0$ )  $M \cup \mathcal{J}^- \cup \mathcal{J}^+$ -on, és eleget tesz  $\mathcal{J}^- \cup \mathcal{J}^+$ -on a  $\tilde{\nabla}_a(\omega^4 n^a) = 0$  feltételnek, akkor  $\mathcal{J}^- \cup \mathcal{J}^+$ -on az  $\omega^{-1} n^a$  vektormező teljes.



### 10.2.3. Az aszimptotikus laposság definíciójának magyarázata

#### 1. A $C^{>0}$ tulajdonság fogalma

Világítsuk meg részletesen a definíció jelentését. Kezdjük azzal, hogy mit értünk azon, hogy a nem fizikai  $\tilde{g}_{ab}$  metrika  $i^0$ -ban  $C^{>0}$ . A konform végtelen értelmezésének gyenge pontja, hogy a térbeli végtelen egészét egyetlen pont,  $i^0$  képviseli. Ha a fizikai téridőben különböző görbék mentén különböző irányokból tartunk a térbeli végtelenhez, akkor ezek a görbék a fizikai téridőben egyre távolabb kerülnek egymástól. Ugyanakkor a nem fizikai téridőben mindezen görbék konform izometrikus képei ugyanabba az  $i^0$  pontba futnak be. Az természetes követelmény, hogy bizonyos fizikai tenzormezők (az  $\Omega$  megfelelő hatványaival szorozva) jól definiált határértékkel rendelkezzenek, ha megfelelő görbék mentén tartunk a térbeli végtelenhez. Ugyanakkor az már értelmetlen, hogy azt is megköveteljük, hogy ezek a határértékek mind megegyezzenek, ha különböző irányokból tartunk a térbeli végtelenhez a fizikai téridőben, azaz  $i^0$ -hoz a nem fizikai téridőben. A Minkowski-téridő esetében csak a téridő homogenitásának és izotrópiájának köszönhetően lehetett a konform kiterjesztést úgy definiálni, hogy a nem fizikai metrika és a konform faktor is simák legyenek  $i^0$ -ban. Ha azonban fizikai mezőket vizsgálunk a Minkowski-téridőben, akkor már szembetalálkozunk ezzel az irányfüggéssel az  $i^0$  pontban. Például a Maxwell-egyenletek Coulomb-megoldása esetén be lehet látni, hogy az  $\Omega F_{ab}$  tenzor jól definiált határértékkel rendelkezik, ha tetszőleges térszerű geodetikus mentén tartunk a végtelenhez, de a határértékül kapott tenzor függ attól, hogy melyik térszerű geodetikust választottuk. Ez felel meg annak a várakozásunknak, hogy az elektromos erővonalak sugárirányban befelé mutatnak  $i^0$ -ban. Görbült téridőben a téridő metrikája (mint például a Schwarzschild megoldás metrikája) „nagy távolságon” hasonló viselkedést mutat, mint a Coulomb-megoldás a Minkowski-téridőben. Ezért értelmetlen azt megkövetelni, hogy a nem fizikai metrika  $i^0$ -ban sima legyen. Az aszimptotikus laposság definíciójában helyette azt követeljük meg, hogy a nem fizikai  $\tilde{g}_{ab}$  metrika legyen  $C^{>0}$ .

Azon, hogy a  $\tilde{g}_{ab}$  metrika  $i^0$ -ban  $C^{>0}$ , azt értjük, hogy a metrika  $i^0$ -ban folytonos, azaz  $C^0$ , és létezik a metrika első deriváltjainak határértéke  $i^0$ -ban, de ez irányfüggő és a határérték szögfüggése sima. Ugyanez matematikailag pontosabban fogalmazva:

**Definíció:** Azon, hogy a  $\tilde{g}_{ab}$  metrika  $i^0$ -ban  $C^{>0}$  azt értjük, hogy a metrika  $i^0$ -ban folytonos, azaz  $C^0$ , és bármely, az  $i^0$  pontot lefedő sima lokális koordinátarendszerben  $\tilde{g}_{ab}$  komponenseinek összes első deriváltjai rendelkeznek reguláris irányfüggő határértékkel  $i^0$ -ban.

**Definíció:** A reguláris irányfüggő határérték definíciója. Legyen  $\{x^\mu\}$  az  $i^0$  pontot lefedő sima koordinátarendszer, amelynek origója  $i^0$ . Vezessük be a  $\rho$

radiális függvényt a

$$\rho^2 = \sum_{\mu=1}^4 (x^\mu)^2 \quad (10.2.15.)$$

definícióval és a  $\theta^\alpha(x)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) gömbi szögeket ugyanúgy, mint a 3-dimenziós gömbi szögeket a 4-dimenziós euklideszi térben. Az így kapott  $\theta^\alpha$  szögeket használjuk az  $i^0$  pont megközelítési irányainak jellemzésére. Akkor mondjuk, hogy az  $f$  függvény az  $i^0$  pontban reguláris irányfüggő határértékkel rendelkezik, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

- (a) Bármely  $i^0$ -ban végződő differenciálható  $\gamma$  görbe esetén létezik  $f$ -nek  $\gamma$  menti határértéke  $i^0$ -ban; és ez a határérték csak  $\gamma$   $i^0$ -beli érintője irányától függ, azaz  $\lim_{i^0} f = F(\theta^\alpha)$ , ahol a határértéket úgy képezzük, hogy  $\gamma$  mentén tartunk  $i^0$ -hoz és  $\theta^\alpha$  a  $\gamma$  érintőjének irányát meghatározó szögek  $i^0$ -ban.
- (b) Az  $F(\theta^\alpha)$  függvény sima a 3-dimenziós gömbfelületen.
- (c) Bármely  $i^0$ -ban végződő differenciálható görbe és bármely  $n \geq 1$  egész szám esetén léteznek az alábbi tulajdonságú határértékek:

$$\lim_{i^0} \frac{\partial^n f}{\partial \theta^n} = \frac{\partial^n F}{\partial \theta^n}, \quad \lim_{i^0} \rho^n \frac{\partial^n f}{\partial \rho^n} = 0. \quad (10.2.16.)$$

Itt  $\partial^n / \partial \theta^n$  a  $\theta^\alpha$ -k szerinti tetszőleges  $n$ -edik deriváltat jelent, hozzátéve, hogy az első egyenlőség mindkét oldalán ugyanaz a deriválás szerepel.

**Megjegyzés:** Meg lehet mutatni, hogy a fenti definíció közvetlen következménye, hogy olyan koordinátarendszerben, amelyben a  $\{\tilde{\nabla}_a x^\mu\}$  vektorrendszer ortonormált  $i^0$ -ban, a nem fizikai metrika  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \rho l_{\mu\nu}(\theta^\alpha)$  aszimptotikus viselkedést mutat ha  $\rho \rightarrow 0$ .

**Megjegyzés:** Az aszimptotikus laposságot csak vákuum-téridő esetében definiáltuk, amikor  $R_{ab} = 0$  a fizikai téridőben. A definíciókban azonban csak a téridő „végtelen közelében” mutatott viselkedése játszik szerepet, csupán azt kell megkövetelnünk, hogy  $R_{ab} = 0$  a „végtelen közelében”, azaz pl.  $M$  és a 2. feltételben szereplő  $V$  tartomány metszetében. Ezt a feltételt még tovább lehet gyengíteni megengedve, hogy  $T_{ab}$  nem tűnik el  $V$ -ben, de elég gyorsan tart nullához a végtelenben, pontosabban, hogy  $\mathcal{J}^+$ -on és  $\mathcal{J}^-$ -on  $\Omega^{-2}T_{ab}$  sima, és  $i^0$ -ban megfelelő aszimptotikus viselkedést mutat.

**Megjegyzés:** Az aszimptotikusan lapos  $(M, g_{ab})$  téridőhöz tartozó nem fizikai  $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$  téridő metrikájának megválasztása korántsem egyértelmű. Ha az  $\Omega$  konform faktorra az  $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$  a definíciónak megfelelő nem fizikai téridő, akkor az  $\omega\Omega$  konform faktorra az  $(\tilde{M}, \omega^2 \tilde{g}_{ab})$  is az, ha  $\omega > 0$  mindenütt, továbbá  $\omega$  mindenütt sima kivéve az  $i^0$  pontot, ahol  $C^{>0}$ , és teljesül, hogy  $\omega(i^0) = 1$ . Ez azt jelenti, hogy **a nem fizikai metrika megválasztásában jelentős mértékszabadságunk van.**

## 2. Az aszimptotikus laposság definíciójában szereplő 1.-5. feltételek jelentése

Vizsgáljuk most az aszimptotikus laposság feltételeinek a jelentését. Az első három feltétel elég nyilvánvalóan fejezi ki, hogy az  $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$  nem fizikai téridő rendelkezik a Minkowski-téridő konform kiegészítésének néhány tulajdonságával.

- Az 1. feltétel lényegében kifejezi, hogy  $i^0$  a térbeli végtelent reprezentálja.
- A 2. feltétel kifejezi, hogy a nem fizikai téridő a „végtelen közelében” kauzálisan „jó viselkedésű”:  $V$  minden pontjának van olyan nyílt környezete, amelybe minden kauzális görbe csak egyszer metsz bele.
- A 3. feltétel azt fejezi ki, hogy a konform faktor a végtelenben „jó viselkedésű”.

A definícióban kulcsfontosságú a 4. feltétel és inkább technikai jellegű az 5. feltétel. Vegyük most ezeket sorra.

- A 4. feltétel kulcsfontosságú az aszimptotikus laposság definíciójában. Az, hogy  $\Omega$  eltűnik  $\mathcal{J}^+$ -on,  $\mathcal{J}^-$ -on és  $i^0$ -ban, azt biztosítja, hogy a nem fizikai metrikáról a fizikai metrikára történő áttérés a „végtelenben” „végtelen mértékű megnyújtással” jár együtt. Tulajdonképpen ez a tulajdonság mutatja, hogy  $\mathcal{J}^+$ ,  $\mathcal{J}^-$  és  $i^0$  valóban a „végtelent” reprezentálja. Az  $\Omega$  konform faktor deriváltjaira  $\mathcal{J}^+$ -on,  $\mathcal{J}^-$ -on és  $i^0$ -ban kirótt feltételek pedig azt biztosítják, hogy a fizikai  $g_{ab}$  metrika (a megfelelő gyorsasággal) lapossá válik, ha tartunk a végtelenhez. Nézzük ezt most részletesebben, azaz keressünk alkalmas koordinátarendszert, amelyben az aszimptotikusan lapos téridő fizikai metrikájának aszimptotikus viselkedését explicit módon láthatjuk.

Vizsgáljuk pl. a fizikai metrika aszimptotikus viselkedését, amikor a  $\mathcal{J}^+$  jövőbeli null-végtelenhez tartunk. (Hasonló vizsgálatot végezhetünk a múltbeli null-végtelen esetében is.) Célunk az, hogy megmutassuk, a 4(a) feltétel és a vákuumbeli Einstein-egyenletek együttesen biztosítják, hogy az aszimptotikusan lapos téridőben a jövőbeli null-végtelen közelében ( $v \rightarrow \infty$ ) a fizikai metrika csak  $1/v$  rendben különbözik a Minkowski-metrikától.

Eljárásunk több lépésből áll.

- Először megmutatjuk, hogyan választhatunk a nem fizikai téridőben olyan mértéket, hogy a  $\mathcal{J}^+$  jövőbeli null-végtelenben a

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \Omega|_{\mathcal{J}^+} = 0 \quad (10.2.17.)$$

mértékfeltétel teljesüljön, és  $\mathcal{J}^+$  bármely  $\mathcal{S}$  keresztmetszetén az indukált  $\tilde{h}_{ab}$  Riemann-metrika az  $\mathbb{R}^3$ -ba beágyazott, egység-sugarú, 2-dimenziós gömbfelület természetes  $h_{ab}$  metrikája legyen.

Felhasználjuk, hogy a fizikai téridő és a nem fizikai téridő  $R_{ab}$  és  $\tilde{R}_{ab}$  Ricci-tenzora között a kapcsolat, a konform transzformációkra vonatkozó összefüggések értelmében

$$R_{ab} = \tilde{R}_{ab} + 2\Omega^{-1}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega + \tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{cd}[\Omega^{-1}\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\Omega - 3\Omega^{-2}(\tilde{\nabla}_c\Omega)(\tilde{\nabla}_d\Omega)]. \quad (10.2.18.)$$

A vákuum esetén az Einstein-egyenlet,  $R_{ab} = 0$  a nem fizikai téridő jellemzőinek nyelvén a (10.2.18.) egyenlőség jobb oldalának eltűnését jelenti. Szorozzuk az így felírt Einstein-egyenletet  $\Omega$ -val,

$$0 = \Omega\tilde{R}_{ab} + 2\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega + \tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{cd}[\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\Omega - 3\Omega^{-1}(\tilde{\nabla}_c\Omega)(\tilde{\nabla}_d\Omega)], \quad (10.2.19.)$$

majd tartsunk a  $\mathcal{J}^+$  jövőbeli null-végtelenhez. Mivel  $\Omega$ ,  $\tilde{g}_{ab}$  és  $\tilde{R}_{ab}$  sima,  $\Omega^{-1}\tilde{g}^{cd}(\tilde{\nabla}_c\Omega)(\tilde{\nabla}_d\Omega) = \Omega^{-1}n^cn_c$ -nek simán kiterjeszthetőnek kell lennie  $\mathcal{J}^+$ -ra. (Így lehet véges a határérték, mivel  $\Omega$  zérushoz és  $\Omega^{-1}$  végtelenhez tart, ha tartunk  $\mathcal{J}^+$ -hoz.) Emiatt az  $n^a = \tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_b\Omega$  vektormező null-vektormező kell legyen. Ez abból is adódik, hogy  $\mathcal{J}^+ = \tilde{J}^+(i^0) - i^0$  definíció szerint null-felület és  $\Omega|_{\mathcal{J}^+} = \text{állandó}$  miatt  $n^a$  normális a  $\mathcal{J}^+$  null-hiperfelületre.

Felhasználva a konform faktor megválasztásában rejlő mértékszabadságot, elérhetjük, hogy  $\Omega^{-1}\tilde{g}^{cd}(\tilde{\nabla}_c\Omega)(\tilde{\nabla}_d\Omega)|_{\mathcal{J}^+} = 0$  legyen. Az

$$\Omega \longrightarrow \Omega' = \omega\Omega, \quad \tilde{g}_{ab} \longrightarrow \tilde{g}'_{ab} = \omega^2\tilde{g}_{ab} \quad (10.2.20.)$$

transzformáció esetén, ahol  $\omega > 0$ , mindenütt sima, kivéve  $i^0$ -ban, az adódik, hogy

$$\begin{aligned} (\Omega')^{-1}(\tilde{g}')^{cd}(\tilde{\nabla}'_c\Omega')(\tilde{\nabla}'_d\Omega') &= \omega^{-3}\tilde{g}^{cd}[\Omega(\tilde{\nabla}_c\omega)(\tilde{\nabla}_d\omega) + 2\omega(\tilde{\nabla}_c\Omega)(\tilde{\nabla}_d\omega) \\ &\quad + \omega^2\Omega^{-1}(\tilde{\nabla}_c\Omega)(\tilde{\nabla}_d\Omega)] \\ &= \omega^{-3}[\Omega\tilde{g}^{cd}(\tilde{\nabla}_c\omega)(\tilde{\nabla}_d\omega) + 2\omega n^d(\tilde{\nabla}_d\omega) \\ &\quad + \omega^2\Omega^{-1}n^cn_c]. \end{aligned} \quad (10.2.21.)$$

Ha  $\omega$ -t úgy választjuk meg, hogy

$$n^a\tilde{\nabla}_a\ln\omega = -\frac{1}{2}\Omega^{-1}n^an_a \quad (10.2.22.)$$

teljesüljön, akkor a (10.2.21.) kifejezésben a szögletes zárójelben a két utolsó tag kiejti egymást, az első tag meg azért tűnik el, mert  $\tilde{g}^{cd}\tilde{\nabla}_c\omega$ -nak null-vektornak kell lennie hasonló okokból, mint  $n^c$ -nek. A (10.2.22.) egyenlet az  $n^a$  vektormező bármely integrálgörbéje mentén közösleges differenciálegyenlet  $\omega$ -ra, ezért megoldható.

Így az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy olyan mértékben dolgozunk, amikor  $\Omega^{-1}\tilde{g}^{cd}(\tilde{\nabla}_c\Omega)(\tilde{\nabla}_d\Omega)|_{\mathcal{J}^+} = 0$ . Ekkor az Einstein-egyenlet  $\mathcal{J}^+$ -on:

$$[2\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega + \tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{cd}\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\Omega]|_{\mathcal{J}^+} = 0, \quad (10.2.23.)$$

ahonnan adódik a (10.2.17.) mértékfeltétel. A (10.2.17.) feltételből viszont az következik  $n^a\tilde{g}^{cb}$ -vel történő kontrakció után (ahol  $n^a = \tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_b\Omega$ ), hogy

$$n^a\tilde{\nabla}_an^b = 0, \quad (10.2.24.)$$

ami azt jelenti, hogy  $\mathcal{J}^+$ -on az  $n^a$  érintő null-vektormező eleget tesz a  $\mathcal{J}^+$ -on futó null-geodetikus nem fizikai metrika szerinti affin paraméteres egyenletének. Másrészt a (10.2.17.) mértékben  $\mathcal{J}^+$ -on:

$$B^b_a \equiv \tilde{\nabla}_a n^b = \tilde{\nabla}_a (\tilde{g}^{bc} \tilde{\nabla}_c \Omega) = \tilde{g}^{bc} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_c \Omega = 0. \quad (10.2.25.)$$

Ez viszont azt jelenti, hogy  $\mathcal{J}^+$ -on a null-geodetikusok kongruenciájának tágulása, nyírása és csavarodása mind eltűnnek.

A  $\omega$  megválasztásában rejlő mértékszabadság engedte meg, hogy  $\omega$ -t úgy válasszuk meg, hogy  $\mathcal{J}^+$ -on elégítse ki a (10.2.22.) egyenletet, és ez tette lehetővé, hogy kielégítsük a (10.2.17.) mértékfeltételt. A (10.2.22.) egyenlet azonban még további mértékszabadságot enged meg  $\omega$  megválasztásában:  $\omega$ -t tetszőlegesen választhatjuk meg  $\mathcal{J}^+$  bármely  $\mathcal{S}$  keresztmetszetén. A  $\mathcal{J}^+$  null-hiperfelület  $\mathcal{S}$  keresztmetszete olyan 2-dimenziós felület  $\mathcal{J}^+$ -ban, amelyet  $\mathcal{J}^+$  bármely null-geodetikus generátora pontosan egy pontban metsz. Az 5(a) tulajdonság biztosítja, hogy  $\mathcal{J}^+$  topológiája  $S^2 \times \mathbb{R}$ , úgyhogy az  $\mathcal{S}$  keresztmetszet topológiája  $S^2$ , azaz 2-dimenziós gömbfelület. A nem fizikai  $\tilde{g}_{ab}$  metrika  $\tilde{h}_{ab}$  Riemann-metrikát indukál  $\mathcal{S}$ -en. Meg lehet azonban mutatni, hogy a 2-dimenziós gömbfelületen minden Riemann-metrika a gömbfelület természetes metrikájának konform faktorszorzásával egyenlő, azaz  $\tilde{h}_{ab} = f^2 h_{ab}$ , ahol  $(\mathcal{S}, h_{ab})$  izometrikus az  $\mathbb{R}^3$ -ba beágyazott egység-sugarú gömbfelülettel. Ezért az  $\omega$ -ban rejlő további mértékszabadságot arra használjuk fel, hogy  $\mathcal{S}$ -et azonossá tegyük az  $\mathbb{R}^3$ -ba beágyazott egység-sugarú gömbfelülettel. Mivel a (10.2.17.) mértékben  $\mathcal{J}^+$  null-geodetikus generátorai kongruenciájának tágulása, nyírása és elcsavarodása zérus, ezért  $\mathcal{J}^+$  minden keresztmetszete egység-sugarú metrikus gömbfelület ebben a mértékben.

- Miután elvégeztük a mértékrögzítést a fent leírt módon, most *vezessünk be olyan koordinátákat a nem fizikai téridőben,  $\mathcal{J}^+$  környezetében*, amelyek aszimptotikusan Descartes-koordináták. Megmutatjuk, hogy ezekben a koordinátákban a fizikai metrika komponensei a jövőbeli null-végtelenben meghatározott ütemben a Minkowski-metrikához tartanak.

Mivel  $\tilde{\nabla}_a \Omega \neq 0$ , választhatjuk  $\Omega$ -t az egyik koordinátának (*a  $\mathcal{J}^+$ -ra merőleges null-koordináta, mert  $n^a$  null-vektor*). Vezessük be valamely  $\mathcal{S}$  keresztmetszeten a természetes  $(\theta, \phi)$  gömbfelületi koordinátákat, és emeljük át ezeket a koordinátákat a  $\mathcal{J}^+$  többi pontjaiba a null-geodetikus generátorok mentén. Vezessük be továbbá a null-geodetikus generátorok  $\mathcal{S}$  keresztmetszettől mért  $u$  affin paraméterét az  $n^a \tilde{\nabla}_a u = 1$  normálással, mint további koordinátát (*a másik null-koordináta*). Végül terjesszük ki ezeket az  $(u, \theta, \phi)$  koordinátákat a  $\mathcal{J}^+$  környezetébe. Vegyük ehhez figyelembe, hogy minden  $\mathcal{J}^+$ -beli  $u = \text{áll}$ . 2-dimenziós gömbfelülethez az ortogonális null-geodetikusok két családja tartozik:  $\mathcal{N}_1$ -be tartoznak  $\mathcal{J}^+$  null-geodetikus generátorai,  $\mathcal{N}_2$ -be pedig az ezekre ortogonális null-geodetikusok. Az  $(u, \theta, \phi)$  koordináták átemelése  $\mathcal{S}$  pontjaiból  $\mathcal{J}^+$  más pontjaiba úgy történik, hogy az  $(u, \theta, \phi)$  koordináták értékét rögzítve tartjuk az  $\mathcal{N}_2$  családba tartozó minden egyes null-geodetikus mentén.

Az így kapott koordinátarendszerben a nem fizikai  $\tilde{g}_{ab}$  metrika  $\mathcal{J}^+$ -on:

$$\tilde{ds}^2|_{\mathcal{J}^+} = 2d\Omega du + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (10.2.26.)$$

Meg lehet mutatni továbbá, hogy a (10.2.17.) mértékfeltétel következtében  $\tilde{g}_{uu}$ ,  $\tilde{g}_{u\theta}$  és  $\tilde{g}_{u\phi}$  mind  $\mathcal{O}(\Omega^2)$  rendűek, ha  $\Omega \rightarrow 0$ . Ezért a  $g_{ab} = \Omega^{-2} \tilde{g}_{ab}$  fizikai metrika

$\mathcal{J}^+$  környezetében:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= 2\Omega^{-2}d\Omega du + \Omega^{-2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\
&\quad + \{dudu, dud\theta, dud\phi\text{-ban } O(1) \text{ rendű tagok}\} \\
&\quad + \{d\theta^2, d\theta d\phi, d\phi^2, d\Omega du, d\Omega^2, d\Omega d\theta, d\Omega d\phi\text{-ben } O(\Omega^{-1}) \text{ rendű tagok}\}.
\end{aligned} \tag{10.2.27.}$$

Hajtsuk végre a  $v = 1/\Omega$  koordináta-transzformációt, ekkor a fizikai metrika a  $v \rightarrow \infty$  határesetben:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -dvdu + \frac{1}{4}v^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\
&\quad + \{du^2, dud\theta, dud\phi\text{-ban } O(1) \text{ rendű tagok}\} \\
&\quad + \{d\theta^2, d\theta d\phi, d\phi^2\text{-ben } O(v) \text{ rendű tagok}\} \\
&\quad + \{dvdu, dvd\theta, dvd\phi\text{-ben } O(1/v) \text{ rendű tagok}\} \\
&\quad + O(1/v^3)dv^2.
\end{aligned} \tag{10.2.28.}$$

Ezután további  $v \rightarrow v + f(u, \theta, \phi)$  transzformációval az  $O(1)$  rendű  $du^2$ -es tagok eltávolíthatók  $O(1)$  rendű  $dvd\theta$  és  $dvd\phi$  tagok megjelenése árán. Miután ezt megtettük, vezessük be az „aszimptotikusan Descartes-féle koordinátákat”:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1}{2}(u + v), \\
x &= \frac{1}{2}(v - u) \sin\theta \cos\phi, \quad y = \frac{1}{2}(v - u) \sin\theta \sin\phi, \quad z = \frac{1}{2}(v - u) \cos\theta.
\end{aligned} \tag{10.2.29.}$$

Meg lehet mutatni, hogy ezekben a koordinátákban a fizikai metrika a jövőbeli null-végtelenben aszimptotikusan a Minkowski-metrikához tart, attól csak  $1/v$  rendben különbözik, ha  $v \rightarrow \infty$ .

Hasonlóképpen lehet megmutatni, hogy a 4(b) pontban  $\Omega$ -ra és  $\tilde{g}_{ab}$ -re  $i^0$ -ban kirótt differenciálhatósági követelmények következtében a metrika aszimptotikusan Minkowski-metrikához tart, ha a térbeli végtelenhez tartunk.

- Az 5. *feltétel* inkább technikai jellegű, lényegében azt fejezi ki, hogy  $\mathcal{J}^+$  és  $\mathcal{J}^-$  a megfelelő méretűek. Az 5(a) feltétel azt mondja ki, hogy  $\mathcal{J}^+$  és  $\mathcal{J}^-$  valamennyi null-geodetikus generátora  $i^0$ -ból indul ki jól meghatározott módon, és maga után vonja, hogy  $\mathcal{J}^+$  és  $\mathcal{J}^-$  topológiája  $S^2 \times \mathbb{R}$ . Ha  $\tilde{g}_{ab}$  sima lenne  $i^0$ -ban, akkor ebből automatikusan az következne, hogy az  $i^0$ -ban vett null-vektorok halmaza diffeomorf lenne  $\mathcal{J}^+$  és  $\mathcal{J}^-$  null-geodetikus generátorainak halmazával, ha a null-geodetikusok  $i^0$ -ból indulnak ki. Mivel azonban  $\tilde{g}_{ab}$   $i^0$ -ban nem sima, hanem csak  $C^{>0}$ , ezért ezt a tulajdonságot külön meg kell követelni.

Az 5(b) feltétel arra szolgál, hogy a konform kiterjesztett téridőben „ $\mathcal{J}^+$  és  $\mathcal{J}^-$  egésze” benne legyen. Ez az állítás azzal egyenértékű, hogy a (10.2.17.) mértékben  $\mathcal{J}^+$  és  $\mathcal{J}^-$  valamennyi null-geodetikus generátora teljes legyen. (A  $\tilde{\nabla}_a(\omega^4 n^a) = 0$  feltétel ekvivalens a (10.2.22.) egyenlettel.) A  $\mathcal{J}^+$  null-geodetikus generátorainak teljessége egyenértékű azzal,

hogy a fentebb bevezetett  $(v, u, \theta, \phi)$  koordináta-rendszerben az  $u$  retardált idő,  $-\infty < u < +\infty$  a teljes számegyenesen fut. Meg lehet mutatni, hogy az 5(b) feltétel nélkül előfordulhat, hogy az aszimptotikus laposság véges retardált időben megszűnik.

Az aszimptotikus laposság definíciójával kapcsolatos további részleteket ld. a [1] tankönyvben és az abban idézett irodalmakban. A [1] tankönyvben összehasonlítás található az aszimptotikus laposságnak a szakirodalomban előforduló másféle definícióival is.

#### 10.2.4. Aszimptotikus szimmetriák

Az aszimptotikusan lapos téridő egyik fontos tulajdonsága az úgynevezett **aszimptotikus szimmetriákkal** kapcsolatos. Az  $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$  Minkowski-téridő 10-paraméteres izometria-csoporttal, a Poincaré-csoporttal rendelkezik. Ez fontos szerepet játszik abban, hogy hogyan viselkednek a fizikai mezők a Minkowski-téridőben: ezeknek a szimmetriáknak megmaradási törvények felelnek meg. Ebből az lehet a sejtésünk, hogy az aszimptotikusan lapos téridőben a „végtelenben” hasonló szimmetriák, aszimptotikus szimmetriák létezhetnek, hiszen a „végtelenhez” tartva a fizikai metrika tart a Minkowski-metrikához. Valóban léteznek is ilyen aszimptotikus szimmetriák, ezek csoportja azonban **nem** a Poincaré-csoport. Az aszimptotikus szimmetriák csoportja sokkal bővebb, amely tartalmazza a „szögfüggő translációk” **végtelen-dimenziós alcsoportját**, az úgynevezett **szupertranszlációk** alcsoportját.

Vizsgáljuk az aszimptotikus szimmetriákat a null-végtelenben. A jövőbeli null-végtelenben jelentkező infinitezimális aszimptotikus szimmetria fogalmán azt szeretnénk érteni, hogy a jövőbeli null-végtelenben létezik olyan  $\xi^a$  vektormező (pontosabban vektormezők olyan ekvivalencia-osztálya) a fizikai téridőben, amely kielégíti a  $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$  Killing-egyenletet „olyan jó közelítéssel, amilyenel csak lehet”, ha tartunk  $\mathcal{J}^+$ -hoz.

**Definíció:** Az aszimptotikusan lapos  $(M, g_{ab})$  téridő infinitezimális aszimptotikus szimmetriával rendelkezik a  $\mathcal{J}^+$  jövőbeli null-végtelenben, ha létezik olyan  $\xi^a$  vektormező a téridőben, amely eleget tesz az alábbi tulajdonságoknak:

1. A nem fizikai téridőben a  $\xi^a$ -nak megfeleltetett  $\psi^* \xi^a$  vektormezőnek létezik sima kiterjesztése  $\mathcal{J}^+$ -ra.
2. Az  $\Omega^2 \mathcal{L}_\xi g_{ab}$  tenzormezőnek (pontosabban  $\Omega^2 \psi^* \mathcal{L}_\xi g_{ab}$ -nek) létezik olyan sima kiterjesztése  $\mathcal{J}^+$ -ra, amely eltűnik  $\mathcal{J}^+$ -on.
3. Legyenek  $\xi^a$  és  $\xi'^a$  olyan vektormezők, amelyek eleget tesznek az 1. és 2. követelménynek. Akkor mondjuk, hogy ezek a vektormezők ugyanazt az in-

finitezimális szimmetria-transzformációt generálják, ha  $\mathcal{J}^+$ -ra történő kiterjesztésük megegyezik  $\mathcal{J}^+$ -on.

Az így értelmezett aszimptotikus szimmetria-csoport univerzális, azaz minden aszimptotikus téridő esetén ugyanaz a szimmetria-csoport. Az azonban első pillantásra meglepő, hogy ez a csoport nem a 10-paraméteres Poincaré-csoport, hanem egy végtelen dimenziós csoport, ami a **Bondi**<sup>93</sup>-**Metzner**<sup>94</sup> -**Sachs**<sup>95</sup>-csoport, rövidítve **BMS-csoport** néven ismeretes.

**Megjegyzés:** A Poincaré-szimmetriákon kívüli, nem várt aszimptotikus szimmetriák megjelenését a következőképpen lehet kézenfekvővé tenni. Meg lehet mutatni a következőket:

- (a) a  $(v, u, \theta, \phi)$  koordinátákban a Minkowski-téridőben, a gömbi szögek tetszőleges  $f(\theta, \phi)$  függvénye esetén

$$\xi^a = f\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^a + \frac{v}{2r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^a + \frac{v}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a \quad (10.2.30.)$$

olyan vektormező, amely nem tűnik el  $\mathcal{J}^+$ -on, és amelyre  $\Omega^2 \mathcal{L}_\xi \eta_{ab}$  zérus  $\mathcal{J}^+$ -on.

- (b) Görbült, de aszimptotikusan lapos téridőben nem lehet találni olyan vektormezőt, amely a (10.2.30.) definícióval adott  $\xi^a$  vektormezőnél jobb közelítéssel elégítené ki a Killing-egyenletet.

Ennek tudható be, hogy a (10.2.30.) típusú „szögfüggő eltolások” végtelen dimenziós családja ugyanolyan jó közelítéssel elégíti ki a Killing-egyenletet a null-végtelenben, mint a Poincaré-transzformációk.

A BMS-szimmetriák úgy is jellemezhetők, mint a nem fizikai téridőben a null-végtelennek ( $\mathcal{J}^+$ -nak) önmagára ( $\mathcal{J}^+$ -ra) történő leképezései. Jelölje  $\tilde{h}_{ab}$  a nem fizikai téridőben a  $\tilde{g}_{ab}$  metrika által a  $\mathcal{J}^+$  null-hiperfelületen indukált elfajult metrikát. Mivel  $n^a = \tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\Omega$  tangenciális a  $\mathcal{J}^+$  null-felülethez képest (azaz  $\tilde{h}^a_b n^b = n^a$ ), azért  $n^a$  a  $\mathcal{J}^+$ -on értelmezett vektormezőnek tekinthető.

**Állítás:** A  $\tilde{h}_{ab}$  indukált metrikával és az  $n^a$  vektormezővel ellátott  $\mathcal{J}^+$  sokaság konform mérték erejéig univerzális, azaz minden aszimptotikusan lapos téridő esetén azonos az alábbi értelemben: legyenek  $(\mathcal{J}_1^+, (\tilde{h}_1)_{ab}, n_1^a)$ , ill.  $(\mathcal{J}_2^+, (\tilde{h}_2)_{ab}, n_2^a)$  rendre az  $(M_1, (g_1)_{ab})$ , ill. az  $(M_2, (g_2)_{ab})$  aszimptotikusan lapos téridőkhöz tartozó aszimptotikus szerkezetek a jövőbeli null-végtelenben; ekkor a két nem fizikai téridőben

<sup>93</sup>Sir Hermann Bondi, angol-osztrák matematikus és kozmológus, 1919–2005

<sup>94</sup>A.W.K. Metzner

<sup>95</sup>Rainer Kurt Sachs, német-amerikai számítógépes sugárbiológus, kozmológus, 1932–



lehet úgy választani konform mértéket, hogy létezzen olyan  $\psi : \mathcal{J}_1^+ \mapsto \mathcal{J}_2^+$  diffeomorfizmus, amelyre  $\psi^*(\tilde{h}'_1)_{ab} = (\tilde{h}'_2)_{ab}$  és  $\psi^*(n'_1)^a = (n'_2)^a$ , ahol vessző jelöli az egyes nem fizikai terekben a tenzorokat konform mértéktranszformáció után.

Fentebb beláttuk, hogy létezik olyan konform mérték és olyan  $(u, \theta, \phi)$  koordinátarendszer  $\mathcal{J}^+$ -on, hogy  $h_{ab} = (d\theta)_a(d\theta)_b + \sin^2 \theta (d\phi)_a(d\phi)_b$  és  $n^a = (\partial/\partial u)^a$ . Legyen  $\psi$  az a leképezés, amelyik  $\mathcal{J}_1^+$  bármely  $p_1$  pontjához  $\mathcal{J}_2^+$  azon  $p_2$  pontját rendeli hozzá, amelynek  $(u_2, \theta_2, \phi_2)$  koordinátái megegyeznek  $p_1$   $(u_1, \theta_1, \phi_1)$  koordinátaival.

A nem fizikai téridőben a BMS-csoport tehát olyan  $\psi : \mathcal{J}^+ \mapsto \mathcal{J}^+$  diffeomorfizmusok csoportja, amelyekre  $\psi^*\tilde{h}_{ab}$  és  $\psi^*n^a$  legfeljebb csak a konform mérték megváltoztatásával kapcsolatos átskalázásban különböznek  $\tilde{h}_{ab}$ -tól és  $\tilde{n}^a$ -tól. **A BMS-csoport által létesített aszimptotikus szerkezet tehát univerzális.** A BMS-csoportnak ebben a jellemzésében az infinitezimális szupereltolások úgy definiálhatók, mint  $\mathcal{J}^+$ -on értelmezett  $\xi^a = \alpha n^a$  alakú vektormezők, ahol  $\alpha$  állandó  $\mathcal{J}^+$  minden egyes null-geodetikus generátora mentén, azaz  $n^a \tilde{\nabla}_a \alpha = 0$ , egyébként pedig tetszőleges függvény. A Minkowski-téridő „szögfüggő eltolásainak” görbült, aszimptotikus lapos téridőben a BMS-csoport szupereltolásai felelnek meg. Ezek a BMS-csoportnak végtelen dimenziós, abeli, normál<sup>96</sup> alcsoportját képezik, és a {BMS-csoport}/{szupertranszlációk csoportja} faktorcsoporthoz izomorf a Lorentz-csoporttal.

**Megjegyzés:** Joggal felmerülhet a kérdés, hogy léteznek-e a BMS-csoporton belül olyan transzformációk, amelyek „tisztá eltolásnak”, „tisztá forgatásnak” vagy „tisztá lökésnek” (boost) számítanak. Másképpen fogalmazva, van-e lehetőség arra, hogy az aszimptotikus szimmetriákra kirótt valamilyen további feltétellel beazonosítsuk a Poincaré-transzformációkat a BMS-csoporton belül. Ez részben lehetséges. A szupertranszlációk alcsoportjának egyértelműen létezik olyan 4-dimenziós alcsoportja, amely a BMS-csoportnak normál alcsoportja. A Minkowski-téridő esetén ez a 4-dimenziós normál alcsoport éppen a Minkowski-téridő egzakt eltolási szimmetriáit tartalmazza. Ezért görbült, aszimptotikusan lapos téridőben értelmezhetjük **az aszimptotikus eltolásokat**, mint a szóban forgó 4-dimenziós alcsoport elemeit. A forgatások és a lökések tekintetében azonban nem találunk a BMS-csoportban hasonló szerkezetet. A BMS-csoportnak nincsen olyan alcsoportja, amely izomorf lenne a Poincaré-csoporttal.

**Megjegyzés:** A BMS-csoporthoz hasonlóan aszimptotikus szimmetriák értelmezhetők az  $i^0$  térbeli végtelenben is, az ezek alkotta csoportot **Spi-csoportnak** nevezik. Ha a térbeli végtelenben az aszimptotikus laposság feltételei közt a korábbi definíciónkban megfogalmazottnál erősebb lecsengést követelünk meg a Weyl-tenzorra, akkor kijelölhető egy Poincaré-alcsoport a Spi-csoportban. Hasonló követelmény a null-végtelenben is hasonló eredményre vezetne, azonban ilyen szigorúbb feltétel csak a térbeli végtelenben engedhető meg fizikailag, mert a null-végtelenben történő megkövetelése azt vonná maga után, hogy nem lehetséges gravitációs sugárzás.

<sup>96</sup>A normál alcsoport olyan alcsoport, amelynek bal- és jobboldali mellékosztályai megegyeznek.

### 10.2.5. A görbület aszimptotikus viselkedése

Az aszimptotikus laposságnak egyik fontos következménye a görbület speciális viselkedése a null-végtelenben. A Ricci-tenzor nullához tart, ha tartunk a végtelenhez, ezért a görbületről a teljes információt a  $C_{abc}{}^d$  Weyl-tenzor hordozza. Mivel a Weyl-tenzor konform-invariáns (ld. a D. függelék), azért az  $M$  fizikai téridőn  $C_{abc}{}^d = \tilde{C}_{abc}{}^d$ , ahol  $\tilde{C}_{abc}{}^d$  a nem fizikai Weyl-tenzor. Geroch<sup>97</sup> megmutatta azonban, hogy  $\tilde{C}_{abc}{}^d$  el kell tűnjön  $\mathcal{J}^+$ -on. Legyen  $\gamma$  null-geodetikus  $M$ -ben, amely a fizikai téridő  $p$  pontjából a  $q \in \mathcal{J}^+$  pontba tart. Legyen  $\lambda$  fizikai affin paraméter  $\gamma$ -n, úgyhogy  $q$ -nak a  $\lambda \rightarrow +\infty$  határeset felel meg. Legyen  $k^a$  a  $\gamma$  érintővektora ebben a paraméterezésben. A nem fizikai Weyl-tenzornak nem kell eleget tennie semmilyen különleges tulajdonságnak, eltekintve attól, hogy nullához kell tartania a  $q$  pontban. Ha áttérünk a nem fizikai téridőről a fizikaira, akkor viszont az végtelen mértékű nyújtásnak felel meg  $k^a$  irányában. Penrose és Geroch megmutatták, hogy ennek következtében a Weyl-tenzor „lehámózható” (displays peeling property): ha  $\lambda \rightarrow \infty$ , akkor

$$C_{abcd} = \frac{C_{abcd}^{(1)}}{\lambda} + \frac{C_{abcd}^{(2)}}{\lambda^2} + \frac{C_{abcd}^{(3)}}{\lambda^3} + \frac{C_{abcd}^{(4)}}{\lambda^4} + \mathcal{O}(1/\lambda^5), \quad (10.2.31.)$$

ahol aszimptotikusan Minkowski-bázisban minden  $C_{abcd}^{(\mu)}$  valamennyi komponense korlátos, és  $C_{abcd}^{(\mu)}$   $\mu = 1, 2, 3$  esetén a Petrov<sup>98</sup>-féle algebrai osztályozásuk<sup>99</sup> szerint rendre *IV*, *III*, *II* típusú tenzorok és a  $k^a$  null-vektor többszörös principális vek-

<sup>97</sup>Robert Geroch, amerikai fizikus, 1942-

<sup>98</sup>Aleksei Zinovyevich Petrov, orosz matematikus, 1910-1972

<sup>99</sup>Általában (a skálázástól eltekintve) 4 darab különböző  $k^a$  null-vektor létezik, amelyre teljesül, hogy

$$k^b k^c k_{[e} C_{a]bc[d} k_{f]} = 0. \quad (10.2.32.)$$

Ezeket a null-irányokat nevezik **principális vagy fő null-irányoknak**. Ugyanígy, minden Lorentz-metrikával ellátott 4-dimenziós vektortér felett értelmezett tenzor, amely kielégíti a (10.2.32.) típusú egyenletet, általában 4 fő null-iránnyal rendelkezik.

Előfordulhat azonban, hogy a Weyl-tenzor fő null-irányai közül valahány megegyezik. Ekkor ezek a (10.2.32.) egyenlőségénél erősebb relációt elégítenek ki, amiből kevesebb, mint 4 fő irány létezése következik. Azokat a téridőket, amelyek minden pontjában a fő null-irányok száma kevesebb, mint 4, **algebrailag kivételes téridőknek** nevezzük. A téridők algebrai osztályozása a Weyl-tenzor fő null-irányainak száma szerint a következő:

- **I típusú:** általános eset, 4 darab különböző fő null-iránnyal,  $k^b k^c k_{[e} C_{a]bc[d} k_{f]} = 0$ .
- **II típusú:** a fő null-irányok közül kettő egybeesik,  $k^b k^c C_{abc[d} k_{e]} = 0$ .
- **II-II típusú:** a fő null-irányok közül két pár egybeesik,  $k^b k^c C_{abc[d} k_{e]} = 0$  (2 megoldással).
- **III típusú:** a fő null-irányok közül három egybeesik,  $k_c C_{abc[d} k_{e]} = 0$ .
- **IV típusú:** mind a négy fő null-irány azonos,  $k_c C_{abcd} = 0$ .

toruk,  $\mu = 4$  esetén pedig  $I$  típusú tenzor, amelynek egyik principális null-vektora  $k^a$ .

## 10.3. Az energia

### 10.3.1. Az energia-fogalom bevezetésének lehetőségeiről

Az energia fogalma és az energia megmaradásának törvénye a fizikában kulcsfontosságú. A klasszikus mechanikai részecske energiája jól definiált, és a konzervatív erőterben mozgó részecske energiája megmarad; többek között a newtoni gravitációs mezőben mozgó részecske energiája is állandó. A klasszikus fizikai mezők relativisztikus elméletét először a speciális relativitáselmélet keretében sikerült megfogalmazni, ahol a fizikai mező a Minkowski-téridőn van értelmezve. A mezőt a  $T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzor jellemzi. A fizikai mező energiájának megmaradása a Minkowski-téridőnek az időbeli eltolásokat generáló  $t^a$  Killing-vektormezejével kapcsolatos. Ha  $\Sigma$  egy térszerű Cauchy-felület, amelynek egység-normálisa  $n^a$ , akkor a fizikai mező teljes energiája

$$E = \int_{\Sigma} T_{ab} n^a t^b. \quad (10.3.1.)$$

A

$$\partial^a T_{ab} = 0 \quad (10.3.2.)$$

egyenlet garantálja, hogy a mező teljes energiája megmarad és független a  $\Sigma$  Cauchy-felület megválasztásától.

Az általános relativitáselméletben az anyagot energetikailag megint a  $T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzor jellemzi. A 4.3.2. fejezetben megmutattuk, hogy az energiaimpulzus-tenzorra vonatkozó

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \quad (10.3.3.)$$

kontinuitási egyenlet lokális energiamegmaradási törvényként értelmezhető. Ugyanakkor az anyag energiaimpulzus-tenzorából általában nem származtatható olyan globális energiafogalom, amelyre megmaradási törvény lenne érvényes. Ennek az oka, hogy a fizikai mező a gravitációs mezővel kölcsönhat, utóbbit azonban nem tudjuk energetikailag kimerítően jellemezni, nem tudunk olyan fogalmat értelmezni, mint a gravitációs mező energiasűrűsége.

Ennek ellenére az **izolált testek teljes energiájának** jól definiált jelentés adható. Pontosabban, aszimptotikusan lapos téridőben jól definiált módon vezethetjük be a 4-esimpulzus  $P^a$  vektorát. Tekintsük (az általános relativitáselméletben) az izolált rendszert úgy, mint a speciális relativitáselméletben a részecskét. Utóbbi

esetben a részecske a  $P^a$  4-esimpulzussal jellemezhető. A  $P^a$  vektor idő-komponense a részecske  $E$  energiája (természetes egységekben  $P^0 = E/c$ ), azaz ha  $\xi^a$  az időbeli eltoláshoz tartozó Killing-vektor, akkor  $E = -P_a \xi^a$  (ami megmarad a részecske világvonala mentén). A részecske nyugalmi tömege  $M = (-P^a P_a)^{1/2}$ , úgyhogy ha a részecske nyugalomban van a  $\xi^a$  4-essebességű megfigyelő vonatkoztatási rendszerében, akkor a részecske tömege és energiája megegyezik,  $M = E$ . Fordítva, ha ismerjük a részecske nyugalmi rendszerében a  $\xi^a$  Killing-vektormezőt és az  $M$  tömeget, akkor ezek meghatározzák a részecske  $P^a$  4-esimpulzusát. Az általános relativitáselméletben az izolált rendszer  $P^a$  4-esimpulzusának meghatározására a következő stratégiát alkalmazzuk. Először sztatikus téridőket vizsgálunk, amikor természetes módon adott egy nyugalmi rendszernek megfelelő Killing-vektormező. Pontosabban, meg fogjuk határozni a sztatikus, aszimptotikusan lapos téridő teljes  $M$  tömegét annak alapján, hogy milyen erőt gyakorol egy távoli próbarészecskére. Az így kapott tömeg-definíciót általánosítjuk utána előbb stacionárius, majd nem stacionárius, aszimptotikusan lapos téridőre. Majd a tömegből és a Killing-vektorból rekonstruáljuk az aszimptotikusan lapos téridő 4-esimpulzusát.

### 10.3.2. Próbarészecske helyben tartásához szükséges erő stacionárius tér-időben

Mielőtt rátérnénk a kitűzött feladat megoldására, nézzünk néhány, a stacionárius téridőkkel kapcsolatos állítást, amelyekre szükségünk lesz.

- A stacionárius téridőben létezik időszerű  $\xi^a$  Killing-vektormező, amely definíció szerint eleget tesz a  $\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0$  egyenletnek. Jelölje a Killing-vektormező „nagyságát”  $V^2 = -\xi^a \xi_a$ . A Killing-vektormező integrálgörbéjén, mint világvonalon mozgó **stacionárius megfigyelő** négyessebessége  $u^a = \xi^a/V$ , négyesgyorsulása

$$a^b = u^a \nabla_a u^b = \frac{\xi^a}{V} \nabla_a \frac{\xi^b}{V} = \frac{\xi_a}{V^2} \nabla^a \xi^b = \nabla^b \ln V. \quad (10.3.4.)$$

Legyen  $\nabla_a$  a  $g_{ab}$  metrikához tartozó gradiens-operátor. Azonos átalakítással és a Killing-egyenletet felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a^b &= \frac{\xi^a}{V} \nabla_a \frac{\xi^b}{V} = \frac{\xi^a}{V} \left( \frac{1}{V} \nabla_a \xi^b - \frac{\xi^b}{V^2} \nabla_a V \right) \\ &= \frac{\xi_a}{V^2} \nabla^a \xi^b - \frac{1}{V^3} \xi^b \xi^a \nabla_a V = -\frac{\xi_a}{V^2} \nabla^b \xi^a - \frac{1}{V^3} \xi^b \xi^a \nabla_a V. \end{aligned} \quad (10.3.5.)$$

A jobboldali első tagot tovább alakíthatjuk:

$$-\frac{\xi_a}{V^2} \nabla^b \xi^a = -\frac{1}{2V^2} \nabla^b (\xi^a \xi_a) = \frac{1}{2V^2} \nabla_b V^2 = \frac{1}{V} \nabla^b V = \nabla^b \ln V. \quad (10.3.6.)$$

Ezután csak az marad hátra, hogy megmutassuk a jobboldali második tag eltűnését, azaz hogy  $\xi^b \xi^a \nabla_a V = 0$ . Végezzük ehhez a következő azonos átalakításokat:

$$\begin{aligned}\xi^b \xi^a \nabla_a V &= \frac{1}{2V} \xi^b \xi^a \nabla_a V^2 = -\frac{1}{2V} \xi^b \xi^a \nabla_a (\xi^c \xi_c) = -\frac{1}{V} \xi^b \xi^a \xi^c \nabla_a \xi_c \\ &= -\frac{1}{V} \xi^b \xi^a \xi^c \nabla_{(a} \xi_{c)} = 0.\end{aligned}\tag{10.3.7.}$$

Egyúttal  $a^b$  egy  $m$  tömegű stacionárius próbarészecske gyorsulása, úgyhogy annak az erőnek a nagysága, amivel lokálisan a próbarészecskét stacionárius világvonalon (a  $\xi^a$  integrálgörbéjén) lehet tartani

$$F = m(a^b a_b)^{1/2} = m \left[ \left( \frac{1}{V} \nabla^b V \right) \left( \frac{1}{V} \nabla_b V \right) \right]^{1/2} = \frac{m}{V} [(\nabla^a V)(\nabla_a V)]^{1/2}.\tag{10.3.8.}$$

- Tegyük fel, hogy a stacionárius téridő aszimptotikusan lapos. Az előző fejezetben láttuk, hogy ekkor létezik olyan  $(t, x^1, x^2, x^3)$  koordinátarendszer, ahol  $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$ , és amelyben a  $g_{ab}$  metrika komponensei  $\text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ , ha  $r = [\sum_{\mu=1}^3 (x^\mu)^2]^{1/2} \rightarrow \infty$ . Ekkor, hasonlóan, mint azt a Schwarzschild-téridőben tettük, az  $m$  tömegű,  $u^a$  négyessebességű részecske „végtelen távoli megfigyelő által mért”  $E$  energiáját  $E = -m \xi^a u_a$  kifejezéssel értelmezhetjük a Killing-vektormező segítségével. Tegyük fel, hogy az  $m$  tömegű részecskét egy tömeg nélküli szálon egy végtelen távoli stacionárius megfigyelő tartja stacionárius helyzetben. Ekkor meg lehet mutatni (ld. [1], 6.4(b) feladat), hogy a végtelen távoli stacionárius megfigyelőnek a szála  $F_\infty = VF$  erőt kell kifejtenie.

### 10.3.3. Aszimptotikusan lapos, stacionárius téridő teljes tömege

Az aszimptotikusan lapos téridő teljes tömegének definiálásakor hasonlóan járunk el, mint amikor a Schwarzschild-téridőben időszerű geodetikuson, nagy távolságban mozgó próbarészecske segítségével értelmeztük a Schwarzschild-téridő teljes  $M$  tömegét. A 7.3.2. fejezetben azt láttuk, hogy a Schwarzschild-téridőben  $r > R$  ( $R$  a Schwarzschild-sugár) radiális koordinátánál szabadon eső próbarészecske energiája olyan, mintha a nyugalmi tömegéhez hozzáadnánk a newtoni gravitációs potenciális energiáját, ha a Schwarzschild-metrika  $M$  paraméterét a téridő teljes tömegével azonosítjuk. Másképpen, az  $M$  paraméterrel jellemzett Schwarzschild-téridőben időszerű geodetikuson mozgó próbarészecske  $r > R$  esetén ugyanúgy mozog, mint az  $M$  tömegű sztatikus gravitációs centrum terében mozgó próbarészecske. Most ezt az analógiát fogjuk általánosítani.

**Definíció:** Stacionárius, aszimptotikusan lapos téridő teljes tömege

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_S \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d,\tag{10.3.9.}$$

ahol  $S$  2-dimenziós hiperfelület, amely ortogonális a  $\xi^a$  időszerű Killing-vektormezőre és topológiailag  $S^2$  gömbfelület,  $\epsilon$  a téridő természetes térfogateleme, az integrál úgy értendő, mint az  $\alpha_{ab} = \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d$  2-forma integrálja az  $S$  hiperfelületen, amelyet a végtelenben, az aszimptotikusan lapos tartományban kell felvenni. A (10.3.9.) teljes tömeg független az  $S$  felület megválasztásától.

A definíciót a következőképpen alapozhatjuk meg. Vizsgáljunk először sztatikus, aszimptotikusan lapos téridőt, amely definíció szerint olyan stacionárius téridő, amelyben létezik az időszerű  $\xi^a$  Killing-vektorra merőleges térszerű  $\Sigma$  hiperfelület. Tegyük fel továbbá, hogy az aszimptotikusan lapos tartományban vákuum van, és a Killing-vektormező úgy van normálva, hogy a végtelenben a  $V = (-\xi^a \xi_a)^{1/2}$  „vöröseltolódási tényező” 1-hez tart. A sztatikus téridőben a Killing-vektormező integrálgörbéit paraméterezhetjük a  $t$  idővel, úgyhogy  $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$  legyen, a  $\Sigma$ -n pedig bevezethetjük az  $\{x^\mu\}$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) koordinátákat. A Killing-vektormező integrálgörbéinek azonos  $t$  értékhez tartozó pontjai  $\Sigma_t$  térszerű hiperfelületeket alkotnak, amelyekre  $\xi^a$  mindenütt ortogonális. A  $\Sigma = \Sigma_{t=0}$  hiperfelületen értelmezett térkoordinátákat áttemelhetjük bármely  $\Sigma_t$ -re úgy, hogy a Killing-vektormező egyazon integrálgörbéjén fekvő pontoknak azonosak legyenek a térkoordinátái. Ezután az, hogy valamely megfigyelő vagy próbarészecske „egy helyben marad”, jól definiált, nevezetesen az ilyen sztatikus megfigyelő vagy részecske világvonala a Killing-vektormező integrálgörbéje, a négyessebessége pedig  $u^a = \xi^a/V$ , úgyhogy a négyesgyorsulása

$$a^b = u^a \nabla_a u^b = \frac{\xi^a}{V} \nabla_a \frac{\xi^b}{V} = \frac{1}{V^2} \xi^a \nabla_a \xi^b. \quad (10.3.10.)$$

(Az  $a^b$  gyorsulás zérustól különböző értéke jelzi, hogy az egy helyben maradó test a görbült téridőben mennyire nem geodetikusan mozog.) Ez egyúttal az az erő, amelyet egy egységnyi tömegű próbarészecskére a részecske tartózkodási helyén ki kell fejteni ahhoz, hogy helyben maradjon. Egy végtelenben elhelyezkedő sztatikus megfigyelőnek pedig ezen erő  $V$ -szeresét kell kifejtene azon (tömeg nélküli) fonál révén, amelynek segítségével a részecskét helyben akarja tartani. Képzeljünk most el a  $\xi^a$ -ra ortogonális  $\Sigma$  hiperfelületen egy 2-dimenziós  $S$  felületet, amely topológiailag gömbfelület és azon egységnyi felületi tömegsűrűségű „próbatestet”. (A próbatest egy infinitezimálisan vékony, egységnyi felületi tömegsűrűségű gömbhéj.) Legyen  $N^a$  az  $S$  gömbfelület külső normálisa. Ekkor az egység-felületre ható átlagos kifelé mutató erő és a gömbfelület felszínének szorzata

$$F = \int_S N^b \frac{\xi^a}{V} \nabla_a \xi^b dA, \quad (10.3.11.)$$

ahol a felületelemet a téridő  $g_{ab}$  metrikája által  $S$ -en indukált természetes térfogatelemmel kell azonosítani.

Az analógiát a newtoni fizikával a következőképpen használjuk ki. Az  $M$  tömegű nyugvó test olyan  $\phi$  gravitációs potenciált létesít, amelyre a

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho \quad (10.3.12.)$$

Poisson-egyenlet érvényes, ahol  $\rho$  a test tömegsűrűsége. Integráljuk ezt az egyenletet egy olyan 2-dimenziós  $S$ , topológiailag gömbfelülettel határolt  $\mathfrak{V}$  térfogatra, amely körbeveszi a teljes próbatestet. A Gauss-tételt felhasználva kapjuk, hogy

$$4\pi M = \int_{\mathfrak{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi d\mathfrak{V} = \int_S \vec{N} \cdot \vec{\nabla} \phi dA, \quad (10.3.13.)$$

ahol a test tömege  $M = \int_{\mathfrak{V}} \rho$ . A test tömegét tehát ki tudjuk fejezni

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_S \vec{N} \cdot \vec{\nabla} \phi dA \quad (10.3.14.)$$

alakban. Itt az integrál értéke nem függ az  $S$  felület megválasztásától. Ha elhelyeznénk egy egységnyi tömegű próbarészecskét az  $S$  felület valamely pontjában, akkor arra a gravitációs mező  $-\vec{\nabla}\phi$  erőt fejtene ki, úgyhogy  $\vec{\nabla}\phi$  éppen az az erő, amit nekünk kell kifejtteni, hogy a próbarészecskét helyben tartsuk. Ha az  $S$  felületen elképzelünk egy egységnyi felületi tömegsűrűségű próbatestet, akkor  $4\pi M$  az egységfelületre ható átlagos „kifelé irányuló”  $F$  erő, amelyet a próbatest helyben tartásához kell kifejtteni. Analógia alapján tehát a sztatikus, aszimptotikusan lapos téridő teljes tömegét azonosítjuk a (10.3.11.) „erővel”:

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_S N^b \frac{\xi^a}{V} \nabla_a \xi_b dA. \quad (10.3.15.)$$

Hozzuk most a sztatikus, aszimptotikusan lapos téridő teljes tömegére kapott (10.3.15.) kifejezést a (10.3.9.) alakra. A  $\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0$  Killing-egyenlet következtében  $\nabla_a \xi_b = \nabla_{[a} \xi_{b]}$ , úgyhogy

$$N^b \frac{\xi^a}{V} \nabla_a \xi_b = N^b \frac{\xi^a}{V} \nabla_{[a} \xi_{b]} = \frac{1}{2} \frac{2}{V} \xi^{[a} N^{b]} \nabla_{[a} \xi_{b]} = \frac{1}{2} N^{ab} \nabla_a \xi_b, \quad (10.3.16.)$$

ahol bevezettük az  $S$  felületre merőleges  $N^{ab} = \frac{2}{V} \xi^{[a} N^{b]}$  úgynevezett normális bi-vektort. Ekkor

$$M = \frac{1}{8\pi} \int_S N^{ab} \nabla_a \xi_b dA \quad (10.3.17.)$$

adódik. Sejtjük, hogy az  $S$  felületet a végtelenben, az aszimptotikusan lapos tartományban kell felvenni ahhoz, hogy az eredmény valóban a téridő teljes tömege legyen, azaz  $M$  ne függjön  $S$  megválasztásától. Ezt a sejtésünket alább majd igazoljuk. A felületi integrál azonosan átírható

$$\int_S N^{ab} \nabla_a \xi_b dA = - \int_S \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d \quad (10.3.18.)$$

alakba, ahol  $\epsilon_{abcd} = -6N_{[ab}\epsilon_{cd]}$  és  $\epsilon_{ab}$  a térfogatelem  $S$ -en. [Például, ha  $S$ -en bevezetünk  $\theta, \varphi$  gömbi-koordinátákat, akkor  $\epsilon_{ab} = 2 \sin \theta (d\theta)_{[a} (d\varphi)_{b]}$ .] A jobb oldalon az integrál az  $\alpha_{ab} = \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d$  2-forma integrálja a 2-dimenziós  $S$  felületre. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_S \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d, \quad (10.3.19.)$$

ami a keresett (10.3.9.) kifejezés.

Most megmutatjuk, hogy **a sztatikus, aszimptotikusan lapos téridőben a felületi integrállal értelmezett teljes tömeg nem függ az  $S$  felület megválasztásától, ha azt az aszimptotikusan lapos távoli tartományban vesszük fel.** A bizonyítást a **B.1. tétel**, a Stokes<sup>100</sup>-tétel segítségével fogjuk elvégezni, előzőleg azonban megmutatjuk, hogy a (10.3.9.) kifejezés integrandusában szereplő  $\alpha$  2-forma külső deriváltja zérus a téridő azon tartományában, ahol vákuum van, azaz

$$d\alpha = 0 \quad \text{vákuumban.} \quad (10.3.20.)$$

A (10.3.9.) kifejezésben szereplő integrandus a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$\begin{aligned} \epsilon^{efab} \nabla_f (\epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d) &= \epsilon^{efab} \epsilon_{abcd} \nabla_f \nabla^c \xi^d = -4 \nabla_f \nabla^{[e} \xi^{f]} \\ &= 4 \nabla_f \nabla^f \xi^e = -4 R^e_f \xi^f, \end{aligned} \quad (10.3.21.)$$

<sup>100</sup>Sir George Gabriel Stokes, 1st Baronet, ír fizikus és matematikus, 1819-1903.

ahol felhasználtuk az első egyenlőségjel után a természetes térfogatelem kovariáns konstans voltát; a második egyenlőségjel után a térfogatelemek kontrakciójára vonatkozó (B.3.16.) azonosságot; a harmadik egyenlőségjel után a Killing-egyenletet és a negyedik egyenlőségjel után a Killing-vektormezőre vonatkozó (C.4.51.) azonosságot. Szorozzuk meg a (10.3.21.) azonosság mindkét oldalát  $\epsilon_{elmn}$ -nel és hajtsunk végre kontrakciót az  $e$  indexre nézve:

$$\epsilon_{elmn}\epsilon^{efab}\nabla_f(\epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d) = -4\epsilon_{elmn}R^e{}_f\xi^f. \quad (10.3.22.)$$

Ekkor, ismételten felhasználva a (B.3.16.) azonosságot, azt találjuk, hogy

$$\nabla_{[l}(\epsilon_{mn]cd}\nabla^c\xi^d) = \frac{2}{3}\epsilon_{elmn}R^e{}_f\xi^f. \quad (10.3.23.)$$

A vákuum tartományában  $R_{ab} = 0$  miatt a jobb oldal eltűnik, úgyhogy a vákuum tartományában  $d\alpha = 0$  tényleg fennáll.

Alkalmazzuk most Stokes tételét, a **B.1. tételt** a  $d\alpha$  3-forma olyan  $\mathfrak{V}$  zárt tartományon vett integráljára, amelyet a „belső”  $S$  és „külső”  $S'$  2-dimenziós topológiai gömbfelületek határolnak úgy, hogy  $S$  és  $S'$  is az aszimptotikus tartományban helyezkedik el. Ekkor

$$0 = \int_{\mathfrak{V}} d\alpha = - \int_S \alpha + \int_{S'} \alpha \quad (10.3.24.)$$

adódik, ahol figyelembe vettük, hogy a „belső”  $S$  felületnek a  $\mathfrak{V}$  tartományhoz képest külső normálisa ellentétes értelmű, mint a „külső”  $S'$  felületé. Innen viszont valóban azt kapjuk, hogy

$$\int_S \alpha = \int_{S'} \alpha, \quad (10.3.25.)$$

azaz az integrál független az  $S$  felület megválasztásától, feltéve, hogy azt az aszimptotikusan lapos, vákuum-tartományban vesszük fel. Ezzel eljutottunk tehát a sztatikus, aszimptotikusan lapos téridő teljes tömegének (10.3.9.) definíciójához.

Most általánosítjuk a (10.3.9.) definíciót stacionárius, aszimptotikusan lapos téridőre. Ezt azért tehetjük, mert annak belátásához, hogy az integrál független az  $S$  felület megválasztásától, csak az időszerű Killing-vektormező létezését kellett felhasználnunk. (A fenti gondolatmenetünkben a Stokes-tételt alkalmaztuk, felhasználva, hogy  $d\alpha = 0$ , utóbbi belátásához pedig csak a Killing-egyenletre volt szükségünk.)

Érdekes még a stacionárius, aszimptotikusan lapos téridő  $M$  teljes tömegét kapcsolatba hozni a téridőben található gravitációs forrással, nevezetesen a jelenlevő anyag energiaimpulzus-tenzorával olyan módon, hogy a (10.3.9.) definícióban szereplő felületi integrált átírjuk az  $S$  felület által határolt tartományon vett térfogati integrállá.

**Állítás:** Legyen  $S$  az aszimptotikus tartományban olyan 2-dimenziós felület, amely valamely  $\Sigma$  térszerű hiperfelület határa, úgyhogy  $\Sigma \cup S$  határral rendelkező kompakt sokaság. Ekkor a téridő (10.3.9.) teljes tömege átírható a  $\Sigma$  hiperfelületen vett „térfogati” integrál alakjába,

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left( T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) n^a \xi^b dV, \quad (10.3.26.)$$



ahol  $n^a$  a  $\Sigma$  hiperfelület jövőirányú egység-normálisa,  $\xi^a$  a stacionárius téridő időszerű Killing-vektormezeje,  $T_{ab}$  az anyag energiainpulzus-tenzora.

Alkalmazhatjuk Stokes tételét, a **B.1. tételt**, amelynek segítségével a teljes tömeg

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{8\pi} \int_S \alpha = -\frac{1}{8\pi} \int_\Sigma d\alpha = -\frac{3}{8\pi} \int_\Sigma \nabla_{[e}(\epsilon_{ab]cd} \nabla^c \xi^d) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \epsilon_{deab} R^d{}_f \xi^f = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma R_{ab} n^a \xi^b dV \\ &= 2 \int_\Sigma \left( T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) n^a \xi^b dV, \end{aligned} \quad (10.3.27.)$$

ahol a 2. egyenlőség a Stokes-tétel következménye; a harmadik egyenlőséggel után felhasználtuk az  $\alpha$  2-forma explicit alakját és a külső deriválás szabályát; a negyedik egyenlőséggel után a (10.3.23.) összefüggést használtuk fel; az ötödik egyenlőséggel után felhasználtuk, hogy a  $\Sigma$ -n a természetes térfogatelem  $\epsilon_{abc} = n^d \epsilon_{dabc}$ ; és végül a hatodik egyenlőséggel után az Einstein-egyenletet használtuk fel. Így sikerült kifejeznünk a stacionárius, aszimptotikusan lapos téridő teljes tömegét a téridőt létrehozó izolált test energiainpulzus-tenzora segítségével.

Figyeljünk fel rá, hogy a stacionárius, aszimptotikusan lapos téridő (10.3.9.) teljes tömege egy  $\Sigma$  térszerű hiperfelülethez kötődik, amelynek határa az aszimptotikus végtelenben helyezkedik el. A belőle a Killing-vektormező segítségével rekonstruált  $P^a$  négyesimpulzus lényegében ennek a  $\mathfrak{V}$  „térbeli tartománynak” a négyesimpulzusa. Ennek a  $P^a$  négyesimpulzusnak az idő-komponense,  $E = -P_a \xi^a / V$  a  $\mathfrak{V}$  tartomány teljes energiája, és  $P^a$ -nak a  $\Sigma$ -ra vett  $p^a = h^a{}_b P^b$  vetülete a  $\mathfrak{V}$  tartomány „hármásimpulzusának” megfelelő négyesvektor, a **teljes tér-impulzus**. Amennyiben  $\Sigma$  határok nélküli térszerű hiperfelület, akkor a stacionárius, aszimptotikusan lapos téridő választott  $\Sigma$  hiperfelületének teljes energiáját és négyesimpulzusát értelmeztük.

#### 10.3.4. Aszimptotikusan lapos, nem stacionárius téridő teljes négyesimpulzusa

Vizsgáljuk most azt, hogyan értelmezhető a nem stacionárius, aszimptotikusan lapos téridő teljes négyesimpulzusa. Ilyenkor nincsen értelme olyan kijelentésnek, hogy „helyben tartani egy próbarészecskét” vagy, hogy ehhez mekkora erőre van szükség. Ezért nem magától értetődő, hogy kialakíthatók-e egyáltalán olyan fogalmak, mint a téridő teljes tömege vagy négyesimpulzusa, és hogy mi az a lineáris vektortér, amelynek vektora lehet a téridő négyesimpulzusa. Az aszimptotikus laposság azonban biztosít elegendő szerkezetet ahhoz, hogy a  $P_a$  teljes négyesimpulzus fogalma kialakítható legyen, mint valamilyen határérték, amikor tartunk a végtelenhez. Kétféle értelmezés is szóba jöhet.

- Az egyik lehetőség: a térbeli végtelenben, adott „időpillanatban” próbáljuk értelmezni a négyesimpulzust. Vegyünk egy aszimptotikusan lapos, térszerű  $\Sigma$  hiperfelületet, azaz olyan térszerű hiperfelületet, amely  $i^0$ -ban  $C^{>1}$  tulaj-

donságú<sup>101</sup>. Definiáljuk a  $\Sigma$  térszerű hiperfelület  $E$  teljes energiáját és a  $p_a$  teljes tér-impulzust hasonlóan, mint ahogy azt stacionárius esetben tettük. Ahhoz, hogy a térbeli végtelenben a teljes négyesimpulzus jól definiált legyen, néhány követelménynek eleget kell tennie:

- nem szabad függenie csak  $\Sigma$  aszimptotikus tulajdonságaitól;
- megmaradónak kell lennie, azaz változatlanak kell maradnia, ha  $\Sigma$ -t a végtelenben „időbeli eltolásnak” vetjük alá;
- négyesvektorként kell transzformálódnia, ha  $\Sigma$ -t a végtelenben „Lorentz-lökésnek” vetjük alá.

Ha mindezek a követelmények teljesülnek, akkor definiálhatjuk a teljes  $P_a$  négyesimpulzust, mint az  $i^0$ -ban vett kotangenstér (duális vektortér) vektorát: az  $i^0$ -ban  $C^{>1}$  tulajdonságú térszerű  $\Sigma$  hiperfelülethez tartozó teljes energia legyen  $E = -P_a n^a$ , ahol  $n^a$  a  $\Sigma$  egység-normálisa  $i^0$ -ban, és  $P_a$  vetülete  $\Sigma$ -ra legyen  $p_a$ , ami a  $\Sigma$  által reprezentált „időpillanathoz” tartozó teljes impulzus.

- A másik lehetőség: *az adott „retardált időhöz” tartozó négyesimpulzust próbáljuk értelmezni, amikor a null-végtelenhez tartunk.* Vegyünk fel ehhez olyan  $\Sigma$  hiperfelületet, amely aszimptotikusan null-felület, hasonlóan, mint a 9. ábrán látható  $\Sigma_1$  és  $\Sigma_2$  hiperfelületek, és ezen a  $\Sigma$  felületen tartsunk a null-végtelenhez. Ha sikerül így négyesimpulzust értelmeznünk, az felhasználható lesz a gravitációs sugárzással távozó energiának és impulzusnak a meghatározására. Ellentétben azonban az  $i^0$ -ban vizsgált helyzethez, egy null-felülethez, avagy egy aszimptotikusan null-felülethez nem kötődik természetes módon kitüntetett idő-irány. Ezért „aszimptotikus időbeli eltolást” kell értelmeznünk, hogy az  $E$  energiának jól definiált értelmet adhassunk. Szerencsére azonban a null-végtelenben az aszimptotikus szimmetriák csoportja rendelkezik egy kitüntetett 4-paraméteres alcsoporttal, az aszimptotikus eltolások csoportjával. Ezért az aszimptotikus időbeli eltolás jól definiált. Az aszimptotikus időbeli eltolás különböző megválasztásai során az  $E$  energiának úgy kell transzformálódnia, mint egy négyesvektor idő-komponensének. Ezért a  $P_a$  négyesimpulzust úgy kíséreljük meg definiálni, hogy a  $\mathcal{J}^+$  (vagy a  $\mathcal{J}^-$ ) null-végtelen bármely  $\mathcal{S}$  keresztmetszetéhez tartozzon egy lineáris leképezés, amely a BMS-eltolások 4-dimenziós vektorterét leképezi  $\mathbb{R}$ -be. Ekkor a  $\mathcal{J}^+$  null-végtelen bármely  $\mathcal{S}$  keresztmetszetének  $P_a$  négyes-impulzusa a BMS-eltolások duális vektorterének vektora. A  $P_a$ -nak egy adott időbeli eltolásra történő

---

<sup>101</sup>A nem fizikai téridő metrikája  $i^0$ -ban nem sima, hanem csak  $C^{>0}$  tulajdonságú. Ezért az  $\tilde{M}$  sokaság differenciálhatósági szerkezetét is gyengíteni kell  $i^0$ -ban. A megfelelő tulajdonság az úgy nevezett  $C^{>1}$  differenciálhatósági szerkezet, amelyet Ashtekar és R. O. Hansen vezettek be. A sokaság-szerkezetnek ez a gyengítése  $i^0$ -ban azért szükséges, hogy ne lehessen  $i^0$ -ban az  $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$  téridővel szemben támasztott többi követelménnyel összhangban levő, többféle inekvivalens differenciálhatósági szerkezetet értelmezni.

alkalmazását akkor azonosítjuk a teljes energiával, ami az ezen (időbeli eltolás által kitüntetett) időirányhoz és azon retardált időhöz tartozó energiának felel meg, amely retardált időt a  $\mathcal{S}$  keresztmetszet képvisel. A  $P_a$ -nak valamely térbeli BMS-eltolásra vonatkozó alkalmazása pedig az impulzus adott irányú komponensét határozza meg.

Mindkét impulzus-fogalom létezik.

- *Négyesimpulzus a null-végtelenben. A Bondi-energia*

Foglalkozzunk most részletesebben a null-végtelenben értelmezett impulzussal. A (10.3.9.) kifejezés stacionárius, aszimptotikusan lapos téridő esetén a teljes tömeg olyan definícióját adja, amely független a 2-dimenziós  $S$  felület megválasztásától. Próbáljunk most hasonló kifejezést alkalmazni a teljes energia meghatározására, azzal a módosítással, hogy  $\xi^a$  egy aszimptotikus időbeli eltolási szimmetria generátora. Pontosabban,  $\xi^a$  a fizikai téridőn értelmezett olyan vektormező, amely a BMS időbeli eltolások ekvivalencia-osztályának tagja. Sajnos, ekkor az integrál értéke függ az  $S$  felülettől. Azt várjuk azonban, hogy ez a függés elég gyengévé fog válni, ahogy  $S$ -et „elvisszük a végtelenbe”, úgyhogy létezni fog a határérték. A határátmenetet a következőképpen képezzük: legyen  $\{S_\alpha\}$  a 2-dimenziós topológiai gömbfelületek olyan egy-paraméteres családja, amely a nem fizikai téridőben az  $\mathcal{J}^+$  null-végtelen  $\mathcal{S}$  keresztmetszetéhez tart, és definiáljuk az energiát, mint az

$$E[\mathcal{S}] = - \lim_{S_\alpha \rightarrow \mathcal{S}} \frac{1}{8\pi} \int_{S_\alpha} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d \quad (10.3.28.)$$

határértéket, ahol  $\xi^a$  az aszimptotikus időbeli eltolás generátora. Meg lehet mutatni, hogy ez a határérték tetszőleges aszimptotikus szimmetria  $\xi^a$  generátora esetén létezik és független attól, hogy hogyan tart az  $\{S_\alpha\}$  felületcsalád az  $\mathcal{S}$  keresztmetszethez. Egyúttal az így értelmezett  $E$  a megkövetelt lineáris módon függ a  $\xi^a$  generátortól. Az egyetlen hátrány, hogy a (10.3.28.) kifejezés nem invariáns azzal szemben, hogy az aszimptotikus időbeli eltolási szimmetria ekvivalencia-osztályának melyik reprezentánsát írjuk bele, vagyis nem mérték-invariáns. Ezért ebben a formájában (10.3.28.) még nem kielégítő definíciója az energiának a null-végtelenben. Meg lehet azonban mutatni, hogy ez a probléma elhárítható, ha a  $\xi^a$  vektormezőnek azt a reprezentánst választjuk, amelyik kielégíti a

$$\nabla_a \xi^a = 0 \quad (10.3.29.)$$

mellékfeltételt  $\mathcal{J}^+$  környezetében. (Stacionárius téridőben a null-végtelen környezetében (vákuumban) a Killing-vektormező ezt a mértékfeltételt automatikusan kielégíti.) A (10.3.28.) kifejezés **a konform mérték rögzítésére**

**szolgáló (10.3.29.) mértékfeltétellel** együtt a null-végtesenben az  $E$  energia olyan definícióját adja, amely invariáns azzal szemben, hogy az aszimptotikus időbeli eltolások ekvivalencia-osztályát melyik  $\xi^a$ -val reprezentáljuk. A  $P_a$  négyesimpulzust a null-végtesenben úgy értelmezzük, mint a (10.3.28.) egyenlőség jobb oldalán álló lineáris leképezésnek a hatását tetszőleges  $\xi^a$  BMS translációra:

$$P_a \xi^a = - \lim_{S_\alpha \rightarrow \mathcal{S}} \frac{1}{8\pi} \int_{S_\alpha} \epsilon_{dcb} \nabla^b \xi^a, \text{ ahol } \nabla_a \xi^a = 0. \quad (10.3.30.)$$

Az így bevezetett energia-fogalom ekvivalens az úgynevezett **Bondi-energiával**. (További részleteket és irodalmat ld. a [1] tankönyvben.)

A gravitációs sugárzás által a végtesenbe elvitt energiafluxus meghatározása szempontjából fontos megvizsgálni, hogyan változik az energia a „retardált időben”. Pontosabban, hogyan változik a  $\mathcal{J}^+$  null-végtesen  $\mathcal{S}$  keresztmetszetéhez kapcsolt  $E[\mathcal{S}]$  energia, ha az  $u_1$  retardált időhöz tartozó  $\mathcal{S}_1$  keresztmetszettől haladunk a „későbbi”,  $u_2 > u_1$  retardált időhöz tartozó  $\mathcal{S}_2$  keresztmetszet felé, és ugyanahhoz az aszimptotikus időbeli eltoláshoz tartozó energiát figyeljük. Meg lehet mutatni, hogy ekkor

$$E[\mathcal{S}_2] - E[\mathcal{S}_1] = - \int_V f \quad (10.3.31.)$$

alakba írható, ahol  $f$  a  $\mathcal{J}^+$  null-végtesen  $\mathcal{S}_1$  és  $\mathcal{S}_2$  keresztmetszete közötti  $V$  tartományon értelmezett függvény. Ekkor  $f$ -et úgy értelmezhetjük, mint azt az energiafluxust, amit a gravitációs sugárzás visz el a végtesenbe. Azt is megmutatták, hogy  $f$  határozottan nem negatív, azaz  $f \geq 0$ . **A gravitációs sugárzás tehát mindig pozitív energiát visz el a gravitációsan sugárzó rendszerből.** (További részleteket és irodalmat ld. a [1] tankönyvben.)

- *Négyesimpulzus a null-végtesenben. Az ADM-energia*

A null-végtesenben vett négyes-impulzus Arnowitt<sup>102</sup>, Deser<sup>103</sup> és Misner<sup>104</sup> által javasolt fogalmát ismertetjük röviden. (A fogalommal kapcsolatos további részleteket és irodalmat ld. a [1] tankönyvben.) Használni fogjuk az általános relativitáselméletnek az F. függelékben bevezetett ADM-féle hamiltoni megfogalmazását, továbbá a G. függelékben az általános relativitáselmélet kezdetiérték-feladatáról ismertetett eredményeket.

**Definíció:** Legyen  $(M, g_{ab})$  aszimptotikusan lapos téridő, legyen továbbá  $\Sigma$  aszimptotikusan lapos térszerű hiperfelület, amely  $i^0$ -ban  $C^{>1}$  tulajdonságú, úgyhogy  $(\Sigma, h_{ab}, K_{ab})$  aszimptotikusan lapos kezdeti adatok, ahol a  $h_{ab}$  Riemann-metrika és a  $K_{ab}$  szimmetrikus tenzormező kielégítik (a kezdeti adatokra

<sup>102</sup>Richard Lewis Arnowitt, amerikai fizikus, 1928-2014.

<sup>103</sup>Stanley Deser, amerikai fizikus, 1931- .

<sup>104</sup>Charles W. Misner, amerikai fizikus, 1932- .

vonatkozó) (G.4.36.) és (G.4.39.) kényszereket. Legyen továbbá  $(x^1, x^2, x^3)$  aszimptotikusan euklideszi koordinátarendszer  $\Sigma$ -n. Ekkor az  $E$  teljes energiát és a  $p_a$  teljes tér-impulzus koordináta-komponenseit az alábbiak szerint definiáljuk:

$$E = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\mu, \nu=1}^3 \int \left( \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\mu}}{\partial x^\nu} \right) N^\nu dA, \quad (10.3.32.)$$

$$p_\nu = \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^3 \int (K_{\mu\nu} N^\mu - K^\mu_\mu N_\nu) dA, \quad (10.3.33.)$$

ahol  $r = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$ , az integrálokat az  $r = \text{áll.}$  gömbfelületen kell venni, és  $N^a$  ennek a gömbfelületnek a külső egység-normálisa. Az így értelmezett energiát **ADM-energiának** nevezik. Az  $i^0$ -ban

$$P_a = -En_a + p_a \quad (10.3.34.)$$

képlettel definiált négyesimpulzust **ADM-impulzusnak** nevezik, ahol  $n^a$  a  $\Sigma$  térszerű hiperfelület jövőirányú egység-normálisa  $i^0$ -ban.

**Megjegyzés:** Noha a teljes  $E$  energia explicit módon nem függ  $K_{ab}$ -tól, implicit módon függ tőle a (G.4.36.) és a (G.4.39.) kényszerek miatt. Az  $E$  egy valós szám, a  $p^a$  pedig  $\Sigma$ -nak  $i^0$ -ban vett érintővektora. Meg lehet mutatni, hogy mindkettő definíciója független attól, hogy hogyan választottuk az aszimptotikusan euklideszi koordinátarendszert  $\Sigma$ -n. Azt is megmutatták, hogy az  $E$  energia (10.3.32.) kifejezése stacionárius esetben megegyezik a (10.3.9.) kifejezéssel. Meg lehet azt is mutatni, hogy a  $P_a$  ADM-impulzus független  $\Sigma$  megválasztásától.

A bevezetett ADM- és Bondi-energia fizikai tartalmával kapcsolatban számos fontos kérdés tehető fel.

1. Az ADM- és a Bondi-energia más-más fizikai jelentést hordoz. **Az ADM-energiát definíciójánál fogva kézenfekvő az izolált test teljes energiájának tekinteni.** Ugyanakkor a definíció azt sugallja, hogy **a Bondi-energia az az energia, amivel a téridő, azaz az izolált test rendelkezik az  $\mathcal{S}$  keresztmetszet által reprezentált retardált időben a gravitációs sugárzás kibocsátása után.** Ha ez így van, akkor az ADM-energia és a Bondi-energia különbségének meg kell egyeznie az  $f$  energiafluxusnak a  $\mathcal{J}^+ \cap D^-(\mathcal{S})$  tartományra (a jövőbeli null-végtelen és az  $\mathcal{S}$  keresztmetszet kauzális múltjának metszetére) vett integráljával. Ezt a relációt valóban sikerült igazolni. (További részleteket és irodalmat ld. az [1] tankönyvben.)

2. További alapvető fontosságú kérdések, hogy *(a)* egy izolált rendszer teljes energiája lehet-e negatív, vagyis az ADM-energia lehet-e negatív; és *(b)* ha az izolált test teljes energia-tartalma pozitív, akkor a gravitációsan kisugárzott energiát felülről korlátozza-e a teljes energia-tartalom, azaz a Bondi-energia mindig pozitív marad-e. Az energia pozitivitását azonban csak akkor várhatjuk, ha a téridő nem szinguláris és az izolált test anyagának lokális energiasűrűsége nem negatív. (Ellenpéldaként ld. a  $M < 0$ -hoz tartozó Schwarzschild-megoldás diskusszióját a [1] tankönyvben.) Pontosabban, az a kérdés, hogy ha az anyag energiainpulzus-tenzora teljesíti a domináns energia-feltételt, akkor lehet-e negatív az ADM-energia, ill. a Bondi-energia. Ez a kérdés alapvető jelentőségű. Ha ugyanis az izolált rendszerek energiája nem szükségszerűen pozitív, vagy legalábbis nem korlátos alulról, akkor erősen kétséges, hogy az izolált rendszerek lehetnek-e stabilak, azaz akkor az izolált rendszereknek el kellene bomlaniuk egyre kisebb és kisebb energiájú konfigurációkra. Az ADM- és a Bondi-energia pozitivitásának bizonyítása meglehetősen nehéznek bizonyult. Végül azonban sikerült általános bizonyítást adni arra, hogy az ADM-energia és a Bondi-energia is nem negatív (ld. az [1] tankönyvben a megfelelő irodalmi hivatkozásokat). **Az általános relativitáselméletben tehát az izolált rendszerek energiája nem negatív, és ez az energia egyúttal felső korlátja annak az energiának, amit az izolált rendszer gravitációsan kisugározhat.**

## 11. A feketelyukak

Ebben a fejezetben a feketelyukak fizikájának legfontosabb eredményeivel ismerkedünk meg. A 7. fejezetben a Schwarzschild-megoldás tanulmányozása során láttuk, hogy egy hideg, gömbszimmetrikus, égitest nem lehet egyensúlyi állapotban, ha a tömege meghalad egy kritikus értéket, és ezért a gravitáció hatására az égitest anyagának össze kell zuhannia. Ezt nevezzük gravitációs összeomlásnak, más szóval kollapszusnak. A gömbszimmetrikus gravitációs összeomlás során kialakuló téridő szerkezetét a 22. ábra mutatja. Ennek sajátossága a feketelyuk-tartomány, az ábrán a II tartomány megjelenése, amit az jellemez, hogy bármely részecske vagy fénysugár, amely ebbe a tartományba belép, onnan többet nem lép ki, hanem pályáját véges affin paraméternyi út befutása után a téridő  $r = 0$  koordinátaértékkel jelölt szingularitásában végzi. A gömbszimmetrikus összeomlás során megjelenő szingularitás a feketelyuk belsejében található, ezért az bármely külső megfigyelő számára rejtve marad, azaz a nem fizikai téridőben a  $\mathcal{J}^+$  jövőbeli null-végtelenből láthatatlan marad, mert a szingularitás nem része  $J^-(\mathcal{J}^+)$ -nak.

A gömbszimmetrikus gravitációs összeomlás tanulmányozását jelentősen leegyszerűsíti az a körülmény, hogy a téridő ilyenkor gömbszimmetrikus kell legyen, és az Einstein-egyenletek egyetlen gömbszimmetrikus vákuum-megoldása a Schwarzschild-megoldás. Ezért a gömbszimmetrikusan összeomló testen kívül a metrikának a Schwarzschild-metrikával kell azonosnak lennie. Most az a célunk, hogy a feketelyuk fizikáját az általánosabb, nem gömbszimmetrikus esetben tanulmányozzuk. Ilyenkor nincs semmi olyan nyilvánvaló egyszerűsítő körülmény, mint amilyen a gömbszimmetrikus esetben a gömbszimmetria volt. A nem gömbszimmetrikus esetben a gravitációs összeomlásra vonatkozó részletes vizsgálatokat általában numerikus úton végzik, analitikus vizsgálatok csak arra az esetre vonatkozóan lehetségesek, amikor a gömbszimmetriától való eltérés olyan kicsi, hogy a linearizált Einstein-egyenleteket lehet használni. Ennek ellenére, általános megfontolások alapján meg fogjuk mutatni, hogy a nem gömbszimmetrikus gravitációs összeomlás alapvető vonásaiban hasonló a gömbszimmetrikushoz: ilyenkor is feketelyuk keletkezik, és a téridőnek az összeomlás következtében keletkező szingularitása a feketelyukon belül található, rejtve marad bármely külső megfigyelő számára. Definiálni fogjuk, hogy mit értünk feketelyukon, és meg fogjuk mutatni, hogy a feketelyuk eleget tesz úgy nevezett **felület-növekedési törvénynek**.

Azt várjuk, hogy bárhogyan is zajlik le a gravitációs összeomlás, annak végállapota **stacionárius feketelyuk**. Meg fogjuk mutatni, hogy vákuumban az Einstein-egyenletek egyedüli, stacionárius feketelyukat leíró megoldásait a metrikák egy 2-paraméteres családja, az úgynevezett **Kerr<sup>105</sup>-metrika** jelenti, amelyet az  $M$  teljes tömeg és a  $J$  teljes impulzusmomentum jellemez. Foglalkozni fogunk a Kerr-metrikával és ennek elektromosan töltött feketelyukra történő általánosításával,

---

<sup>105</sup>Roy Patrick Kerr, újjélandi matematikus, 1934- .

az úgynevezett **töltött Kerr-metrikával**. A vákuumban nincsen az Einstein-egyenleteknek ezeken kívül más, stacionárius feketelyukat leíró megoldása. Tárnyalni fogjuk azt a meglepő eredményt, hogy a forgó ( $J \neq 0$ -val jellemzett) Kerr-féle feketelyukból energiát lehet kinyerni azáltal, hogy az képes negatív energiájú részecskéket és fénysugarat elnyelni, és megállapítjuk az így kinyerhető energia felső korlátját.

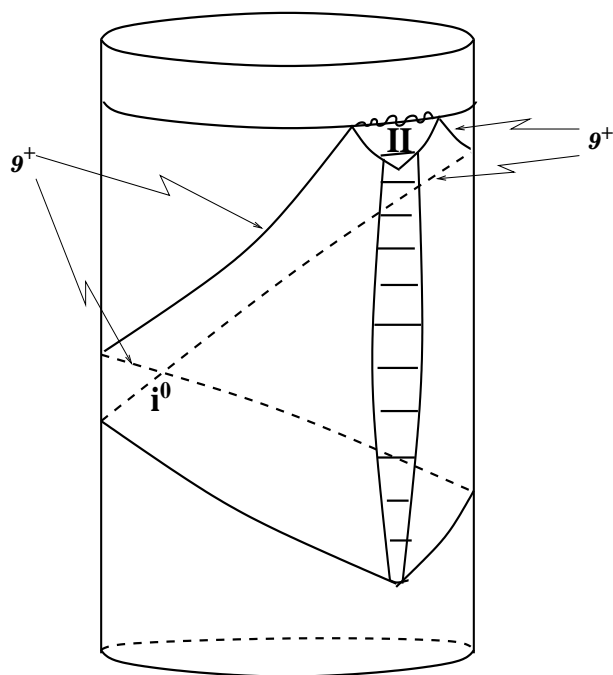
Végül azzal a rendkívül érdekes párhuzammal foglalkozunk, amelybe a feketelyukakra vonatkozó törvények és a termodinamika főtételei állíthatók. Ez az analógia azért nagyon izgalmas, mert amíg a feketelyukakra vonatkozó törvények a differenciálható sokaságokra vonatkozó egzakt matematikai tételeken alapulnak, addig a termodinamika főtételei mikroszkopikusan bonyolult szerkezetű rendszerek makroszkopikus viselkedésére közelítőleg érvényes törvények (*hiszen a termodinamikai határesetet bármely, nagy, de véges méretű test csak közelítőleg valósítja meg*). Kiindulópontunk a feketelyukak felület-növekedési törvénye és a termodinamika II. főtétele közti analógia. Azonban a termodinamika többi főtételének is megtaláljuk a megfelelőjét a feketelyukak fizikájában. Megemlítjük, hogy a feketelyukak kvantumfizikai párkeltés révén részecske-sugárzást, úgynevezett Hawking-sugárzást emittálnak, amelynek spektruma a hőmérsékleti sugárzásával egyezik. A Hawking-sugárzás hőmérsékletét szokásos fizikai felfogásunk szerint a feketelyuk hőmérsékletének kell tekintenünk. Másrészt ez az a paraméter, amely a termodinamika első főtételével analóg feketelyuk-fizikai törvényben is a hőmérséklet szerepét játssza. Értékét a feketelyuk felületi gravitációjának erőssége határozza meg. Gyanítható tehát, hogy a feketelyukak fizikájának legfontosabb törvényei valójában a termodinamika főtételeinek a feketelyukakra történő alkalmazásai.

### 11.1. A feketelyuk fogalma

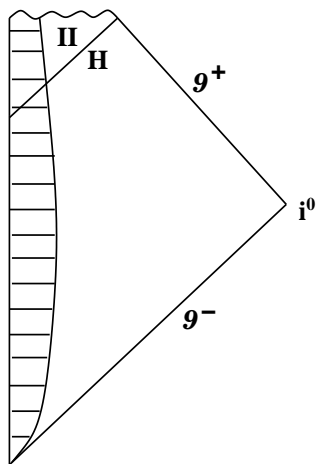
Először definiálni szeretnénk, hogy mit értünk feketelyukon. A 22. ábra mutatja a téridő szerkezetét gömbszimmetrikus égitest gravitációs összeomlása esetén. Az ábrán a II tartomány a feketelyuk tartománya: olyan tartomány, amelyből sem részecske, sem fénysugár nem lép ki, ha egyszer oda belépett. Ezért hajlamosak lehetnénk azt gondolni, hogy a feketelyukra a következő meghatározást kellene adni: az  $(M, g_{ab})$  téridő  $A \subset M$  részhalmazát neveznénk feketelyuknak, ha bármely  $p \in A$  pontjának a kauzális jövője benne van  $A$ -ban,  $J^+(p) \subset A$ . Ez azonban nem lenne jó definíció, mert akkor bármilyen téridő bármely részhalmazának kauzális jövőjét feketelyuknak kellene neveznünk. Ezért körültekintőbben kell eljárunk a feketelyuk definiálásakor.

A 22. ábrán a II tartomány jellegzetessége, hogy nem terjed ki a végtelenbe, csak az  $r$  koordináta kis értékeire korlátozódik. A 22. ábrán a gömbszimmetrikus összeomlás  $(M, g_{ab})$  téridejének konform diagramját, pontosabban a neki megfelelő nem fizikai  $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$  téridő diagramját látjuk. Ugyanezt mutatja a 42. ábra az Einstein-féle sztatikus Világegyetembe ágyazva. Az  $M$  fizikai téridő konform





42. ábra. Az Einstein-féle sztatikus Világegyetem konform diagramján (ld. a 40. ábrát) ábrázoljuk a gömbszimmetrikus összeomláshoz tartozó téridőnek megfelelő tartományt. A II tartomány a feketelyuk tartománya, a besatírozott tartományban helyezkedik el az anyag, a hullámvonal jelöli az  $r = 0$  szingularitást.



43. ábra. A fizikai téridő  $\bar{M}$  lezártjának konform diagramja gömbszimmetrikus összeomlást szenvedő test esetén. A hullámvonal az  $r = 0$  szingularitást jelöli, a II tartomány a feketelyuk tartománya,  $H$  jelöli az esemény-horizontot. Az ábrán az  $r = 0$  tengely és az  $i^0$  pont kivételével minden pont egy 2-dimenziós gömbfelületnek felel meg.

képének lezártját látjuk a 43. ábrán bemutatott konform diagramon. Ezek az ábrák jól mutatják, hogy a  $\mathcal{J}^+$  jövőbeli null-végtelen kauzális múltja nem tartalmazza a teljes  $M$  téridőt, a feketelyuk tartománya nincsen benne  $J^-(\mathcal{J}^+)$ -ban. Ez azt jelenti, hogy a feketelyuk tartományának gömbszimmetrikus összeomlás esetén megvan az a tulajdonsága, hogy kívül van a jövőbeli null-végtelen kauzális múltján. A feketelyukból nem juthat el fénysugár (és részecske sem) a jövőbeli null-végtelenbe. Összehasonlításképp vegyük észre, hogy a Minkowski-téridő esetében  $J^-(\mathcal{J}^+)$  a teljes  $M$  téridőt tartalmazza. A gömbszimmetrikus kollapszus esetének másik fontos vonása, hogy a téridő jó viselkedésű a jövőbeli null-végtelen kauzális múltjában, a szingularitás a feketelyuk tartományban helyezkedik el. A gömbszimmetrikus feketelyuknak erre a két tulajdonságára alapozzuk az általános definíciót. Legyen  $(M, g_{ab})$  aszimptotikusan lapos téridő és  $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$  a 10. fejezetben leírt módon hozzá tartozó nem fizikai téridő.

**Definíció:** Az  $(M, g_{ab})$  aszimptotikusan lapos téridőt **aszimptotikusan szigorúan előrejelezhetőnek** (strongly asymptotically predictable) nevezzük, ha a nem fizikai téridőben található olyan  $\tilde{V} \subset \tilde{M}$  nyílt tartomány, hogy  $M \cap \tilde{J}^-(\mathcal{J}^+) \subset \tilde{V}$  és a  $(\tilde{V}, \tilde{g}_{ab})$  téridő globálisan hiperbolikus.

**Megjegyzés:** A definícióban a  $J^-(\mathcal{J}^+)$  halmaz lezártja szerepel, úgyhogy  $i^0 \in \tilde{V}$ .

**Definíció:** Akkor mondjuk, hogy az aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridő **feketelyuk-tartományt** tartalmaz, ha  $M$  nincsen benne teljes egészében a jövőbeli null-végtelen kauzális múltjában,  $J^-(\mathcal{J}^+)$ -ban. Ekkor a feketelyuk tartománya  $B = M \setminus J^-(\mathcal{J}^+)$ , a feketelyuk-tartomány  $H \subset M$  határát, azaz a  $H = \tilde{J}^-(\mathcal{J}^+) \cap M$  halmazt **esemény-horizontnak** nevezzük.

**Állítás:** Az  $(M \cap \tilde{V}, g_{ab})$  téridő globálisan hiperbolikus.

Mivel  $(\tilde{V}, \tilde{g}_{ab})$  globálisan hiperbolikus, létezik benne  $\Sigma$  Cauchy-felület. Másrészt  $M \cap \tilde{V} \subset \tilde{V}$ , úgyhogy a  $\Sigma$  jövőjében (múltjában) elhelyezkedő bármely  $p \in M \cap \tilde{V}$  pontból induló múltirányú (jövőirányú), kauzális, nem kiterjeszthető görbe metszi a  $\Sigma \cap [M \cap \tilde{V}]$  tartományban  $\Sigma$ -t, ezért  $\Sigma$ -nak a  $M \cap \tilde{V}$ -be eső darabja Cauchy-felület  $M \cap \tilde{V}$ -ban, vagyis  $(M \cap \tilde{V}, \tilde{g}_{ab})$  globálisan hiperbolikus. A  $g_{ab}$  és  $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$  metrika ugyanazt a kauzális szerkezetet hozza létre (bármely pont normál környezete azonos módon osztható fel időszerű, kauzális jövőbeli és múltbeli részhalmazokra mindkét metrika szerint). Ez azt is jelenti, hogy  $\Sigma \cap [M \cap \tilde{V}]$  a  $(M \cap \tilde{V}, g_{ab})$  téridőben is Cauchy-felület, azaz  $(M \cap \tilde{V}, g_{ab})$  is globálisan hiperbolikus.

A **8.3.4. tétel** értelmében  $M \cap \tilde{V}$  rétegezhető  $\Sigma_t$  Cauchy-felületekkel. Ekkor bármely  $q \in M \cap \tilde{V}$  pont és bármely olyan  $\Sigma_t$  esetén, amelynek kauzális jövőjében  $q$  benne van, azaz  $q \in J^+(\Sigma_t)$ , a  $q$ -ból induló minden múltirányú, kauzális görbe metszi  $\Sigma_t$ -t. Ez azt jelenti, hogy (egy esetleges kezdeti szingularitástól eltekintve, mint pl. a fehérlyuk) egyetlen  $M \cap \tilde{V}$ -ben található megfigyelő sem „láthat” a téridőben szingularitást. Aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridőben  $M \cap \tilde{V} \supset M \cap \tilde{J}^-(\mathcal{J}^+)$ . Azt mondhatjuk tehát, hogy aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridőben a feketelyukon kívül és az esemény-horizonton elhelyezkedő megfigyelők nem észlelhetik

véges „idő” (affin paraméter) alatt szingularitás kifejlődését. Ezzel szemben azt mondjuk, hogy az olyan aszimptotikusan lapos téridő, amely nem aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető, **csupasz szingularitással** rendelkezik. Az a feltétel, hogy a téridő legyen aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető, biztosítja, hogy nem jelenik meg csupasz szingularitás.

**Megjegyzés:** Az elnevezés (véleményem szerint, [2] alapján) a következőképpen indokolható. Az  $(M, g_{ab})$  téridőben tekintsük a  $\Sigma$  Cauchy-felületet, ill. annak valamely  $\mathcal{S} \subset \Sigma$  részét. Az  $(M, g_{ab})$  téridőt **az  $\mathcal{S}$  részleges Cauchy-felületből aszimptotikusan előrejelezhetőnek** nevezzük, ha  $\tilde{M}$ -ben a jövőbeli null-végtelen benne van  $\mathcal{S}$  jövőbeli függőségi tartományának lezártjában, azaz  $\mathcal{J}^+ \subset \overline{D^+(\mathcal{S})}$ . Ekkor ugyanis a  $\mathcal{S}$ -en megadott kezdeti adatokkal (vákuumban) az Einstein-egyenletek egyértelműen megoldhatók  $D^+(\mathcal{S})$ -ben, és a megoldásból a metrika  $\mathcal{J}^+$ -ban is meghatározható. A Minkowski-téridő, vagy ( $M > 0$  esetén) a Schwarzschild-megoldás ilyen tulajdonságúak. Ilyenkor minden  $\mathcal{J}^+$ -ból induló, múltba ki nem terjeszthető, kauzális görbe metszi  $\mathcal{S}$ -et. Ismeretesebb azonban az Einstein-egyenletek olyan megoldásai (pl. a Kerr-megoldás speciális esetben), amelyek nem tesznek eleget ennek a feltételnek: ezekben a téridőkben vannak olyan  $\mathcal{J}^+$ -ból induló, múltba ki nem terjeszthető, kauzális görbék, amelyek nem metszik  $\mathcal{S}$ -et, hanem szingularitásban végződnek. Az aszimptotikus előrejelezhetőség követelményét tehát olyan feltételnek tekinthetjük, amely kizárja, hogy  $\mathcal{S}$  jövőjében csupasz szingularitások legyenek, azaz olyan szingularitások, amelyek láthatók  $\mathcal{J}^+$ -ból. Ha ilyenek vannak, akkor  $\mathcal{S}$ -en megadott kezdeti adatokból nem lehet megmondani a téridő viselkedését  $\mathcal{J}^+$ -ban, mert a szingularitásokból ismeretlen új információ származhat. Az aszimptotikusan előrejelezhető esetben fennáll, hogy  $J^+(\mathcal{S}) \cap J^-(\mathcal{J}^+) \subset D^+(\mathcal{S})$ . Ha lenne olyan  $p \in H \cap J^+(\mathcal{S})$  pont az esemény-horizonton, azaz  $J^-(\mathcal{J}^+)$  határán, amelyik nem lenne benne  $D^+(\mathcal{S})$ -ben, akkor már kis perturbáció esetén  $p$  bekerülhetne  $J^-(\mathcal{J}^+)$ -ba, azaz a  $\mathcal{J}^+$  null-végtelenből láthatóvá válna, és ez azt jelentené, hogy az aszimptotikus előrejelezhetőség megszűnne. Ezért érdemes az aszimptotikus előrejelezhetőség követelményét szigorítani. A téridőt ezért akkor fogjuk  **$\mathcal{S}$ -ből aszimptotikusan szigorúan előrejelezhetőnek** nevezni, ha  $\mathcal{J}^+ \subset \overline{D^+(\mathcal{S})}$   $\tilde{M}$ -ben és  $J^+(\mathcal{S}) \cap J^-(\mathcal{J}^+)$  benne van  $D^+(\mathcal{S})$ -ben. Ezzel elérjük, hogy a horizont környezete is előrejelezhető legyen  $\mathcal{S}$ -en adott kezdeti adatokból.

**Megjegyzés:** Az aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridőben az még előfordulhat, hogy a  $H$  horizont szinguláris a következő értelemben: létezhetnek olyan, a fizikai  $g_{ab}$  metrika értelmében nem teljes geodetikusok  $M \cap \overline{J^-(\mathcal{J}^+)}$ -ban, amelyek  $M$ -ben nem kiterjeszthetők. Speciálisan az, hogy a téridő aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető, még megengedi, hogy az esemény-horizont null-geodetikus generátorai jövő-irányban ne legyenek teljesek. Többnyire a feketelyukakkal kapcsolatos megfontolásokban fel szokták tenni, hogy a horizont null-geodetikus generátorai teljesek. Azokban a tételekben, amelyeket alább be fogunk látni, erre a megszorításra nem lesz szükség, ezért ezt nem is fogjuk megkövetelni.

**Megjegyzés:** A feketelyuk definíciójából elhagyható lenne az a feltétel, hogy az aszimptotikusan lapos téridő legyen aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető. Az a hit azonban, hogy ez fizikailag nem releváns, mert csupasz szingularitást eredményezne.

**Megjegyzés:** A feketelyuk értelmezhető nem aszimptotikusan lapos téridőben is, ha jól definiáltan létezik olyan „végtelen”, hogy értelmes az oda „történő eltávozásról” vagy annak lehetetlenségéről beszélni. Ilyen pl. az az eset, amikor a téridő aszimptotikusan tart a nyílt ( $k = 0, -1$ ) FLRW-téridőhöz. Ugyanakkor a

zárt FLRW-téridőben nem értelmezhető természetes módon a feketelyuk, az ilyen Világegyetem a Nagy Zumbban ismét összezuhan, és magától értetődő módon nem értelmezhető olyan tartomány, hogy értelmes lenne arról beszélni, hogy oda részecske vagy fénysugár kiszökik, ill. nem tud kiszökni. A feketelyuk közelítő fogalma azonban ilyenkor is bevezethető [1].

## 11.2. A kozmikus cenzúrára vonatkozó sejtés

Térjünk vissza arra, hogy mi a fizikai realitása a fenti módon definiált feketelyuknak aszimptotikusan lapos, aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridőben. A 7. fejezetben láttuk, hogy a gömbszimmetrikus test teljes gravitációs összeomlása aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridőt eredményez, amely a feketelyuk tartományában a külső megfigyelők számára „elrejtett” szingularitással rendelkezik. Milyen lesz a téridő nem gömbszimmetrikus gravitációs összeomlás esetén?

**Állítás:** Ha a gömbszimmetriához képest kellően kicsi az eltérés, akkor a gravitációs összeomlás miatt a téridőben szingularitás jelenik meg, vagyis a szingularitás megjelenése nem annak a következménye, hogy gömbszimmetriát „erőszakolunk rá” a gravitációs összeomló testre, hanem a kollapszus lényegi velejárója.

Tegyük fel, hogy a  $(\Sigma, h_{ab}, K_{ab})$  kezdeti adatok gömbszimmetrikus összeomlást eredményeznek. Ekkor azt tapasztaljuk, hogy  $D^+(\Sigma)$ -ban csapdázott felületek képződnek, mert a külső Schwarzschild-téridőben az összes  $r < 2M$  sugarú gömbfelület a  $\Sigma$  jövőbeli függőségi tartományában található csapdázott felület. Ekkor a maximális Cauchy-fejlesztésre vonatkozó **10.2.2. tétel** értelmében a  $(\Sigma, h_{ab}, K_{ab})$ -hez kellően közeli bármely kezdeti adatokhoz tartozó maximális Cauchy-fejlesztésben is kell, hogy legyenek csapdázott felületek. Ekkor a **9.5.3. tétel** vagy a **9.5.4. tétel** értelmében szingularitás jelenik meg a téridőben.

A szingularitás megjelenése azonban még nem jelenti automatikusan, hogy feketelyuk is megjelenik, hiszen a szingularitás lehet csupasz és a téridő pedig akkor nem lenne aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető. A Schwarzschild-megoldás lineáris perturbációinak numerikus vizsgálatából származik a legközvetlenebb eredmény arra vonatkozóan, hogy nem jelennek meg csupasz szingularitások, vagyis a perturbációt leíró egyenletek (a lineáris Einstein-egyenletek) megoldásai  $\tilde{V} \cap M$ -ben korlátosak. Ez azt sugallja, hogy a gömbszimmetrikustól kellően kicsit eltérő gravitációs összeomlás során feketelyuk és nem csupasz szingularitás keletkezik. Több próbálkozás volt arra is, hogy olyan ellenpéldát találjanak, amikor nem gömbszimmetrikus gravitációs összeomlás során nem feketelyuk, hanem csupasz szingularitás keletkezne. Ezeknek a próbálkozásoknak a sikertelensége mintha azt üzenné, hogy a Természet igyekszik elkerülni csupasz szingularitások keletkezését. Ehhez jön még az, hogy a feketelyukak fizikájának olyan esztétikus és alapvető eredményei vannak, hogy nehéz azt feltételezni, hogy a feketelyukak ne játszanának fontos szerepet a gravitációs összeomlásban. Mindezek alapján fogalmazódott meg az a sejtés, hogy a Természet „cenzúrázza” a csupasz szingularitásokat.

**A kozmikus cenzúrára vonatkozó sejtés** (cosmic censor conjecture) *1. változatának a fizikai megfogalmazása* a következő: Egy test teljes gravitációs összeomlása mindig feketelyuk képződésével jár ahelyett, hogy csupasz szingularitás keletkezne. A gravitációs összeomlás során keletkező szingularitások tehát feketelyukak belsejében vannak „elrejtve”, ahol távoli megfigyelők számára nem észlelhetők.

A sejtésnek ez a megfogalmazása nem pontos. Nyilvánvalóan nem is igaz, ha nem teszünk megszorításokat az anyagmezőkre. Például felírhatunk egy csupasz szingularitással rendelkező téridőt, majd azt az Einstein-egyenletek olyan  $T_{ab}$ -hez tartozó megoldásának tekintjük, amelyre  $T_{ab} = G_{ab}/8\pi$ . Hogy a sejtést pontosabban fogalmazzuk meg, két természetes feltétel kielégítését követeljük meg az energiaimpulzus-tenzortól:

1.  $T_{ab}$  tegyen eleget valamelyik energia-feltételnek, mint pl. a domináns energia-feltétel;
2. az Einstein-egyenletek és az anyagmezők téregyenleteinek csatolt rendszere rendelkezzen jól definiált kezdeti-érték feladattal.

Az ideális folyadék mindezeknek a feltételeknek eleget tesz, mégis megmutatták, hogy ideális folyadék kollapszusa esetén nem teljesül a kozmikus cenzúra sejtése, merthogy a folyadék szingularitást tud kifejleszteni, mint pl. a lökeshullámok és a „héj-keresztveződések”<sup>106</sup>. Azt gondoljuk azonban, hogy ezeknek a „lágyabb” szingularitásoknak a megjelenése a megoldásban azzal kapcsolatos, hogy a folyadék hidrodinamikája nem fundamentális elmélet, hanem valamilyen mikroszkopikus rendszer leírásának makroszkopikus közelítése. Ezért fel fogjuk tételezni, hogy a kozmikus cenzúra sejtése akkor működik, ha az anyagot alapvető fizikai mezők segítségével írjuk le. Matematikailag fogalmazva, a kozmikus cenzúrára vonatkozó sejtésbe feltételként beépítjük, hogy az Einstein-egyenletek és az anyagmezők csatolt egyenletrendszere másodrendű, kvázilineáris, diagonális, hiperbolikus rendszert alkosson. Az alapvető kölcsönhatásokat leíró fizikai mezők, mint a gravitációs mező és az elektromágneses mező egyenletei ilyenek.

**A kozmikus cenzúrára vonatkozó sejtés** *1. változatának a pontos megfogalmazása* a következő: Legyen  $(\Sigma, h_{ab}, K_{ab})$  az Einstein-egyenletek aszimptotikusan lapos kezdeti adatai, ahol  $(\Sigma, h_{ab})$  teljes Riemann-sokaság. Az anyagforrások legyenek olyanok, hogy  $T_{ab}$  tegyen eleget a domináns energia-feltételnek, és az Einstein-egyenletek és az anyagmezők egyenleteinek csatolt rendszere legyen (G.3.5.) alakú, vagyis másodrendű, kvázilineáris, diagonális, hiperbolikus rendszer. Ezenfelül az anyagterekre vonatkozó kezdeti adatok  $\Sigma$ -n aszimptotikusan csengjenek le megfelelően gyorsan a térbeli végtelenben. A sejtés az, hogy ekkor ezeknek az adatoknak

<sup>106</sup>Héj-keresztveződések (shell-crossing) esetén a sebességmező többértékűvé a sűrűség pedig végtelenné válik.

a maximális Cauchy-fejlesztése aszimptotikusan lapos, aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridő.

Annak eldöntése, hogy a kozmikus cenzúrára vonatkozó sejtés helyes vagy nem, a gravitációs összeomlás elméletének kulcsfontosságú, a mai napig megoldatlan problémája. Ha a fenti megfogalmazásban a sejtés helyes, akkor felvetődik a kérdés, hogy ez esetleg az Einstein-egyenleteknek valamilyen még általánosabb és alapvetőbb tulajdonságának a következménye. Penrose feltételezte, hogy ez így lehet, és megfogalmazta a sejtésnek egy szigorúbb változatát.

**A kozmikus cenzúrára vonatkozó sejtés 2. változatának a fizikai megfogalmazása:** Minden *fizikailag elfogadható* téridő globálisan hiperbolikus, azaz egy esetleges kezdeti szingularitástól, mint pl. a Nagy Bummtól eltekintve egyetlen megfigyelő sem lát soha szingularitást.

Ez a sejtés erősebb, mint a sejtés 1. változata, mert feltételezi, hogy nemcsak az aszimptotikusan lapos téridőben a távoli megfigyelő, hanem általában tetszőleges téridőben tetszőleges megfigyelő sem lát soha szingularitást. Ugyanakkor a sejtés 2. változatából nem következik a sejtés 1. változata.

Pl. ha aszimptotikusan lapos kezdeti adatokból olyan téridő fejlődik ki, amelyben szingularitás jelenik meg és az a null-végtelenbe tart, akkor az aszimptotikus laposság nem teljesül, de a globális hiperbolicitás még megmarad.

Speciális téridők tulajdonságainak vizsgálata alapján kiderül, hogy a sejtés 2. változatának megfogalmazását pontosítani kell abban a tekintetben, hogy mit nevezünk fizikailag elfogadható téridőnek (ld. a részletesebb indoklást a [1] tankönyvben). A sejtés pontos megfogalmazása az alábbi.

**A kozmikus cenzúrára vonatkozó sejtés 2. változatának a pontos megfogalmazása:** Legyen  $(\Sigma, h_{ab}, K_{ab})$  az Einstein-egyenletek kezdeti adatai, ahol  $(\Sigma, h_{ab})$  teljes Riemann-sokaság. Az anyagforrások legyenek olyanok, hogy  $T_{ab}$  tegyen eleget a domináns energia-feltételnek, és az Einstein-egyenletek és az anyagmezők egyenleteinek csatolt rendszere legyen (G.3.5.) alakú, vagyis másodrendű, kvázilineáris, diagonális, hiperbolikus rendszer. A fenti feltételek teljesedése esetén a sejtés az, hogy ha a kezdeti adatok maximális Cauchy-fejlesztése kiterjeszthető, akkor bármely  $p \in H^+(\Sigma)$  pont esetén vagy az erős kauzalitás sérül  $p$ -ben, vagy  $\overline{I^-(p)} \cap \Sigma$  nem kompakt.

A sejtés 2. változatának erre a pontosabb megfogalmazására nem ismert ellenpélda. Ugyanakkor sem a sejtés igazolására, sem annak cáfolatára nincsen bizonyítóerejű érvelés. Ezt a helyzetet az magyarázza, hogy a szingularitási tételektől eltekintve nagyon keveset tudunk az Einstein-egyenletek megoldásainak általános, globális tulajdonságairól.

### 11.3. A feketelyukak keletkezése

Fogadjuk el, hogy a kozmikus cenzúrára vonatkozó sejtés igaz, és beszéljünk röviden azokról a folyamatokról, amelyeknek során az anyag gravitációs összeomlása következtében feketelyukak keletkezhetnek.

1. Az egyik ilyen folyamat a csillagok gravitációs összeomlása, amelynek során **csillageredetű feketelyukak** (stellar black holes) keletkezhetnek. A 7.2. fejezetben említettük, hogy ha egy gömbszimmetrikus csillag tömege nagyobb, mint kb. a kétszeres Nap-tömeg,  $M > 2M_{\odot}$ , akkor a csillagnak gravitációs összeomlást kell szenvednie, hacsak a fejlődése során nem tud megszabadulni valamilyen folyamatban tömegének akkora részétől, hogy ez alá a tömeghatár alá kerüljön. (A tömeghatárt a csillag forgása elvileg nagyobb értékre kitolhatja, ez a változás azonban a megfigyelt esetekben általában nem jelentős.) A galaxisunkban számos csillagnak nagyobb a tömege, mint  $2M_{\odot}$ , az ilyen csillagok élettartama pedig lényegesen rövidebb, mint a galaxisunk életkora. Ezért joggal feltételezhetjük, hogy a galaxisunkban sok feketelyuk keletkezhetett. Arra nézve azonban nagyon bizonytalanok az ismereteink, hogy a csillagok fejlődésük során mennyi tömeget veszítenek, történjen az akár fokozatosan (mint pl. a vörös óriások esetén), akár hirtelen, szupernóvarobbanásban. Ezért végül pontatlanul lehet csak megbecsülni a keletkezett feketelyukak számát. A feketelyukak számának egyik becslése a szupernóvák számán alapul. A megfigyelések alapján évszázadonként néhány szupernóva keletkezik a galaxisunkban. Ezért kb.  $10^8$  szupernóva, és kb. ugyanennyi feketelyuk fordulhat elő a galaxisunkban. Ez a becsült szám lehet túl nagy, mert a a szupernóvarobbanás után visszamaradó égitest sokszor neutroncsillag lesz feketelyuk helyett. Másrészt a feketelyukak így becsült száma lehet túl alacsony, mert lehet, hogy folytonos anyagvesztéssel sokkal gyakrabban kerülhet az összeomló csillag feketelyuk-állapotba, mint szupernóvarobbanással. A csillagösszeomlással keletkező feketelyukak tömegének  $2M_{\odot} < M_{bh} < 100M_{\odot}$  intervallumba kell esnie, mert normál csillagok  $100M_{\odot}$  tömegnél nagyobb tömeggel nem léteznek, ugyanis instabillá válnak a csillagrendésekkel szemben.
2. Feketelyukak keletkezhetnek a Természetben akkor is, amikor nagyon sűrű csillaghalmazok központi törzse gravitációsan összeomlik, ezek a **galaktikus feketelyukak**, szokás **szupernehéz feketelyukakként** (supermassive black holes) is emlegetni őket. A csillaghalmaz belsejében gravitációs ütközések révén, véletlenszerűen nagy energia összpontosulhat egyetlen részecskére (csillagra), amely ekkor eltávozik a halmazból. Az ilyen „csillag-párolgás” következtében a visszamaradó csillaghalmaz energiája csökken és még tovább nő a központi tömegsűrűsége. Végül a halmaz központi része olyan sűrűvé válhat, hogy az árapály-erők széttörik az egyes csillagokat. Többféle modell létezik arra nézve, hogy ezután mi történik, és ezek közül több is teljes gravitációs

összeomlást és nagy feketelyuk keletkezését jósolja. Az ilyen feketelyukak legvalószínűbben a galaxisok középpontjában jöhetnek létre, a tömegük általában a galaxis tömegének jelentős hányadát képezheti,  $10^7 - 10^{10} M_\odot$  nagyságrendű lehet.

A XX. század végétől kezdve gyűlnek csillagászati megfigyelések adatai arról, hogy galaxisunkban számos (90) csillag kering egy láthatatlan objektum körül, amelynek középpontja egybeesik a Sagittarius A rádióforrással. A Kepler-pályáik alapján az ismeretlen objektum tömege kb.  $(2,6 - 4,3) \cdot 10^7 M_\odot$ , sugara  $0,02 - 0,002$  fényév. Az adatok még pontatlanok ahhoz, hogy egyértelműen el lehessen dönten, hogy a láthatatlan objektum sugara kisebb, mint a Schwarzschild-sugár, vagy nem. Mégis nagyon valószínű, hogy „galaktikus” feketelyukat észleltek, mert nincsen más fizikai elképzelés, ami magyarázhatná ilyen óriási, láthatatlan tömeg elhelyezkedését a becsült kis térfogatban.

3. Őseredeti (primordiális) feketelyukak keletkeztek a Világegyetem korai szakaszában, amikor annak nagy sűrűségű tartományai gravitációs összeomlást szenvedtek. A Világegyetem ugyan nagy méretskálán jó közelítéssel homogén és izotróp. Azt is tudjuk azonban, hogy mai szerkezetét annak köszönheti, hogy kezdeti inhomogenitások voltak jelen. Ha ezek a kezdeti inhomogenitások elég jelentősek voltak a korai Világegyetemben, akkor eredményezhettek olyan anyagsűrűséget, amely lokális instabilitást és az anyag feketelyukakba történő lokális összeomlását eredményezhette. Ilyen módon akár nagyszámú őseredeti feketelyuk is keletkezhetett. Arra nézve, hogy vannak-e ilyen feketelyukak a Világegyetemben, és ha igen, akkor mennyi a számuk, nincsenek megbízható becsléseink.

A primordiális feketelyukak egyik sajátossága, hogy a tömegük bármekkora lehet, beleértve a Naptömegnél kisebb tömegeket is. A jelenlegi Világegyetemben semmilyen folyamat nem tud ilyen kis feketelyukakat létrehozni. Pl. ha egy Schwarzschild-feketelyuk tömege a Föld tömegével egyenlő,  $M_F = 6 \cdot 10^{24}$  kg, akkor a sugara  $r_S = 2GM_F/c^2 \approx 0,01$  m. Ezért a Földet úgy tudnánk feketelyukká alakítani, ha nem gravitációs erővel összenyomnánk  $r_s \approx 0,01$  m sugarúvá, azaz  $\rho \approx 1,4 \cdot 10^{30} \text{ kg/m}^3$  sűrűségűvé, és akkor a saját gravitációjának hatására összeomlást szenvedne. A Világegyetem a Nagy Bumm után kb.  $\tau \approx 10^{-11}$  s-mal volt ilyen sűrű. Ha ekkor voltak  $\delta\rho \approx \rho$  nagyságrendű sűrűségfluktuációk az  $0,01$  m méretskálán, akkor keletkeztek olyan primordiális feketelyukak, amelyek tömege a Föld tömegével volt egyenlő. A Nagy Bumm után  $\tau \approx 10^{-11}$  s idővel még 3 nagyságrenddel korábban vagyunk annál az időpontnál, ameddig kb. visszakövethetjük időben az alapvető kölcsönhatásokra vonatkozó ismereteink alapján a Világegyetem fejlődését. A kis primordiális feketelyukak tehát a kozmológiai fejlődés nagyon korai szakaszában jöhetnek létre, ha keletkeztek.



## 11.4. A feketelyukak megfigyelése

A feketelyukak kicsik és sötétek (nem világítanak), ezért közvetlen megfigyelésük rendkívül nehéz. Egy  $M = M_{\odot}$  tömegű Schwarzschild-feketelyuk sugara 3 km, egy nagy galaxis magjában található  $10^{10} M_{\odot}$  tömegű feketelyuk Schwarzschild-sugara is csak  $r_s \approx 3 \cdot 10^{10}$  km  $\approx 0,003$  fényév. A feketelyukak közvetett megfigyelése azonban lehetséges annak alapján, hogy milyen hatást gyakorol a feketelyuk a környezetében található anyagra. Napjainkban (2016) a LIGO kísérletben a gravitációs hullámok első, közvetlen detektálása kapcsán bebizonyosodott, hogy feketelyukak ütközését meg lehet figyelni az ütközés során keletkezett gravitációs sugárzás detektálása révén.

Amennyiben a feketelyukat csillagközi anyag alkotta köd veszi körül, akkor a csillagok összeomlásával keletkezett feketelyukak a körülöttük található anyagot erős gravitációs vonzó hatásuknál fogva magukba szívják. Az impulzusmomentum megmaradása következtében ennek az anyagnak a „részecskéi” spirális pályán zuhannak be a feketelyukba miközben egy korong alakú elrendeződést vesznek fel, létrehozva a **gyűjtő korongot**, vagy más szóval az **szívási korongot** (accretion disc). Az **elszívó folyamat** (accretion process) közben a szívási korong belsejében az anyag belső súrlódás révén annyira felhevül, hogy elektromágnesesen világítani kezd, főként Röntgen-sugárzást bocsát ki. Ezt tudjuk megfigyelni. Érdemes megjegyezni, hogy az elszívási folyamat az egyik legjobb, ismert energiatermelő folyamat a Természetben, amikor a felszaporodott anyag nyugalmi tömegének kb. 40%-a alakul át sugárzási energiává; összehasonlításképpen a magfúzióban ez csak 0,7%. A Világegyetemben megfigyelt számos kiugróan nagyenergiájú jelenségről feltételezzük, hogy feketelyuk körüli szaporító folyamattal kapcsolatos. Pl. az **aktív galaxismagokról** és a **kvázárokról** azt feltételezzük, hogy galaxisok központjában elhelyezkedő, rendkívül nagy tömegű feketelyukak szívási korongjától származnak.

A **bináris Röntgen-forrásokról** (X-ray binaries) azt gondoljuk, hogy olyan kettős rendszerek, amelyek egyik tagja közönséges csillag, a másik pedig egy kicsi, nagytömegű objektum, amely elszívja az anyagot a társától. A kompakt objektum lehet neutroncsillag vagy feketelyuk. A kísérő közönséges csillag mozgásából gyakran meg lehet határozni a kompakt objektum tömegét. Ha az jóval a csillag stabilitását garantáló TOV-féle tömeghatár felettinek adódik, akkor kizárhatjuk, hogy a kompakt objektum neutroncsillag, ekkor olyan jelöltet találtunk, amelynek egyik tagja feketelyuk lehet. Először 1972-ben találtak olyan kettős rendszert, a Cygnus X-1-et, amelynek egyik tagja feketelyuk lehet, a társcsillag tömege viszont jóval nagyobb, mint a kompakt objektumé, ami az egyértelmű döntést nehezzé teszi. Újabban olyan bináris forrásokat fedeztek fel, az úgynevezett **lágymeghatározási Röntgen-sugárzókat** (soft X-ray transients), amelyekben a közönséges csillag kis tömege lehetővé teszi a kompakt objektum tömegének kellően pontos meghatározását. Ráadásul a lágymeghatározási Röntgen-sugárzók minden 10-50 évben csak néhány hónapon át sugároznak a Röntgen-tartományban, a köztes **nyugal-**

**mi időszakban** (quiescence) a gyűjtő korong nagyon halvány, úgyhogy ezalatt a közönséges csillag jól megfigyelhető.

A galaxisok egy részét a csillagászok **aktív galaxisoknak** nevezik. Ezek olyan galaxisok, amelyek magja, az úgynevezett **aktív galaxismag** szokatlan spektrális tulajdonságokkal és nagyon erős rádiósugárzással rendelkezik. A megfigyelések és az elméleti megfontolások alapján feltehető, hogy a galaxismagok aktivitását az magyarázza, hogy középpontjukban egy nagyon nagy tömegű feketelyuk helyezkedik el. Számos jelöltet találtak ilyen feketelyukakra.

Manapság a csillagászati megfigyelések általánosan igazolni látszanak, hogy a galaxisok többségének (nem csak az aktívaknak) a középpontjában található egy szupernehéz feketelyuk. Saját galaxisunkban is valószínűleg egy galaktikus feketelyuk található, amelynek centruma egybeesik a Sagittarius A rádióforrással (ld. az előző fejezetet).

## 11.5. A feketelyukak általános tulajdonságai

Térjünk most rá annak vizsgálatára, hogy milyen általános tulajdonságai vannak a feketelyukaknak. Ezeket a téridők globális tulajdonságai alapján határozhatjuk meg, azokra az eredményekre támaszkodva, amelyeket a téridők kauzális szerkezetére és szingularitásaira vonatkozóan ismertünk meg a 8. és a 9. fejezetben.

**Állítás:** Legyen  $(M, g_{ab})$  aszimptotikusan lapos téridő,  $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$  a hozzátartozó nem fizikai téridő, és  $\mathcal{J}^+ \subset \tilde{M}$  jelölje a jövőbeli null-végtelent. A  $B = \tilde{M} \setminus \mathcal{J}^+$  feketelyuk-tartomány zárt halmaz  $\tilde{M}$ -ben, úgyhogy  $B$  tartalmazza a  $H$  horizontot,  $H \subset B$ .

Legyen  $q \in \mathcal{J}^+$  és  $p \in \tilde{M} \cap \mathcal{J}^-(q)$ , továbbá  $r \in \mathcal{J}^+$  olyan pont, amely  $\mathcal{J}^+$   $q$ -n áthaladó jövőirányú  $\gamma$  null-generátorán  $q$  után helyezkedik el. Ekkor  $p \in I^-(r)$ . Valóban,  $r$ -t és  $q$ -t a feltételek szerint a  $\gamma$  null-geodetikus generátor köti össze, viszont  $p$  a feltételek szerint nem lehet rajta a  $\gamma$  null-geodetikuson, mert  $\tilde{M} \cap \mathcal{J}^+ = \emptyset$ , következésképpen  $p$  és  $q$  vagy olyan null-geodetikussal köthető össze, amely nem simán csatlakozik  $q$ -ban  $\gamma$ -hoz, vagy időszerű görbével. Az  $r$  és  $p$  pontok tehát nem köthetők össze töréspont nélküli null-geodetikussal. Ekkor a **8.1.2. tétel** következményének bizonyításakor mondottak alapján  $p \in I^-(r)$ .

Azt kaptuk tehát, hogy  $\tilde{M} \cap \mathcal{J}^-(\mathcal{J}^+)$  bármely pontja benne van  $\tilde{M} \cap I^-(\mathcal{J}^+)$ -ban, hiszen  $p$ ,  $q$  és  $r$  tetszőleges pontok voltak (eltekintve  $q$  és  $r$  sorrendiségétől  $\gamma$ -n), vagyis  $\tilde{M} \cap \mathcal{J}^-(\mathcal{J}^+) = \tilde{M} \cap I^-(\mathcal{J}^+)$ . Ez viszont azt jelenti, hogy  $\mathcal{J}^-(\mathcal{J}^+)$  nyílt halmaz  $\tilde{M}$ -ben, akkor viszont  $B = \tilde{M} \setminus \mathcal{J}^-(\mathcal{J}^+)$  zárt halmaz  $\tilde{M}$ -ben, úgyhogy  $\tilde{M}$  tartalmazza  $B$  határát, azaz  $H$ -t.

Miután szeretnénk beszélni arról, hogy mi a „története” a feketelyuknak, bevezetjük a „feketelyukról készült pillanatsfelvétel” fogalmát.

**Definíció:** Legyen  $(M, g_{ab})$  aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridő, amelyhez létezik  $\tilde{V} \supset \overline{\tilde{M} \cap \mathcal{J}^-(\mathcal{J}^+)}$  globálisan hiperbolikus tartomány a nem fizikai téridőben. Legyen  $B = \tilde{M} \setminus \mathcal{J}^-(\mathcal{J}^+)$  a feketelyuk tartománya a téridőben. Ha  $\Sigma$

Cauchy-felület  $\tilde{V}$ -ban, akkor a  $\Sigma \cap B$  tartományra úgy tekintünk, mint a **teljes feketelyuk-tartományról a  $\Sigma$  „időpillanatban” készült pillanatfelvételre.** Ha  $\Sigma \cap B$  nem összefüggő, akkor a  $\Sigma \cap B$  tartomány minden  $\mathcal{B}$  komponensét a  $\Sigma$  pillanatban készült pillanatfelvételen szereplő feketelyuknak fogjuk nevezni.

**Megjegyzés:** A feketelyukak száma „idővel”, azaz a  $\Sigma$  Cauchy-felület megválasztásától függően változhat, hiszen új feketelyukak képződhetnek, és meglevő feketelyukak egybeolvadhatnak. Arra nézve azonban tételt tudunk kimondani, hogy egy feketelyuk sosem tűnhet el, és sosem **bifurkálódhat**, azaz sosem hasadhat fel az idő múlásával kettő vagy több feketelyukra.

**12.2.1. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridő, és legyenek  $\Sigma_1$  és  $\Sigma_2$  Cauchy-felületek  $\tilde{V}$ -ben, amelyekre fennáll, hogy  $\Sigma_2 \subset I^+(\Sigma_1)$ . Legyen  $\mathcal{B}_1$  egy feketelyuk a  $\Sigma_1$  pillanatban, azaz legyen  $\mathcal{B}_1$  a  $\Sigma_1 \cap B$  tartománynak egy nem üres, összefüggő komponense. Ekkor  $J^+(\mathcal{B}_1) \cap \Sigma_2$  nem üres, és benne van  $B \cap \Sigma_2$  egyik összefüggő komponensében.

Nyilvánvalóan fennáll, hogy  $J^+(\mathcal{B}_1) \subset B$ , de akkor  $J^+(\mathcal{B}_1) \cap \Sigma_2 \subset B \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ . Ezután csak azt kell belássuk, hogy  $J^+(\mathcal{B}_1) \cap \Sigma_2$  a  $B \cap \Sigma_2$ -nek egyik összefüggő komponensében van benne. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét. Ekkor találhatnánk olyan diszjunkt  $O, O' \subset \Sigma_2$  nyílt halmazokat, hogy  $O_1 \cap J^+(\mathcal{B}_1) \neq \emptyset$ ,  $O_2 \cap J^+(\mathcal{B}_1) \neq \emptyset$  és  $O \cup O' \supset J^+(\mathcal{B}_1) \cap \Sigma_2$  lenne. Ekkor viszont  $\mathcal{B}_1$  valamekkora darabjainak benne kell lennie  $I^-(O)$ -ban és  $I^-(O')$ -ben, azaz  $\mathcal{B}_1 \cap I^-(O) \neq \emptyset$  és  $\mathcal{B}_1 \cap I^-(O') \neq \emptyset$ , miközben  $I^-(O \cup O') = I^-(O) \cup I^-(O') \supset \mathcal{B}_1$ . Tegyük fel, hogy lenne olyan  $p \in \mathcal{B}_1$  pont, amelyik ekkor  $I^-(O)$ -ban és  $I^-(O')$ -ben is benne lenne. Ekkor a  $p$  pontban a jövőirányú, időszerű geodetikusokat két halmazra tudnánk osztani, olyanokra, amelyek  $\Sigma_1$ -t  $O$ -ban metszik, és olyanokra, amelyek  $\Sigma_2$ -t  $O'$ -ben metszik. Ezzel fel tudnánk osztani a  $p$  pontban értelmezett időszerű vektorokat két, nem üres, diszjunkt részhalmazra, az pedig ellentmondana annak, hogy a jövőbeli fénykúp belseje összefüggő halmaz. Nem létezhetne tehát olyan  $p \in \mathcal{B}_1$  pont, amelyik benne van  $I^-(O)$ -ban is és  $I^-(O')$ -ben is. Akkor viszont  $I^-(O) \cap \Sigma_1$  és  $I^-(O') \cap \Sigma_1$  olyan diszjunkt nyílt halmazok kellene legyenek, amelyek belemetszenek  $\mathcal{B}_1$ -be és uniójuk tartalmazza  $\mathcal{B}_1$ -et. Ez pedig ellentmond a feltevésünknek, hogy  $\mathcal{B}_1$  összefüggő.

A feketelyuk fenti definícióját használva a fő nehézség az, hogy a téridő teljes evolúcióját tudnunk kell ahhoz, hogy eldöntsük, van-e jelen feketelyuk. Megeshet azonban, hogy bár a  $(\Sigma, h_{ab}, K_{ab})$  kezdeti adatok ismertek, nem tudjuk explicit módon megoldani az Einstein-egyenleteket, amelyek meghatározzák a téridő evolúcióját. Ilyenkor a feketelyuk általános definíciója nem elegendő, hogy eldöntsük,  $B = \emptyset$  vagy nem, és ha  $B \neq \emptyset$ , akkor  $\Sigma$ -n hol helyezkedik el a feketelyuk  $\mathcal{B} = B \cap \Sigma$  pillanatfelvétele. Ezért hasznosak a feketelyuk létezésére és helyzetére vonatkozó olyan kritériumok, amelyek nem követelik meg a téridő teljes, időbeli fejlődésének az ismeretét. Három ilyen kritériumot fogunk ismertetni.

1. A 9. fejezetben tárgyalt **9.5.3. tétel** és **9.5.4. tétel** értelmében, ha létezik csapdázott felület a téridőben, az anyag eleget tesz megfelelő energiafeltételeknek és néhány további feltétel érvényes, akkor szingularitásnak kell

megjelennie. Ezért a csapdázott felületek a téridő szingularitásaival vannak kapcsolatban. Az első kritérium azt fogalmazza meg, hogy aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridőben a  $\mathcal{J}^+$  jövőbeli null-végtelenből nemcsak hogy csupasz szingularitás nem látható, hanem csapdázott felület sem látható. Másképpen fogalmazva, valamennyi csapdázott felületnek teljes egészében valamely feketelyuk tartományában kell elhelyezkedni.

**12.2.2. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridő, amelyben bármely  $k^a$  null-vektormező esetén az  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  egyenlőtlenség áll fenn, ami igaz, ha teljesülnek az Einstein-egyenletek és az anyag eleget tesz az erős energia-feltételnek. Tegyük fel, hogy  $M$ -ben van  $T$  csapdázott felület. Ekkor  $T \subset B$ , ahol  $B$  az  $M$  téridőben a feketelyuk tartománya.

Tegyük fel, hogy  $T$  nincsen teljes egészében benne  $B$ -ben. Ekkor a nem fizikai téridőben  $J^+(T) \cap \mathcal{J}^+ \neq \emptyset$  lenne. Ugyanakkor a térszerű végtelen,  $i^0$  nincsen benne  $M$  semelyik pontjának a kauzális jövőjében sem, de akkor  $i^0 \notin J^+(T)$  is teljesül. Továbbá, mivel  $\tilde{V}$  globálisan hiperbolikus a nem fizikai téridőben és  $T$  kompakt, a **8.3.11. tétel** értelmében  $J^+(T)$  zárt  $\tilde{V}$ -ban. Ezért  $i^0$ -nak van olyan nyílt környezete, amely nem metsz bele  $J^+(T)$ -be, úgyhogy  $\mathcal{J}^+$ -nak is van olyan nyílt környezete, amely nem metsz bele  $J^+(T)$ -be. Mivel azonban  $\mathcal{J}^+$  összefüggő, ezért akkor van olyan  $q \in \mathcal{J}^+$  pont, amelyre  $q \in \dot{J}^+(T)$ . Ekkor a **9.3.11. tétel** értelmében a nem fizikai téridőben van olyan  $\gamma$  null-geodetikus, amely  $p \in T$  pontból  $q$ -ba megy, ortogonális  $T$ -re, és nincsen rajta  $T$ -hez konjugált pont  $T$  és  $q$  között. Másképpen fogalmazva,  $\dot{J}^+(T)$ -t  $T$ -re ortogonális null-geodetikusok generálják.

Mivel a konform traszformáció nem változtatja meg a vektorok lokális osztályozását térszerű, időszzerű és null-vektorokra, azért a  $g_{ab}$  fizikai metrika tekintetében  $\gamma$  szintén  $T$ -re ortogonális null-geodetikus, amelyen nincsen konjugált pont, de most  $\gamma$  a jövőirányban teljes. Ez azonban lehetetlen, mert  $p$ -ben (a  $T$  csapdázott felületen)  $\theta_0 < 0$  azon null-geodetikusok kongruenciájában, amelyhez  $\gamma$  tartozik, úgyhogy a **9.3.6. tétel** értelmében a fizikai téridőben kell, hogy legyen  $\gamma$ -n konjugált pont  $p$  és  $q$  között  $p$ -től mérve  $2/|\theta_0|$ -nál nem nagyobb affin távolságra. Eredeti feltevésünk, hogy  $T$  nincsen teljes egészében benne  $B$ -ben, ellentmondásra vezetett, tehát  $T \subset B$  kell legyen.

2. **Definíció: Marginálisan csapdázott felületnek** nevezzük az olyan két-dimenziós, térszerű,  $M$ -be beágyazott részsokaságot, amelyhez tartozó ortogonális geodetikusok mindkét családjának expanziója  $\theta \leq 0$ . (Ezzel ellentétben a csapdázott felület definíciójában  $\theta < 0$ -t követeltünk meg.)

A **12.2.2. tétel** általánosítható marginálisan csapdázott felületekre.

**12.2.3. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridő, amelyben bármely  $k^a$  null-vektormező esetén az  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  egyenlőtlenség áll fenn. Tegyük fel, hogy  $M$ -ben van  $T$  marginálisan csapdázott felület. Ekkor  $T \subset B$ .

Hasonlóan, mint az előző tétel bizonyítása során, most is beláthatjuk, hogy  $\dot{J}^+(T)$ -t a  $T$ -re ortogonális null-geodetikusok generálják. A fizikai téridő ezen null-geodetikusainak expanziója kezdetben nem pozitív. Ebből következik, hogy  $\theta \leq 0$  mindenhol  $\dot{J}^+(T)$ -n. Csakugyan, a (9.3.49.) egyenlet jobb oldalán  $\omega_{ab} = 0$  ( $T$ -re ortogonális null-geodetikusok kongruenciáját vizsgáljuk), úgyhogy  $d\theta/d\lambda \leq 0$  mindenütt  $\dot{J}^+(T)$ -n, hiszen  $\theta$  a  $-\infty$ -n keresztül sem válhat pozitívvá, mert akkor lenne konjugált pont.

Tegyük fel most, hogy  $T \cap J^-(\mathcal{J}^+) \neq \emptyset$ . Ekkor beláthatjuk, mint az előző tétel bizonyítása során, hogy létezik olyan  $q \in \mathcal{J}^+$  pont, amelyre  $q \in \mathring{J}^+(T)$ . Másrészt mindazok a  $p$  pontok, amelyek  $q$  kauzális jövőjében vannak és egyúttal rajta vannak  $\mathcal{J}^+$ -nak a  $q$ -n áthaladó null-geodetikus generátorán, benne kell, hogy legyenek  $I^+(T)$ -ben, mivel ezek a  $p$  pontok olyan kauzális görbékkel köthetők össze  $T$ -vel, amelyek nem töréspontmentes null-geodetikusok (törésponttal rendelkező null-geodetikusok, vagy időszerű görbék). Mivel  $I^+(T)$  nyílt, ezért  $\mathcal{J}^+$ -nak minden olyan null-generátora, amely kellően közel van a  $q$ -n áthaladó null-generátorhoz, be kell, hogy lépjen  $I^+(T) = \text{int}(J^+(T))$ -be. Másrészt  $\mathcal{J}^+$  minden null-generátorának múltbeli végpontja van  $i^0$ -ban; akkor viszont el kell hagynia  $J^+(T) = \overline{J^+(T)}$ -t (hiszen  $i^0$  nincsen benne  $\overline{J^+(T)}$ -ben). Akkor viszont nemcsak  $\mathcal{J}^+$  egyetlen  $q$  pontjának, hanem  $\mathcal{J}^+$  egy  $q$  körüli lokális  $\mathcal{S} \subset \mathcal{J}^+$  keresztmetszetének is a  $\mathring{J}^+(T)$  határon kell elhelyezkednie. Másrészt  $\mathring{J}^+(T)$  minden null-generátorának  $\mathcal{S}$ -et ortogonálisan kell metszenie, hogy ne létezzen  $T$ -t  $\mathcal{S}$ -sel összekötő időszerű görbe. Ugyanakkor a fizikai téridőben  $\mathcal{J}^+$  bármely keresztmetszetét ortogonálisan metsző null-geodetikusok kongruenciájának az expanziója pozitív  $\mathcal{J}^+$  közelében. Ez viszont ellentmond előző eredményünknek, hogy  $\mathring{J}^+(T)$  null-geodetikus generátorainak kongruenciája mindenütt nem pozitív expanzióval rendelkezik. Tehát a feltevésünk, hogy  $T \cap J^-(\mathcal{J}^+) \neq \emptyset$ , nem lehet igaz, mert ellentmondásra vezetett. Ezért  $T \cap J^-(\mathcal{J}^+) = \emptyset$ , vagyis  $T$  nem látható  $\mathcal{J}^+$ -ból.

3. A két előző tétel bizonyításában  $T$  tulajdonságaiból csak azt kellett felhasználni, hogy  $J^+(T)$  zárt, hogy  $i^0 \notin J^+(T)$  és, hogy  $\mathring{J}^+(T)$  null-geodetikus generátorainak expanziója kezdetben nem pozitív. Ilyen tulajdonságú halmazra más példát is lehet találni, mint a  $T$  csapdázott felületet: az úgynevezett **külső marginálisan csapdázott felületet**.

**Definíció:** Legyen  $\Sigma$  olyan aszimptotikusan lapos Cauchy-felület  $\tilde{V}$ -ban, amely átmegy  $i^0$ -on és  $i^0$ -ban térszerű. Legyen  $C \subset \Sigma \cap M$  a  $\Sigma$ -nak zárt részhalmaza, ami 3-dimenziós, határral rendelkező sokaság, és tegyük fel, hogy a  $C$  részhalmaz 2-dimenziós  $S = \mathring{C}$  határa olyan tulajdonságú, hogy az  $S$ -re ortogonális, kifutó null-geodetikusok családjának  $\theta$  expanziója sehol sem pozitív,  $\theta \leq 0$ . Az  $S$  felületet ekkor **külső marginálisan csapdázott felületnek** nevezzük,  $C$ -t pedig **csapdázott tartománynak**.

Itt felhasználtuk az alábbi definíciót:

**Definíció:** Az  $S$ -re ortogonális null-geodetikusok kifutó családját olyan geodetikusok alkotják, amelyekre  $k^a N_a \geq 0$ , ahol  $k^a$  a geodetikus érintővektora,  $N^a$  pedig  $S$ -nek a  $C$ -ből kifelé mutató normálisa  $\Sigma$ -ban.

**Megjegyzés:** A  $C$  csapdázott tartománynak nem kell sem összefüggőnek, sem kompaktnak lennie. Általában egy  $T$  csapdázott felületnek nem kell külső csapdázott felületnek lennie, mert nem kell, hogy egy 3-dimenziós térfogat határa legyen.

**Állítás:** Az így definiált  $C$  csapdázott tartomány eleget tesz azoknak a tulajdonságoknak, hogy  $J^+(C)$  zárt, hogy  $i^0 \notin J^+(C)$  és, hogy  $\mathring{J}^+(C)$  null-

geodetikus generátorainak expanziója kezdetben nem pozitív.

Belátható, hogy globálisan hiperbolikus téridő  $\Sigma$  Cauchy-felülete bármely zárt  $C \subset \Sigma$  részhalmazának  $J^+(C)$  kauzális jövője zárt. Mivel  $C$  határral rendelkező részsokaság  $\Sigma$ -ban, azért  $i^0$  nem pontja  $C$ -nek. A zártságból következően  $\mathring{J}^+(C) \subset J^+(C)$ . Másrészt,  $\mathring{J}^+(C)$  null-geodetikus generátorai a következő tulajdonságúak kell legyenek: (a) kell, hogy legyen múltbeli végpontjuk  $C$ -n, de ez nem lehet  $\text{int}C$ -ben, vagyis akkor a végpontjuk az  $S$  határon van; (b) az  $S = \mathring{C}$  felületből ortogonálisan kell kilépjenek; (c) és nem lehetnek  $S$  befutó null-geodetikusai. Ha ugyanis ezen tulajdonságok valamelyike nem teljesülne, akkor ezek a null-generátorok belépnének  $I^+(C)$ -be. Tehát  $\mathring{J}^+(C)$  null-geodetikus generátorai  $S = \mathring{C}$ -hez képest ortogonálisan kifutó null-geodetikusok, amelyeknek az expanziója kezdetben  $\theta \leq 0$ .

**12.2.4. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridő, amelyben  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  minden  $k^a$  null-vektorra. Legyen  $\Sigma$  aszimptotikusan lapos Cauchy-felület  $\tilde{V}$ -ban, és legyen  $C \subset \Sigma$  csapdázott tartomány. Ekkor  $C \subset B \cap \Sigma$ .

Elismételhető a **12.2.3. tétel** tétel bizonyítása, ahol most  $T$  szerepét  $C$  veszi át.

**Definíció:** A  $\Sigma$  Cauchy-felület  $C$  csapdázott tartományai uniójának lezártját **teljes csapdázott tartománynak** nevezzük,  $\mathcal{T}$ -vel jelöljük. A teljes csapdázott tartomány  $\mathcal{A} = \mathring{\mathcal{T}}$  határát **látszólagos horizontnak** nevezzük.

**Állítás:** A látszólagos horizont vagy az esemény horizonton belül helyezkedik el, vagy egybeesik vele.

Aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridőben, ha  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  minden  $k^a$  null-vektorra, a **12.2.4. tétel** értelmében fennáll a  $\mathcal{T} \subset B \cap \Sigma$  tartalmazási reláció. Másrészt  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$  miatt az  $\mathcal{A}$  látszólagos horizont is benne van  $B \cap \Sigma$ -ban, azaz vagy a valódi  $H$  esemény horizonton belül van, vagy avval egybeesik.

A következő tétel a látszólagos horizont tulajdonságáról szól.

**12.2.5. tétel:** Ha a  $\Sigma$  Cauchy-felületen a  $\mathcal{T}$  teljes csapdázott tartomány egy határral rendelkező sokaság, akkor az  $\mathcal{A}$  látszólagos horizont olyan külső marginálisan csapdázott felület, amelyen a kifutó null-geodetikusok kongruenciájának az expanziója zérus,  $\theta = 0$ .

Végül a  $H$  esemény-horizont „időbeli” fejlődésével kapcsolatos tétellel ismerkedünk meg. Induljunk ki abból, hogy a  $H$  horizont  $\mathcal{J}^+$  kauzális múltjának a határa. Ezért a **8.1.3. tétel** értelmében  $H$  egy akronális, 3-dimenziós, beágyazott  $C^0$  részsokaság. A **8.1.6. tétel** értelmében  $H$ -t a jövőbe nem kiterjeszthető null-geodetikusok generálják, mert  $H$  egyetlen null-geodetikus generátorának sem lehet végpontja  $\mathcal{J}^+$ -ban.

**Állítás:** Legyen  $\Sigma$  Cauchy-felület  $\tilde{V}$ -ban és  $\mathcal{H} = H \cap \Sigma$ . Amennyiben a  $\mathcal{H} \neq \emptyset$ , akkor  $\mathcal{H}$  egy 2-dimenziós részsokaság  $\Sigma$ -ban.

Ez az állítás képezi az alapját annak a meglepő kapcsolatnak, amely a feketelyukak, a termodinamika és a kvantumfizika között található.

**12.2.6. tétel: A feketelyukakra vonatkozó felületi tétel (Hawking<sup>107</sup> tétele):** Legyen  $(M, g_{ab})$  aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridő, amelyben  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  bármely  $k^a$  null-vektorra. Legyenek  $\Sigma_1$  és  $\Sigma_2$  olyan térszerű Cauchy-felületek a  $\tilde{V}$  globálisan hiperbolikus tartományban, amelyekre  $\Sigma_2 \subset I^+(\Sigma_1)$ . Jelölje  $H$  az esemény-horizontot, azaz a feketelyuk-tartomány határát  $(M, g_{ab})$ -ben. Legyen  $\mathcal{H}_1 = H \cap \Sigma_1$  és  $\mathcal{H}_2 = H \cap \Sigma_2$ . Ekkor  $\mathcal{H}_2$  területe nagyobb vagy egyenlő, mint  $\mathcal{H}_1$  területe.

A bizonyítás azon alapszik, hogy a  $H$  esemény-horizont null-geodetikus generátorai nem összetartóak (az expanziójuk nem negatív), és ezért  $H$ -nak a metszetei az „időben” egymás utáni Cauchy-felületekkel nem csökkenő területűek kell legyenek.

Először belátjuk, hogy  $H$  null-geodetikus generátorainak expanziója mindenütt nem negatív,  $\theta \geq 0$ . Tegyük fel, hogy valamely  $p \in H$  pontban  $\theta < 0$ . Legyen  $\Sigma$  az a Cauchy-felület  $\tilde{V}$ -ban, amelyik átmegy  $p$ -n, és tekintsük a  $\mathcal{H} = \Sigma \cap H$  2-dimenziós felületet. Mivel  $p$ -ben  $\theta < 0$ , ezért  $\mathcal{H}$ -t deformálhatjuk  $\Sigma$ -ban, a  $p$  környezetében kifelé egy olyan  $\mathcal{H}'$  felületbe, amely belemetsz  $J^-(\mathcal{J}^+)$ -ba, és amelyen  $\theta < 0$  mindenütt  $J^-(\mathcal{J}^+)$ -ban. Ez azonban ellentmondásra vezet hasonló érveléssel, mint amivel a **12.2.2. tétel** bizonyításakor éltünk, a következőképpen. Legyen  $K \subset \Sigma$  az a zárt tartomány, amely  $\mathcal{H}$  és  $\mathcal{H}'$  között helyezkedik el, és legyen  $q$  a  $K$  kauzális jövőjének határán, a jövőbeli null-végtelenben fekvő pont, azaz  $q \in \mathcal{J}^+$  és  $q \in \tilde{J}^+(K)$ . Legyen  $\lambda$  a  $\tilde{J}^+(K)$  határának a  $q$  ponton áthaladó null-geodetikus generátora. Ekkor  $\lambda$ -nak  $\mathcal{H}'$ -t ortogonálisan kellene elérnie. Ez azonban lehetetlen, mert  $\mathcal{H}'$ -n  $\theta < 0$ , és ezért ezen a generátoron konjugált pont van, még mielőtt elérné  $q$ -t. A feltevésünk, hogy van  $H$ -nak olyan pontja, amelyben  $\theta < 0$ , ellentmondásra vezetett. Ezért  $\theta \geq 0$  mindenütt  $H$ -n.

Minden  $p \in \mathcal{H}_1$  pont rajta van  $H$ -nak egy jövőbe nem kiterjeszthető  $\gamma$  null-geodetikusán. Mivel  $\Sigma_2$  is Cauchy-felület, metszenie kell  $\gamma$ -t valamilyen  $q \in \mathcal{H}_2$  pontban. Ilyen módon  $\mathcal{H}_1$ -nek  $\mathcal{H}_2$ -be történő természetes leképezését kapjuk. Mivel  $\theta \geq 0$ , azért  $\mathcal{H}_2$  azon darabjának a területe, amely  $\mathcal{H}_1$ -nek a képe, nem lehet kisebb, mint  $\mathcal{H}_1$  területe. Ráadásul a leképezésnek nem kell „-ra” történő leképezésnek lennie, mert pl.  $\Sigma_1$  és  $\Sigma_2$  között új feketelyuk is keletkezhet. Ezért  $\mathcal{H}_2$  területe lehet nagyobb is, mint  $\mathcal{H}_1$  területe.

## 11.6. A töltött Kerr-féle feketelyukak

(Számos további részlet és irodalmi hivatkozás található ennek a fejezetnek a tartalmával kapcsolatban a [1, 2] tankönyvekben.)

### 11.6.1. A töltött Kerr-megoldás

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor egy test teljes gravitációs összeomlást szenved el, és a kozmikus cenzúrára vonatkozó sejtést elfogadva feketelyuk keletkezik. Gömbszimmetrikus esetben a téridő a testen kívüli vákuum-tartományban a Schwarzschild-megoldás, ami sztatikus. Láttuk, hogy a teljes összeomlás során Schwarzschild-féle

<sup>107</sup>Stephen William Hawking, angol fizikus, 1942-2018.

feketelyuk keletkezik. Általában, nem gömbszimmetrikus összeomlás esetén a testen kívül a téridő változhat időben és erősen függhet az összeomlás részleteitől. Amíg pl. gömbszimmetrikus összeomlás esetén nem keletkezik gravitációs sugárzás (az időben változó „gravitációs monopólus” nem kelt sugárzást), addig a nem gömbszimmetrikus összeomlást jelentős energia-kisugárzás kísérheti. Emellett az várható, hogy a keletkezett feketelyuk minden jelenlevő anyagot gyorsan elnyel, és a végállapot vákuumállapot lesz, legfeljebb a feketelyukhoz tartozó elektromágneses mező lehet még jelen. (Bár bináris Röntgen-források esetén állandó anyagáramlás történik a feketelyuk irányába, még ez is csak gyengén perturbálja a feketelyuk szerkezetét.) Ezért abból indulhatunk ki, hogy az összeomlás végállapota sztatikus, elektrovákuumban elhelyezkedő feketelyuk. Elektrovákuumon azt értjük, hogy az elektromágneses mező jelenlététől eltekintve vákuum van.

Az elmondottak értelmében fontos kérdés, hogy elektrovákuumban milyen sztatikus feketelyuk lehetséges. A Maxwell-egyenletek és az Einstein-egyenletek csatolt rendszerének keressük a sztatikus megoldásait, a csatolást részben a metrika biztosítja, másrészt az Einstein-egyenletekben az elektromágneses mező energiainpulzus-tenzora szerepel „forrásként”. A fejezet végén megmutatjuk, hogy a sztatikus megoldásoknak egyetlen családja létezik, ez a **töltött Kerr-megoldások 3-paraméteres családja**. A töltött Kerr-megoldások metrikája és vektorpotenciálja:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2(r^2 + a^2 - \Delta)a \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (11.6.1.)$$

$$A_a = -\frac{er}{\Sigma} [(dt)_a - a \sin^2 \theta (d\phi)_a], \quad (11.6.2.)$$

ahol

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 + e^2 - 2Mr, \quad (11.6.3.)$$

és  $e$ ,  $a$  és  $M$  a megoldásban szereplő 3 paraméter. A töltött Kerr-megoldás speciális esetei:

- Ha  $e = 0$ , akkor  $A_a = 0$  mindenütt, és a vákuum-Kerr-megoldások családját kapjuk.
- Ha  $a = 0$ , akkor az úgynevezett Reissner<sup>108</sup>-Nordström<sup>109</sup>-megoldást kapjuk meg.
- Az  $e = a = 0$  eset a Schwarzschild-megoldásra egyszerűsödik.

<sup>108</sup>Hans Jacob Reissner (Jacob Johannes Reissnerként is ismert), német repülőmérnök és matematikai fizikus, 1874–1967

<sup>109</sup>Gunnar Nordström, finn fizikus, 1881–1923



Minden töltött Kerr-metrika stacionárius és axiálszimmetrikus, a  $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$  és a  $\psi^a = (\partial/\partial \phi)^a$  Killing-vektormezőkkel rendelkezik.

### 11.6.2. Stacionárius, axiálszimmetrikus téridők

Mint korábban már beszéltünk róla, a téridőt stacionáriusnak nevezzük, ha létezik benne  $\xi^a$  időszerű Killing-vektormező, amelynek az orbitái teljesek. **A téridőt axiálszimmetrikusnak nevezzük**, ha létezik benne olyan  $\psi^a$  Killing-vektormező, amelynek integrálgörbéi zárt, térszerű görbék. A téridőt **stacionáriusnak és axiálszimmetrikusnak** nevezzük, ha létezik benne a fenti tulajdonságú  $\xi^a$  és  $\psi^a$  Killing-vektormező, és azokra

$$[\xi, \psi] = 0, \quad (11.6.4.)$$

azaz a Killing-vektormezőkhöz tartozó izometria-transzformációk felcserélhetők. A Killing-vektormezők felcserélhetőségének köszönhetően választhatunk olyan koordinátarendszert, hogy  $(x^0 = t, x^1 = \phi, x^2, x^3)$  és  $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$  és  $\psi^a = (\partial/\partial \phi)^a$ . Egy ilyen koordinátarendszerben a metrika komponensei függetlenek  $t$ -től és  $\phi$ -től,

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu}(x^2, x^3) dx^\mu dx^\nu. \quad (11.6.5.)$$

Ez azt jelenti, hogy az Einstein-egyenletekben 10 darab ismeretlen, 2-változós függvény szerepel. Az alábbiakban azonban látni fogjuk, hogy a meghatározandó függvények száma 3-ra csökkenthető, ha alkalmas koordinátarendszert választunk, és teljesül az alábbi **7.1.1. tétel** (i) feltétele. Lényegi egyszerűsödés következik be, ha teljesülnek a **7.1.1. tétel** feltételei, és ezért az érintőtér azon 2-dimenziós alterei, amelyek a téridő minden pontjában merőlegesek a  $\xi^a$  és  $\psi^a$  Killing-vektorokra, integrálhatóak, vagyis egy 2-dimenziós felület érintőterei.

**7.1.1. tétel:** Legyenek  $\xi^a$  és  $\psi^a$  olyan kommutáló Killing-vektormezők, amelyek a következő tulajdonságúak: (i)  $\xi_{[a}\psi_b\nabla_c\xi_{d]}$  és  $\xi_{[a}\psi_b\nabla_c\psi_{d]}$  a téridőnek legalább egy pontjában eltűnnek, ami be is következik, ha  $\xi^a$  vagy  $\psi^a$  legalább egy pontban zérus; (ii) és  $\xi^a R_a^{[b}\xi^c\psi^{d]} = \psi^a R_a^{[b}\xi^c\psi^{d]} = 0$ . Ekkor a  $\xi^a$ -ra és  $\psi^a$ -ra ortogonális 2-dimenziós síkok integrálhatóak.

A **7.1.1. tétel** feltételeinek számos stacionárius, axiálszimmetrikus téridő eleget tesz. Nevezetesen, ha a téridő aszimptotikusan lapos, akkor léteznie kell „forgástengelynek”, amelyen  $\psi^a = 0$ , úgyhogy a (i) feltétel teljesül. Vákuum-téridő esetén  $R_{ab} = 0$  miatt a (ii) feltétel is teljesül. Az  $e = 0$  esetben tehát a Kerr-metrikák eleget tesznek a **7.1.1. tétel** feltételeinek. A (ii) feltétel akkor is teljesül, ha az anyag  $T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzora olyan ideális folyadéké, amelynek négyes-sebessége  $\xi^a$  és  $\psi^a$  síkjában van, azaz az ideális folyadék kör-körösen áramlik, vagy amikor  $T_{ab}$  stacionárius, axiálszimmetrikus elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzora, mint pl. a töltött Kerr-megoldások esetében.

A **7.1.1. tétel** feltételeinek eleget tevő téridőben a  $\xi^a$ -ra és  $\psi^a$ -ra merőleges felületek valamelyikét bekoordinátázhatjuk az  $(x^2, x^3)$  koordinátákkal, majd ezeket a koordinátákat átemeljük  $\xi^a$  és  $\psi^a$  integrálgörbéi mentén a többi merőleges felületre. Ebben a  $(t, \phi, x^2, x^3)$  koordinátarendszerben a metrika komponensei az alábbi alakot öltik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -V & W & 0 & 0 \\ W & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{32} = g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (11.6.6.)$$

ahol  $V = -g_{00} = -\xi_a \xi^a$ ,  $W = g_{01} = \xi_a \psi^a$ ,  $X = g_{11} = \psi_a \psi^a$  és a nullákból álló  $2 \times 2$ -es blokkok kifejezik, hogy  $\partial/\partial x^2$  és  $\partial/\partial x^3$  ortogonálisak  $\partial/\partial t$ -re és  $\partial/\partial \phi$ -re. A **7.1.1. tétel** segítségével tehát a metrika független komponenseinek számát 6-ra csökkentettük.

A (11.6.6.) metrikájú stacionárius, axiálszimmetrikus téridőben értelmezhetünk **lokálisan nem forgó** megfigyelőket.

**Definíció:** A **lokálisan nem forgó** megfigyelők olyan megfigyelők, akik „nyugalomban vannak” a  $t = \text{áll.}$  hiperfelületekhez képest, azaz amelyeknek az  $u^a$  négyesebessége  $\nabla^a t$ -vel párhuzamos.

**Állítás:** A lokálisan nem forgó megfigyelők impulzusmomentuma zérus,  $L = u^a \psi_a = 0$ .

**Állítás:** A lokálisan nem forgó megfigyelők  $d\phi/dt = -W/X$  koordinátaszögsebességgel keringenek.

**Megjegyzés:** A (11.6.6.) metrika általában egy stacionárius, tengelyszimmetrikus, tengelye körül forgó testen (feketelyukon) kívüli tartományban írja le a téridőt. Ezért  $d\phi/dt$  úgy interpretálható, mint az a szögsebesség, amellyel a forgó test magával ragadja maga körül az inerciarendszereket. Ez a Mach-elv érvényesülésének egy példája.

### 11.6.3. A Kerr-metrikák paramétereinek fizikai jelentése

Amellett, hogy a Kerr-téridő stacionárius és axiálszimmetrikus, a Kerr-téridő aszimptotikusan lapos is: meg lehet mutatni, hogy az  $r \rightarrow \infty$  határesetben a metrika a gömbi koordinátákban felírt Minkowski-metrikához tart. Az algebrai osztályozást illetően a Kerr-metrikák a II-II osztályba tartoznak, kétszeres principális null-vektoraik

$$\begin{aligned} l^a &= \frac{r^2 + a^2}{\Delta} (\partial/\partial t)^a + \frac{a}{\Delta} (\partial/\partial \phi)^a + (\partial/\partial r)^a, \\ n^a &= \frac{r^2 + a^2}{2\Sigma} (\partial/\partial t)^a + \frac{a}{2\Sigma} (\partial/\partial \phi)^a - \frac{\Delta}{2\Sigma} (\partial/\partial r)^a, \end{aligned} \quad (11.6.7.)$$

amelyek itt  $l^a n_a = -1$  szerint vannak normálva.

A Kerr-metrikák 3 paraméterének közvetlen fizikai jelentése van, az alábbi összefüggések alapján:

- Az aszimptotikus tartományban elhelyezkedő bármely  $S$  2-dimenziós, topológiailag gömbfelület esetén

$$\frac{1}{2} \int_S \epsilon_{abcd} F^{cd} = 4\pi e, \quad (11.6.8.)$$

úgyhogy  $e$  a téridő töltésének tekinthető.

- Ugyancsak fennáll, hogy

$$-\frac{1}{8\pi} \int_S \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d = M, \quad (11.6.9.)$$

úgyhogy  $M$  a téridő teljes tömege.

- Végül a

$$\frac{1}{16\pi} \int_S \epsilon_{abcd} \nabla^c \psi^d = Ma \quad (11.6.10.)$$

összefüggés alapján  $Ma = J$  a téridő impulzusmomentumának tekinthető, úgyhogy  $a = J/M$  a téridő egységnyi tömegre vonatkoztatott teljes impulzusmomentuma.

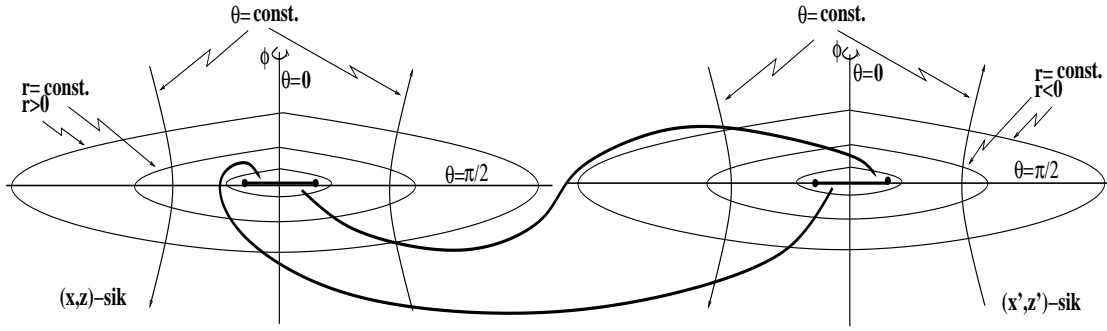
Érvek szólnak amellett, hogy a csillagászatilag érdekes esetekben  $e \ll M$ , úgyhogy az elektromágneses mező szerepe elhanyagolható, és elegendő csak a vákuum-Kerr-megoldásokra szorítkozni. Ezért a továbbiakban csak az  $e = 0$  esettel foglalkozunk. Ekkor a Kerr-megoldás invariáns a  $(t \rightarrow -t, \phi \rightarrow -\phi)$  transzformációval szemben, de - ha nem az  $a = 0$  Schwarzschild-megoldást nézzük, akkor - nem rendelkezik önmagában időtükrözési szimmetriával; ezt is várjuk, mert egy forgó test időtükrözöttje egy ellentétes irányban forgó test.

#### 11.6.4. A Kerr-megoldás szingularitásai

Az  $e = 0$  esetben a szingularitások  $\Sigma = 0$  és  $\Delta = 0$  fennállásakor jelentkeznek.

- *A  $\Sigma = 0$  szingularitás*

Ha  $M \neq 0$ , akkor  $\Sigma = 0$  valódi, görbületi szingularitást jelent, ahol  $R_{abcd}R^{abcd}$  divergál. Ez a szingularitás  $\theta = \pi/2$ -nél, azaz az ekvatoriális síkban,  $r = 0$  esetén jelentkezik. Ha a téridőt olyan sokaságnak tekintenénk, amelyet úgy



44. ábra. A Kerr-téridő kiterjesztése az  $a^2 > M^2$ ,  $\Delta > 0$  esetben. Az  $r = 0$  korong belsejét vastag vonal jelzi, a fekete pontok a korong határát, a szingularitási helyeket jelölik. A  $\theta = 0$  tengely a szimmetriatengely. A vízszintes vonal az ekvatoriális síkot jelzi. A vastag, nyílazott görbe vonalak a korongok megfelelő oldalainak topológiai azonosítását jelölik.

kapunk, hogy  $\mathbb{R}^4$ -ből elhagyjuk az origót és bevezetnénk az  $(r, \theta, \phi)$  gömbi polárkoordinátákat, akkor lennének nem teljes geodetikusok, pl. a  $\sin \theta = 0$  tengelyen, amelyeknek  $r = 0$ -ban végpontjuk van, (ami nem pontja ezen geodetikusoknak) és amelyek mentén a görbület véges. Így kiterjeszthető téridőt kapnánk. Ez arra utal, hogy a használt  $(r, \theta, \phi)$  koordinátákat nem lehet egyszerűen  $\mathbb{R}^4$ -beli gömbi koordinátáknak tekinteni, és ezen az alapon nem lehet a téridő-sokaság topológiáját naívan értelmezni.

A használt  $(t, r, \theta, \phi)$  koordináták tehát nem tekinthetők  $\mathbb{R}^4$ -beli gömbi koordinátáknak, ami azzal kapcsolatos, hogy a Kerr-téridő topológiája nem triviális (ld. [2]).

Abban az esetben, amikor  $a^2 > M^2$  és  $\Delta > 0$ , az  $r = 0$  szingularitás nem egy pontot, hanem egy gyűrűt jelent. Hogy ezt lássuk, térjünk át a  $(\bar{t}, x, y, z)$  úgynevezett Kerr-Schild<sup>110</sup>-koordinátákra,

$$\begin{aligned} x + iy &= (r + ia) \sin \theta e^{i \int [d\phi + (a/\Delta) dr]}, \\ z &= r \cos \theta, \quad \bar{t} = \int [dt + (r^2 + a^2)/\Delta dr] - r. \end{aligned} \quad (11.6.11.)$$

Ezekben a koordinátákban a metrika

$$\begin{aligned} ds^2 &= -d\bar{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &+ \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left[ \frac{r(xdx + ydy) - a(xdy - ydx)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} + d\bar{t} \right]^2, \end{aligned} \quad (11.6.12.)$$

<sup>110</sup> Alfred Schild, német, amerikai fizikus, 1921–1977

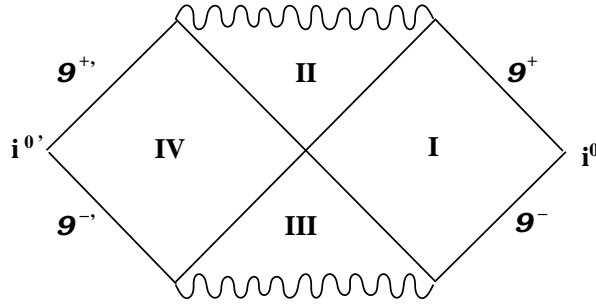
ahol  $r$ -et az előjelétől eltekintve az

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)r^2 - a^2z^2 = 0 \quad (11.6.13.)$$

egyenlet gyöke határozza meg. Ha  $r \neq 0$ , akkor az  $r = \text{áll.}$  felületek az  $(x, y, z)$  hipersíkban azonos fókuszú ellipszoidok, amelyek az  $r = 0$  esetben a  $\mathcal{K} : x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$  koronggá fajulnak el. Ennek a korongnak az  $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$  határa egy gyűrű. Ez a gyűrű az, ahol valódi görbületi szingularitása van a téridőnek, ahol  $R_{abcd}R^{abcd}$  divergál; a  $\mathcal{K}$  korong belsejében azonban nincsen ilyen szingularitás. A  $\mathcal{K}$  korong belsejét felhasználva az  $r(x, y, z)$  függvény analitikusan kiterjeszthető negatív értékekre, így lehet megkapni a Kerr-téridő maximális kiterjesztését. Ez a következőképpen történik (ld. a 44. ábrát). Vegyünk egy másik,  $(x', y', z')$  síkot, amelyet úgy illesztünk az  $(x, y, z)$  síkhoz a  $\mathcal{K}$  korong  $x^2 + y^2 < a^2, z = 0$  belseje mentén, a  $\mathcal{K}' : (x')^2 + (y')^2 \leq a^2, z' = 0$  korong belsejéhez, hogy a  $\mathcal{K}'$  korong „alja” az  $(x' = x, y' = y)$  pontban a  $\mathcal{K}$  belsejéhez az  $(x, y)$  pontban felülről illeszkedjen és fordítva. A két sík korongjai belső részének ilyen topológiai azonosításával a metrikát egy nagyobb sokaságra terjesztettük ki. A metrika az  $(x', y', z')$  síkon ismét (11.6.12.) alakú, de itt  $r < 0$  definíció szerint. Ezen a síkon is aszimptotikusan lapos a metrika, de a teljes tömeg most negatív.

Ezzel a kiterjesztéssel a Kerr-téridőnek 2 tartománya van, az  $M_1$  tartomány, amit megkaphatunk  $\mathbb{R}^4$ -ből úgy, hogy eltávolítjuk belőle az  $S_1 \times \mathbb{R}$  sokaságot, ahol  $S_1$  az  $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$  gyűrűt,  $\mathbb{R}$  az időtengelyt jelenti. Az  $M_1$  tartomány az  $r > 0$  koordinátáknak felel meg. Ezután veszünk egy ugyanilyen topológiájú  $M_2$  tartományt, amit  $r < 0$  koordinátákkal koordinátázunk, és azt összeillesztjük  $M_1$ -gyel úgy, hogy a  $\mathcal{K}_1 \subset M_1$  korongbelső felső oldala legyen azonos a  $\mathcal{K}_2 \subset M_2$  korongbelső alsó oldalával, azaz  $\mathcal{K}_1$  alsó oldala legyen azonos  $\mathcal{K}_2$  felső oldalával. Ekkor az  $M \neq 0, a \neq 0$  esetben a Kerr-metrika sima metrikaként értelmezhető az  $M_1 \cup M_2$  sokaságon úgy, hogy  $R_{abcd}R^{abcd}$  divergál minden nem teljes geodetikus mentén, ami biztosítja, hogy a téridő nem kiterjeszthető. Az  $M_2$  oldalon a gyűrű-singularitáshoz közel, kicsiny  $r$  értékek és  $\theta \approx \pi/2$  esetén a  $(\partial/\partial\phi)^a$  vektor időszerű, és a  $(\bar{t} = \text{áll.}, r = \text{áll.}, \theta = \text{áll.})$  körök zárt időszerű görbék. Meg lehet továbbá mutatni, hogy az egyedüli időszerű és null-geodetikusok, amelyek elérhetik a szingularitást, az  $r > 0$  oldalon az ekvatoriális  $(\theta = \pi/2)$  síkban helyezkednek el.

Ha  $e^2 + a^2 > M^2$ , akkor a  $\Delta = 0$  egyenletnek nincsen megoldása, s ekkor a (11.6.1.) metrika egyetlen szingularitása a valódi fizikai  $\Sigma = 0$  szingularitás. Ebben az esetben a gyűrű-singularitás csupasz szingularitás. Az  $e \neq 0$  töltött Kerr-metrikák nem aszimptotikusan szigorúan előrejelezhető téridőt írnak le, azaz *nem írnak le* feketelyukat. Ezenkívül, ekkor a kauzalitás is sérül a gyűrű-singularitás közelében.



45. ábra. A Schwarzschild-téridő Kruskal-Szekeres-féle kiterjesztésének konform diagramja. Az I és a IV tartomány két különböző aszimptotikusan lapos tartomány, ezért két különböző konform határ jelenik meg.

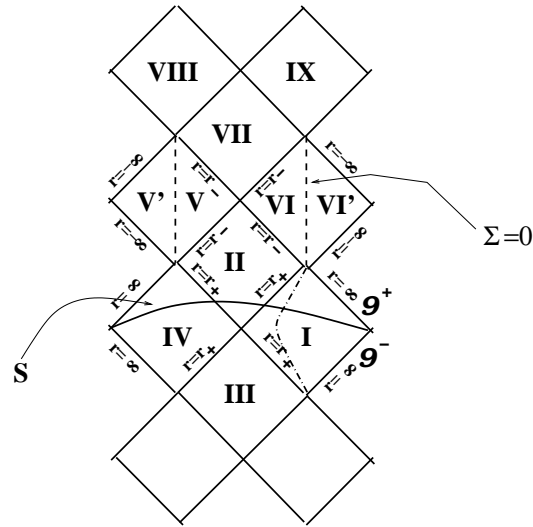
- $A \Delta = 0$  szingularitás

Ha  $e^2 + a^2 \leq M^2$ , akkor  $\Delta = 0$  kielégül az

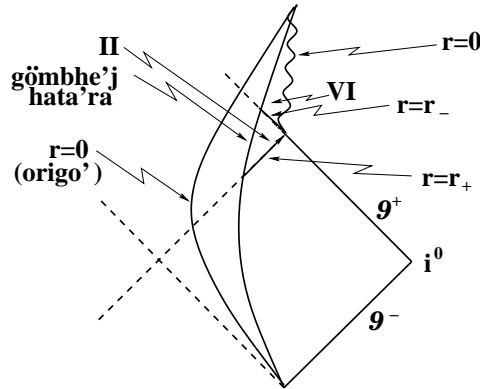
$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - e^2} \quad (11.6.14.)$$

koordinátaértékeknél. Megmutatták, hogy  $a \neq 0$  vagy  $e \neq 0$  esetén az  $r = r_+$  és az  $r = r_-$  helyen a szingularitások ugyanolyan koordináta-szingularitások, mint a Schwarzschild-metrika  $r = 2M$  szingularitása. Ezeken a szingularitásokon keresztül hasonlóan ki tudjuk terjeszteni a téridőt, mint a Schwarzschild-esetben.

Ha a fenti kiterjesztéseket mind összerakjuk, akkor megkapjuk a kiterjesztett töltött Kerr-metrikát. Összehasonlításképpen a 45. ábra mutatja a Kruskal-Szekeres-féle módon kiterjesztett Schwarzschild-téridőt (ld. a 20. ábrát) konform diagramját. A kiterjesztett töltött Kerr-metrika konform diagramját az  $a \neq 0$ ,  $e^2 + a^2 < M^2$  esetben a 46. ábrán láthatjuk. Az I tartományból induló megfigyelő áthaladva az  $r = r_+$  esemény-horizonton, beléphet a II tartományba, a feketelyuk tartományába. Innen azonban nem fog véges sajátidő alatt szingularitásba esni, mint a Schwarzschild-téridő esetén, hanem áthaladhat az  $r = r_-$  „belső horizonton”, ami nem más, mint az ábrán jelölt  $S$  Cauchy-felület Cauchy-horizontja, és így bekerülhet az V vagy a VI tartományba. Innen tovább haladva több minden történhet vele: vagy véges sajátidő múltával befejezi életét a gyűrű-singularitásban, vagy áthaladhat a gyűrű-singularitáson (a gyűrű által határolt korong belsején) és bekerülhet az V' vagy VI' aszimptotikus tartományok valamelyikébe; vagy bekerülhet a VII tartományba, ami egy fehérlyuk tartománya, és onnan tovább a VIII vagy IX aszimptotikusan lapos tartományba. Az utóbbi esetben beléphet az ezen aszimptotikusan lapos tartományokhoz csatlakozó feketelyuk-tartományba, stb.



46. ábra. A kiterjesztett töltött Kerr-metrika konform diagramja az  $a \neq 0$ ,  $e^2 + a^2 < M^2$  esetben. A szaggatott vonal a  $\Sigma = 0$  gyűrű-szingularitást jelzi;  $S$  Cauchy-horizontot jelöl. A pontozott vonal az ergoszféra határát mutatja.



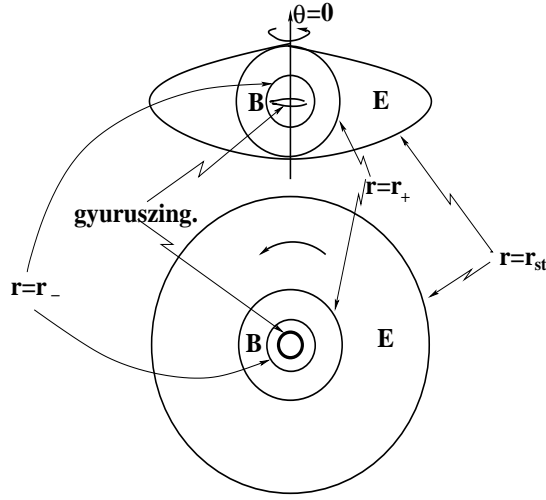
47. ábra. A téridő konform diagramja töltött, porból álló gömbhéj gravitációs összeomlása esetén. A szaggatott vonalak a kiterjesztett Reissner-Nordström-megoldáshoz tartoznak. A hullámvonal a fizikai szingularitást jelzi.

### 11.6.5. A téridő valóságos gravitációs összeomlás esetén

A kérdés ezután az, hogy valamely test gravitációs összeomlása ténylegesen milyen kapcsolatban van a kiterjesztett töltött Kerr-téridővel, annak mely tartományai keletkeznek a valóságos fizikai folyamat során, ami talán „nem egzotikus” kezdeti adatoknak felel meg valamely  $\mathbb{R}^3$  topológiájú  $S$  felületen. A nem gömbszimmetrikus test gravitációs összeomlása bonyolult dinamikai folyamat, amelynek csak a végén alakulhat ki stacionárius geometria. Magát a folyamatot azonban, amelynek során egy Kerr-feketelyuk keletkezik, általában nem tudjuk nyomon követni. Így azt sem tudjuk meghatározni, hogyan alakul a téridő szerkezete a feketelyukon belül.

Arra nézve, hogy milyen lehet a téridő geometriája egy nem gömbszimmetrikus összeomlás esetén, a töltött gömbszimmetrikus test összeomlásának vizsgálata alapján kaphatunk intuíciót. Töltött ( $e \neq 0$ ) gömbszimmetrikus test összeomlásakor az anyagon kívül a téridő geometriáját a Reissner-Nordström-megoldás írja le. Ez abból következik, hogy a Birkhoff-tétel általánosítható: meg lehet mutatni, hogy a Reissner-Nordström megoldás az egyetlen gömbszimmetrikus elektrovákuum-megoldás. Egy egyszerű rendszer, a porból álló gömbhéj összeomlásának dinamikai folyamata explicit módon meghatározható. Ebben az esetben a téridő a gömbhéjon belül lapos; a gömbhéj belseje teljesen „elrejt” a 46. ábra III és IV tartományát. A II és az V tartományt részben vagy teljesen szintén „eltakarja” a gömbhéj lapos belseje, egyúttal mindig teljesen elrejtve az V tartományban az  $r = 0$  szingularitást. Az  $M$  teljes tömeggel,  $\mathcal{M}$  teljes nyugalmi tömeggel és az  $e$  teljes töltéssel jellemzett megoldás konform diagramját az  $M > |\mathcal{M}| > e$  esetben a 47. ábra mutatja. Az ábráról látjuk, hogy a héj átmetszi az  $r = r_-$  felületet, ami egyúttal az I tartomány Cauchy-horizontja. A téridő kiterjeszthető az  $r = r_-$  felületen keresztül, de ez a kiterjesztés nem határozható meg az Einstein-egyenletekből, mert a Cauchy-horizonton túli tartomány kívül van a kezdeti Cauchy-felület függőségi tartományán. Ha azonban feltesszük a gömbszimmetriát, akkor a kiterjesztés a Reissner-Nordström-megoldás által egyértelműen meghatározható. Végül az adódik, hogy a gömbhéj „belezuhan” az  $r = 0$  szingularitásba, ami a gömbhéjon kívül keletkezik a VI tartományban. Így olyan példát kaptunk a gömbszimmetrikus összeomlásra, amely lényegesen különbözik a 22. ábrán mutatottól. Meg lehet azonban mutatni, hogy a 47. ábrán a Cauchy-horizont instabil: az Einstein-Maxwell-egyenletekhez az I tartomány valamely Cauchy-felületén megadott kezdeti adatok kicsiny (lineáris) perturbációja esetén az  $r = r_-$  felület szingularitási helyé válik. ennek az az oka, hogy az  $r = r_-$  felületre „érkező” megfigyelő az egész I tartományt látja. Ezért az I tartomány Cauchy-felületén megjelenő valamely véges frekvenciájú perturbációt végtelen frekvenciájúnak „látja”, és ez a perturbációt az  $r = r_-$  felületen szingulárisá teszi. Jó okunk van tehát azt hinni, hogy ha a héj nem tökéletesen gömbszimmetrikus, akkor az I tartomány Cauchy-horizontja valódi fizikai szingularitássá válik, ezáltal olyan szingularitást képezve, amely benne található a feketelyukban. Azt gondoljuk, hogy minden Kerr-feketelyukra vezető összeomlás





48. ábra. A Kerr-feketelyukat körülvevő ergoszféra sematikus ábrája, felül oldalnézetben, alul felülnézetben;  $B$  a feketelyuk,  $E$  az ergoszféra.

esetén hasonló helyzet áll elő. Ezért a fizikailag realiztikus összeomlás esetén a téridő sokkal inkább a 22. ábrán mutatott gömbszimmetrikus esethez lesz hasonló, mintsem a Kerr-megoldásnak megfelelő, a 46. ábrán mutatott téridőhöz. (További részleteket és irodalmi hivatkozásokat ld. [1]-ben és [2]-ben.)

#### 11.6.6. Az ergoszféra

A töltött Kerr-megoldás másik jellemzője  $a \neq 0$  esetén az ergoszféra, amely a feketelyukon kívül, az I tartományban helyezkedik el, határát a 46. ábrán pontozott vonal jelzi. A feketelyukat körülvevő ergoszférát a 48. ábra mutatja. A  $\xi^a$  Killing-vektormező normája,

$$\xi^a \xi_a = g_{tt} = \frac{a^2 \sin^2 \theta - \Delta}{\Sigma} \quad (11.6.15.)$$

az I tartományban nem mindenütt negatív, azaz  $\xi^a$  nem mindenütt időszerű. Létezik egy tartomány,

$$r_+ < r < r_{st} = M + \sqrt{M^2 - e^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (11.6.16.)$$

amelyben  $\xi^a \xi_a < 0$ , azaz  $\xi^a$  térszerű. Ez a tartomány az **ergoszféra**, amely a feketelyukon kívül helyezkedik el. Az  $r = r_{st}$  felületet stacionaritási határfelületnek is nevezik. Ez ugyanis annak a tartománynak az  $r = r_{st}$  határa, ameddig egy részecske utazhat a  $\xi^a$  Killing-vektor integrálgörbéjén, mint időszerű görbén, és így a  $\mathcal{J}^+$  végtelenhez képest nyugalomban maradhat. A stacionaritási határfelület időszerű felület, kivéve a szimmetriatengelyen ( $\theta = 0$ ) levő pontjait, ahol null-felület

és csatlakozik az  $r = r_+$  felülethez. Az  $r = r_{st}$  felület, ahol időszerű, kifelé és befelé is átjárható a részecskék számára, úgyhogy nem képez esemény-horizontot  $\mathcal{J}^+$  számára.

Mint az a metrika (11.6.1.) alakjából kiolvasható, valamely időszerű görbéhez tartozó  $u^a$  négyessebességre a

$$u_a u^a = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu < 0 \quad (11.6.17.)$$

egyenlőtlenség az ergoszférában úgy teljesül, hogy valamennyi tag explicit módon pozitív kivéve a  $2g_{t\phi}u^t u^\phi = 2g_{t\phi}(dt/d\tau)(d\phi/d\tau)$  tagot, ahol  $\tau$  a sajátidő az időszerű görbe mentén. Egyedül ez az utóbbi tag lehet negatív és elegendően nagy abszolút értékű, hogy az  $u_a u^a < 0$  egyenlőtlenség teljesüljön. Mivel az ergoszférában  $g_{t\phi} < 0$ , továbbá jövőirányú időszerű görbén  $dt/d\tau > 0$ , azért  $d\phi/d\tau > 0$  kell legyen. Ez azt jelenti, hogy az ergoszférában mozgó minden próba-részecskének a feketelyuk forgásirányával egyező irányban kell keringenie. Ez magyarázza, hogy miért nem sztatikus az ergoszféra. A feketelyuk mintegy magával sodorja az ergoszférát (és az abban mozgó részecskét). Ez szép példája annak, amikor a Mach-elv érvényesülése az általános relativitáselméletben közvetlen következménnyel jár.

A Kerr-téridőben, a feketelyukon kívül a sztatikus megfigyelők szerepét a lokálisan nem forgó megfigyelők veszik át, amelyek négyessebessége

$$u^a = -\nabla^a t / \sqrt{-(\nabla_a t)(\nabla^a t)}. \quad (11.6.18.)$$

Ezek

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{W}{X} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{a(r^2 + a^2 - \Delta)}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta} \quad (11.6.19.)$$

szögsebességgel keringenek a feketelyuk körül. Ha közeledünk a feketelyuk  $r = r_+$  esemény-horizontjához, akkor  $\Delta \rightarrow 0$  és a keringés szögsebessége az

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (11.6.20.)$$

határértékhez tart. Meg lehet mutatni, hogy az esemény-horizont null-generátorainak érintővektora nem  $(\partial/\partial t)^a$ , hanem

$$\chi^a = (\partial/\partial t)^a + \Omega_H (\partial/\partial \phi)^a. \quad (11.6.21.)$$

A feketelyuk esemény-horizontja  $\Omega_H$  szögsebességgel forog a feketelyuk szimmetria-tengelye körül.

### 11.6.7. Geodetikusok a Kerr-téridőben

Vizsgáljuk az  $e = 0$  esetben az időszerű és null-geodetikusokat. Legyen a geodetikusok  $\tau$  affin paraméterrel paraméterezett egyenlete  $\{x^\mu(\tau)\} = (t(\tau), \phi(\tau), r(\tau), \theta(\tau))$ , a geodetikusokon a négyes-sebesség  $u^a = (\dot{t}, \dot{\phi}, \dot{r}, \dot{\theta})$ , és

$$g_{ab}u^a u^b = -\kappa, \quad (11.6.22.)$$

ahol  $\kappa = +1$  időszerű geodetikusok,  $\kappa = 0$  null-geodetikusok esetén. A stacionárius és az axiális Killing-vektormezőkhöz most is megmaradó mennyiségek tartoznak a geodetikusok mentén: az

$$\begin{aligned} E &= -\xi_a u^a = -g_{ab}\xi^a u^b = -g_{tt}u^t - g_{t\phi}u^\phi = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{t} + \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{\phi} \\ &= \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) \dot{t} + \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (11.6.23.)$$

egységnyi nyugalmi tömegre jutó teljes energia, és az

$$\begin{aligned} L &= \psi_a u^a = g_{ab}\psi^a u^b = g_{\phi\phi}\dot{\phi} + g_{\phi t}\dot{t} \\ &= -\frac{2Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{t} + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta \dot{\phi} \end{aligned} \quad (11.6.24.)$$

egységnyi nyugalmi tömegre jutó impulzuszóránt. Ezek az egyenletek  $\dot{t}$ -t és  $\dot{\phi}$ -t lineárisan tartalmazzák, s azok az egyenletekből könnyen kifejezhetők, mint  $E$  és  $L$  függvényei. Helyettesítsük be ezeket a kifejezéseket a négyessebesség nagyságának  $g_{ab}u^a u^b$  explicit alakjába, hogy megkapjuk a geodetikusok egyenletét. A  $\theta = \pi/2$  ekvatoriális síkban elhelyezkedő geodetikusok esetén

$$\begin{aligned} g_{ab}u^a u^b &= g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + g_{rr}\dot{r}^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{4Ma}{r}\dot{t}\dot{\phi} + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2}{r^2}\dot{\phi}^2 + \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 = -\kappa \end{aligned} \quad (11.6.25.)$$

adódik, ahonnan a fenti behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(E, L, r) = 0, \quad (11.6.26.)$$

ahol

$$V(E, L, r) = -\kappa \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} + \frac{1}{2}(\kappa - E^2) \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{M}{r^3}(L - aE)^2. \quad (11.6.27.)$$

Most is, akárcsak a Schwarzschild-téridő esetében, az ekvatoriális síkban fekvő geodetikusok meghatározása egyenértékű egy  $V$  effektív potenciálban mozgó részecske egy-dimenziós mozgásának a meghatározásával. Az effektív potenciál első és második tagja megegyezik a Schwarzschild-eset (7.3.85.) effektív potenciáljának első és második tagjával (newtoni gravitációs potenciál és a keringés miatti „centrifugális” potenciál), ugyanakkor a 3. és a 4. tag nem triviális módon függ a Kerr-esetben az  $E$  és  $L$  megmaradó mennyiségektől. Így meghatározhatjuk a szabadon eső próbatestek és fénysugarak világvonalát, ill. „térbeli” trajektóriáját. A körpályákat az  $\dot{r} = 0$ -nak megfelelő  $V = 0$  és  $dV/dr = 0$  egyenletek egyidejű megoldása szolgáltatja. Érdeemes megjegyezni, hogy a Kerr-feketelyuk körüli körpályákon a kötési energia sokkal nagyobb, mint a Schwarzschild-esetben. Pl. az  $a = M$  paraméterű Kerr-feketelyuk esetében a legbelső stabil,  $L > 0$ -val jellemzett körpályán  $E = 1/\sqrt{3}$ . Ha tehát egy próbarészecske spirális pályán belesimul ebbe a körpályába, miközben gravitációs sugárzás révén energiát veszít, akkor a kisugárzott energia a részecske nyugalmi tömegének  $1 - (1/\sqrt{3}) = 0,42$  hányadát teszi ki, a Schwarzschild-esetben 0,06-os gravitációsan kisugárzott energiahányaddal szemben.

A nem ekvatoriális síkban elhelyezkedő geodetikusok meghatározásához az  $E$  és  $L$  első integrálok ismerete nem elegendő. Egy lehetőség, hogy a geodetikusok  $u^a \nabla_a u^b = 0$  egyenletét kell megoldani, ami az  $r(\tau)$ ,  $\theta(\tau)$  függvényekre közönséges, másodrendű, csatolt differenciálegyenlet-rendszer megoldását igényli. Ez megkerülhető, ha felhasználjuk, hogy a Kerr-metrika rendelkezik egy Killing-tenzorral is,

$$K_{ab} = 2\Sigma l_{(a} n_{b)} + r^2 g_{ab}, \quad (11.6.28.)$$

és a hozzá tartozó, további

$$C = K_{ab} u^a u^b \quad (11.6.29.)$$

megmaradó mennyiséggel.

### 11.6.8. Fizikai mezők Kerr-háttéren

A Klein-Gordon-mező, mint próbamező hullámegyenletének a megoldása Kerr-háttéren lényegesen leegyszerűsödik a stacionárius és az axiális Killing-vektormezőknek köszönhetően. Utóbbiak lehetővé teszik, hogy a skalármezőt a  $\phi$  változóban Fourier-sorba, a  $t$  változóban Fourier-integrálba fejtsük. Ekkor a Klein-Gordon-egyenlet csak az  $r$  és  $\theta$  tekintetében marad parciális differenciálegyenlet. Utóbbi azonban a változók szeparálásával megoldható, azaz lényegében visszavezethető közönséges differenciálegyenletek rendszerének megoldására.

Még ennél is lényegesebb egyszerűsödés történik, ha a Maxwell- és a linearizált Einstein-egyenleteket akarjuk megoldani Kerr-háttéren.

### 11.6.9. A Kerr-feketelyukak unicitása

A vákuum-Kerr-feketelyukakról ( $e = 0$ ,  $a \neq 0$ ), –mint láttuk, – elég sokat tudunk. Ezek 2-paraméteres családot alkotnak: az Einstein-egyenletek Kerr-megoldásait az  $E$  teljes energiájuk és az  $L$  teljes impulzusmomentumuk kimerítően jellemzik. Mivel ezek csak 2 paramétértől függő megoldások, azt várnánk, hogy még számos más stacionárius vákuum-feketelyukat leíró megoldása van az Einstein-egyenleteknek. Ezt azért gondolhatnánk, mert egy stacionárius testen kívül a gravitációs mezőt a multipólmomentumainak végtelen sorozatával lehet jellemezni. Miért kellene, hogy a stacionárius feketelyuk összes magasabb rendű multipólmomentuma mindig csak a teljes energián és a teljes impulzusmomentumon keresztül, unikális módon jellemezze a feketelyukat? Bármennyire is meglepő, ez így van. Az 1967 és 1975 közötti közel egy évtized alatt Israelnek<sup>111</sup>, Carternek<sup>112</sup>, Hawkingnak és Robinsonnak<sup>113</sup> tételek sorával sikerült gyakorlatilag teljes bizonyítást adni arra, hogy a Kerr-feketelyukak az egyedüli stacionárius vákuum-feketelyukak. Tehát, ha helytálló a kozmikus cenzúra feltevése, és a gravitációs összeomlást követően a téridő végül stacionárius vákuum-állapotra vezet, akkor az összeomlások végterméke mindig Kerr-féle feketelyuk kell legyen. Másképpen fogalmazva, két olyan test gravitációs összeomlása, amelyek alakjukban, anyag-összetételükben, szerkezetükben különböznek, azonos, fizikailag megkülönböztethetetlen végállapotot fog eredményezni, amennyiben a két végállapot teljes energiája és teljes impulzusmomentuma megegyezik. Később az fentebb említett tételeket általánosították (Carter, Israel, Mazur<sup>114</sup>, Bunting<sup>115</sup>, Bekenstein<sup>116</sup>, Hartle<sup>117</sup>, Teitelboim<sup>118</sup>, Wald<sup>119</sup>) az elektrovákuumba ágyazott feketelyukak (töltött Kerr-feketelyukak) esetére. (A bizonyítás vázát és a szakirodalmi hivatkozásokat ld. [1]-ben.)

## 11.7. Energiakinyerés feketelyukból

### 11.7.1. A Penrose-mechanizmus

A feketelyukakból sem részecske, sem fény nem tud kilépni, ezért nagy meglepetés volt, amikor Penrose 1969-ben felismerte, hogy mégis lehet energiát kinyerni olyan feketelyukakból, amelyeknek van ergoszférajuk. A munka jelentésű görög *ergon*

---

<sup>111</sup>Werner Israel, kanadai fizikus, 1931-

<sup>112</sup>Brandon Carter, ausztrál fizikus, 1942-

<sup>113</sup>Ivor Robinson, amerikai fizikus, 1923-

<sup>114</sup>Pawel O. Mazur, lengyel, amerikai fizikus

<sup>115</sup>G.Bunting

<sup>116</sup>Jacob David Bekenstein, mexikói, izraeli, amerikai fizikus

<sup>117</sup>James Burkett Hartle, amerikai fizikus, 1939-

<sup>118</sup>Claudio Bunster Weitzman (2005-ig a neve Claudio Teitelboim Weitzman volt), csilei fizikus, 1947-

<sup>119</sup>Robert M. Wald, amerikai fizikus, 1947-

szóból (Ruffini<sup>120</sup> és Wheeler által) leszarmaztatott ergoszféra elnevezés is erre a lehetőségre utal. Emlékeztetőül: láttuk, hogy az ergoszféra a forgó feketelyukat körülölelő, a forgástengelyre merőlegesen kiszélesedő tartomány, amelyben a forgó feketelyuk „magával sodorja” a téridőt. Az eseményhorizonton a szögsebesség  $\Omega_H$ , az ergoszféra külső határán pedig zérus. Az aszimptotikusan távoli tartományban időszerű  $\xi^a$  Killing-vektormező az ergoszférában térszerűvé válik. Vizsgáljunk egy  $u^a$  négyessebességgel, azaz  $p^a = mu^a$  négyesimpulzussal mozgó próbatestet. Ennek az  $E = -p_a \xi^a$  energiája az aszimptotikusan lapos tartományban pozitív, azonban a részecske energiája negatívvá válhat, ha belép az ergoszférába. A **Penrose-féle energiakinyerési mechanizmus** lényege, hogy ha az ergoszférában negatív teljes energiájú részecskét a feketelyuk elnyeli, akkor energiát nyertünk ki a feketelyukból.

A folyamatot a következőképpen képzelhetjük el. Hajítsunk el távolról egy próbatestet a feketelyuk felé. A szabadon eső részecske négyesimpulzusát jelölje  $p_0^a$ , a részecske  $E_0 = -p_0^a \xi_a$  energiája a mozgása során állandó marad. Tegyük fel, hogy a részecske belép az ergoszférába és pl. egy időzített robbantószerkezettel elérjük, hogy amikor a részecske bejutott az ergoszférába, akkor 2 darabra szakadjon. Ha a fragmensek négyesimpulzusa  $p_1^a$  és  $p_2^a$ , akkor a négyesimpulzus lokális megmaradása miatt  $p_0^a = p_1^a + p_2^a$ . Kontraháljuk ezt az egyenletet a  $\xi^a$  Killing-vektorral,

$$-p_0^a \xi_a = -p_1^a \xi_a - p_2^a \xi_a, \quad (11.7.1.)$$

amiből

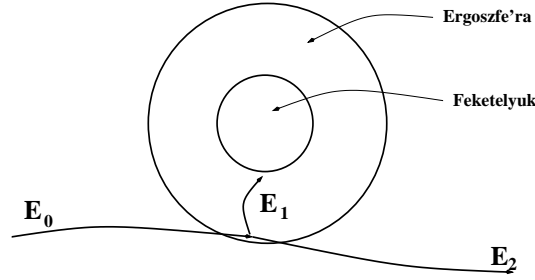
$$E_0 = E_1 + E_2 \quad (11.7.2.)$$

adódik. Az ergoszférában azonban megrendezhetjük úgy a „robbantást”, hogy  $E_1 < 0$  legyen. Ekkor az 1. fragmens beesik a feketelyukba, a 2. fragmens pedig, ugyancsak szabadon esve, visszatér az aszimptotikusan távoli tartományba, ahol az energiája nagyobb lesz, mint a kezdeti  $E_0$  energia volt. Az  $M > 0$  tömegű,  $a \neq 0$  Kerr-feketelyuk esetében explicit módon igazolni lehet, hogy a fragmentációs folyamat megvalósítható úgy, hogy a 2. fragmens visszatérjen az aszimptotikusan távoli tartományba, a negatív energiás fragmens pedig belezuhanjon a feketelyukba. Ekkor a végtelenben a kezdetinél nagyobb  $E_0 + |E_1|$  energia fog rendelkezésre állni, míg a feketelyuk teljes tömegének  $M - |E_1|$  értékre kellett csökkennie. Tehát  $|E_1|$  energiát nyertünk ki a feketelyukból.

Jogos kérdés ezután, hogy maximálisan mennyi energiát nyerhetünk ki ilyen módon a feketelyukból. Az energiakinyerési mechanizmus önkorlátozó. A negatív energiás fragmensnek ugyanis negatív (a feketelyukéval ellentétes irányú) impulzusmomentuma is van. Így a feketelyuk impulzusmomentuma csökken az energiakinyerési folyamat során, és előbb válik zérussá, mintsem a feketelyuk tömege zérusra csökkenne. Márpedig, amikor a feketelyuk impulzusmomentuma zérussá válik, akkor megszűnik az ergoszféra, és ezzel az energiakinyerés lehetősége.

---

<sup>120</sup>Remo Ruffini, olasz fizikus, 1942- .



49. ábra. A Penrose-mechanizmus sematikus ábrája, a nyílazott vastag folytonos vonalak a bejövő  $E_0$ , a Kerr-feketelyukban elnyelődő  $E_1$  és a végtelenbe eltávozó  $E_2$  energiájú részecskék pályáit szemlélteti az ekvatoriális síkban.

Abból indulunk ki, hogy a  $\chi^a$  Killing-vektor a horizonton jövőirányú null-vektor,  $g_{ab}\chi^a\chi^b = 0$  és  $\chi^t = 1 > 0$ . Bármely szabadon eső részecske  $p^a$  négyesimpulzusa jövőirányú időszerű vektor, úgyhogy a feketelyukba beeső bármely részecske esetén (beleértve a negatív  $E < 0$  energiájú beeső részecskét is)  $p^a\chi_a < 0$ ,  $-[p^a\chi_a = -p^0\chi^0 + p^1\chi^1 = -(p^0 \pm p^1)\chi^0 < 0$ , mert  $p^0 > |p^1|$  és  $\chi^0 = |\chi^1|$ ], azaz

$$0 > p^a\chi_a = p^a(\xi_a + \Omega_H\psi_a) = -E + \Omega_H L. \quad (11.7.3.)$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$L < \frac{E}{\Omega_H}. \quad (11.7.4.)$$

Ebből következik, hogy a feketelyukba belépő negatív energiájú részecske impulzusmomentuma negatív.

Miután a feketelyuk elnyeli a negatív energiájú részecskét, a tömege és az impulzusmomentuma megváltozik rendre

$$\delta M = E, \quad \delta J = L < \frac{\delta M}{\Omega_H} \quad (11.7.5.)$$

értékkel. Ha bevezetjük az

$$\begin{aligned} M_{irr} &= + \left( \frac{1}{2} [M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2}] \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{1}{2} M [M + (M^2 - a^2)^{1/2}] \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{2} M r_+ \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} (r_+^2 + a^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (11.7.6.)$$

**irreducibilis tömeget**, akkor a  $\delta J$  impulzusmomentum-változásra vonatkozó egyenlőtlenség

$$\delta M_{irr} > 0 \quad (11.7.7.)$$

alakba írható át. Az irreducibilis tömeg (11.7.6.) által adott  $M_{irr}(E, J)$  függvényét invertálva a teljes tömeg tekintetében, a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$M^2 = M_{irr}^2 + \frac{J^2}{4M_{irr}^2} \geq M_{irr}^2. \quad (11.7.8.)$$

Innen látjuk, hogy a teljes tömeg nem lehet kisebb, mint a kezdeti irreducibilis tömeg, az irreducibilis tömeg pedig nő a Penrose-mechanizmus során. Ha  $(M_0, J_0)$  paraméterekkel jellemzett Kerr-féle feketelyukkal indulunk, és feltesszük, hogy meg tudjuk valósítani az  $L = E/\Omega_H$  egyenlőséggel együtt azt is, hogy  $M_0 - M_{irr}(M_0, J_0)$  legyen a kinyert energia, akkor a feketelyuk impulzusmomentuma zérussá válik. A (11.7.4.) egyenlőtlenségben tetszőlegesen megközelíthetjük az egyenlőséget, úgyhogy  $M_0 - M_{irr}$  a feketelyukból maximálisan kinyerhető energia. Másrészt a (11.7.6.) kifejezésből látszik, hogy a feketelyuk impulzusmomentumának van egy maximális lehetséges értéke,  $J_0 = M_0^2$ . *Érdekes megjegyezni, hogy a maximális impulzusmomentumú feketelyukak ugyanolyan Regge-trajektórián helyezkednek el, mint az „elemi” részecskék a  $(J, M^2)$  diagramon (saját megjegyzés).* A maximálisan forgó Kerr-feketelyukból maximálisan kinyerhető energia  $M_0 - M_{irr}(M_0, M_0^2) = [1 - (1/\sqrt{2})]M_0 = 0,29M_0$ , vagyis a teljes energiájának 29 %-a.

Fentebb a Penrose-folyamat példáján, a (11.7.8.) egyenlőtlenség alapján állapítottuk meg, hogy mekkora a feketelyukból maximálisan kinyerhető energia. Ez a felső határ azonban univerzális (nem csak a Penrose-folyamat esetén érvényes). A feketelyukból kinyerhető energia felső korlátjának univerzális érvényessége, azaz a felületi tétel (a **12.2.6. tétel**) következménye.

A Kerr-feketelyuk horizontjának a területe (felhasználva, hogy  $\Delta_{r=r_+} = 0$ ):

$$\begin{aligned}
A &= \int_{r=r_+} \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} d\theta d\phi \\
&= \int_{r=r_+} \sqrt{\Sigma \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}} \sin \theta d\theta d\phi \\
&= \int_{r=r_+} (r_+^2 + a^2) \sin \theta d\theta d\phi \\
&= 4\pi(r_+^2 + a^2) \\
&= 16\pi M_{irr}^2.
\end{aligned} \tag{11.7.9}$$

A felületi tételből tehát teljesen általánosan, mindenféle folyamatra érvényesen következik, hogy az irreducibilis tömeg nem csökkenhet. A felületi tétel általános, absztrakt megfontolásokon alapul, a (11.7.8.) egyenlőtlenség pedig a Kerr-feketelyukkal kapcsolatos speciális folyamatban érvényes. A kettő együtt közvetett módon a kozmikus cenzúrára vonatkozó sejtés helyességét igazolja, amelyet érvelésünkben akkor használtunk fel, amikor feltettük, hogy a feketelyuk a beeső negatív energiájú részecske elnyelése után továbbra is feketelyuk marad, bár megváltozott tömeggel és impulzusmomentummal, és nem alakul át csupasz szingularitássá.

### 11.7.2. Gravitációs sugárzás feketelyukak ütközésekor

A felületi tétel alapján felső korlát adható arra, hogy két feketelyuk ütközésekor mekkora energia távozhat gravitációs sugárzással. Tegyük fel, hogy a kezdeti adatok két, jól elkülönült Schwarzschild-feketelyukat adnak meg, amelyek kezdetben nyugalomban vannak és tömegük  $M_1$  és  $M_2$ . (Meg lehet mutatni, hogy lehetséges a kezdeti adatok ilyen megválasztása.) A gravitációs vonzásból adódó várakozásunk az, hogy



a téridő dinamikai fejlődése azt írja le, hogy a két feketelyuk egymás felé kezd zuhanni, majd összeolvad, és végül a rendszer olyan sztatikus végállapotot vesz fel, ami egyetlen,  $M$  tömegű Schwarzschild-feketelyuknak felel meg. (Felhasználtuk a feketelyukak megmaradására és összeolvadásának lehetőségére vonatkozó **12.2.1. tételt**.) Ebben a folyamatban a teljes kisugárzott energia

$$E_{rad} = M_1 + M_2 - M. \quad (11.7.10.)$$

A kezdeti Cauchy-felületen a feketelyukak teljes felülete ( $\mathcal{H}_1$  és  $\mathcal{H}_2$  felülete rendre  $A_1$  és  $A_2$ ):

$$A_i = A_1 + A_2 = 16\pi(M_1^2 + M_2^2). \quad (11.7.11.)$$

A végállapotban a feketelyuk felülete

$$A_f = 16\pi M^2, \quad (11.7.12.)$$

amelyre a felületi tétel értelmében teljesül az

$$A_f = 16\pi M^2 \geq A_i = 16\pi(M_1^2 + M_2^2) \quad (11.7.13.)$$

egyenlőtlenség, ahonnan

$$M \geq \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (11.7.14.)$$

adódik, úgyhogy

$$E_{rad} \leq M_1 + M_2 - \sqrt{M_1^2 + M_2^2}. \quad (11.7.15.)$$

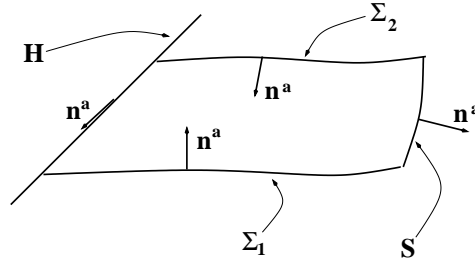
Ha  $M_1 = M_2$ , azaz ha két azonos tömegű Schwarzschild-feketelyuk olvad egybe, akkor maximálisan a feketelyukak  $M_1 = M_2$  tömegének  $[1 - (1/\sqrt{2})]$  hányada, azaz 29 %-a távozhat gravitációs sugárzással a folyamat során.

### 11.7.3. Felragyogó szóródás

A Penrose-féle módszer inkább gondolkísérlet, mint sem praktikus módszer arra, hogy energiát vonjunk ki feketelyukból. Egy könnyebben megvalósítható módszer a Penrose-féléhez hasonló, hullámokat felhasználó, Misner, Zeldovics<sup>121</sup> és Starobinsky<sup>122</sup> által javasolt eljárás, a hullámok úgynevezett **felragyogó szóródása** (superradiant scattering). Essen be a feketelyukra skaláris (Klein-Gordon-féle), elektromágneses vagy gravitációs hullám. Ekkor a hullám egy része, nevezzük (a feketelyuk felszínén) „áthaladó hullámnak”, elnyelődik a feketelyukban, a hullám másik

<sup>121</sup>Jakov Boriszovics Zeldovics, belorusz-szovjet fizikus, 1914-1987.

<sup>122</sup>Alexej Alexandrovics Starobinsky, szovjet-orosz asztrofizikus és kozmológus, 1948- .



50. ábra. A  $K$  tartomány és határának ábrája. Erre a tartományra integráljuk az energiaáramsűrűség divergenciáját. Az ábra mutatja a Gauss-tétel alkalmazásához szükséges  $n^a$  felületi normálisokat. A tartomány határát a  $H$  horizont (normálisa null-vektor), a  $\Sigma_1$  és  $\Sigma_2$  térszerű hiperfelületek (befelé irányuló időszerű normálissal) és a „végtelen sugarú”  $S$  gömbfelület (kifelé irányuló, térszerű normálissal) képezik. Itt  $\Sigma_2$ -t a  $\Sigma_1$ -ből a  $\xi^a$  Killing-vektormező által generált,  $\Delta t$ -vel történő időbeli eltolással kapjuk.

része visszaverődik a feketelyuk felszínéről, és eltávozik a végtelenbe. Normális esetben az áthaladó hullám pozitív energiát hordoz, és a visszavert hullám energiája kisebb, mint a beeső hullámé. Tegyük fel, hogy a hullám

$$\Phi = \Re \left( \Phi_0(r, \theta) e^{-i\omega t} e^{im\phi} \right) \quad (11.7.16.)$$

alakú. Ekkor az olyan  $\omega$  frekvenciájú hullám esetén, amelynek a frekvenciája eleendőően kicsi, azaz amelyre

$$0 < \omega < m\Omega_H, \quad (11.7.17.)$$

az áthaladó hullám energiája negatív. Az ilyen hullám tehát negatív energiát visz be a feketelyukba, és ekkor a visszavert hullám energiája nagyobb, mint az eredetileg beeső hullámé. A feketelyukról visszavert hullám „felragyog” a bejövő hullámhoz képest. Ez egy módszer, amivel „látni lehetne”, azaz észlelni lehetne a feketelyukat.

Vizsgáljunk az egyszerűség kedvéért skalár-hullámot. Legyen  $T_{ab} = T_{ba}$  a skalármező (ill. a skalár-hullám) energiaimpulzus-tenzora, ekkor a hullám energiaáramsűrűsége  $J_a = -T_{ab}\xi^b$ , és erre érvényes a lokális megmaradási törvény,

$$\nabla^a J_a = -\nabla^a (T_{ab}\xi^b) = -T_{ab}\nabla^a \xi^b = -T_{ab}\nabla^{(a}\xi^{b)} = 0, \quad (11.7.18.)$$

ahol felhasználtuk, egyrészt hogy  $\nabla^a T_{ab} = 0$ , másrészt a Killing-egyenletet. Integráljuk ezután a  $\nabla^a J_a = 0$  egyenlet mindkét oldalát a 50. ábrán jelölt  $K$  tartományra:

$$0 = \int_K \nabla^a J_a = \left( \int_{\Sigma_1} + \int_{\Sigma_2} + \int_H + \int_S \right) n^a J_a. \quad (11.7.19.)$$

A jobb oldalon a végtelen sugarú  $S$  gömbfelületre vett integrál a  $K$  tartományból a végtelenbe kiáramló nettó energiafluxust jelenti, azaz a visszavert kifutó hullám és a bejövő hullám energiafluxusának a különbségét. A  $H$  horizontra vett integrál jelenti az áthaladó hullám által a

feketelyukba bevitt energiát. A  $\Sigma_2$  térszerű hiperfelület a  $\Sigma_1$  térszerű hiperfelület időbeli eltoltja  $\Delta t$ -vel. (Ha  $\phi_t$  a  $\xi^a$  Killing-vektormező által generált egy-paraméteres diffeomorfizmus, akkor  $\Sigma_2$  pontjait  $\Sigma_1$  pontjaiból a  $\phi_{\Delta t}$  diffeomorfizmussal kapjuk meg.) Az  $e^{-i\omega t}$  időfüggésű hullám esetén az időbeli eltolási szimmetria miatt  $\int_{\Sigma_1} n^a J_a = -\int_{\Sigma_2} n^a J_a$ , úgyhogy azt kapjuk végül, hogy a feketelyukba bevitt energiafluxus mínusz egyszerese egyenlő a visszavert hullám és a befutó hullám által szállított energiafluxusok különbségével:

$$-\int_H n^a J_a = \int_S n^a J_a. \quad (11.7.20.)$$

Az esemény-horizonton a normális null-vektor érintővektor,  $-\chi^a$ , úgyhogy a horizonton  $n^a J_a$  időátlaga:

$$\langle n^a J_a \rangle = -\langle \chi^a J_a \rangle = \langle T_{ab} \chi^a \xi^b \rangle, \quad (11.7.21.)$$

ahol

$$T_{ab} = (\nabla_a \Phi)(\nabla_b \Phi) - \frac{1}{2} g_{ab} [(\nabla_c \Phi)(\nabla^c \Phi) + m^2 \Phi^2]. \quad (11.7.22.)$$

A horizonton a  $\chi^a$  és  $\xi^a$  Killing-vektorok ortogonálisak,

$$g_{ab} \chi^a \xi^b = g_{ab} (\xi^a + \Omega_H \psi^a) = -V + \Omega_H W = 0, \quad (11.7.23.)$$

úgyhogy

$$\langle n^a J_a \rangle = \langle T_{ab} \chi^a \xi^b \rangle = \langle (\chi^a \nabla_a \Phi)(\xi_b \nabla^b \Phi) \rangle. \quad (11.7.24.)$$

Másrészt a vizsgált alakú hullám esetén itt  $\chi^a \nabla_a \Phi = (\partial_t + \Omega_H \partial_\phi) \Phi = \Phi_0(-i\omega + \Omega_H im)$  és  $\xi_b \nabla^b \Phi = -i\omega \Phi_0$ , úgyhogy

$$\begin{aligned} \langle n^a J_a \rangle &= \langle (\chi^a \nabla_a \Phi)(\xi_b \nabla^b \Phi) \rangle = \langle \Phi_0(-i\omega + \Omega_H im)(-i\omega \Phi_0)^* \rangle \\ &= \omega(\omega - m\Omega_H) |\Phi_0|^2. \end{aligned} \quad (11.7.25.)$$

Ez a kifejezés pedig a mondott frekvencia-intervallumban negatív.

**Megjegyzés:** Meg lehet mutatni, hogy a mondott frekvenciaintervallumban a hullámok felragyogó szóródása a felületi tételből is következik.

**Megjegyzés:** Felragyogó szóródás csak bozonikus hullámok esetén lép fel, fermionikus hullámok esetén nem lehetséges, mert a horizonton a fermionikus hullámok energiasűrűsége nem tud negatívvá válni.

## 11.8. A feketelyukak és a termodinamika

A felületi tétel azt mondja ki, hogy bármilyen fizikai folyamat részesei legyenek is a feketelyukak a Világegyetemben, az összes felületük nem csökkenhet,  $\delta A \geq 0$ . Ez a tétel nagyon hasonló a termodinamika második főtételéhez, amely kimondja, hogy zárt rendszer entrópiája nem csökkenhet,  $\delta S \geq 0$ . Megeshet, hogy ez a hasonlóság csupán látszólagos, hiszen - egyik oldalról - a felületi tétel az általános relativitáselméletből matematikailag egzakt módon következik, míg - másrészt -

a termodinamika második főtétele a mozgásegyenletekből nem következik egzakt módon, hanem a nagy szabadsági fokú rendszerekben nagy valószínűséggel érvényes törvény. Ennek dacára, az analógia a termodinamika más törvényeire is kiterjed. Ez arra enged következtetni, hogy a feketelyukak fizikája és a termodinamika közti kapcsolat mégis alapvető fizika.

A stacionárius feketelyukak fizikájának egyik fontos paramétere az úgynevezett **felületi gravitáció**.

**Definíció:** *Sztatikus feketelyuk esetén a  $\kappa$  felületi gravitáció* azaz az erő, ami ahhoz szükséges, hogy egy egységnyi tömegű próbarészecskét végtelen távoból (pl. egy végtelen vékony, zérus tömegű, nyújthatatlan fonál segítségével) egy helyben tartsunk egy sztatikus feketelyuk horizontján.

**Megjegyzés:** Ez egy korlátozott érvényességű, de fizikai definíció. Nem sztatikus, de stacionárius feketelyuk esetén a felületi gravitáció elveszíti a „próbatömeg helyben tartásához szükséges erő” jelentést, mert forgó feketelyuk ( $\Omega_H \neq 0$ ) esetén a próbatömeg a végtelenhez képest nem tartható helyben a feketelyuk felületén. Ezért szükségünk van a felületi gravitáció általános érvényű, pontos matematikai definíciójára.

Mint azt a Kerr-feketelyuk esetében láttuk, minden stacionárius feketelyuk horizontján létezik a horizonthoz képest normális irányú  $\chi^a$  Killing-vektormező.

**Állítás:** A horizonton a  $\chi^a$  Killing-vektormező a horizont nem affin paraméterezett null-geodetikus generátorainak az érintővektora. Ezért létezik olyan, a horizonton értelmezett  $\kappa$  függvény, amelyre

$$\chi^b \nabla_b \chi_a = \kappa \chi_a. \quad (11.8.1.)$$

Ezt a  $\kappa$  függvényt nevezzük a **felületi gravitációnak**.

Ha  $\chi^a$  nem esik egybe a stacionárius  $\xi^a$  Killing-vektormezővel, akkor  $\chi^a$  és  $\xi^a$  lineáris kombinációjaként mindig értelmezhetünk egy  $\psi^a$  axiális Killing-vektormezőt. Ezért mindig írhatjuk, hogy

$$\chi^a = \xi^a + \Omega_H \psi^a, \quad (11.8.2.)$$

ahol  $\Omega_H = \text{áll.}$  a horizont szögsebessége (akárcsak a Kerr-feketelyuk esetén). Mivel a horizont null-felület és  $\chi^a$  ennek normálisa, ezért  $\chi^a$  null-vektor,  $\chi^a \chi_a = 0$ , és így  $\chi^a \chi_a$  állandó a horizonton mindenütt. Ebből következik, hogy  $\nabla^a (\chi^b \chi_b)$  is normális a horizonton, vagyis létezik a horizonton olyan  $\kappa$  függvény, hogy a horizont minden pontjában

$$\nabla^a (\chi^b \chi_b) = -2\kappa \chi^a. \quad (11.8.3.)$$

A (11.8.3.) összefüggést alakítsuk át, felhasználva a  $\nabla_a \chi_b = -\nabla_b \chi_a$  Killing-egyenletet:

$$\begin{aligned} -2\kappa \chi_a &= 2\chi^b \nabla_a \chi_b, \\ \kappa \chi_a &= \chi^b \nabla_b \chi_a. \end{aligned} \quad (11.8.4.)$$

Ez éppen a (11.8.1.) egyenlet, a geodetikusok egyenlete nem affin paraméterezés esetén, úgyhogy ezzel beláttuk azt is, hogy a horizonton a  $\chi^a$  Killing-vektormező a horizont null-geodetikus generátorainak érintővektora.

A (11.8.1.) egyenletet tekinthetjük  $\kappa$  matematikai definíciójának. Jelölje  $v$  a szóban forgó nem affin paramétert, a Killing paramétert, amelyre

$$\chi^a \nabla_a v = 1. \quad (11.8.5.)$$

A  $\kappa$  felületi gravitáció azt méri, hogy a  $v$  Killing-paraméter mennyire különbözik a  $\chi^a$  által generált null-geodetikusok  $\lambda$  affin paraméterétől.

**Állítás:** A  $\kappa$  felületi gravitáció állandó  $\chi^a$  orbitái, azaz a horizont null-geodetikus generátorai mentén,

$$\mathcal{L}_\chi \kappa = \chi(\kappa) = \chi^a \nabla_a \kappa = 0. \quad (11.8.6.)$$

Rendezzük egy oldalra a (11.8.3.) egyenlet tagjait, majd vegyük mindkét oldal Lie-deriváltját  $\chi$  szerint,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_\chi [\nabla^a (\chi^b \chi_b) - 2\kappa \chi^a] \\ &= [\chi, \nabla(\chi\chi)]^a - 2\chi^a \mathcal{L}_\chi \kappa - 2\kappa [\chi, \chi]^a \\ &= [\chi, \nabla(\chi\chi)]^a - 2\chi^a \mathcal{L}_\chi \kappa \\ &= -2\chi^a \mathcal{L}_\chi \kappa, \end{aligned} \quad (11.8.7.)$$

mert  $[\chi, \nabla(\chi\chi)]^a = 0$ . Végül tehát azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}_\chi \kappa = 0 \quad (11.8.8.)$$

a horizonton, azaz  $\kappa$  állandó a  $\chi^a$  orbitái mentén.

**Megjegyzés:** Alább meg fogjuk mutatni, hogy  $\kappa = \text{áll.}$  a horizonton, azaz nem változik az értéke orbitáról orbitára haladva. Például a töltött Kerr-metrika esetén ez az állandó

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - e^2}}{2M[M + \sqrt{M^2 - a^2 - e^2}] - e^2}. \quad (11.8.9.)$$

**Állítás:** Legyen

$$k^a = e^{-\kappa v} \chi^a \quad (11.8.10.)$$

a horizonton értelmezett null-vektormező. Ekkor  $k^a$  a horizont affin paraméterezett null-geodetikus generátorainak az érintővektora, azaz kielégíti az affin paraméterezett geodetikusok

$$k^b \nabla_b k^a = 0 \quad (11.8.11.)$$

egyenletét. A  $v$  Killing-paraméter és a

$$k^a \nabla_a \lambda = 1 \quad (11.8.12.)$$

összefüggéssel rögzített  $\lambda$  affin paraméter közti kapcsolat

$$\lambda \propto e^{\kappa v}. \quad (11.8.13.)$$

A (11.8.10.) egyenlőséggel értelmezett  $k^a$  vektormezőre teljesül, hogy

$$\begin{aligned} k^b \nabla_b k^a &= e^{-\kappa v} \chi^b \nabla_b (e^{-\kappa v} \chi^a) = e^{-\kappa v} \chi^b (e^{-\kappa v} \nabla_b \chi^a + \chi^a \nabla_b e^{-\kappa v}) \\ &= e^{-2\kappa v} [\chi^b \nabla_b \chi^a - \chi^a \chi^b (v \nabla_b \kappa + \kappa \nabla_b v)] \\ &= e^{-2\kappa v} [\kappa \chi^a - \chi^a (v \chi^b \nabla_b \kappa + \kappa \chi^b \nabla_b v)] \\ &= e^{-2\kappa v} [\kappa \chi^a - \chi^a v \chi(\kappa) - \kappa \chi^a] \\ &= -e^{-2\kappa v} \chi^a v \mathcal{L}_\chi \kappa = 0, \end{aligned} \quad (11.8.14.)$$

azaz, hogy

$$k^b \nabla_b k^a = 0, \quad (11.8.15.)$$

ami azt jelenti, hogy  $k^a$  a horizont null-geodetikus generátorainak érintővektora affin paraméterezés esetén. Valamely  $\{x^\mu\}$  lokális koordináta-rendszerben a horizont null-geodetikus generátorainak egyenlete  $x^\mu(\lambda) = x^\mu(\lambda(v))$ , és érintője  $k^\mu = dx^\mu(\lambda)/d\lambda$ , és  $\chi^\mu = dx^\mu(\lambda(v))/dv = k^\mu d\lambda/dv$ , úgyhogy a (11.8.10.) egyenlőségből következik, hogy a Killing-paraméter és az affin paraméter kapcsolata

$$\frac{d\lambda}{dv} \propto e^{\kappa v}, \quad (11.8.16.)$$

ahonnan  $\kappa \neq 0$  esetén azt találjuk, hogy

$$\lambda \propto e^{\kappa v}. \quad (11.8.17.)$$

**Állítás:** A horizonton érvényes az alábbi összefüggés:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^a \chi^b)(\nabla_a \chi_b). \quad (11.8.18.)$$

A  $\chi^a$  vektormező a horizonton hiperfelület-ortogonális, ezért a Frobenius-tétel következménye értelmében fennáll a horizonton, hogy

$$\chi_{[a} \nabla_b \chi_{c]} = 0. \quad (11.8.19.)$$

Innen a  $\nabla_b \chi_c = -\nabla_c \chi_b$  Killing-egyenlet segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \chi_{[a} \nabla_b \chi_{c]} \\ &= \frac{1}{6}(\chi_a \nabla_b \chi_c + \chi_b \nabla_c \chi_a + \chi_c \nabla_a \chi_b - \chi_c \nabla_b \chi_a - \chi_b \nabla_a \chi_c - \chi_a \nabla_c \chi_b) \\ &= \frac{1}{3}(\chi_a \nabla_b \chi_c + \chi_b \nabla_c \chi_a + \chi_c \nabla_a \chi_b), \end{aligned} \quad (11.8.20.)$$

azaz

$$\chi_c \nabla_a \chi_b = -\chi_a \nabla_b \chi_c - \chi_b \nabla_c \chi_a = -\chi_a \nabla_b \chi_c + \chi_b \nabla_a \chi_c = -2\chi_{[a} \nabla_{b]} \chi_{c]}. \quad (11.8.21.)$$

Képezzük mindkét oldal kontrakcióját  $\nabla^a \chi^b$ -vel:

$$\begin{aligned}
\chi_c(\nabla^a \chi^b)(\nabla_a \chi_b) &= -2(\nabla^a \chi^b)\chi_{[a}\nabla_{b]}\chi_c = -\chi_a(\nabla^a \chi^b)(\nabla_b \chi_c) + (\nabla^a \chi^b)\chi_b \nabla_a \chi_c \\
&= -\chi_a(\nabla^a \chi^b)(\nabla_b \chi_c) + (\nabla^b \chi^a)\chi_a(\nabla_b \chi_c) = -\chi_a(\nabla^a \chi^b - \nabla^b \chi^a)(\nabla_b \chi_c) \\
&= -2\chi_a(\nabla^a \chi^b)(\nabla_b \chi_c) \\
&= -2\kappa \chi^b(\nabla_b \chi_c) \\
&= -2\kappa^2 \chi_c,
\end{aligned} \tag{11.8.22.}$$

ahol a 3. sorban felhasználtuk a Killing-egyenletet, a 4. és az 5. sorban a (11.8.1.) egyenletet. Végül rendezés után nyerjük a bizonyítani kívánt (11.8.18.) összefüggést.

**Állítás:** A feketelyuk  $\kappa$  felületi gravitációjának matematikai definíciója sztatikus feketelyuk esetén összhangban van a fizikai definícióval.

Induljunk ki a mindenütt (nem csak a horizonton) érvényes

$$\begin{aligned}
3(\chi^{[a}\nabla^b\chi^{c]})(\chi_{[a}\nabla_b\chi_{c]}) &= \chi^a\chi_a(\nabla^b\chi^c)(\nabla_b\chi_c) + 2(\chi^a\nabla^c\chi_a)(\chi_b\nabla_b\chi_c) \\
&= \chi^a\chi_a(\nabla^b\chi^c)(\nabla_b\chi_c) - 2(\chi^a\nabla_a\chi_c)(\chi_b\nabla_b\chi^c)
\end{aligned} \tag{11.8.23.}$$

azonosságból. Majd osszuk az egyenlőség mindkét oldalát  $\chi^a\chi_a$ -val, és vizsgáljuk a bal- és jobb-oldali kifejezések határértékét, ha közeledünk a horizonthoz. Jelölje a horizonton a határértéket  $\lim_H$ . Mivel  $\chi^{[a}\nabla^b\chi^{c]} = 0$  a horizonton, azért  $(\chi^{[a}\nabla^b\chi^{c]})(\chi_{[a}\nabla_b\chi_{c]})$  gradiense zérushoz tart a horizonton, miközben  $\kappa \neq 0$  esetén  $\chi^a\chi_a$  gradiense a (11.8.3.) összefüggés értelmében nem tart zérushoz. Ezért a l'Hospital-szabály értelmében

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_H \frac{3(\chi^{[a}\nabla^b\chi^{c]})(\chi_{[a}\nabla_b\chi_{c]})}{\chi^a\chi_a} \\
&= \lim_H \left( (\nabla^b\chi^c)(\nabla_b\chi_c) - \frac{2(\chi^a\nabla_a\chi_c)(\chi_b\nabla_b\chi^c)}{\chi^a\chi_a} \right) \\
&= -2\kappa^2 - \lim_H \frac{2(\chi^a\nabla_a\chi_c)(\chi_b\nabla_b\chi^c)}{\chi^a\chi_a},
\end{aligned} \tag{11.8.24.}$$

ahol a 3. sorban felhasználtuk a (11.8.18.) összefüggést. Innen kifejezve  $\kappa^2$ -et, azt kapjuk, hogy

$$\kappa^2 = -\lim_H \frac{(\chi^a\nabla_a\chi_c)(\chi_b\nabla_b\chi^c)}{\chi^a\chi_a}. \tag{11.8.25.}$$

Írjuk ezt át azonosan a következő alakba:

$$\kappa^2 = \lim_H \left( \frac{\chi^a\nabla_a\chi_c}{-\chi^d\chi_d} \frac{\chi_b\nabla_b\chi^c}{-\chi^e\chi_e} (-\chi^f\chi_f) \right). \tag{11.8.26.}$$

A  $\chi^a$  érintőjű geodetikuson mozgó próbatest gyorsulása

$$a^b = \frac{\chi^a\nabla_a\chi^b}{-\chi^c\chi_c}, \tag{11.8.27.}$$

és  $V = \sqrt{-\chi^a\chi_a}$  pedig a próbatest vöröseltolódási tényezője, úgyhogy

$$\kappa^2 = \lim_H (V^2 a^b a_b). \tag{11.8.28.}$$

Legyen a horizont közelében a próbarészecske gyorsulása  $a = \sqrt{a^b a_b}$ , ekkor

$$\kappa = \lim_H (Va). \tag{11.8.29.}$$

Itt  $Va$  az az erő, amit az egységnyi tömegű részecskére ki kell (a végtelenből) fejteni ahhoz, hogy a végtelenhez képest helyben maradjon egy sztatikus feketelyuk esetében a horizont tetszőleges közelében. Ezzel beláttuk, hogy az általános (11.8.1.) matematikai definíció visszaadja sztatikus esetben  $\kappa$  fizikai definícióját.

**Állítás:** A horizont null-geodetikus generátorai kongruenciájának expanziója, nyírása és csavarodása zérussal azonosak. Továbbá a horizonton teljesül az  $R_{ab}k^ak^b = 0$  feltétel és a  $\widehat{C_{abcd}k^ak^d} = 0$  egyenlőség, azaz  $k^a$  a horizont principális null-vektora.

Használjuk fel, hogy  $\chi^a$  a horizonton hiperfelület-ortogonális, azaz  $\chi_{[a}\nabla_b\chi_{c]} = 0$ , hogy  $k^a = e^{-\kappa v}\chi^a$  és, hogy  $\chi^a$  Killing-vektor. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
k_{[a}\nabla_b]k_c &= e^{-2\kappa v}\left(\chi_{[a}\nabla_b]\chi_c - \chi_{[a}\nabla_b](\kappa v)\chi_c\right) \\
&= e^{-2\kappa v}\left(\frac{1}{2}\chi_a\nabla_b\chi_c - \frac{1}{2}\chi_b\nabla_a\chi_c - \chi_c\chi_{[a}\nabla_b](\kappa v)\right) \\
&= e^{-2\kappa v}\left(\frac{1}{2}(\chi_a\nabla_b\chi_c + \chi_b\nabla_c\chi_a + \chi_c\nabla_a\chi_b - \chi_c\nabla_b\chi_a) - \chi_c\chi_{[a}\nabla_b](\kappa v)\right) \\
&= e^{-2\kappa v}\left(3\chi_{[a}\nabla_b]\chi_c - \frac{1}{2}\chi_c\nabla_a\chi_b - \chi_c\chi_{[a}\nabla_b](\kappa v)\right) \\
&= -e^{-2\kappa v}\chi_c\left(\frac{1}{2}\chi_c\nabla_a\chi_b + \chi_{[a}\nabla_b](\kappa v)\right). \tag{11.8.30.}
\end{aligned}$$

Legyen  $m^a, n^a \in \tilde{V}$  a horizont két tetszőleges érintővektora, azaz amelyekre  $m^a\chi_a = n^a\chi_a = 0$ , és kontraháljuk az előbbi egyenlőség mindkét oldalát  $m^bn^c$ -vel,

$$\begin{aligned}
m^bn^ck_{[a}\nabla_b]k_c &= 0, \\
m^bn^ck_a\nabla_bk_c - m^bn^ck_b\nabla_ak_c &= k_am^bn^c\nabla_bk_c = 0, \\
m^bn^c\nabla_bk_c &= 0. \tag{11.8.31.}
\end{aligned}$$

Ez viszont azt jelenti, hogy a  $\hat{V}$  érintőtérben (ld. 9. fejezet jelöléseit null-felület érintőterére vonatkozóan):

$$\widehat{\nabla_bk_c} = 0. \tag{11.8.32.}$$

Ekkor viszont a horizont null-geodetikus generátorainak kongruenciáját jellemző  $\hat{B}_{ab} = \widehat{\nabla_bk_a}$  tenzor azonosan zérus, úgyhogy a kongruencia  $\theta$  expanziója,  $\hat{\sigma}_{ab}$  nyírása és  $\hat{\omega}_{ab}$  csavarodása mind azonosan zérus (ld. (9.3.43.)). Ekkor a (9.3.49.) és a (9.3.50.) egyenlőségekből kapjuk, rendre, hogy a horizonton  $R_{ab}k^ak^b = 0$  és  $\widehat{C_{abcd}k^ak^d} = 0$ .

**Megjegyzés:** Alább meg fogjuk mutatni, hogy  $k^a$  a Weyl-tenzornak többszörös principális null-vektora a horizonton.

**Megjegyzés:** A fenti egyenletek többsége, mint pl. a  $\kappa$ -t definiáló (11.8.3.) egyenlet, csak a horizonton érvényes. Ezért ezekre az egyenletekre nem alkalmazhatjuk a  $\nabla_a$  gradiens-operátort, hiszen csak a horizonthoz képesti érintőirányban differenciálhatunk. Ha a horizont térszerű hiperfelület lenne, akkor alkalmazhatnánk a  $h^{ab}\nabla_b$  operátort, ahol  $h_{ab}$  a hiperfelületen indukált metrika, de a horizont nem térszerű hiperfelület, hanem null-felület. Ezért nincsen olyan természetes módon



definiálható operátor, amely vetítene rá. Ennek ellenére, az  $\epsilon^{abcd}\chi_d$  tenzor a horizonthoz képest érintőirányú (itt  $\epsilon^{abcd}$  a téridő térfogateleme), hiszen  $(\epsilon^{abcd}\chi_d)\chi_c = 0$ . Ezért a horizonton érvényes bármely egyenletre alkalmazhatjuk az  $(\epsilon^{abcd}\chi_d)\nabla_c$  vagy a  $\chi_{[d}\nabla_{c]}$  operátort.

**Állítás:** A  $\kappa$  felületi gravitáció állandó a horizonton.

Írjuk a (11.8.1.) egyenletet

$$\kappa\chi_a = \chi^b\nabla_b\chi_a \quad (11.8.33.)$$

alakba, és alkalmazzuk mindkét oldalára a  $\chi_{[d}\nabla_{c]}$  operátort:

$$\begin{aligned} \chi_a\chi_{[d}\nabla_{c]}\kappa + \kappa\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi_a &= \chi_{[d}\nabla_{c]}(\chi^b\nabla_b\chi_a) \\ &= (\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi^b)(\nabla_b\chi_a) + \chi^b\chi_{[d}\nabla_{c]}\nabla_b\chi_a \\ &= (\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi^b)(\nabla_b\chi_a) - \chi^b\chi_{[d}R_{b|a|c]}^e\chi_e \\ &= (\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi^b)(\nabla_b\chi_a) + \chi^bR_{ba[c}^e\chi_d]\chi_e, \end{aligned} \quad (11.8.34.)$$

ahol felhasználtuk a Killing-vektormezőkre érvényes (C.4.51.) azonosságot. A jobboldali első tagot alakítsuk át. Felhasználva, hogy  $\chi^a$  a horizonthoz képest hiperfelület-ortogonális, azaz hogy érvényes a (11.8.21.) azonosság, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi^b)(\nabla_b\chi_a) &= -\frac{1}{2}\chi_b(\nabla_d\chi_c)(\nabla_b\chi_a) \\ &= -\frac{1}{2}\kappa\chi_a(\nabla_d\chi_c) \\ &= \kappa\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi_a, \end{aligned} \quad (11.8.35.)$$

ahol a 2. sorban felhasználtuk a (11.8.1.) összefüggést, majd a 3. sorban újra a (11.8.21.) azonosságot. Azt kaptuk tehát, hogy a (11.8.34.) egyenlőség jobb oldalának első tagja kiejteti az egyenlet bal oldalán álló második tagját, úgyhogy

$$\chi_a\chi_{[d}\nabla_{c]}\kappa = \chi^bR_{ba[c}^e\chi_d]\chi_e \quad (11.8.36.)$$

adódik.

Tekintsük most a (11.8.21.) azonosságot és hattassuk mindkét oldalára a  $\chi_{[d}\nabla_{e]}$  operátort:

$$(\chi_{[d}\nabla_{e]}\nabla_c)\nabla_a\chi_b + \chi_c\chi_{[d}\nabla_{e]}\nabla_a\chi_b = -2(\chi_{[d}\nabla_{e]}\chi_{[a})\nabla_{b]}\chi_c + 2(\chi_{[d}\nabla_{e]}\nabla_{[b}\chi_{|c|]})\chi_a]. \quad (11.8.37.)$$

A (11.8.21.) azonosság ismételt alkalmazásával beláthatjuk, hogy a bal oldal első tagja azonos a jobb oldal első tagjával, úgyhogy

$$\chi_c\chi_{[d}\nabla_{e]}\nabla_a\chi_b = 2(\chi_{[d}\nabla_{e]}\nabla_{[b}\chi_{|c|]})\chi_a] \quad (11.8.38.)$$

adódik. Ismét felhasználjuk a (C.4.51.) azonosságot:

$$\chi_cR_{ab[e}^f\chi_d]\chi_f = -2\chi_{[a}R_{b]c[e}^f\chi_d]\chi_f. \quad (11.8.39.)$$

Szorozzuk az összefüggés mindkét oldalát  $g^{ce}$ -vel és kontraháljunk a  $c$  és  $e$  indexekben:

$$\chi^eR_{ab[e}^f\chi_d]\chi_f = -2g^{ce}\chi_{[a}R_{b]c[e}^f\chi_d]\chi_f, \quad (11.8.40.)$$

ahol a baloldali kifejezés eltűnik,

$$\chi^e R_{ab[e}^f \chi_{d]} \chi_f = \chi^e R_{abe}^f \chi_d \chi_f - \chi^e R_{abd}^f \chi_e \chi_f = 0, \quad (11.8.41.)$$

mert  $\chi_a^\chi = 0$  és  $R_{abcd} = -R_{abdc}$ . A kapott

$$0 = g^{ce} \chi_{[a} R_{b]c[e}^f \chi_{d]} \chi_f \quad (11.8.42.)$$

egyenlőségben részletesen kiírjuk az antiszimmetrizálást az  $e$  és  $d$  indexekben:

$$g^{ce} \chi_{[a} R_{b]ce}^f \chi_d \chi_f = g^{ce} \chi_{[a} R_{b]cd}^f \chi_e \chi_f, \quad (11.8.43.)$$

$$-\chi_{[a} R_{b]}^f \chi_d \chi_f = \chi_{[a} R_{b]cd}^f \chi^c \chi_f. \quad (11.8.44.)$$

Mivel a (11.8.36.) és a (11.8.44.) egyenlőségek jobb oldalai azonos alakúak, a bal oldalak összehasonlításából azt kapjuk, hogy

$$\chi_{[d} \nabla_{c]} \kappa = -\chi_{[d} R_{c]}^f \chi_f. \quad (11.8.45.)$$

A bizonyítás eddigi lépései során nem használtuk fel az Einstein-egyenleteket. Most az Einstein-egyenleteket és a domináns energia-feltételt felhasználva megmutatjuk, hogy a (11.8.45.) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés eltűnik. A domináns energia-feltétel azt követeli meg, hogy  $-T_a^b \chi^b$  jövőirányú időszerű vagy null-vektor legyen. Másrészt  $R_{ab} k^a k^b = e^{-2\kappa v} R_{ab} \chi^a \chi^b = 0$  miatt  $R_{ab} \chi^a \chi^b = 0$ , úgyhogy az Einstein-egyenletekből,

$$\left( R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) \chi^a \chi^b = 4\pi T_{ab} \chi^a \chi^b, \quad (11.8.46.)$$

következik, hogy  $T_{ab} \chi^a \chi^b = 0$ . Utóbbi azt is jelenti, hogy  $\chi^a$  ugyanabba az irányba mutat, mint  $-T_a^b \chi_b$ , vagyis akkor  $\chi_{[c} T_{a]b} \chi^b = 0$ . Újra felhasználva az Einstein-egyenleteket, innen adódik, hogy  $\chi_{[c} R_{a]b} \chi^b = 0$ , ami azt jelenti, hogy a (11.8.45.) egyenlet jobb oldala zérus. Végül tehát azt kapjuk, hogy

$$\chi_{[d} \nabla_{c]} \kappa = 0, \quad (11.8.47.)$$

ami azt jelenti, hogy  $\kappa$  állandó a horizonton.

**Állítás:** Tekintsünk olyan  $(M, g_{ab})$  stacionárius, axiálszimmetrikus téridőt, amely feketelyukat tartalmaz. Legyen  $\Sigma$  olyan aszimptotikusan lapos hiperfelület, amely a  $H$  horizontot a  $\mathcal{H}$  2-dimenziós gömbfelületben metszi, amely  $\Sigma$  határát képezi. Ekkor a téridő teljes tömege:

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left( T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) n^a \xi^b dV + \frac{1}{4\pi} \kappa A + 2\Omega_H J_H, \quad (11.8.48.)$$

ahol  $n^a$  a  $\Sigma$  térszerű hiperfelület jövőirányú egység-normálisa,  $T_{ab}$  az anyag energia-impulzus-tenzora,  $\xi^b$  a téridő stacionárius Killing-vektora,  $dV$  a  $\Sigma$  hiperfelületen a természetes térfogatelem,  $A$  a horizont  $\mathcal{H}$  határának felülete ( $\Sigma$ -ban),  $\Omega_H$  a horizont szögsebessége,  $J_H$  a feketelyuk impulzusmomentuma.

**Állítás:** Kicsiny stacionárius és axiálszimmetrikus megváltozás esetén vákuumban az alábbi differenciális összefüggés érvényes a téridő teljes tömegének megváltozására:

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa \delta A + \Omega_H \delta J_H, \quad (11.8.49.)$$

ahol  $\delta E$  és  $\delta J_H$  rendre a feketelyuk  $\mathcal{H}$  határa területének és impulzusmomentumának a megváltozása.

Megállapítható a matematikai analógia a feketelyukak fizikája és a termodinamika között.

- A **felületi tétel** azt állítja, hogy a feketelyukak együttes  $A$  felülete semmilyen folyamat során nem csökkenhet, ami analóg a termodinamika második főtételével, hogy a zárt rendszer entrópiája nem csökkenhet.
- A **feketelyukak tömegének megváltozására vonatkozó differenciális összefüggés** analóg a termodinamika első főtételével. A feketelyukat tartalmazó téridő teljes tömege analóg a termodinamikai rendszer teljes  $E$  energiájával; az  $\Omega_H \delta J_H$  tag a megfelel annak a mechanikai munkának, amit ahhoz kell végezni, hogy a forgó feketelyuk impulzusmomentumát  $\delta J_H$ -val megváltoztassuk, ez a termodinamikai  $-pdV$  mechanikai munkavégzés analogonja; a  $(\kappa/8\pi)\delta A$  tag a termodinamikai  $TdS$  kvázisztatikus hőközlésnek felel meg, ahol  $T = \kappa/8\pi$  a „feketelyuk hőmérséklete”.
- A nulladik főtétellel analóg módon az egyensúlyi, azaz a **stacionárius feketelyuk horizontján a  $\kappa$  felületi gravitáció állandó**, ami megfelel annak, hogy termodinamikai egyensúlyban a  $T$  hőmérséklet állandó a test mentén.
- Végül, a felületi gravitáció töltött Kerr-feketelyukakra vonatkozó (11.8.9.) képletéből látjuk, hogy  $\kappa$  csak az  $M^2 = a^2 + e^2$  szélsőséges esetben tűnik el, ami a termodinamikai  $T \rightarrow 0$  határesetnek felel meg. Wald megmutatta, hogy minél közelebb van a feketelyuk ehhez a szélsőséges esethez, annál nehezebb még közelebb vinni hozzá, hasonlóan, ahogy valamely termodinamikai rendszert annál nehezebb tovább hűteni, minél közelebb van  $T = 0$ -hoz. A feketelyukak fizikája csak ennyi hasonlóságot mutat a harmadik főtételhez. A „ $T \rightarrow 0$  esetén  $S \rightarrow 0$ ” törvénynek azonban nincsen a feketelyukakra vonatkozó analogonja, mert a feketelyuk  $A$  felülete a  $\kappa \rightarrow 0$  határesetben is maradhat véges.

Az elmondottak alapján az alábbi formális analógia fedezhető fel a feketelyukfizika és a termodinamika mennyiségei között:

$$M \leftrightarrow E, \quad T \leftrightarrow \alpha\kappa, \quad S \leftrightarrow \frac{1}{8\pi\alpha}A, \quad (11.8.50.)$$

ahol  $\alpha$  tetszőleges állandó lehet. Az, hogy  $M$  és  $E$  is teljes energia, utalás lehet rá, hogy az analógia sokkal mélyebb kapcsolatot takar, mint véletlenszerű hasonlóságot. A feketelyuk, mint klasszikus fizikai objektum termodinamikai hőmérséklete azonban abszolút zérus, mert a feketelyuk olyan test, ami az elektromágneses sugárzást tökéletesen abszorbeálja és nulla az emissziója. Ugyanakkor Hawking 1974-ben felfedezte, hogy a feketelyuk kvantumfizikai párkeltési mechanizmus révén részecskékből

álló,  $T = \hbar\kappa/2\pi$  hőmérsékletű feketetest-sugárzást bocsát ki. A  $\kappa$  felületi gravitáció tehát lényegében mégis a feketelyuk termodinamikai hőmérséklete. Ebből arra következtetünk, hogy a feketelyukak fizikája és a termodinamika közötti kapcsolat mélyebb, mint egyszerű analógia: lehet, hogy a feketelyuk-fizika fentebb felsorolt törvényei egyszerűen a termodinamika törvényeinek alkalmazásai a feketelyukakra.

# FÜGGELÉK

## A. Topológikus terek

### A.1. Topológia

**Definíció: Topológikus tér,  $(X, \mathcal{T})$ :** Legyen  $X$  halmaz és  $\mathcal{T}$  az  $X$  részhalmazainak olyan együttese, hogy

1. a  $\mathcal{T}$ -ben található részhalmazok bármely együttesének uniója benne van  $\mathcal{T}$ -ben, azaz ha  $O_\alpha \in \mathcal{T} \forall \alpha$ , akkor  $\cup_\alpha O_\alpha \in \mathcal{T}$ , ahol  $O_\alpha \subseteq X \forall \alpha$ ;
2.  $\mathcal{T}$ -ből vett bármely véges sok részhalmaz metszete is  $\mathcal{T}$ -ben van, azaz ha  $O_1, O_2, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ , akkor  $\cap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$ ;
3.  $X$  és  $\emptyset$  is eleme  $\mathcal{T}$ -nek.

Ekkor azt mondjuk, hogy  $\mathcal{T}$  topológiát értelmeztünk az  $X$  halmazon, és  $X$ -nek  $\mathcal{T}$ -ben szereplő részhalmazait **nyílt halmazoknak** nevezzük.

**Állítás:** Bármely  $X$  halmaz topológikus térré tehető. Erre a legegyszerűbb példák:

1. **Diszkrét topológia:** amikor  $\mathcal{T} = \{X \text{ összes részhalmazai}\}$ ;
2. **Indiszkrét topológia:** amikor  $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ .

**Példa: Valós számok halmaza standard topológiával:**  $X = \mathbb{R}$  és  $\mathcal{T}$  tartalmazza  $\mathbb{R}$  összes olyan részhalmazát, amelyek előállnak  $(a, b)$  nyílt halmazok uniójaként. Ekkor a nyílt intervallumok egyúttal nyílt halmazok, ami indokolja, hogy általában bármely topológikus tér esetén  $\mathcal{T}$  elemeit nyílt halmazoknak nevezzük.

**Példa: Metrikus tér standard topológiával:** Legyen  $X$  tetszőleges metrikus tér és  $\mathcal{T}$  az  $X$  összes olyan részhalmazainak együttese, amelyek előállíthatók nyílt gömbök unióiként.

**Definíció: Indukált topológia:** Legyen  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér és  $A \subset X$ . Ekkor az  $A$  részhalmaz topológikus térré tehető azáltal, hogy definiáljuk az  $\mathcal{S}$  indukált topológiát, ahol  $\mathcal{S} = \{A\text{-nak az összes olyan részhalmaza, amely kifejezhető, mint } A\text{-nak és } \mathcal{T} \text{ elemeinek a metszete}\}$ , azaz  $\mathcal{S} = \{U \mid U = A \cap O, \forall O \in \mathcal{T}\}$ .

**Definíció: Szorzattopológia:** Legyenek  $(X_1, \mathcal{T}_1)$  és  $(X_2, \mathcal{T}_2)$  topológikus terek. Ekkor az  $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$  topológikus térré tehető,  $(X_1 \times X_2, \mathcal{T})$ , ahol  $\mathcal{T}$  az  $X_1 \times X_2$  összes olyan részhalmazait tartalmazza, amelyek  $O_1 \times O_2$  alakú halmazok unióiként állíthatók elő, ahol  $O_1 \in \mathcal{T}_1$  és  $O_2 \in \mathcal{T}_2$ .

**Példa:** A szorzattopológia segítségével tudunk az  $\mathbb{R}$ -n értelmezett standard topológiából  $\mathbb{R}^n$ -en topológiát értelmezni. Az utóbbi pontosan megegyezik az  $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett standard topológiával, amelyet közvetlenül is definiálhatunk úgy, hogy  $\mathcal{T}$  az összes olyan részhalmazok együttese, amelyek előállíthatók nyílt gömbök unióiként.

## A.2. Leképezések

**Definíció: Folytonos leképezés:** Legyenek  $(X, \mathcal{T})$  és  $(Y, \mathcal{S})$  topológikus terek. Az  $f : X \mapsto Y$  leképezést folytonosnak nevezzük akkor és csak akkor, ha bármely  $O \subset Y$  nyílt részhalmaz inverz képe,  $f^{-1}[O] = \{x \in X \mid f(x) \in O\}$  nyílt halmaz  $X$ -ben, vagyis ha  $O \in \mathcal{S}$ , akkor  $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}$ .

Ha  $\mathbb{R}$ -et standard topológiával látjuk el és  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , akkor a folytonosság fenti definíciója pontosan megegyezik a folytonosság szokásos  $\epsilon - \delta$ -s definíciójával.

**Definíció:** Az  $f : X \mapsto Y$  leképezést **homeomorfizmusnak** nevezzük, akkor és csak akkor, ha  $f$  folytonos, kölcsönösen egyértelmű, „-ra történő” leképezés és  $f^{-1}$  is folytonos. Ekkor az  $(X, \mathcal{T})$  és az  $(Y, \mathcal{S})$  topológikus tereket **homeomorfaknak** nevezzük. Homeomorf topológikus terek topológiai tulajdonságai megegyeznek.

## A.3. Zártság, összefüggés, lezárás, határok

**Definíció:** Legyen  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér. A  $C \subset X$  részhalmaz **zárt** akkor és csak akkor, ha a komplementere  $X \setminus C = \{x \in X \mid x \notin C\}$  nyílt halmaz, vagyis  $X \setminus C \in \mathcal{T}$ .

**Példa:** A valós számegetes zárt  $[a, b]$  intervalluma egyúttal  $\mathbb{R}$ -nek zárt részhalmaza is.

**Következmény:**

1. Zárt halmazok bármely együttesének metszete zárt.
2. Véges sok zárt halmaz uniója is zárt.

Lehetséges olyan részhalmaz, amely se nem zárt, se nem nyílt, mint pl. a félig nyílt  $[a, b) \subset \mathbb{R}$  intervallum. Előfordulhat az is, hogy egy részhalmaz egyszerre zárt és nyílt is, mint pl. a diszkrét topológiában a részhalmazok.

**Definíció:** Az  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér akkor és csak akkor **összefüggő**, ha  $\mathcal{T}$  elemei között az egyedüli olyan részhalmazok, amelyek egyszerre nyíltak és zártak, az  $X$  és a  $\emptyset$  üres halmaz.

**Példa:**  $\mathbb{R}^n$  a standard topológiával összefüggő.

**Definíció: Részhalmaz lezártja:** Legyen  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér és  $A \subset X$ .  $A$  lezártján,  $\bar{A}$ -n az  $A$ -t tartalmazó összes zárt halmaz metszetét értjük.

**Következmény:**  $\bar{A}$  zárt,  $A \subseteq \bar{A}$  és  $\bar{A} = A$  akkor és csak akkor, ha  $A$  zárt.

**Definíció:**  $A \subset X$  **belseje**  $\equiv \text{int}(A)$ : az összes  $A$ -ban található nyílt halmaz uniója.

**Következmény:**  $\text{int}(A)$  nyílt,  $\text{int}(A) \subseteq A$  és  $\text{int}(A) = A$  akkor és csak akkor, ha  $A$  nyílt.

**Definíció:**  $A$  **határa**  $\equiv \mathring{A} \equiv \partial A$ : mindazon pontok halmaza, amelyek benne vannak  $\bar{A}$ -ban, de nincsenek benne  $\text{int}(A)$ -ban.

**Definíció:** Az  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér **Hausdorff-topológiájú**<sup>123</sup> akkor és csak akkor, ha teljesül a következő **elválaszthatósági feltétel:** bármely két különböző  $p, q \in X$   $p \neq q$  pont esetén léteznek olyan  $O_p, O_q \in \mathcal{T}$  nyílt halmazok, hogy  $O_p \cap O_q = \emptyset$ .

**Példa:**  $\mathbb{R}^n$  a standard topológiával Hausdorff-topológiájú.

## A.4. Kompaktság

**Definíció: Nyílt lefedés:** Legyen  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér,  $A \subset X$ . Ekkor az  $X$  nyílt halmazainak  $\{O_\alpha\}$  együttesét  $A$  nyílt lefedésének nevezzük akkor és csak akkor, ha  $A \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$ .

**Definíció: Allefedés:** az  $A$  halmaz nyílt  $\{O_\alpha\}$  lefedésében szereplő olyan nyílt halmazok részegyüttese, amelyek szintén lefedik  $A$ -t. Az **allefedést végesnek** nevezzük, ha véges sok halmazt tartalmaz.

**Definíció:** Az  $A \subset X$  részhalmaz **kompakt** akkor és csak akkor, ha bármely nyílt lefedésének van véges allefedése.

**Példa:** Bármely topológikus térben egyetlen pont kompakt részhalmaz.

**Példa:** A  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallum nem kompakt, mert pl. az  $O_n = (1/n, 1)$   $n = 2, 3, \dots$  nyílt lefedése a  $(0, 1)$  intervallumnak, de ez nem tartalmaz véges allefedést.

A zárttság és a kompaktság kapcsolatáról fontos tételek szólnak.

**A.1. tétel: Heine<sup>124</sup>-Borel<sup>125</sup> -tétel:** Az  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  zárt intervallum kompakt az  $\mathbb{R}$ -n értelmezett standard topológiában.

**A.2. tétel:** Legyen  $(X, \mathcal{T})$  Hausdorff-topológiájú és  $A \subset X$  kompakt, akkor  $A$  zárt.

**A.3. tétel:** Legyen  $(X, \mathcal{T})$  kompakt és  $A \subset X$  zárt, akkor  $A$  kompakt.

**A.4 tétel:** A valós számok  $A$  részhalmaza a standard topológiában akkor és csak akkor kompakt, ha  $A$  zárt és korlátos.

A folytonos leképezések megőrzik a kompaktságot:

**A.5. tétel:** Legyenek  $(X, \mathcal{T})$  és  $(Y, \mathcal{S})$  topológikus terek, legyen  $(X, \mathcal{T})$  kompakt és  $f : X \mapsto Y$  folytonos. Ekkor  $X$  képe is kompakt, azaz  $f[X] = \{y \in Y | y = f(x)\} \subset Y$  kompakt.

**A.6. tétel:** Topológikus téren értelmezett folytonos valós függvény korlátos és felveszi a maximális és a minimális értékét.

A kompaktság  $\mathbb{R}$ -beli, az **A.4. Tételben** megfogalmazott tulajdonságai kiterjeszthetők  $\mathbb{R}^n$ -re:

**A.7. tétel: Tyikhonov<sup>126</sup>-tétel:** Legyenek  $(X_1, \mathcal{T}_1)$  és  $(X_2, \mathcal{T}_2)$  kompakt topoló-

<sup>123</sup>Felix Hausdorff, német matematikus, 1868-1942.

<sup>124</sup>Heinrich Eduard Heine, német (porosz) matematikus, 1821-1881

<sup>125</sup>Félix Édouard Justin Émile Borel, francia matematikus, 1871-1956

<sup>126</sup>Andrej Nyikolajevics Tikhonov, orosz és szovjet matematikus, 1906-1993

gikus terek. Ekkor  $X_1 \times X_2$  is kompakt a szorzattopológiára nézve.

**A.8. tétel:** Az  $A \subset \mathbb{R}^n$  akkor és csak akkor kompakt, ha  $A$  korlátos és zárt.

**Példa:** Az  $S^n$  (az  $n$ -dimenziós gömbfelület  $\mathbb{R}^{n+1}$ -ben) kompakt az indukált topológiára nézve.

## A.5. Konvergencia, megszámlálhatóság és kompaktság

**Definíció:** Az  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér pontjainak  $\{x_n\}$  **sorozata konvergál** az  $x$  ponthoz akkor és csak akkor, ha az  $x$  pont minden  $O$  nyílt környezetéhez létezik olyan  $N$  egész, hogy  $x_n \in O$  minden  $n > N$  esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy  $x$  az  $\{x_n\}$  sorozat **határértéke**.

A valós számok  $\mathbb{R}$  halmazában a standard topológiával ez a szokásos konvergenciafogalom.

**Definíció:** Az  $y \in X$  **torlódási pontja** az  $\{x_n\}$  sorozatnak, ha  $y$  bármely nyílt környezete a sorozat végtelen sok pontját tartalmazza.

Ha  $\{x_n\}$  konvergál  $x$ -hez, akkor  $x$  torlódási pont. Másrészt viszont ha  $y$  az  $\{x_n\}$  torlódási pontja, akkor előfordulhat, hogy az  $\{x_n\}$  sorozatnak még olyan  $\{y_n\}$  részsorozata sem létezik, amelyik  $y$ -hoz konvergál.

**Definíció:** Az  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér **elsődlegesen megszámlálható** akkor és csak akkor, ha bármely  $p \in X$ -hez létezik a nyílt halmazok olyan  $\{O_n\}$  megszámlálható együttese, hogy  $p$  bármely  $O$  nyílt környezete tartalmaz legalább egyet az  $\{O_n\}$  együttesből.

**Állítás:** Ha  $(X, \mathcal{T})$  elsődlegesen megszámlálható, akkor minden olyan  $\{x_n\}$  sorozatból, amelynek  $y$  torlódási pontja, kiválasztható  $y$ -hoz konvergáló  $\{y_n\}$  részsorozat.

**Példa:**  $\mathbb{R}^n$  a standard topológiával elsődlegesen megszámlálható, de eleget tesz egy erősebb kritériumnak is: nevezetesen másodlagosan megszámlálható.

**Definíció:**  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér **másodlagosan megszámlálható**, ha létezik nyílt halmazok olyan megszámlálható együttese, hogy bármely nyílt halmaz kifejezhető ezen halmazegyüttes valamely tagjainak uniójaként.

**Példa:**  $\mathbb{R}^n$  másodlagosan is megszámlálható és a nyílt halmazok megszámlálható együttesét azok a nyílt gömbök képezik, amelyek középpontja racionális koordinátáknál van és sugaruk is racionális.

A kompaktság és a konvergencia kapcsolatát az alábbi tétel fogalmazza meg:

**A.9. tétel: Bolzano-Weierstrass-tétel:** Legyen  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér,  $A \subset X$ . Ha  $A$  kompakt, akkor minden  $\{x_n\} \subset A$  sorozatnak van  $A$ -ban torlódási pontja. Megfordítva, ha  $(X, \mathcal{T})$  másodlagosan megszámlálható és minden  $A$ -beli sorozatnak van  $A$ -ban torlódási pontja, akkor  $A$  kompakt. Így, ha  $(X, \mathcal{T})$  másodlagosan megszámlálható, akkor  $X$ -nek az  $A$  részhalmaza akkor és csak akkor kompakt, ha minden  $A$ -beli sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amely  $A$ -beli ponthoz konvergál.



## A.6. Parakompaktság és parakompakt sokaságok tulajdonságai

**Definíció: Lefedés finomítása:** Legyen  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér és  $\{O_\alpha\}$  az  $X$ -nek nyílt lefedése. A  $\{V_\beta\}$  nyílt lefedést az  $\{O_\alpha\}$  lefedés finomításának nevezzük, ha bármely  $V_\beta$ -hoz létezik olyan  $O_\alpha$ , hogy  $V_\beta \subset O_\alpha$ .

**Definíció: A  $\{V_\beta\}$  lefedés lokálisan véges** akkor és csak akkor, ha bármely  $x \in X$  pontnak van olyan  $W$  nyílt környezete, amely csak véges sok  $V_\beta$ -ba metsz bele, azaz amellyel csak véges sok  $V_\beta$ -ra teljesül, hogy  $W \cap V_\beta \neq \emptyset$ .

**Definíció: Parakompaktság:** az  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér akkor és csak akkor parakompakt, ha  $X$  minden  $\{O_\alpha\}$  nyílt lefedésének létezik lokálisan véges  $\{V_\beta\}$  finomítása.

**Példa:**  $\mathbb{R}^n$  és  $\mathbb{S}^m$  és szorzataik parakompaktak.

**Állítás:** Legyen  $M$  parakompakt differenciálható sokaság (továbbiakban egyszerűen sokaság). Ekkor

1.  $M$ -en létezik Riemann-metrika;
2.  $M$  másodlagosan megszámlálható.

Ekkor  $M$  lefedhető olyan  $(\psi_i, O_i)$  térképek lokálisan véges, megszámlálható családjával, amelyben minden  $\bar{O}_i$  kompakt. Fordítva, ha  $M$  a sokaságok minden követelményének eleget tesz, akkor az 1. vagy a 2. tulajdonság teljesülése maga után vonja, hogy  $M$  parakompakt.

A parakompakt sokaságok egyik fontos tulajdonsága, hogy létezik rajtuk egységfelbontás.

**Definíció:** Legyen adott az  $M$  parakompakt sokaság lokálisan véges nyílt  $\{O_\alpha\}$  lefedése. Az  $\{O_\alpha\}$  lefedéshez tartozó egységfelbontáson síma függvények olyan  $\{f_\alpha\}$  együttesét értjük, amelyek az alábbi tulajdonságúak:

1.  $f_\alpha$  tartója (azaz azon halmaz lezártja, amelyen  $f_\alpha \neq 0$ )  $O_\alpha$ -nak részhalmaza;
2.  $0 \leq f_\alpha \leq 1$ ;
3.  $\sum_\alpha f_\alpha = 1$ , ahol az összegzés véges sok tagra történik, mert  $M$  minden pontjában csak véges sok  $f_\alpha \neq 0$ , hiszen a sokaság lokálisan véges lefedéséből indultunk ki.

**Állítás:**  $M$  minden olyan lokálisan véges  $\{O_\alpha\}$  nyílt lefedéséhez, amelyben minden  $\bar{O}_\alpha$  kompakt, tartozik egységfelbontás. Ez azt jelenti, hogy minden parakompakt sokaságon létezik egységfelbontás.

Az egységfelbontás létezése lehetővé teszi, hogy a parakompakt sokaságokra vonatkozó lokális állításokat globálissá tegyünk:

**Példa:** Így bizonyítható az a fentebbi állítás, hogy parakompakt sokaságon létezik Riemann-metrika. A bizonyítás az alábbi lépésekben történik: (i)  $M$ -t lefedjük lokálisan véges  $(\psi_\alpha, O_\alpha)$

koordinátatérképek olyan családjával, amelyben minden  $\bar{O}_\alpha$  kompakt; (ii) minden egyes lokális környezetben definiálunk egy  $(g_\alpha)_{ab}$  Riemann-metrikát; (iii) majd képezzük az egész sokaságra kiterjesztett  $g_{ab} = \sum_\alpha f_\alpha (g_\alpha)_{ab}$  metrikát, ahol  $\{f_\alpha\}$  az  $\{O_\alpha\}$  lefedéshez tartozó egységfelbontás.

**Példa:** Ugyancsak az egységfelbontás segítségével definiálható az integrálás parakompakt sokaságokon.

## B. Differenciál-formák

### B.1. $p$ -forma, ékszorzat és külső derivált

**Definíció:** Az  $\omega$  teljesen antiszimmetrikus  $(0, p)$ -típusú tenzort differenciális  $p$ -formának (röviden  $p$ -formának) nevezzük:  $\omega_{a_1 \dots a_p} = \omega_{[a_1 \dots a_p]}$ .

**Következmény:** Ha  $\dim M = n$  és  $p > n$ , akkor minden  $p$ -forma azonosan zérus.

**Megjegyzés:** Egy  $p$ -forma és egy  $q$ -forma külső szorzata,  $\omega_{a_1 \dots a_p} \mu_{b_1 \dots b_q}$   $(0, p+q)$ -típusú tenzor, de nem  $(p+q)$ -forma. Két differenciál-formából  $\wedge$ -szorzással, azaz ékszorzással képezhetünk  $(p+q)$ -formát.

**Definíció:** Az  $\omega$   $p$ -forma és a  $\mu$   $q$ -forma ékszorzata az  $\omega \wedge \mu$   $(p+q)$ -forma, amelyet

$$(\omega \wedge \mu)_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_q} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \omega_{[a_1 \dots a_p} \mu_{b_1 \dots b_q]} \quad (\text{B.1.1.})$$

definiál.

**Megjegyzés:** Az ékszorzat  $(a)$  bilineáris, azaz bármely  $\omega$ ,  $\alpha$  és  $\beta$  differenciál-formák esetén

$$\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta, \quad (\text{B.1.2.})$$

továbbá  $(b)$  csavar-kommutatív, azaz bármely  $\alpha$   $p$ -forma és  $\beta$   $q$ -forma esetén

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha. \quad (\text{B.1.3.})$$

**Példa:** Legyen  $\omega \in V_p^*$  és  $\mu \in V_p^*$  az  $n$  dimenziós sokaság  $p \in M$  pontjában értelmezett két egy-forma. Legyen  $V_p$  az  $M$  sokaság érintőtere a  $p$  pontban. Keressük a  $\omega \wedge \mu$  két-forma hatását a  $(\xi, \eta) \in V_p \times V_p$  rendezett vektorpáron. A  $p$  pont környezetében bevezetjük az  $x^\mu$  koordinátarendszert, és a megfelelő  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  és  $dx^\mu$  koordináta-bázisokat rendre  $V_p$ -ben és a  $V_p^*$  duális vektortérben. Ekkor írhatjuk, hogy  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ,  $\eta = \eta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ,  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ ,  $\mu = \mu_\mu dx^\mu$ . Az ékszorzat tehát átírható koordináta-bázisban

$$\omega \wedge \mu = \omega_\mu \mu_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = 2\omega_{[\mu} \mu_{\nu]} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\text{B.1.4.})$$

alakba, ahonnan  $(\omega \wedge \mu)_{\mu\nu} = 2\omega_{[\mu} \mu_{\nu]}$ . Másrészt, mivel

$$dx^\mu \wedge dx^\nu(\xi, \eta) = \xi^\mu \eta^\nu - \xi^\nu \eta^\mu, \quad (\text{B.1.5.})$$

azért

$$\begin{aligned} \omega \wedge \mu(\xi, \eta) &= 2\omega_{[\mu} \mu_{\nu]}(\xi^\mu \eta^\nu - \xi^\nu \eta^\mu) = \omega_\mu \xi^\mu \mu_\nu \eta^\nu - \omega_\mu \eta^\mu \mu_\nu \xi^\nu \\ &= \omega(\xi) \mu(\eta) - \omega(\eta) \mu(\xi). \end{aligned} \quad (\text{B.1.6.})$$

**Definíció:** Az  $\omega$   $p$ -forma külső deriváltjának azt a  $d\omega$   $(p+1)$ -formát nevezzük, amelyet

$$(d\omega)_{a_1 \dots a_p b} = (p+1) \nabla_{[b} \omega_{a_1 \dots a_p]} \quad (\text{B.1.7.})$$

definiál. Ezt formálisan írhatjuk  $d\omega = \nabla \wedge \omega$  alakba is, mintha a deriválás operátora is 1-forma lenne.

**Megjegyzés:** Fontos tudatosítani, hogy a deriválás eredménye nem függ attól, hogy  $\nabla_b$  melyik deriváló operátor (akár a közönséges parciális deriválás operátora is lehet). Ez azért van így, mert a külső derivált komponenseinek valamely koordináta-bázisban történő tényleges kiszámításakor a deriválást a  $p$ -forma komponensein, mint a koordináták függvényein kell elvégezni.

**Példa:** Legyen  $\omega$  egy-forma, akkor  $(d\omega)_{ab} = 2\nabla_{[b}\omega_{a]}$ , amelynek komponensei a lokális koordináta-bázisban  $(d\omega)_{\mu\nu} = \nabla_\nu\omega_\mu(x) - \nabla_\mu\omega_\nu(x) = \partial_\nu\omega_\mu - \partial_\mu\omega_\nu$ , úgyhogy - korábbi jelöléseinket használva - kapjuk, hogy  $d\omega(\xi, \eta) = (\partial_\nu\omega_\mu - \partial_\mu\omega_\nu)\xi^\mu\eta^\nu$ .

**Állítás: Poincaré-lemma:** Bármely  $\omega$   $p$ -forma esetén

$$d^2\omega = 0. \quad (\text{B.1.8.})$$

Ez azért van így, mert a második parciális deriváltakban felcserélhető a deriválások sorrendje, úgyhogy

$$(d^2\omega)_{bca_1\dots a_p} = (p+2)(p+1)\partial_{[b}\partial_c\omega_{a_1\dots a_p]} = 0. \quad (\text{B.1.9.})$$

**Állítás: A Poincaré-lemma megfordítása:** Legyen  $\alpha$   $p$ -forma, amelyre  $d\alpha = 0$ . Ekkor lokálisan mindig létezik olyan  $\beta$   $(p-1)$ -forma, amelynek  $\alpha$  a deriváltja, azaz amelyre  $\alpha = d\beta$ . Ez általában globálisan nem igaz.

## B.2. Integrálás

Az  $n$ -dimenziós  $M$  sokaságon az  $n$ -formák lineáris tere 1-dimenziós. Ez azt jelenti, hogy függvény-szorozótól eltekintve egyetlen  $n$ -forma létezik.

**Definíció:** Az  $M$  sokaságot **irányíthatónak** nevezzük, ha létezik olyan  $\epsilon$   $n$ -forma, a **sokaság orientációja**, amely folytonos és sehol sem tűnik el  $M$ -en:  $\epsilon_{[a_1\dots a_n]}$ . Az  $\epsilon$  és az  $\epsilon'$  irányítás ekvivalens, ha létezik olyan  $f > 0$  függvény, hogy  $\epsilon = f\epsilon'$ .

Minden irányítható sokaságon két inekvivalens orientáció létezik, az egyiket jobbkezesnek, a másikat balkezesnek nevezik. Minden egyszeresen összefüggő sokaság irányítható.

**Példa:**  $\mathbb{R}^n$  és az  $(m+1)$ -dimenziós  $\mathbb{R}^{m+1}$ -be ágyazott  $m$ -dimenziós  $S^m$  gömbfelület irányítható sokaságok.

A továbbiakban a **folytonos  $\alpha$   $n$ -formamező integrálját értelmezzük az  $n$ -dimenziós, irányítható  $M$  sokaságon**. Először értelmezzük az integrált egy  $U \subset M$  nyílt halmazon, majd parakompakt sokaságok esetén az integrál lokális definícióját kiterjesztjük az egységfelbontás segítségével az egész sokaságra. Ezt követően pedig az  $n$ -dimenziós  $M$  sokaságon értelmezett  $p$ -formák integrálját fogjuk definiálni „jó viselkedésű”  $p$ -dimenziós részsokaságokon.

Legyen  $\epsilon$  a sokaság orientációja.

1. Legyen  $U \subset M$  egyetlen  $\psi$  koordinátarendszerrel lefedett nyílt halmaz, és legyen ebben a koordinátabázisban

$$\epsilon = h dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \text{ ill. } \epsilon_{a_1 \dots a_n} = n! h(x^1, \dots, x^n) (dx^1)_{[a_1} \dots (dx^n)_{a_n]}, \quad (\text{B.2.1.})$$

ahol  $h$  el nem tűnő függvény  $U$ -n. Megállapodás szerint, aszerint, hogy  $h > 0$ , ill.  $h < 0$  rendre **jobb-**, ill. **balsodrású koordinátarendszer**ről beszélünk. Bármely  $\alpha$   $n$ -forma kifejezhető a  $\psi$  koordinátabázis szerint,

$$\alpha = a(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (\text{B.2.2.})$$

Ha  $\psi$  jobbsodrású, akkor **az  $\alpha$   $n$ -forma  $U \subset M$  nyílt halmazon vett integráljának** definíciója:

**Definíció:**

$$\int_U \alpha = \int_{\psi[U]} a(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n, \quad (\text{B.2.3.})$$

ahol  $\psi[U]$  az  $U \subset M$  nyílt halmaz képe  $\mathbb{R}^n$ -ben, és a jobb oldalon álló integrál szokásos Riemann-integrál (v. Lebesgue<sup>127</sup>-integrál).

**Állítás:** Az így értelmezett integrál független a koordinátarendszer megválasztásától.

**Megjegyzés:** Tegyük fel, hogy az  $M$  sokaságot  $\bar{u} = (u^1, \dots, u^n)$  paraméterekkel parametrizáltuk, azaz  $\bar{x}(\bar{u}) = (x^1(\bar{u}), \dots, x^n(\bar{u}))$ , akkor az integrál

$$\int_U \alpha = \int_D a(\bar{x}(\bar{u})) \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(u^1, \dots, u^n)} du^1 \dots du^n, \quad (\text{B.2.4.})$$

ahol  $D$  a  $\psi[U]$  tartománynak megfelelő értelmezési tartomány a paraméter-térben.

2. Legyen az  $M$  sokaság parakompakt. Ekkor a sokaságnak létezik lokálisan véges  $\{O_i\}$  lefedése, azaz minden pontja lefedhető véges sok olyan  $O_i$  nyílt halmazzal és rajtuk értelmezett  $\psi_i$  lokális térképekkel, hogy minden  $O_i$ -nek az  $\bar{O}_i$  lezártja kompakt. Ekkor pedig létezik az  $\{O_i\}$  lefedéshez tartozó  $\{f_i\}$  egységfelbontás.

**Definíció:** Ha a

$$\sum_i \int_{\psi_i[O_i]} f_i |a_i|^2 dx^1 \dots dx^n < \infty \quad (\text{B.2.5.})$$

integrál véges, akkor **az  $\alpha$   $n$ -formát az  $M$  parakompakt sokaságon integrálhatónak nevezzük és integrálját az**

$$\int_M \alpha = \sum_i \int_{O_i} f_i \alpha = \sum_i \int_{\psi_i[O_i]} f_i a_i(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n \quad (\text{B.2.6.})$$

összefüggéssel értelmezzük, ahol a második egyenlőség az integrál nyílt halmazon történő lokális definíciójából következik.

**Megjegyzés:** Meg lehet mutatni, hogy az így bevezetett integrál-fogalom független az  $\{O_i\}$  lefedéstől és a hozzárendelt egységfelbontástól.

<sup>127</sup>Henri Léon Lebesgue, francia matematikus, 1875-1941.

3. A fentieket felhasználhatjuk arra, hogy értelmezzük az  $n$ -dimenziós  $M$  parakompakt sokaságon adott  $p$ -forma ( $p < n$ ) integrálját  $M$  valamely „jó viselkedésű”  $p$ -dimenziós felületén.

**Definíció:** Legyen  $S$   $p$ -dimenziós sokaság, ahol  $p < n$ . Ha létezik olyan  $\phi : S \mapsto M$   $C^\infty$ -típusú, lokálisan kölcsönösen egyértelmű leképezés, amelynek a  $\phi^{-1} : \phi[O] \mapsto S$  inverze is  $C^\infty$ , akkor azt mondjuk, hogy  $\phi[S]$  **az  $M$ -be süllyesztett részsokaság**. Itt a  $\phi$  **leképezés lokális kölcsönös egyértelműsége** azt jelenti, hogy minden  $q \in S$  ponthoz létezik olyan nyílt  $O \subset S$  környezet, hogy  $\phi$  az  $O$  környezeten kölcsönösen egyértelmű. Ha az előbbi feltételek úgy teljesülnek, hogy  $\phi$  globálisan is kölcsönösen egyértelmű, akkor azt mondjuk, hogy **a  $\phi[S]$ -et az  $M$ -be beágyazott részsokaságnak** nevezzük. (A  $\phi$  leképezés kölcsös egyértelműségének globalitása biztosítja, hogy a  $\phi[S]$  képhalmaz „nem metsz önmagába”.)

A továbbiakban „**jó viselkedésű felületen**”  $M$ -be beágyazott részsokaságot **értünk**. Az  $n$ -dimenziós  $M$  sokaságba beágyazott  $(n - 1)$ -dimenziós részsokaságot **hiperfelületnek** nevezzük.

A beágyazás automatikusan generál egy természetes sokaság-szerkezetet  $\phi[S]$ -en. Ezért minden  $q \in \phi[S]$  pontban létezik  $\phi[S]$ -nek a  $W_q$  érintőtere, ami azonosítható az  $M$  sokaság ugyanezen  $q$  pontban vett  $V_q$  érintőterének egy  $p$ -dimenziós alterével. Ennek következtében, az  $M$ -en adott bármely  $\beta$   $p$ -forma generál egy  $\tilde{\beta}$   $p$ -formát  $\phi[S]$ -en azáltal, hogy  $\beta$  értelmezési tartományát  $\underbrace{V_q \times \dots \times V_q}_{p\text{-szer}}$ -ról  $\underbrace{W_q \times \dots \times W_q}_{p\text{-szer}}$ -ra

korlátozzuk. Ezt figyelembe véve  $\beta$  integrálját a  $\phi[S]$  beágyazott sokaságon úgy értelmezzük, mint  $\tilde{\beta}$  integrálját  $\phi[S]$ -en:

$$\int_{\phi[S]} \beta = \int_{\phi[S]} \tilde{\beta}. \quad (\text{B.2.7.})$$

Ezzel visszavezettük az integrál-fogalmat a már előzőleg bevezetett „ $n$ -forma integrálja  $n$ -dimenziós sokaságon” fogalmára.

**Megjegyzés:** Az  $M$   $n$ -dimenziós sokaságon értelmezett  $\beta$   $p$ -formát ( $p < n$ ) koordináta-bázisban felírhatjuk

$$\beta = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \beta_{i_1, \dots, i_p}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (\text{B.2.8.})$$

alakban, ahol  $\beta_{i_1, \dots, i_p}(x^1, \dots, x^n)$  valós függvények.

## B.3. Integráltételek

### B.3.1. Irányítható sokaságok és a Stokes-tétel

A differenciálformák integráljaira vonatkozó tételek megfogalmazásához szükségünk lesz a határral rendelkező irányítható sokaság fogalmára.

**Definíció:** Az  $n$ -dimenziós, határral rendelkező  $N$  sokaság simán van összevarrva olyan lokális tartományokból, amelyek olyanok, mint  $\mathbb{R}^n$  „felének”, azaz  $\mathbb{R}^n$   $x^1 \leq 0$  részének valamely nyílt halmazai.

A beágyazott sokaság speciális esete, amikor a beágyazandó  $S$  sokaság  $(n - 1)$ -dimenziós és a beágyazó leképezés olyan, hogy  $\phi[S]$  az  $N \subset M$  zárt tartomány  $(n - 1)$ -dimenziós határa,  $\phi[S] = \mathring{N}$ . Ekkor  $N$  belseje,  $\text{int}(N) = N - \mathring{N}$  egy határok nélküli  $n$ -dimenziós sokaság. Az  $\mathring{N}$  határ sokaság-szerkezetét az  $N$  lefedéséhez használt lokális térképek  $x^1 = 0$ -hoz tartozó részei határozzák meg. Az  $\mathring{N}$  határ egy  $(n - 1)$ -dimenziós, határok nélküli sokaság.

Ha a határral rendelkező  $N$  sokaság irányítható, akkor az irányítás indukál egy irányítást az  $\mathring{N}$  határon is. **Az  $\mathring{N}$  határnak az  $N$  sokaság orientációja által indukált orientációját** a következőképpen kapjuk meg:

1. Tekintsük az  $\mathring{N}$ -on azokat az  $U_i$  lokális koordinátarendszereket, amelyeket úgy kapunk  $N$  jobbkezes lokális koordinátarendszereiből, hogy elhagyjuk az  $x^1$  koordinátát.
2. Az  $\mathring{N}$ -ön úgy akarunk jobbkezes irányítást definiálni, hogy az 1. pont szerinti lokális térképek jobbkezesek legyenek. Ehhez
  - (a) belátjuk, hogy bármely két lokális koordinátarendszer (az egyik a vesszőtlen, a másik a vesszős) átfedési tartományában  $\det(\partial x'^\mu / \partial x^\nu) > 0$ ;
  - (b) majd olyan  $(F_i, U_i)$  egységfelbontásokat választunk  $\mathring{N}$ -ön, ahol az  $U_i$ -k az 1. pont szerinti koordinátakörnyezetek.
3. Az  $\mathring{N}$  orientációjának definíciója ekkor

$$\tilde{\epsilon} = \sum_i F_i dx_i^2 \cdots dx_i^n, \quad (\text{B.3.9.})$$

amiről belátható, hogy folytonos és el nem tűnő.

**B.1. tétel: Stokes-tétel:** Legyen  $N$   $n$ -dimenziós kompakt, irányítható és határral rendelkező sokaság. Legyen  $\alpha$  az  $M$ -en értelmezett  $(n - 1)$ -forma, ami  $C^1$ . Ekkor

$$\int_{\text{int}(N)} d\alpha = \int_{\mathring{N}} \alpha, \quad (\text{B.3.10.})$$

ahol a baloldali integrált az  $N$ -en értelmezett  $\epsilon$  irányítással, a jobboldali integrált pedig az  $\epsilon$  által az  $\mathring{N}$  határon indukált  $\tilde{\epsilon}$  irányítással kell érteni.

### B.3.2. Térfogati integrál

A továbbiakban bevezetjük a térfogatelem fogalmát a sokaságon, majd ennek segítségével a függvények integrálját értelmezzük. Megmutatjuk, hogy a metrika természetes módon indukál egy jobbsohdrású térfogatelemet. Végül az  $n$ -dimenziós sokaságon értelmezett  $(n - 1)$ -formára vonatkozó Stokes-tétel speciális esetét átírjuk a sokaságon értelmezett vektormezőre vonatkozó Gauss-tétel alakjába.

**Definíció:** Az  $n$ -dimenziós sokaság  $\epsilon$  **térfogatelemén** az egész sokaságon el nem tűnő, folytonos  $n$ -formát értünk. A térfogatelemet az irányítástól csupán az különbözteti

meg, hogy a térfogatelem  $f$  függvénnyel vett szorzata,  $f\varepsilon$  nem egyezik meg az eredeti  $\varepsilon$  térfogatelemmel.

**Definíció:** Az  $f$  függvénynek az  $M$  sokaságon vett integrálja

$$\int_M f = \int_M f\varepsilon, \quad (\text{B.3.11.})$$

ahol a jobboldali integrál  $n$ -forma integrálja, ahogyan fentebb definiáltuk.

Ha csak a sokaság-struktúra adott  $M$ -en, akkor nincsen természetes módja a térfogatelem megválasztásának. Ha azonban adott a sokaságon a  $g_{ab}$  metrika is, akkor a **térfogatelem természetes módon választható** úgy, hogy kielégítse az

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = (-1)^s n! \quad (\text{B.3.12.})$$

összefüggést, ahol  $s$  a metrika szignatúrájában a  $-$  előjelek száma, így a Riemann- és a Lorentz-metrika esetén rendre  $s = 0$  és  $s = 1$ .

**Következmény:** Ennek a választásnak az alábbi következményei vannak:

1. A térfogatelem deriváltja zérus:

$$\nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = 0. \quad (\text{B.3.13.})$$

Hattassuk a deriválás operátorát a (B.3.12.) egyenlet midkét oldalára, akkor

$$2\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = 0 \quad (\text{B.3.14.})$$

adódik, ahonnan a bizonyítani kívánt tulajdonságot kapjuk, mivel  $\varepsilon^{a_1 \dots a_n}$  definíció szerint sehol sem tűnik el és  $\nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n}$  pedig az  $a_1, \dots, a_n$  indexekben teljesen antiszimmetrikus.

- 2.

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} = (-1)^s n! \delta_{b_1}^{[a_1} \dots \delta_{b_n}^{a_n]}. \quad (\text{B.3.15.})$$

Ez az azonosság abból következik, hogy az  $(n, n)$  típusú, mind a kontravariáns, mind a kovariáns indexekben teljesen antiszimmetrikus tenzorok vektortere 1-dimenziós, úgyhogy ezért azoknak az azonossági leképezés antiszimmetrizálásával kell előállniuk.

3. Ha a fenti egyenletben  $j$  darab kontra- és kovariáns indexre kontrakciót hajtunk végre, akkor az alábbi azonosság adódik:

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_j a_{j+1} \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_j b_{j+1} \dots b_n} = (-1)^s (n-j)! j! \delta_{b_{j+1}}^{[a_{j+1}} \dots \delta_{b_n}^{a_n]}. \quad (\text{B.3.16.})$$

4. Jobbsodrású ortonormált koordinátabázisban a térfogatelem komponensei

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} = \begin{cases} (-1)^P, & \text{ha minden } \mu_i \text{ index különböz} \\ 0 & \text{egyéb} \end{cases}, \quad (\text{B.3.17.})$$

ahol  $P = 0$  vagy  $P = 1$ , ha  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  az  $(1, 2, \dots, n)$  számsorozatnak rendre páros vagy páratlan permutációja, azaz az  $n$ -dimenziós Levi-Civita<sup>128</sup>-szimbólum.

---

<sup>128</sup>Tullio Levi-Civita, olasz matematikus, 1873-1941.



5. Bármely jobbsodrású koordinátarendszerben a természetes térfogatelem

$$\varepsilon = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (\text{B.3.18.})$$

Koordinátabázisban

$$\sum_{\mu_1 \dots \mu_n} g^{\mu_1 \nu_1} \cdots g^{\mu_n \nu_n} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_n} = (-1)^s n! \quad (\text{B.3.19.})$$

ahol a bal oldal azonban  $(n!)(\varepsilon_{12\dots n})^2 \det(g^{\mu\nu})$  és  $\det(g^{\mu\nu}) = 1/\det(g_{\mu\nu})$ , úgyhogy

$$\varepsilon_{12\dots n} = [(-1)^s \det(g_{ab})]^{1/2} = \sqrt{|g|} \quad (\text{B.3.20.})$$

ahol  $g = \det(g_{\mu\nu})$ .

**Következmény:** Végül tehát írhatjuk, hogy

$$\int_{\text{int}(N)} f = \int_{\text{int}(N)} f \varepsilon = \sum_i f_i \int_{\psi_i[O_i]} f(x^1, \dots, x^n) \sqrt{|g(x^1, \dots, x^n)|} dx^1 \cdots dx^n, \quad (\text{B.3.21.})$$

ahol  $\{f_i\}$  a  $\{(\psi_i, O_i)\}$  lokális térképekkel történő lefedéshez tartozó egységfelbontás az  $N$  parakompakt sokaságon.

### B.3.3. A Gauss-tétel

**Állítás:** Legyen  $N$   $n$ -dimenziós, határokkal rendelkező, irányított kompakt sokaság. Legyen adott  $N$ -en a  $g_{ab}$  metrika és a hozzá tartozó  $\varepsilon$  térfogatelem. Legyen  $v^a$   $C^1$  típusú (folytonosan differenciálható) vektormező  $N$ -en. Tegyük fel továbbá, hogy  $N$  határa nem null-felület. Ekkor a Stokes-tétel átírható a **Gauss-tétel** alakjába,

$$\int_{\text{int}(N)} \nabla_a v^a = \int_{\mathring{N}} n_a v^a, \quad (\text{B.3.22.})$$

ahol  $n^a$  az  $\mathring{N}$  határ normális egységvektora (kifelé mutató, ha  $n^a$  térszerű és befelé mutató, ha  $n^a$  időszerű), a baloldali integrált a  $g_{ab}$  metrikához tartozó természetes  $\varepsilon$  térfogatelemmel, a jobboldalt a határon indukált  $\tilde{\varepsilon}$  térfogatelemmel kell kiszámolni. Az indukált térfogatelem

$$\frac{1}{n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = n_{[a_1} \tilde{\varepsilon}_{a_2 \dots a_n]} \quad (\text{B.3.23.})$$

kapcsolatban áll az  $\tilde{\varepsilon}$  természetes térfogatelemmel.

**Példa:** Legyen  $n = 3$ , a metrika euklideszi szignatúrájú és a koordinátarendszer jobbsodrású, ekkor az  $N$  3-dimenziós tartomány határan indukált  $\tilde{\varepsilon}$  felületelem komponensei

$$(\tilde{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & n^3 & -n^2 \\ -n^3 & 0 & n^1 \\ n^2 & -n^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3.24.})$$

ahol  $n^\nu$  a 2-dimenziós határfelület normálisa ( $n_\mu = h_{\mu\nu}n^\nu$  és  $h_{\mu\nu}$  a határon indukált metrika).

Valóban ekkor írhatjuk, hogy

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3} = n_{\mu_1}\tilde{\epsilon}_{\mu_2\mu_3} + n_{\mu_2}\tilde{\epsilon}_{\mu_3\mu_1} + n_{\mu_3}\tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2}. \quad (\text{B.3.25.})$$

Legyen  $(\mu_1\mu_2\mu_3)$  páros permutációja az indexeknek, akkor innen

$$1 = n_{\mu_1}\tilde{\epsilon}_{\mu_2\mu_3} + n_{\mu_2}\tilde{\epsilon}_{\mu_3\mu_1} + n_{\mu_3}\tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2} \quad (\text{B.3.26.})$$

adódik, ami kielégíthető a  $\tilde{\epsilon}_{23} = n^1$ ,  $\tilde{\epsilon}_{31} = n^2$ ,  $\tilde{\epsilon}_{12} = n^3$  választással. Mivel  $\tilde{\epsilon}$  antiszimmetrikus, ezáltal az összes nem triviális komponense egyértelműen meg van határozva.

**Példa:** Legyen  $n = 4$ , a metrika Lorentz-szignatúrájú és a koordinátarendszer jobbsodrású, ekkor a 4-dimenziós tartomány térszerű vagy időszerű határán rendre  $n_\mu n^\mu = +1$  vagy  $n_\mu n^\mu = -1$  és akkor az előző példához hasonló megfontolással kapjuk, hogy pl.

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\epsilon_{0123} = \frac{1}{4}(n_0\tilde{\epsilon}_{123} + n_1\tilde{\epsilon}_{230} + n_2\tilde{\epsilon}_{301} + n_3\tilde{\epsilon}_{012}), \quad (\text{B.3.27.})$$

ahonnan az indukált térfogatelem el nem tűnő komponensei térszerű vagy időszerű 3-dimenziós határfelületen

$$\tilde{\epsilon}_{123} = \pm n^0, \quad \tilde{\epsilon}_{230} = \pm n^1, \quad \tilde{\epsilon}_{301} = \pm n^2, \quad \tilde{\epsilon}_{012} = \pm n^3 \quad (\text{B.3.28.})$$

rendre + vagy - előjellel.

**Megjegyzés:** A Gauss-tételnek létezik olyan általánosítása, amikor  $N$  határa nullfelület.

## B.4. Frobenius tétele

Láttuk a vektorokról szóló fejezetben, hogy amennyiben az  $n$ -dimenziós  $M$  sokaságon értelmezve van a  $v^a$  sima, azaz  $C^\infty$  vektormező, akkor mindig létezik az 1-dimenziós beágyazott részsokaságoknak, a  $v^a$  vektormező integrálgörbéinek  $S$  családja, hogy minden  $p \in S$  pontban  $v^a|_p$  a  $p$ -n áthaladó integrálgörbe érintője, és ez az érintővektor természetesen kifeszít egy 1-dimenziós  $W_p \subset V_p$  alteret a  $p \in M$  pontban vett  $V_p$  érintőtérben. Továbbá azt is tudjuk, hogy minden  $p \in M$  ponton átmegy pontosan egy ilyen integrálgörbe.

Most felteszünk egy hasonló, de általánosabb kérdést. Legyen  $M$   $n$ -dimenziós sokaság. Tegyük fel, hogy adottak minden  $x \in M$  pontban a  $V_x$  érintőtér olyan  $W_x \subset V_x$   $m$ -dimenziós alterei, ahol  $m < n$ , és amelyet  $C^\infty$  vektormezők feszítenek ki, ha  $x$  befutja  $M$ -et. Jelölje  $W$  ezen lokális  $W_x$  alterek együttesét. Azt mondhatjuk ekkor, hogy  $W$  **olyan  $W_x$  alterek együttese, amelyek simán változnak**, ha  $x$  befutja  $M$ -et. Azt kérdezzük, hogy **létezik-e  $W$ -hez tartozó integrális részsokaságok családja**, azaz olyan beágyazott  $m$ -dimenziós  $S$  részsokaságok családja, hogy bármely  $S$  minden  $y \in S$  pontjában  $S$  érintőtere éppen  $W_y$ .

Ha  $W$  1-dimenziós, akkor a  $W$ -hez tartozó integrális részsokaságok egy sima  $v^a$  vektormező integrálgörbéi. Ezek léteznek és ilyenkor a feltett kérdésre igenlő a válasz. Ha  $\dim W > 1$ , akkor nem teljesen nyilvánvaló a válasz; előfordulhat, hogy  $W$  úgy „megcsavarodik”, hogy nem létezik hozzátartozó integrális részsokaságok családja. Frobenius tétele

annak a szükséges és elégséges feltételét fogalmazza meg, hogy létezzen a  $W$ -hez tartozó integrális részsokaságok családja.

**B.2. tétel: Frobenius-tétele (vektori alakban):** Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az  $x \in M$  pontokban vett érintőterek  $m$ -dimenziós altereinek sima  $W$  együttese rendelkezzen integrális részsokaságok családjával, az, hogy bármely két  $Y^a, Z^a \in W$  vektormező esetén teljesüljön az  $[Y, Z]^a \in W$  feltétel.

A tétel azt jelenti, hogy ha adott az  $n$ -dimenziós  $M$  sokaságon  $m$  darab, a sokaság minden  $x \in M$  pontjában lineárisan független  $X_1^a, \dots, X_m^a$  sima vektormező, akkor az általuk kifeszített érintő alterek sima  $W$  összessége akkor és csak akkor integrálható, ha teljesül, hogy  $[X_j, X_k] = \sum_{\ell=1}^m c_\ell^{jk}(x) X_\ell$ , ahol  $j, k = 1, \dots, m$  és  $c_\ell^{jk}(x)$  sima függvények. Ekkor és csak ekkor létezik olyan  $m$ -dimenziós,  $M$ -be ágyazott hiperfelületek családja, amelyeknek minden  $p$  pontjában az érintőtere az adott pontban vett  $X_1^a|_x, \dots, X_m^a|_x$  vektorok által kifeszített altér.

A Frobenius-tétel másik alakban, az úgynevezett duális alakban is megfogalmazható. Adott  $W_x \subset V_x$   $m$ -dimenziós alterek esetén tekinthetjük azon  $\omega \in V_x^*$  1-formákat, amelyek  $\omega_a X^a = 0$  tulajdonsággal rendelkeznek bármely  $X^a \in W_x$  esetén. Ezek az 1-formák  $(n-m)$ -dimenziós  $T_x^*$  alteret feszítenek ki a duális térben,  $T_x^* \subset V_x^*$ . Megfordítva, azok az  $X^a$  vektorok, amelyek bármely  $\omega_a \in T_x^*$  1-forma esetén kielégítik az  $\omega_a X^a = 0$  összefüggést, egy  $W_x \subset V_x$   $m$ -dimenziós alteret feszítenek ki a  $V_x$  érintőtérben. Ezek szerint az  $m$ -dimenziós  $W_x$  érintő alterek sima  $W$  összességéhez egyértelműen tartozik az  $(n-m)$  dimenziós  $T_x^*$  duális alterek sima  $T^*$  összessége. Feltehető tehát a korábbi kérdésünk úgy is, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az 1-formák  $(n-m)$ -dimenziós tereinek sima  $T^*$  összessége olyan legyen, hogy a hozzátartozó érintőterek  $W$  sima összessége rendelkezzen integrális részsokaságok családjával. A választ Frobenius tétele, pontosabban annak duális alakja adja meg.

**B.3. tétel: Frobenius tétele (duális alakban):** Legyen  $T^*$  az 1-formák  $(n-m)$ -dimenziós altereinek sima összessége, és legyen  $\{\mu^\alpha\}$  ( $\alpha = 1, \dots, n-m$ ) azon egyformamezők, amelyek ezeket az altereket az egyes  $x \in M$  pontokban kifeszítik. Ekkor a  $T^*$  elemeihez tartozó  $m$ -dimenziós érintőalterek sima  $W$  összessége akkor és csak akkor rendelkezik integrális részsokasággal, ha léteznek alkalmas  $\nu^\alpha$  1-formák, hogy bármely  $\omega \in T^*$  1-forma deriváltja (ami 2-forma) felbontható

$$d\omega = \sum_{\alpha=1}^{n-m} \mu^\alpha \wedge \nu^\alpha \quad (\text{B.4.1.})$$

alakban.

A **B.2. tétel:** értelmében integrálos részsokaságok akkor és csak akkor léteznek, ha minden  $\omega_a \in T^*$  és minden  $Y^a, Z^a \in W$  esetén, amelyek eleget tesznek az  $\omega_a Y^a = \omega_a Z^a = 0$  feltételnek,

teljesül, hogy  $\omega_a[Y, Z]^a = 0$ . Ennek alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0 &= \omega_a(Y^b \nabla_b Z^a - Z^b \nabla_b Y^a) \\
&= \omega_a(\nabla_b(Y^b Z^a) - Z^a \nabla_b Y^b) - \omega_a(\nabla_b(Z^b Y^a) - Y^a \nabla_b Z^b) \\
&= \omega_a(\nabla_b(Y^b Z^a) - \omega_a(\nabla_b(Z^b Y^a)) \\
&= \nabla_b(\omega_a Z^a Y^b) - Y^b Z^a \nabla_b \omega_a - \nabla_b(\omega_a Y^a Z^b) + Z^b Y^a \nabla_b \omega_a \\
&= -Y^b Z^a \nabla_b \omega_a + Z^b Y^a \nabla_b \omega_a \\
&= (Z^b Y^a - Y^b Z^a) \nabla_{[b} \omega_{a]} \\
&= +2Z^b Y^a \nabla_{[b} \omega_{a]}.
\end{aligned} \tag{B.4.2.}$$

Mivel  $Z$ -t és  $Z$ -t bármely  $T^*$ -ből vett 1-forma annihilálja, a kapott egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha léteznek alkalmas  $\vec{\nu}^\alpha \in T^*(M)$  ( $\alpha = 1, \dots, n-m$ ) 1-formák, amelyekkel a  $\nabla_{[b} \omega_{a]}$  2-forma

$$\nabla_{[b} \omega_{a]} = \sum_{\alpha=1}^{n-m} \mu_{[a}^\alpha \nu_{b]}^\alpha \tag{B.4.3.}$$

alakba írható.

Egy másik fontos kérdés, ami gyakran előfordul az alkalmazásokban, a vektormezők hiperfelület-ortogonalitásának a kérdése. Tegyük fel, hogy értelmezve van a  $g_{ab}$  metrika az  $M$  sokaságon. A kérdés az, hogy egy  $\xi^a$  vektormező ortogonális-e a hiperfelületek valamely családjára. Ugyanez a kérdés úgy is átfogalmazható, hogy a  $\xi^a$  vektormezőre ortogonális  $(n-1)$ -dimenziós alterek  $W$  sima összessége rendelkezik-e integrálható részsokaságok, azaz  $(n-1)$ -dimenziós hiperfelületek családjával.

**Állítás:** Legyen  $T^*$  a  $\xi^a$  vektormezőhöz a metrika által hozzárendelt  $\xi_a = g_{ab} \xi^b$  1-forma által kifesztett 1-dimenziós duális terek  $T^*$  sima összessége. A  $\xi^a$  vektormező akkor és csak akkor hiperfelület-ortogonális, ha fennáll a

$$\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0 \tag{B.4.4.}$$

feltétel.

Frobenius tétele értelmében a  $\xi^a$  vektormezőhöz hozzárendelt  $\xi_a = g_{ab} \xi^b$  1-formák duális altereinek  $T^*$  sima összességéhez tartozó sima  $W$  érintőaltér-összesség akkor és csak akkor integrálható, ha  $\nabla_{[a} \xi_{b]} = \xi_{[a} \nu_{b]}$  alakú, ahol  $\nu_b$  alkalmas 1-forma, hiszen 1-dimenziós duális terek egyetlen  $\mu$  bázisvektora azonosítható  $\xi_a$ -val. Ekkor

$$\begin{aligned}
\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} &= \frac{1}{3!} (\xi_a \nabla_b \xi_c + \xi_b \nabla_c \xi_a + \xi_c \nabla_a \xi_b - \xi_c \nabla_b \xi_a - \xi_b \nabla_a \xi_c - \xi_a \nabla_c \xi_b) \\
&= \frac{1}{3} (\xi_a \nabla_{[b} \xi_{c]} + \xi_b \nabla_{[c} \xi_{a]} + \xi_c \nabla_{[a} \xi_{b]}) \\
&= \frac{1}{3} (\xi_a \xi_{[b} \nu_{c]} + \xi_b \xi_{[c} \nu_{a]} + \xi_c \xi_{[a} \nu_{b]}) = 0
\end{aligned} \tag{B.4.5.}$$

miatt a szóbanforgó hiperfelület-sereg létének szükséges és elégséges feltétele valóban  $\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]}$  eltűnése.

## C. A sokaságok leképezései

### C.1. Előre- és hátratulások

**Definíció:** Legyenek  $M$  és  $N$  sokaságok, amelyek lehetnek különböző dimenziójúak, és legyen  $\phi : M \mapsto N$  egy  $C^\infty$  leképezés. Ekkor  $\phi$  természetes módon

1. **hátratulja** az  $N$ -en értelmezett  $f : N \mapsto \mathbb{R}$  függvényt az

$$f \circ \phi : M \mapsto \mathbb{R} \quad (\text{C.1.1.})$$

$M$ -en értelmezett függvénybe;

2. **előretolja** a  $p \in M$  ponthoz tartozó érintőtér  $v \in V_p$  érintővektorát a  $\phi(p) \in N$  pontban értelmezett érintőtér  $\phi^*v \in V_{\phi(p)}$  vektorába, amelyet az

$$(\phi^*v)(f) = v(f \circ \phi), \quad \forall f : N \mapsto \mathbb{R} \quad (\text{C.1.2.})$$

összefüggés definiál, ahol  $f$  sima függvény.

**Állítás:** A  $\phi : M \mapsto N$  leképezés akkor és csak akkor kölcsönösen egyértelmű a  $p \in M$  környezetében, ha a  $\phi^* : V_p \mapsto V_{\phi(p)}$  leképezés kölcsönösen egyértelmű.

**Megjegyzés:** Legyen  $\{x^\mu\}$  ( $\mu = 1, \dots, m$ ) a  $p$  pont környezetét lefedő koordináta-rendszer,  $\{y^\nu\}$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) pedig a  $\phi(p)$  pont környezetét lefedő koordináta-rendszer. Ekkor  $\phi$ -t az  $y^\mu = y^\mu(x^1, \dots, x^m)$  koordinátatranszformációval azonosíthatjuk. Függvény hátratulása pedig azt jelenti, hogy

$$(f \circ \phi)(x^1, \dots, x^m) = f(y^1(x^1, \dots, x^m), \dots, y^n(x^1, \dots, x^m)). \quad (\text{C.1.3.})$$

A  $\phi^* : V_p \mapsto V_{\phi(p)}$  leképezés lineáris, azaz vektorok linárkombinációinak előretoltja a vektorok előretoltjainak ugyanolyan linárkombinációja. A  $V_p$  és  $V_{\phi(p)}$  érintőterekben rendre a megfelelő  $\partial/\partial x^\mu$  és  $\partial/\partial y^\nu$  koordinátabázisokat használva a  $\phi^*$  lineáris leképezést mátrix ábrázolja,

$$(\phi^*)^\nu_\mu = \partial y^\nu / \partial x^\mu, \quad (\text{C.1.4.})$$

ami a  $\phi$ -nek megfelelő koordinátatranszformáció Jacobi-mátrixa.

Koordináta-bázisban írhatjuk, hogy

$$(\phi^*v)(f) = v(f \circ \phi) = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f(\bar{y}(\bar{x}))) = v^\mu \frac{\partial f}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}, \quad (\text{C.1.5.})$$

ahonnan kiolvashatjuk, hogy

$$(\phi^*v)|_{V_{\phi(p)}} = v^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \equiv (\phi^*v)^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu}, \quad (\phi^*v)^\nu = v^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} = (\phi^*)^\nu_\mu v^\mu, \quad (\phi^*)^\nu_\mu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (\text{C.1.6.})$$

**Állítás:** A  $\phi$  leképezés segítségével **hátratulhatjuk** a  $\phi(p) \in N$  ponthoz tartozó duális vektortér  $\mu_a \in V_{\phi(p)}^*$  duális vektorait a  $p \in M$  ponthoz tartozó duális vektortér  $(\phi_*\mu)_a \in V_p^*$  duális vektoraiba, amelyeket a  $\phi_* : V_{\phi(p)}^* \mapsto V_p^*$  leképezéssel az

$$(\phi_*\mu)_a v^a = \mu_a(\phi^*v)^a, \quad \forall v^a \in V_p \quad (\text{C.1.7.})$$

összefüggés révén kapunk meg.

Hasonlóan a  $\phi(p) \in N$  ponthoz tartozó  $(0, l)$ -tenzorokat hátratulhatjuk a  $p \in M$  ponthoz tartozó ugyanilyen típusú tenzorokba a

$$(\phi^*T)_{a_1 \dots a_l} (v_1)^{a_1} \dots (v_l)^{a_l} = T_{a_1 \dots a_l} (\phi^*v_1)^{a_1} \dots (\phi^*v_l)^{a_l}, \quad (\text{C.1.8.})$$

összefüggés révén, ill. a  $p \in M$  ponthoz tartozó  $(k, 0)$ -tenzorokat előretolhatjuk:

$$(\phi^*T)^{b_1 \dots b_k} (\mu_1)_{b_1} \dots (\mu_k)_{b_k} = T^{b_1 \dots b_k} (\phi_*\mu_1)_{b_1} \dots (\phi_*\mu_k)_{b_k}. \quad (\text{C.1.9.})$$

**Megjegyzés:** Kevert tenzorokat viszont nem tudunk sem előre-, sem hátratulni.

**Megjegyzés:** Legyen  $M$   $m$ -dimenziós,  $N$   $n$ -dimenziós sokaság rendre az  $\{x^\mu\}$  és  $\{y^\nu\}$  koordinátákkal a  $p \in M$  és a  $\phi(p) \in N$  pontok környezetében. Legyen továbbá  $\omega$  a  $\underbrace{V_{\phi(p)}^* \times \dots \times V_{\phi(p)}^*}_{k\text{-szor}}$

téren értelmezett  $k$ -forma, azaz

$$\omega = \sum_{i_1 \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dy^{\nu_{i_1}} \wedge \dots \wedge dy^{\nu_{i_k}}. \quad (\text{C.1.10.})$$

Meg lehet mutatni, hogy ekkor a  $\omega$   $k$ -forma hátratulja

$$\begin{aligned} \phi_*\omega &= \sum_{i_1 \dots < i_k} (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ \phi) dy^{\nu_{i_1}} \wedge \dots \wedge dy^{\nu_{i_k}} \\ &= \sum_{i_1 \dots < i_k} \sum_{j_1 \dots < j_k} (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ \phi) \frac{\partial(y^{\nu_{i_1}}, \dots, y^{\nu_{i_k}})}{\partial(x^{\mu_{j_1}}, \dots, x^{\mu_{j_k}})} dx^{\mu_{j_1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{j_k}} \\ &= \sum_{i_1 \dots < i_k} \sum_{j_1 \dots < j_k} \omega_{i_1 \dots i_k} (\bar{y}(\bar{x})) \frac{\partial(y^{\nu_{i_1}}, \dots, y^{\nu_{i_k}})}{\partial(x^{\mu_{j_1}}, \dots, x^{\mu_{j_k}})} dx^{\mu_{j_1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{j_k}}. \end{aligned} \quad (\text{C.1.11.})$$

Itt  $1 \leq \mu_i \leq m$ ,  $1 \leq \nu_j \leq n$  minden  $i$  és  $j$  indexre és értelemszerűen  $m, n > k$ .

## C.2. Diffeomorfizmusok

**Definíció:** A  $\phi : M \mapsto N$  leképezést **diffeomorfizmusnak** nevezzük, ha  $C^\infty$ , kölcsönösen egyértelmű és az inverze is  $C^\infty$ .

**Következmény:** Ekkor  $\dim M = \dim N$ .

**Megjegyzés:** Ha  $\phi$  diffeomorfizmus, akkor  $\phi^*$  definíciója kiterjeszhető bármely  $(k, l)$ -tenzorra a  $\phi^{-1}$  leképezéshez tartozó  $(\phi^{-1})^* : V_{\phi(p)} \mapsto V_p$  „előretolás” (ami valójában hátrátolás) segítségével,

$$\begin{aligned} (\phi^*T)^{b_1 \dots b_k} (\mu_1)_{b_1} \dots (\mu_k)_{b_k} (v_1)^{a_1} \dots (v_l)^{a_l} \\ = T^{b_1 \dots b_k} (\phi_*\mu_1)_{b_1} \dots (\phi_*\mu_k)_{b_k} ((\phi^{-1})^*v_1)^{a_1} \dots ((\phi^{-1})^*v_l)^{a_l}. \end{aligned} \quad (\text{C.2.12.})$$

**Definíció:** Legyen  $\phi : M \mapsto M$  diffeomorfizmus és  $T$  az  $M$  sokaságon értelmezett tenzormező. A  $\phi$  diffeomorfizmust a  $T$  tenzormező **szimmetriájának** nevezzük, ha a tenzormező a  $\phi$  diffeomorfizmus hatására nem változik meg, azaz  $T = \phi^*T$ .

**Definíció:** Ha  $\phi : M \mapsto M$  olyan diffeomorfizmus, amelynek során a metrika változatlan marad, azaz amelyre  $(\phi^*g)_{ab} = g_{ab}$ , akkor  $\phi$ -t **izometriának** nevezzük. Az izometriák tehát a metrikus tenzor szimmetriái.

A  $\phi : M \mapsto N$  diffeomorfizmus létezésének jelentősége az, hogy ekkor az  $M$  és  $N$  sokaságok strukturája azonos. Ha a Természet az  $M$  téridő-sokasággal és a rajta értelmezett  $T^{(i)}$  tenzormezővel írható le, akkor a vele diffeomorf  $N$  téridő-sokaság és a rajta értelmezett  $\phi^*T^{(i)}$  tenzormező is ugyanazt a fizikát írják le. Ha viszont nincsen olyan diffeomorfizmus, amely az  $(M, T^{(i)})$  fizikát leképezné az  $(N, T'^{(i)})$  fizikába, akkor ezek a fizikai modellek inekvivalensek.

A diffeomorfizmusokkal kapcsolatban kétféle szemlélet létezik, az aktív és a passzív szemlélet. Az aktív szemlélet értelmében a  $\phi$  diffeomorfizmus leképezi az  $M$  sokaságot az  $(M$ -mel azonos dimenziójú)  $N$  sokaságra és az  $M$ -en értelmezett  $T$  tenzormezőket az  $N$ -en értelmezett „új”  $\phi^*T$  tenzormezőkre. A passzív szemlélet szerint a következőket mondhatjuk:

- Bármely  $p \in M$  pontnak létezik olyan  $U \subset M$  környezete, amelyet lefed egy  $\{x^\mu\}$  koordinátarendszer és a  $\phi(p) \in N$  pontnak is létezik olyan  $V \subset N$  környezete, amelyet lefed valamely  $\{y^\mu\}$  koordinátarendszer.
- Ekkor a  $\phi$  diffeomorfizmus segítségével a  $p \in M$  pont  $O = \phi^{-1}(V)$  környezetében értelmezhetjük az

$$x'^\mu(q) = y^\mu(\phi(q)), \quad \forall q \in O \quad (\text{C.2.13.})$$

új koordinátákat.

Ezért a  $\phi$  diffeomorfizmusra úgy tekinthetünk, mint általános koordinátatranszformációra, ami a sokaság pontjait és annak pontjaiban a tenzorokat nem változtatja meg, csupán a pontok koordinátáit és a tenzorok koordináta-komponenseit. A kétféle szemlélet azonban egyenértékű, mert a  $\phi^*T$  tenzor komponensei a  $\phi(p)$  pontban az  $\{y^\mu\}$  koordinátarendszerben (aktív szemlélet) a (C.2.13.) összefüggés értelmében pontosan megegyeznek a  $T$  tenzor komponenseivel a  $p$  pontban az  $\{x'^\mu\}$  koordinátarendszerben (passzív szemlélet).

Az általános relativitási elv értelmében a fizika törvényei nem függhetnek a koordinátarendszer megválasztásától, azaz a fizika törvényei az általános koordinátatranszformációkat jelentő diffeomorfizmusokkal szemben invariánsak. A diffeomorfizmusok a téridő-sokaság koordinátázásában megjelenő mértékszabadságot jelentik.

### C.3. A Lie-derivált

Legyen adott az  $M$  sokaság és a  $\phi_t$  egy-paraméteres diffeomorfizmus csoport, amelyet egy  $v^a$  vektormező generál. Ekkor a  $v^a$  vektormező integrálgörbéi mentén úgy „szállíthatjuk”

a  $T$  tenzorokat, hogy azok fizikailag ekvivalensek maradjanak, azaz a

$$T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \mapsto (\phi_{-t}^* T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \quad (\text{C.3.14.})$$

utasítás szerint. A Lie-deriváltat annak jellemzésére vezetjük be, hogy tetszőleges vektormező tetszőleges integrálgörbéjének tetszőleges  $p$  pontjában vett  $T_p$  tenzor mennyire különbözik az ugyanebben a pontban vett, vele fizikailag ekvivalens azon  $(\phi^* T)_p$  tenzortól, amelyet úgy kaptunk, hogy az integrálgörbe infinitezimálisan közeli  $q$  pontjában vett  $T_q$  tenzort „szállítottuk” az integrálgörbe mentén a  $\phi$  diffeomorfizmus segítségével a  $p$  pontba.

**Definíció: A  $T$  tenzormező  $v$  vektormező szerinti Lie-deriváltja:**

$$\mathcal{L}_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_{-t}^* T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}}{t}. \quad (\text{C.3.15.})$$

**Megjegyzés:** A definiáló egyenlőség bal oldalán a  $v$  vektormező integrálgörbéjének tetszőleges  $p$  pontjában (az integrálgörbe  $t = 0$  paraméterű pontjában) vett tenzor áll, a jobb oldalon két ugyanezen pontban vett tenzor különbsége szerepel a számlálóban, ahol  $(\phi_{-t}^* T)_p = \phi_{-t}^* T_q$ , ahol  $q$  az integrálgörbe  $p$ -hez infinitezimálisan közeli,  $t \rightarrow 0$  paraméterű pontja.

A Lie-derivált néhány fontos tulajdonsága:

1. a sima  $(k, l)$ -tenzorokat sima  $(k, l)$ -tenzorokba képezi le, és ez a leképezés lineáris;
2. tenzorok külső szorzatára alkalmazva eleget tesz a Leibnitz-szabálynak;
3. skalárfüggvény Lie-deriváltja

$$\mathcal{L}_v(f) = v(f), \quad \forall f : M \mapsto \mathbb{R}; \quad (\text{C.3.16.})$$

4. az  $\mathcal{L}_v T = 0$  egyenlőség akkor és csak akkor teljesül mindenütt, ha minden  $t$  esetén  $\phi_t$  a  $T$  tenzor szimmetriája.

**Megjegyzés:** Válasszunk a  $v^a$  valamely  $\gamma$  integrálgörbéjének  $p \in \gamma \subset M$  pontjának  $O_p$  környezetében olyan koordinátarendszert, hogy  $x^1 = t$  legyen, ahol  $t$  az integrálgörbe affin paramétere, és  $t = 0$  felel meg a  $p$  pontnak, koordinátái  $(x^1 = 0, x^2, \dots, x^n)$ . Ekkor az integrálgörbe érintője a  $p \in \gamma$  pontban  $v^a = (\partial/\partial x^1)^a \in V_p$ . Legyen  $q \in \gamma \cap O_p$  a görbe tetszőleges  $t$  paraméterű pontja, amelynek koordinátái  $(x^1 = t, x^2, \dots, x^n)$  (a  $\gamma$  integrálgörbe mentén csak az  $x^1$  koordináta változik, azaz az integrálgörbe az  $x^1$ -koordinátavonal). A  $\phi_{-t}$  leképezés az integrálgörbe  $(y^1 = x^1 + t, y^2 = x^2, \dots, y^n = x^n)$  koordinátájú  $r \in \gamma \cap O_p$  pontját képezi le az  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  koordinátájú  $q$  pontra, ezért a  $\phi_{-t}^*$  leképezés mátrixa  $(\phi_{-t}^*)^\nu_\mu = \partial y^\nu / \partial x^\mu = \delta^\nu_\mu$ . Ezt felhasználva adódik, hogy tetszőleges tenzor „szállításának” eredménye

$$(\phi_{-t}^* T)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x^1, x^2, \dots, x^n) = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x^1 + t, x^2, \dots, x^n). \quad (\text{C.3.17.})$$



Ebből viszont az következik, hogy ebben a koordináta-rendszerben a tenzormező Lie-deriváltja a  $v^a$  vektormező integrálgörbéje mentén futó koordináta szerinti közönséges parciális derivált,

$$\mathcal{L}_v T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x^1, x^2, \dots, x^n) = \frac{\partial}{\partial x^1} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (\text{C.3.18.})$$

**Következmény:** A  $v^a$  vektormező integrálgörbéi által generált egy-paraméteres  $\phi_t$  diffeomorfizmus-csoport akkor és csak akkor szimmetriája a  $T$  tenzormezőnek, ha  $T$  komponensei függetlenek az  $x^1$  koordinátától abban a koordináta-rendszerben, amelynek  $x^1$ -koordinátavonala a  $v^a$  vektormező integrálgörbéje.

Vektormezők, 1-formák (duális vektormezők) és általában tetszőleges tenzormező Lie-deriváltjának megadható a koordináta-rendszertől független kifejezése.

**Állítás:** A  $w^a$  vektormező  $v^a$  vektormező szerinti Lie-deriváltja:

$$\mathcal{L}_v w^a = [v, w]^a. \quad (\text{C.3.19.})$$

Válasszunk megint olyan koordináta-rendszert, amelynek  $x^1$ -koordinátavonala az  $v^a$  integrálgörbéje. Ekkor egyrészt írhatjuk a fentiek alapján, hogy

$$(\mathcal{L}_v w)^\mu = \frac{\partial w^\mu}{\partial x^1}. \quad (\text{C.3.20.})$$

Másrészt viszont felhasználhatjuk, hogy

$$v^a = \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)^a, \quad v^\mu = \delta_1^\mu, \quad w^a = \sum_{\mu=1}^n w^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a, \quad (\text{C.3.21.})$$

és írhatjuk a kommutátorra tetszőleges sima  $f : M \mapsto \mathbb{R}$  függvény esetén:

$$\begin{aligned} [v, w](f) &= v(wf) - w(vf) = v(w^b \nabla_b f) - w(v^b \nabla_b f) \\ &= v^a \nabla_a (w^b \nabla_b f) - w^a \nabla_a (v^b \nabla_b f) \\ &= v^a (\nabla_a w^b) \nabla_b f + v^a w^b \nabla_a \nabla_b f - w^a (\nabla_a v^b) \nabla_b f - w^a v^b \nabla_a \nabla_b f \\ &= [v^a (\nabla_a w^b) - w^a (\nabla_a v^b)] \nabla_b f. \end{aligned} \quad (\text{C.3.22.})$$

Mivel ez az azonosság tetszőleges  $f$  függvény esetén fennáll, ezért a kommutátor koordináta-komponensei

$$[v, w]^\mu = \sum_{\nu=1}^n \left( v^\nu \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \right), \quad (\text{C.3.23.})$$

ahonnan  $v^\nu = \delta_1^\nu$  miatt

$$[v, w]^\mu = \frac{\partial w^\mu}{\partial x^1} \quad (\text{C.3.24.})$$

adódik, ami ugyanaz, mint  $(\mathcal{L}_v w)^\mu$ , vagyis  $(\mathcal{L}_v w)$  és  $[v, w]$  komponensei megegyeznek, úgyhogy ezek a tenzorok azonosak.

**Állítás:** Tetszőleges  $\mu_a$  1-formamező (azaz duális vektormező)  $v^a$  vektormező szerinti Lie-deriváltja,

$$(\mathcal{L}_v \mu)_a = v^b \nabla_b \mu_a + \mu_b \nabla_a v^b. \quad (\text{C.3.25.})$$

Ezt az azonosságot annak alapján láthatjuk be, hogy  $\mathcal{L}_v(f) = v(f)$  tetszőleges  $f$  sima függvény esetén és, hogy érvényes a Lie-deriválásra a Leibnitz-szabály. Tekintsük a  $\mu_a w^a$  skalárfüggvény Lie-deriváltját. Egyrészt írhatjuk, hogy

$$\mathcal{L}_v(\mu_a w^a) = v(\mu_a w^a) = v^b \nabla_b (\mu_a w^a). \quad (\text{C.3.26.})$$

Másrészt pedig a Leibnitz-szabályt alkalmazva adódik, hogy

$$\mathcal{L}_v(\mu_a w^a) = w^a (\mathcal{L}_v \mu)_a + \mu_a (\mathcal{L}_v w)^a = w^a (\mathcal{L}_v \mu)_a + \mu_a [v, w]^a. \quad (\text{C.3.27.})$$

A fenti két alakot egyenlővé tesszük:

$$w^a (\mathcal{L}_v \mu)_a + \mu_a (v^b \nabla_b w^a - w^b \nabla_b v^a) = w^a v^b \nabla_b \mu_a + v^b \mu_a \nabla_b w^a. \quad (\text{C.3.28.})$$

Ekkor a baloldali és a jobboldali második tag kiejtí egymást. A visszamaradó

$$w^a (\mathcal{L}_v \mu)_a = w^a v^b \nabla_b \mu_a + \mu_a w^b \nabla_b v^a = w^a v^b \nabla_b \mu_a + \mu_b w^a \nabla_a v^b \quad (\text{C.3.29.})$$

azonosság tetszőleges  $w^a$  vektormezőre fennáll, úgyhogy

$$(\mathcal{L}_v \mu)_a = v^b \nabla_b \mu_a + \mu_b \nabla_a v^b \quad (\text{C.3.30.})$$

adódik, amit be akartunk látni.

**Állítás:** Hasonlóan láthatjuk be, hogy tetszőleges  $(k, l)$ -tenzor Lie-deriváltja:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_v T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} &= v^c \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \\ &\quad - \sum_{i=1}^k T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \nabla_c v^{a_i} + \sum_{j=1}^l T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l} \nabla_{b_j} v^c. \end{aligned} \quad (\text{C.3.31.})$$

**Példa:** A  $g_{ab}$  metrikus tenzornak a  $v^a$  vektormező szerinti Lie-deriváltja:

$$\mathcal{L}_v g_{ab} = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a. \quad (\text{C.3.32.})$$

Az azonosság belátásához induljunk ki egy általános tenzor Lie-deriváltjára vonatkozó formulánkból és használjuk ki, hogy a metrika által generált kovariáns gradiens operátor hatása a metrikára zérust ad:

$$\mathcal{L}_v g_{ab} = v^c \nabla_c g_{ab} + g_{bc} \nabla_a v^c + g_{ac} \nabla_b v^c = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a. \quad (\text{C.3.33.})$$

**Megjegyzés:** Az  $M$  téridő-sokaság diffeomorfizmusai jelentik a mértékszabadságot. Ez a metrika kis perturbációi esetén azt jelenti, hogy a metrika nem minden perturbációja jelent geometriailag különböző téridőt.

**Állítás:** Csak azok a perturbációk jelentenek különböző téridő-geometriát, amelyek nem kaphatók meg egymásból az eredeti perturbálatlan metrika egy vektormező szerinti Lie-deriváltjának hozzáadásával. Másképpen, a téridő-metrika azon  $\gamma_{ab}$  és  $\gamma'_{ab}$  perturbációi egyenértékűek (a linearizált Einstein-egyenletek szempontjából), amelyek

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} - \nabla_a v_b - \nabla_b v_a \quad (\text{C.3.34.})$$

transzformációval kaphatók meg egymásból, ahol  $v^a$  tetszőleges vektormező.

Legyen  $\phi_\lambda : M \mapsto M$  egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport. Legyen  $(M, g_{ab}(\lambda))$  a téridők egy egy-paraméteres családja. Ekkor a téridők diffeomorfizmus indukálta  $(M, \phi^* g_{ab}(\lambda))$  családja azonos az eredeti téridő-családdal. Ebből az is következik, hogy ha a  $g_{ab}|_{\lambda=0}$  körüli kis perturbációkat vesszük, amelyeket  $\gamma_{ab} = dg_{ab}(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=0}$  jellemez, akkor azok fizikailag azonosak a  $\gamma'_{ab} = d(\phi^* g_{ab}(\lambda))/d\lambda|_{\lambda=0}$ -vel jellemzett perturbációkkal. Másrészt viszont ekkor

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} - \mathcal{L}_v g_{ab}, \quad (\text{C.3.35.})$$

ahol  $g_{ab} = g_{ab}(\lambda)|_{\lambda=0}$  és  $v^a$  a  $\phi_\lambda$  egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoportot generáló vektormező. A  $\gamma_{ab}$  perturbációkban tehát a mértékszabadságot  $\mathcal{L}_v g_{ab}$  jelenti. A  $g_{ab}|_{\lambda=0}$  metrika Lie-deriváltja viszont

$$\mathcal{L}_v g_{ab} = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a, \quad (\text{C.3.36.})$$

ahol  $\nabla_a$  most a  $g_{ab}|_{\lambda=0}$  metrika által indukált kovariáns gradiens operátor. Ez tehát azt jelenti, hogy a **linearizált Einstein-egyenletek esetében a metrika  $\gamma_{ab}$  perturbációja és**

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} - \nabla_a v_b - \nabla_b v_a \quad (\text{C.3.37.})$$

**perturbációja ugyanazt a téridőt jelenti.** Ez analóg a klasszikus elektrodinamikában ismert mértékszabadsággal, ahol az  $A_a$  vektorpotenciál és az  $A'_a = A_a - \nabla_a \chi$  (ahol  $\chi$  tetszőleges skálár-függvény) vektorpotenciál fizikailag egyenértékű.

## C.4. A Killing-vektormező

**Definíció:** Ha a  $\xi^a$  vektormező által generált  $\phi_t$  egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport izometria-csoport, azaz  $\phi_t^* g_{ab} = g_{ab}$ , akkor  $\xi^a$ -t **Killing-vektormezőnek** nevezzük.

**Állítás:** Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a  $\xi^a$  vektormező Killing-vektormező legyen az, hogy

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0 \quad (\text{C.4.38.})$$

legyen, ahol  $\nabla_a$  a  $g_{ab}$  metrikához tartozó gradiens-operátor.

Itt  $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$  annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a  $\xi^a$  vektormező által generált egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport izometria-csoport legyen.

**Állítás:** Legyen  $\xi^a$  Killing-vektormező és  $u^a$  valamely  $\gamma$  geodetikus érintővektora. Ekkor  $\xi_a u^a$  állandó a  $\gamma$  geodetikus mentén.

A  $\xi_a u^a$  skálár a  $\gamma$  geodetikus mentén akkor és csak akkor állandó, ha állandó marad a görbementi párhuzamos eltolás során, azaz ha

$$u^b \nabla_b (\xi_a u^a) = u^b u^a \nabla_b \xi_a + \xi_a u^b \nabla_b u^a \quad (\text{C.4.39.})$$

eltűnik. Az első tag,

$$u^b u^a \nabla_b \xi_a = \frac{1}{2} u^b u^a (\nabla_b \xi_a + \nabla_a \xi_b) + \frac{1}{2} u^b u^a (\nabla_b \xi_a - \nabla_a \xi_b) = \frac{1}{2} u^b u^a (\nabla_b \xi_a + \nabla_a \xi_b) = 0, \quad (\text{C.4.40.})$$

a (C.4.38.) Killing-egyenlet miatt tűnik el, a második tag pedig a geodetikus definíciója miatt zérus.

**Megjegyzés:** Induljunk ki abból, hogy minden részecske időszerű geodetikusan esik szabadon, a fénysugár világvonala pedig fényszerű geodetikus. A fenti állítás azt jelenti, hogy **bármely egy-paraméteres izometria csoport léte**, amelyet a  $\xi^a$  Killing-vektor generál, **jelent egy  $\xi_a u^a$ , a részecske vagy a fénysugár mozgására jellemző mennyiséget, amely rendre a szabadon eső részecske világvonala vagy a fénysugár világvonala mentén megmaradó.** (Ez a newtoni mechanika Noether<sup>129</sup>-tételének megfelelője az általános relativitáselméletben.) Ez a megmaradó mennyiség felhasználható a gravitációs vöröseltolódás meghatározására, és nagy segítséget jelent a geodetikus egyenletének integrálásában, ha vannak a téridőnek izometriái.

**Megjegyzés:** A Killing-vektormező második deriváltja a Riemann-féle görbületi tenzorral kapcsolatos,

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c = -R_{bca}^d \xi_d. \quad (\text{C.4.41.})$$

Alkalmazzuk a Riemann-tenzort definiáló összefüggést a Killing-vektormezőre,

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c - \nabla_b \nabla_a \xi_c = R_{abc}^d \xi_d, \quad (\text{C.4.42.})$$

ahonnan  $-\nabla_b \nabla_a \xi_c = \nabla_b \nabla_c \xi_a$  felhasználásával

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c + \nabla_b \nabla_c \xi_a = R_{abc}^d \xi_d \quad (\text{C.4.43.})$$

adódik. Az  $(abc)$  indexhármast  $(bca)$ -ra cserélve kapjuk innen a

$$\nabla_b \nabla_c \xi_a + \nabla_c \nabla_a \xi_b = R_{bca}^d \xi_d \quad (\text{C.4.44.})$$

egyenlőséget, valamint további ciklikus permutációval,  $(bca) \rightarrow (cab)$  a

$$\nabla_c \nabla_a \xi_b + \nabla_a \nabla_b \xi_c = R_{cab}^d \xi_d \quad (\text{C.4.45.})$$

egyenlőséget. Adjuk össze ezután a (C.4.43.) és (C.4.44.) egyenlőségek megfelelő oldalait, majd vonjuk ki az így kapott egyenlőség egyes oldalaiából a (C.4.45.) egyenlőség megfelelő oldalait. Azt kapjuk eredményül, hogy

$$2\nabla_b \nabla_c \xi_a = (R_{abc}^d + R_{bca}^d - R_{cab}^d) \xi_d. \quad (\text{C.4.46.})$$

Használjuk fel a Riemann-tenzor 2. tulajdonságát, amelynek segítségével a jobboldali kerekzárójeles kifejezés első két tagjának összege  $-R_{cab}^d$ -vel egyenlő. Ekkor a bizonyítani kívánt azonosságot kapjuk eredményül.

**Következmény:** A Killing-vektormező és a Riemann-tenzor közötti kapcsolat következménye, hogy a  $\xi^a$  Killing-vektormezőt és  $\nabla_a \xi_b$  kovariáns deriváltját a sokaság tetszőleges  $q \in M$  pontjában (ismert görbületi tenzor esetében) egyértelműen meghatározza a Killing-vektormezőnek a  $\xi^a|_p$  és kovariáns deriváltjának az  $L_{ab}|_p = \nabla_a \xi_b|_p$  értéke a sokaság valamely  $p \in M$  pontjában. Tekintsünk egy a  $p \in M$  pontot a  $q \in M$  ponttal összekötő görbét, amelynek érintővektora legyen  $v^a$ . A Killing-vektormezőt és kovariáns deriváltját a  $q \in M$  pontban meghatározza, ha a

$$\begin{aligned} v^a \nabla_a \xi_b &= v^a L_{ab}, \\ v^a \nabla_a L_{bc} &= -R_{bca}^d \xi_d v^a \end{aligned} \quad (\text{C.4.47.})$$

---

<sup>129</sup>Amalie Emmy Noether, német matematikus, 1882-1935.

közönséges differenciál-egyenletrendszernek megkeressük a görbe mentén az adott kezdőfeltételekhez tartozó, egyértelműen meghatározott megoldását.

**Következmény:** Ha a Killing-vektor és kovariáns deriváltja eltűnik a sokaság valamely  $p \in M$  pontjában, akkor a Killing-vektor mindenütt zérus.

**Következmény:** Az  $n$ -dimenziós sokaságon a Killing-vektormezők (ill. az egy-paraméteres izometria-csoportok) maximális száma:

$$n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1), \quad (\text{C.4.48.})$$

mert ennyi a független  $(\xi^a|_p, L_{ab}|_p)$  kezdeti adatok száma.

**Példa:** Minkowski-téridőben a Killing-vektorok a

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 0 \quad (\text{C.4.49.})$$

egyenletet elégítik ki. Ennek az egyenletnek az általános megoldása

$$\xi_\mu = a_\mu + \Lambda_{\mu\nu} x^\nu, \quad (\text{C.4.50.})$$

ahol  $a_\mu$  és  $\Lambda_{\mu\nu}$  állandók és  $\Lambda_{\mu\nu} = -\Lambda_{\nu\mu}$ . Ez meghatároz 10 darab független Killing-vektort, amelyek az  $a_\mu$  eltolásoknak, a  $\Lambda_{ij}$  elforgatásoknak és a  $\Lambda_{0j}$  Lorentz-lökéseknek felelnek meg.

**Megjegyzés:** Érdemes megjegyezni, hogy a  $\xi^a$  Killing-vektormező vákuum-téridőben ugyanolyan hullámegyenletnek és Lorentz-feltételnek tesz eleget, mint a forrásmentes elektromágneses mező vektorpotenciálja. Ezt fel lehet arra használni, hogy fizikailag érdekes megoldásokat keressünk.

Kontraháljuk a (C.4.41.) egyenlőség mindkét oldalát az  $a$  és  $b$  indexekben,

$$\nabla_a \nabla^a \xi_c = -R_c^d \xi_d, \quad (\text{C.4.51.})$$

majd használjuk fel, hogy vákuumban a Ricci-tenzor zérus,  $R_c^d \equiv 0$ . Ekkor azt kapjuk, hogy  $\xi^a$  olyan

$$\nabla_a \nabla^a \xi_c = 0 \quad (\text{C.4.52.})$$

hullámegyenletet elégít ki, mint az elektromágneses mező vektorpotenciálja forrásmentes esetben a Lorentz-mértékben. Másrészt a Killing-egyenletből kontrakcióval adódik, hogy

$$\nabla_a \xi^a = 0, \quad (\text{C.4.53.})$$

azaz a Killing-vektormező vákuumban a Lorentz-feltételt is kielégíti.

**Állítás:** Legyen  $\xi^a$  nem fényszerű Killing-vektormező,  $\xi_a \xi^a \neq 0$ , amely hiperfelület-ortogonális, vagyis olyan, amelyhez létezik a  $\xi^a$  vektormezőre mindenütt ortogonális hiperfelület-sereg. Ekkor fennáll, hogy

$$\nabla_a \xi_b = -\xi_{[a} \nabla_{b]} \ln |\xi^c \xi_c|. \quad (\text{C.4.54.})$$

A Killing-egyenletből következik, hogy  $\nabla_a \xi_b = \nabla_{[a} \xi_{b]}$ . Frobenius tételének duális megfogalmazása értelmében a következőket mondhatjuk. Legyen  $T^*$  a  $\xi_a = g_{ab} \xi^b$  egy-forma által kifeszített

egy-dimenziós duális alterek sima összessége. A tétel értelmében  $\xi^a$  akkor és csak akkor hiperfelület-ortogonális, ha létezik olyan  $v_a \in T^*$  egy-formamező, hogy  $\nabla_{[a}\xi_{b]} = \xi_{[a}v_{b]}$ . Ha  $\xi^a$  nem nullvektormező, akkor választhatjuk  $v^a$ -t  $\xi^a$ -ra ortogonálisnak,  $\xi^a v_a = 0$ . Ekkor fennáll, hogy

$$\xi^b \xi_{[a} v_{b]} = \xi^b \nabla_{[a} \xi_{b]} = \xi^b \nabla_a \xi_b = \frac{1}{2} \nabla_a (\xi^b \xi_b), \quad (\text{C.4.55.})$$

azaz

$$\frac{1}{2} \xi_b (\xi_a v_b - \xi_b v_a) = -\frac{1}{2} \xi^b \xi_b v_a = -\frac{1}{2} \nabla_a (\xi^b \xi_b), \quad (\text{C.4.56.})$$

ahonnan

$$\nabla_a (\xi^b \xi_b) = -(\xi^b \xi_b) v_a. \quad (\text{C.4.57.})$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$v_a = -\frac{\nabla_a (\xi^b \xi_b)}{\xi^b \xi_b} = -\nabla_a \ln |\xi^b \xi_b|, \quad \text{mert } \xi^b \xi_b \neq 0. \quad (\text{C.4.58.})$$

Ezt visszahelyettesítjük, úgyhogy végül

$$\nabla_a \xi_b = \xi_{[a} v_{b]} = -\xi_a \nabla_b \ln |\xi^c \xi_c| \quad (\text{C.4.59.})$$

adódik, amit be akartunk látni.

Végül megemlítjük a Killing-vektormező fogalmának kétféle általánosítását: a Killing-tenzormezőt és a konform Killing-vektormezőt.

**Definíció:** A  $K_{a_1 \dots a_m} = K_{(a_1 \dots a_m)}$  teljesen szimmetrikus  $(m, 0)$ -tenzormezőt **Killing-tenzormezőnek** nevezzük, ha teljesíti a

$$\nabla_{(a} K_{a_1 \dots a_m)} = 0 \quad (\text{C.4.60.})$$

azonosságot.

**Megjegyzés:** A Killing-tenzormezők – ellentétben a Killing-vektormezőkkel – nem származtathatók természetes módon az  $M$  sokaság diffeomorfizmus-csoportjai révén.

**Megjegyzés:** A Killing-tenzormezők létezése is megmaradó mennyiségek létezését vonja maga után. Legyen  $\gamma$  geodetikus, amelynek érintővektora  $u^a$ , és legyen  $K_{a_1 \dots a_m}$  Killing-tenzormező. Ekkor

$$K_{a_1 \dots a_m} u^{a_1} \dots u^{a_m} = \text{const. } \gamma \text{ mentén.} \quad (\text{C.4.61.})$$

Például a Kerr-metrika rendelkezik nem triviális  $K_{ab}$  Killing-tenzorral is, ami a metrika Killing-vektorával együtt lehetővé teszi az összes geodetikus explicit módon történő meghatározását.

**Definíció:** A  $\phi : M \mapsto M$  leképezést **konform izometriának** nevezzük, ha  $\phi$  diffeomorfizmus, és létezik olyan  $\Omega : M \mapsto \mathbb{R}$  függvény, amellyel  $\phi^* g_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ . (A konform izometria tehát a metrikát csak egy konform-transzformáció erejéig hagyja invariánsan.)

**Megjegyzés:** Mivel a  $\phi$  konform izometria diffeomorfizmus, azért az  $\Omega$  függvény nem tűnik el sehol. Az  $\Omega \equiv 1$  konstans függvény esetén  $\phi$  közönséges izometria.

**Definíció:** Az egy-paraméteres konform izometria-csoportot generáló  $\psi^a$  vektormezőt **konform Killing-vektormezőnek** nevezzük, ha a metrikának a  $\psi^a$  vektormező szerinti Lie-deriváltja arányos a metrikával, azaz

$$\mathcal{L}_\psi g_{ab} \propto g_{ab}. \quad (\text{C.4.62.})$$

Ez azt jelenti, hogy létezik olyan  $\alpha : M \mapsto \mathbb{R}$  függvény, hogy

$$\nabla_a \psi_b + \nabla_b \psi_a = \alpha g_{ab}. \quad (\text{C.4.63.})$$

Itt az  $\alpha$  függvényt meghatározhatjuk a (C.4.63.) egyenlet mindkét oldalának spúrját képezve,

$$2\nabla^a \psi_a = \alpha n, \quad n = \dim M \quad (\text{C.4.64.})$$

ahonnan

$$\alpha = \frac{2}{n} \nabla^a \psi_a \quad (\text{C.4.65.})$$

adódik. Ekkor a **konform Killing-egyenlet**

$$\nabla_a \psi_b + \nabla_b \psi_a = \frac{2}{n} (\nabla^c \psi_c) g_{ab} \quad (\text{C.4.66.})$$

alakot ölt.

**Állítás:** Ha a  $g_{ab}$  metrikájú  $M$  sokaságon létezik  $\psi^a$  konform Killing-vektormező, akkor a  $\gamma$  null-geodetikus mentén létezik megmaradó mennyiség,  $\psi_a u^a$ , ahol  $u^a$  a  $\gamma$  null-geodetikus érintővektora.

Tetszőleges geodetikus esetén elismételve a  $\psi_a u^a$  állandóságára vonatkozó azon bizonyítás első lépéseit, amelyet közönséges Killing-vektormező esetén végeztünk, a

$$u^b \nabla_b (\psi_a u^a) = \frac{1}{n} (\nabla^c \psi_c) u^b u_b \quad (\text{C.4.67.})$$

egyenlőséget kapjuk. Ha  $\gamma$  null-geodetikus, azaz  $u^a u_a = 0$ , akkor az egyenlőség jobb oldala zérus, és ekkor  $\psi_a u_a$  állandó a  $\gamma$  fényszerű geodetikus mentén.

## D. A konform transzformációk

### D.1. A sokaság kauzális szerkezetének transzformációja

Legyen  $M$   $n$ -dimenziós sokaság, amelyen a tetszőleges szignatúrájú  $g_{ab}$  metrika értelmezve van.

**Definíció:** Legyen  $\Omega$  az  $M$  sokaságon értelmezett sima, szigorúan pozitív függvény. Ekkor a metrika  $g_{ab} \rightarrow \tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$  transzformációját **konform transzformációnak** nevezzük.

**Megjegyzés:** A konform transzformációnak általában nem kell kötődnie valamely  $\psi : M \mapsto M$  diffeomorfizmushoz. Ha azonban a konform transzformáció egy diffeomorfizmushoz kötődik, akkor  $\phi^* g_{ab} = \Omega^2 g_{ab} = \tilde{g}_{ab}$ , ami a konform izometria esete (ld. a C. függelék végén a konform izometria definícióját).

**Állítás:** Legyen a  $g_{ab}$  metrika Lorentz-szignatúrájú. Ekkor egy  $v^a$  vektor akkor és csak akkor időszerű, null- vagy térszerű vektor a  $g_{ab}$  metrika szerint, ha ugyanilyen tulajdonságú a  $\tilde{g}_{ab}$  konform-transzformált metrika szerint. A konform transzformáció során tehát nem változik meg az érintőtérben a vektorok osztályozása. Ennek következtében az  $(M, g_{ab})$  és az  $(M, \tilde{g}_{ab})$  téridők kauzális szerkezete azonos. Megfordítva, ha a téridő egy  $p \in M$  pontjában a  $g_{ab}$  és a  $\tilde{g}_{ab}$  metrika szerinti fénykúpok megegyeznek, akkor fenn kell állnia a  $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$  kapcsolatnak ezen két metrika között.

Az eredeti irányban az állítás triviális, mert bármely  $v^a$  vektor esetén  $\tilde{g}_{ab} v^a v^b = \Omega^2 g_{ab} v^a v^b$  negatív, nulla vagy pozitív aszerint rendre, hogy  $g_{ab} v^a v^b$  negatív, nulla vagy pozitív. Ha tehát az  $(M, g_{ab})$  és az  $(M, \tilde{g}_{ab})$  téridők kauzális szerkezete megegyezik, akkor a  $g_{ab}$  és a  $\tilde{g}_{ab}$  metrika között konform transzformáció szerinti kapcsolatnak kell fennállnia.

A fordított irányú állítást a következőképpen láthatjuk be. Legyen  $t^a, x_1^a, \dots, x_{n-1}^a$  ortonormált bázis  $g_{ab}$  szerint az  $M$  sokaság érintőterében. Ekkor  $t^a \pm x_i^a$  null-vektorok  $g_{ab}$  szerint, de akkor  $\tilde{g}_{ab}$  szerint is. Ekkor viszont

$$0 = \tilde{g}_{ab}(t^a \pm x_i^a)(t^b \pm x_i^b) = \tilde{g}_{ab} t^a t^b \pm 2\tilde{g}_{ab} t^a x_i^b + \tilde{g}_{ab} x_i^a x_i^b, \quad (\text{D.1.1.})$$

bármely  $i = 1, 2, \dots, n-1$  esetén, ahonnan  $\tilde{g}_{ab} t^a t^b = -\tilde{g}_{ab} x_i^a x_i^b$  és  $\tilde{g}_{ab} t^a x_i^b = 0$ . Ennek következtében  $t^a + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i^a + x_j^a)$ , ha  $i \neq j$ , null-vektor, azaz

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{g}_{ab} \left[ t^a + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i^a + x_j^a) \right] \left[ t^b + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i^b + x_j^b) \right] \\ &= \tilde{g}_{ab} x_i^a x_j^b, \end{aligned} \quad (\text{D.1.2.})$$

ahonnan  $x_i^a$  és  $x_j^a$   $i \neq j$  esetén ortogonálisak. A fentiekből következik, hogy  $t^a, x_1^a, \dots, x_{n-1}^a$  a  $\tilde{g}_{ab}$  metrika szerint is ortogonális bázis, és a vektorok normanégyezete pozitív számszorosa a  $g_{ab}$  metrika szerinti normanégyzetnek.

**Megjegyzés:** A konform transzformációval kapcsolatos megfontolásokban kétféle metrika szerepel,  $g_{ab}$  és  $\tilde{g}_{ab}$ . Ezért az indexek fel- és lehúzása során gondosan ki kell írjuk, hogy melyik metrika szerint történik az indexek fel- és lehúzása. A  $g_{ab}$ , ill.  $\tilde{g}_{ab}$  metrika inverzét rendre  $g^{ab}$ -vel, ill.  $\tilde{g}^{ab}$ -vel jelöljük, azaz  $g^{ab} g_{bc} = \tilde{g}^{ab} \tilde{g}_{bc} = \delta^a_c$ . Innen nyilvánvalóan  $\tilde{g}^{ab} = \Omega^{-2} g^{ab}$  adódik. Arra azonban ügyeljünk, hogy  $\tilde{g}^{ab} \neq g^{ac} g^{bd} \tilde{g}_{cd}$ , hiszen az utóbbi eredménye  $\Omega^2 g^{ab}$ .



Térjünk most rá a kovariáns gradiens-operátor transzformációjára. Jelölje rendre  $\nabla_a$  és  $\tilde{\nabla}_a$  a  $g_{ab}$  és a  $\tilde{g}_{ab}$  metrikához tartozó gradiens operátort. A kétféle gradiens-operátor között a kapcsolat

$$\tilde{\nabla}_a \omega_b = \nabla_a \omega_b - C_{ab}^c \omega_c, \quad (\text{D.1.3.})$$

ahol

$$C_{ab}^c = 2\delta^c_{(a} \nabla_{b)} \ln \Omega - g_{ab} g^{cd} \nabla_d \ln \Omega. \quad (\text{D.1.4.})$$

A 3. fejezetben  $\tilde{\nabla}_a$ -t választottuk közönséges parciális deriválásnak,  $\nabla_a$ -t a  $g_{ab}$  metrika által indukált gradiens-operátornak, és a  $\tilde{\nabla}_a \omega_b = \nabla_a \omega_b + C_{ab}^c \omega_c$  összefüggéssel definiált  $C_{ab}^c$ -re a  $\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\tilde{\nabla}_a g_{bd} + \tilde{\nabla}_b g_{ad} - \tilde{\nabla}_d g_{ab})$  Christoffel-szimbólum adódott. Most felcseréljük  $\nabla_a$  és  $\tilde{\nabla}_a$  szerepét, úgyhogy a (D.1.3.) összefüggést kapjuk. A  $C_{ab}^c$  tenzorra ekkor a

$$C_{ab}^c = \frac{1}{2} \tilde{g}^{cd} (\nabla_a \tilde{g}_{bd} + \nabla_b \tilde{g}_{ad} - \nabla_d \tilde{g}_{ab}) \quad (\text{D.1.5.})$$

kifejezést kapjuk. Tudjuk azonban, hogy  $\nabla_a g_{bc} = 0$ , ezért fennáll, hogy

$$\nabla_a \tilde{g}_{bd} = \nabla_a (\Omega^2 g_{bd}) = 2\Omega g_{bd} \nabla_a \Omega, \quad (\text{D.1.6.})$$

amit felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C_{ab}^c &= \Omega \Omega^{-2} g^{cd} (g_{bd} \nabla_a \Omega + g_{ad} \nabla_b \Omega - g_{ab} \nabla_d \Omega) \\ &= 2\delta^c_{(a} \nabla_{b)} \ln \Omega - g_{ab} g^{cd} \nabla_d \ln \Omega, \end{aligned} \quad (\text{D.1.7.})$$

amit bizonyítani akartunk.

**Állítás:** Általában az időszerű és a térszerű geodetikusok nem konform-invariánsak, azaz ha egy görbe időszerű vagy térszerű geodetikus a  $g_{ab}$  metrika szerint, akkor nem geodetikus a  $\tilde{g}_{ab}$  konform-transzformált metrika szerint. A null-geodetikusok viszont konform-invariánsak, azaz ha egy görbe  $g_{ab}$  szerint null-geodetikus, akkor null-geodetikus a konform-transzformált  $\tilde{g}_{ab}$  metrika szerint is. A  $\nabla_a$ -hoz tartozó  $\lambda$  affin paraméter és a  $\tilde{\nabla}_a$ -hoz tartozó affin  $\tilde{\lambda}$  paraméter közti kapcsolat  $d\tilde{\lambda}/d\lambda = c\Omega^2$ , ahol  $c$  állandó.

Legyen  $\gamma$  a  $\nabla_a$  kovariáns gradienshez tartozó, affin parametrizált geodetikus, amelynek érintő-vektormezeje  $v^a$ . Ekkor a geodetikus egyenlete:

$$v^a \nabla_a v^b = 0. \quad (\text{D.1.8.})$$

Ugyanerre a  $\gamma$  görbére vonatkozóan

$$\begin{aligned} v^a \tilde{\nabla}_a v^b &= v^a \nabla_a v^b + v^a C_{ac}^b v^c = v^a v^c C_{ac}^b \\ &= v^a v^c (2\delta^b_{(a} \nabla_{c)} \ln \Omega - g_{ac} g^{bd} \nabla_d \ln \Omega) = 2v^b v^c \nabla_c \ln \Omega - (g_{ac} v^a v^c) g^{bd} \nabla_d \ln \Omega. \end{aligned} \quad (\text{D.1.9.})$$

Itt felhasználtuk, hogy a 3. fejezetben belátott  $\nabla_a t^b = \tilde{\nabla}_a t^b + C_{ac}^b t^c$  összefüggésben  $\nabla_a$ -t és  $\tilde{\nabla}_a$ -t felcserélve  $\tilde{\nabla}_a v^b = \nabla_a v^b + C_{ac}^b v^c$  adódik (ld. az előző állítás bizonyítása során mondottakat). A kapott egyenlet mutatja, hogy a  $\gamma$  görbe a  $\tilde{\nabla}_a$  konform-transzformált gradiens-operátor, ill. a neki megfelelő párhuzamos eltolás szerint általában nem geodetikus.

Kivételt képez azonban, ha  $\gamma$  null-geodetikus. Utóbbi esetben  $g_{ac}v^av^c = 0$ , és az egyenlet

$$v^a\tilde{\nabla}_av^b = 2v^bv^c\nabla_c\ln\Omega \quad (\text{D.1.10.})$$

alakot ölt. Ez az egyenlet a geodetikus nem affin paraméteres,  $v^a\tilde{\nabla}_av^b = \alpha v^b$  alakú egyenlete, ahol  $\alpha = 2v^c\nabla_c\ln\Omega$ . A null-geodetikusok tehát konform-invariánsak.

A görbületi tenzor, a Ricci-tenzor és az invariáns görbület bonyolult módon transzformálódik konform-transzformáció során (ld. a D. függelék [1]-ben). A skalárgörbület transzformációja:

$$\tilde{R} = \Omega^{-2}\left(R - 2(n-1)g^{ab}\nabla_a\nabla_b\ln\Omega - (n-2)(n-1)g^{ab}(\nabla_a\ln\Omega)(\nabla_b\ln\Omega)\right). \quad (\text{D.1.11.})$$

A Weyl-tenzor azonban nem transzformálódik,  $\tilde{C}_{abc}{}^d = C_{abc}{}^d$ . Itt azonban fontos az index-pozíció, mert  $C$  és  $\tilde{C}$  indexeit más-más metrikával kell fel- és lehúzni; pl.  $\tilde{C}_{abcd} = \tilde{g}_{de}\tilde{C}_{abc}{}^e = \Omega^2g_{de}C_{abc}{}^e = \Omega^2C_{abcd}$ .

## D.2. Téregyenletek transzformációja

Értelmezzük fizikai mezők egyenleteinek konform invarianciáját.

**Definíció:** A  $\Psi$  fizikai mezőre vonatkozó,  $g_{ab}$  metrikával felírt téregyenletet akkor nevezzük **konform invariánsnak**, ha létezik olyan  $s \in \mathbb{R}$ , hogy  $\Psi$  akkor és csak akkor megoldása a téregyenletnek  $g_{ab}$  metrikával, ha  $\tilde{\Psi} = \Omega^s\Psi$  megoldása a  $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2g_{ab}$  metrikával felírt téregyenletnek. Itt  $s$  a  $\Psi$  térmennyiség **konform súlya**.

**Állítás:** A

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi = 0 \quad (\text{D.2.12.})$$

egyenlet nem konform-invariáns, ha a téridő dimenziója  $\dim M \neq 2$ .

Skalárfüggvényre való hatásában minden kovariáns derivált azonos a közönséges parciális

deriválttal, így

$$\begin{aligned}
\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\tilde{\phi} &= \tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a[\nabla_b(\Omega^s\phi)] \\
&= \Omega^{-2}g^{ab}(\nabla_a\nabla_b(\Omega^s\phi) - C^c_{ab}\nabla_c(\Omega^s\phi)) \\
&= \Omega^{-2}g^{ab}\left[\nabla_a\left(s\phi\Omega^{s-1}\nabla_b\Omega + \Omega^s\nabla_b\phi\right) - C^c_{ab}\nabla_c(\Omega^s\phi)\right] \\
&= \Omega^{-2}g^{ab}\left[\Omega^s\nabla_a\nabla_b\phi + 2s\Omega^{s-1}(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\phi) \right. \\
&\quad \left. + s(s-1)\phi\Omega^{s-2}(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\Omega) + s\phi\Omega^{s-1}\nabla_a\nabla_b\Omega \right. \\
&\quad \left. - \left(2\delta^c_{(a}\nabla_{b)}\ln\Omega - g_{ab}g^{cd}\nabla_d\ln\Omega\right)\left(s\Omega^{s-1}\phi\nabla_c\Omega + \Omega^s\nabla_c\phi\right)\right] \\
&= \Omega^{-2}\left[\Omega^sg^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi + 2s\Omega^{s-1}g^{ab}(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\phi) + s(s-1)\phi\Omega^{s-2}g^{ab}(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\Omega) \right. \\
&\quad \left. + s\phi\Omega^{s-1}g^{ab}\nabla_a\nabla_b\Omega \right. \\
&\quad \left. - \left(g^{cb}\Omega^{-1}\nabla_b\Omega + g^{ac}\Omega^{-1}\nabla_a\Omega - ng^{cd}\Omega^{-1}\nabla_d\Omega\right)\left(s\Omega^{s-1}\phi\nabla_c\Omega + \Omega^s\nabla_c\phi\right)\right] \\
&= \Omega^{-2}\left[\Omega^sg^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi + 2s\Omega^{s-1}g^{ab}(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\phi) + s(s-1)\phi\Omega^{s-2}g^{ab}(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\Omega) \right. \\
&\quad \left. + s\phi\Omega^{s-1}g^{ab}\nabla_a\nabla_b\Omega \right. \\
&\quad \left. + (n-2)g^{ab}\Omega^{-1}\nabla_b\Omega\left(s\Omega^{s-1}\phi\nabla_a\Omega + \Omega^s\nabla_a\phi\right)\right] \\
&= \Omega^{-2}\left[\Omega^sg^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi + 2s\Omega^{s-1}g^{ab}(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\phi) + s(s-1)\phi\Omega^{s-2}g^{ab}(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\Omega) \right. \\
&\quad \left. + s\phi\Omega^{s-1}g^{ab}\nabla_a\nabla_b\Omega \right. \\
&\quad \left. + s(n-2)g^{ab}\phi\Omega^{s-2}(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\Omega) + (n-2)g^{ab}\Omega^{s-1}(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\phi)\right] \\
&= \Omega^{s-2}g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi + (2s+n-2)g^{ab}\Omega^{s-3}(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\phi) + s\phi\Omega^{s-3}g^{ab}\nabla_a\nabla_b\Omega \\
&\quad + s(n+s-3)g^{ab}\phi\Omega^{s-4}(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\Omega). \tag{D.2.13.}
\end{aligned}$$

Ha  $n = 2$ , akkor választhatjuk  $s = 0$ -t, és ekkor  $\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}^b\tilde{\phi} = 0$  akkor és csak akkor, ha  $g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi = 0$ . Ha azonban  $n \neq 2$ , akkor nem tudunk olyan  $s$ -et választani, hogy  $\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}^b\tilde{\phi} = 0$  legyen, ha  $g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi = 0$ . Ekkor tehát a (D.2.12.) egyenlet nem konform-invariáns.

**Megjegyzés:** Az egyenlet Riemann-metrikájú téridőben a Laplace-egyenlet általánosítása, Lorentz-metrikájú téridőben pedig a Klein-Gordon-egyenlet általánosítása.

**Állítás:** Ha  $n > 1$ , akkor a (D.2.12.) egyenlet konform-invariánssá tehető:

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi - \frac{n-2}{4(n-1)}R\phi = 0, \tag{D.2.14.}$$

ahol  $\phi$  konform súlya  $s = (2-n)/2$  (ami éppen  $\phi$  természetes dimenziójának a mínusz egyszerese). A kapott egyenlet a lapos térben felírt Laplace-, ill. Klein-Gordon-egyenlet konform-invariáns általánosítása görbült téridőre. Vegyük észre, hogy  $n = 2$  esetén nem módosul az eredeti (D.2.12.) egyenlet, és visszkapjuk a skalármező  $s = 0$  konform súlyát.

Az  $s = 1 - (n/2)$  választással élve a (D.2.13.) egyenlőség jobb oldalán eltüntethető az a tag, amelyik  $(\nabla_a\Omega)(\nabla_b\phi)$ -t tartalmazza. Ha  $g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi$ -hez hozzáadjuk az  $\alpha R\phi$  tagot, akkor a

skalárgörbület (D.1.11.) transzformációját is felhasználva meg lehet mutatni, hogy ki lehet ejteni a (D.2.13.) jobb oldalán szereplő  $\phi g^{ab} \nabla_a \nabla_b \Omega$  és  $\phi g^{ab} (\nabla_a \Omega) (\nabla_b \Omega)$  kifejezéseket tartalmazó tagokat, ha  $n \neq 1$  és  $\alpha$ -t úgy választjuk, hogy

$$\alpha = -\frac{n-2}{4(n-1)} \quad (\text{D.2.15.})$$

legyen. Ekkor a (D.2.14.) egyenlet konform-invariáns, mert

$$\left( \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b - \frac{n-2}{4(n-1)} \tilde{R} \right) \left( \Omega^{1-(n/2)} \phi \right) = \Omega^{-1-(n/2)} \left( g^{ab} \nabla_a \nabla_b - \frac{n-2}{4(n-1)} R \right) \phi \quad (\text{D.2.16.})$$

teljesül.

**Állítás:** A

$$\begin{aligned} g^{ac} \nabla_c F_{ab} &= 0, \\ \nabla_{[a} F_{bc]} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.2.17.})$$

Maxwell-egyenletek  $n = 4$  dimenzióban konform-invariánsak, és  $F_{ab}$  konform súlya  $s = 0$ . Más,  $n \neq 4$  dimenzióban a (D.2.17.) egyenletek nem invariánsak a konform-transzformáció során.

Felhasználva  $\tilde{\nabla}_a$  hatását duális vektorokra (alsó indexekre), kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{ac} \tilde{\nabla}_c (\Omega^s F_{ab}) &= \Omega^{-2} g^{ac} \left( \nabla_c (\Omega^s F_{ab}) - C_{ca}^d \Omega^s F_{db} - C_{cb}^d \Omega^s F_{ad} \right) \\ &= \Omega^{s-2} g^{ac} \nabla_c F_{ab} + (n-4+s) \Omega^{s-3} g^{ac} F_{ab} \nabla_c \Omega, \end{aligned} \quad (\text{D.2.18.})$$

ahol felhasználtuk  $C_{ab}^c$  explicit alakját. Másrészt pedig

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{[a} (\Omega^s F_{bc]} &= -\nabla_{[a} (\Omega^s F_{cb]) - C_{[ac}^d \Omega^s F_{d|b]} - C_{[ab}^d \Omega^s F_{c]d} \\ &= \nabla_{[a} (\Omega^s F_{bc]) \\ &= \Omega^s \nabla_{[a} F_{bc]} + s \Omega^{s-1} (\nabla_{[a} \Omega) F_{bc]}. \end{aligned} \quad (\text{D.2.19.})$$

Innen látjuk, hogy  $n = 4$  esetén  $s = 0$ -val az egyenletek konform-invariánsak. Ugyanakkor  $n \neq 4$  esetén nem tudjuk  $s$ -et úgy megválasztani, hogy a konform-invariancia ne sérüljön.

**Állítás:** A szimmetrikus  $T^{ab} = T^{ba}$  energiaimpulzus-tenzorra vonatkozó

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \quad (\text{D.2.20.})$$

megmaradási törvény akkor és csak akkor konform-invariáns, ha  $T = T_a^a = g_{ab} T^{ab} = 0$ ; és ekkor  $T^{ab}$  és  $\nabla_a T^{ab}$  konform súlya  $s = -n - 2$ .

Az energiaimpulzus-tenzor divergenciájának konform-transzformáltja

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a \tilde{T}^{ab} &= \tilde{\nabla}_a (\Omega^s T^{ab}) \\ &= \nabla_a (\Omega^s T^{ab}) + C_{ac}^a \Omega^s T^{cb} + C_{ac}^b \Omega^s T^{ac} \\ &= \Omega^s \nabla_a T^{ab} + (s+n+2) \Omega^{s-1} T^{ab} \nabla_a \Omega - \Omega^{s-1} g^{ba} T \nabla_a \Omega, \end{aligned} \quad (\text{D.2.21.})$$

ahol felhasználtuk  $\tilde{\nabla}_a$  hatását vektorokra (felső indexekre) és  $C^a_{bc}$  explicit alakját. Látjuk, hogy általában  $\nabla_a T^{ab}$  nem konform-invariáns, ha azonban  $T = 0$ , akkor  $s = -n - 2$  konform súllyal fennáll a konform-invariancia.

**Állítás:** Megfordítva, ha egy konform-invariáns fizikai mező energiimpulzus-tenzora konform-invariáns<sup>130</sup>, azaz létezik olyan  $w \in \mathbb{R}$ , hogy  $T^{ab} \rightarrow \tilde{T}^{ab} = \Omega^w T^{ab}$ , akkor  $T = 0$  és  $w = -n - 2$  kell legyen<sup>131</sup>. Ha tehát egy konform-invariáns fizikai mező energiimpulzus-tenzora is konform-invariáns, akkor az energiimpulzus-tenzor spúrjának zérusnak kell lennie.

Az állítás feltételei értelmében a (D.2.20.) megmaradási törvénynek fenn kell állnia mind az eredeti, mind a konform-transzformált elméletben. Ekkor viszont a (D.2.21.) egyenlőség alapján  $T = 0$  és  $w = -n - 2$  kell legyen.

---

<sup>130</sup>Ez a helyzet, ha az energiimpulzus-tenzort konform-invariáns hatásból nyerjük a metrika szerinti funkcionál-deriválással.

<sup>131</sup>Az energiimpulzus-tenzor  $w$  konform súlya különbözhet a konform-invariáns mező  $s$  konform súlyától.

## E. Perturbációk

### E.1. A linearizálásról

Bizonyos esetekben felmerül az Einstein-egyenletek közelítő megoldásának szükségessége. Az egyik eset, ha a kozmológiai perturbációk fejlődését akarjuk vizsgálni a Világegyetem története során. Ilyenkor feltesszük, hogy a Világegyetemben az anyag eloszlása nem tökéletesen homogén és izotróp, és ezért a metrika kicsit eltér a FLRW-metrikától. Egy másik eset, amikor egy közel gömbszimmetrikus égitest viselkedésére vagyunk kíváncsiak, amelyik gyengén kibillent az egyensúlyi állapotából, vagyis amikor a metrika a Schwarzschild-metrikától csak kicsit különbözik. Ugyancsak érdekes eset, amikor a gravitációs hullámok viselkedését és terjedését vizsgáljuk vákuumban, ahol a metrika kicsit különbözik a Minkowski-metrikától. Ilyen esetekben reményünk sincsen, hogy egzaktul megoldjuk az Einstein-egyenleteket. Ha azonban a megoldás az Einstein-egyenletek valamely ismert  ${}^0g_{ab}$  egzakt megoldásától csak kicsit különbözik, akkor a  $g_{ab}$  metrikát felbonthatjuk az egzakt megoldás és a  $\gamma_{ab}$  perturbáció összegére,  $g_{ab} = {}^0g_{ab} + \gamma_{ab}$ , és linearizálhatjuk az Einstein-egyenleteket a  $\gamma_{ab}$  perturbációban. A linearizált egyenletek megoldása révén megkaphatjuk az Einstein-egyenletek közelítő megoldását.

Először ismerkedjünk meg általánosságban az egyenletek linearizálásának módszerével. Legyen a linearizálásra váró egyenlet

$$\mathcal{E}(g) = 0, \quad (\text{E.1.1.})$$

ahol  $g$  a keresett függvény. (Itt  $g$  jelölheti függvények, vagy tenzormezők összességét.) Esetünkben  $\mathcal{E}$  az Einstein-egyenlet,  $g$  pedig a metrika és az anyagot leíró térváltozók összessége. Tegyük fel, hogy ismert az egyenlet  ${}^0g$  egzakt megoldása, és a vizsgált, azaz perturbált körülmények között a megoldás csak kicsit különbözik az egzakt megoldástól. Ilyenkor a megoldások olyan egy-paraméteres (esetleg több-paraméteres)  $g(\lambda)$  családját keressük, amelyre

$$\mathcal{E}(g(\lambda)) = 0, \quad (\text{E.1.2.})$$

ahol  $g(\lambda)$  differenciálhatóan függ  $\lambda$ -tól, és  $g(0) = {}^0g$ . Itt  $\lambda$  „méri” az egzakt megoldástól az eltérést,  $g = {}^0g + \lambda\gamma$ , és ha meghatározzuk  $g(\lambda)$ -t kis  $\lambda$  értékekre, akkor megkapjuk egzaktul a keresett megoldást. Az egyenletet ebben az alakjában azonban nehéz egzaktul megoldani. Egyszerűbb egyenletet kapunk, ha deriváljuk  $\lambda$  szerint az eredeti egyenletet, majd  $\lambda = 0$  választással élünk:

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \mathcal{E}(g(\lambda)) \right|_{\lambda=0} = 0. \quad (\text{E.1.3.})$$

Ez az egyenlet lineáris a  $\gamma = dg(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=0}$  perturbációban, úgyhogy

$$\mathcal{L}(\gamma) = 0 \quad (\text{E.1.4.})$$

alakba írható át, ahol  $\mathcal{L}$  lineáris operátor. Ez az **eredeti  $\mathcal{E}(g) = 0$  egyenlet  ${}^0g$  egzakt megoldás körüli linearizáltja.**

A linearizálással kapcsolatban fontos figyelemmel lenni két körülményre. Az egyik az, hogy nehéz megbecsülni, mennyire kicsi legyen  $\lambda$  ahhoz, hogy a  ${}^0g + \lambda\gamma$  alakú megoldás az egzakt perturbált  $g(\lambda)$  megoldásnak jó közelítése legyen. A másik az, hogy az (E.1.4.) egyenlet megoldásai között lehetnek hamis megoldások, amelyek nem megoldásai az eredeti (E.1.2.) egyenletnek. Mindig meg kell ezért vizsgálni, hogy a linearizált egyenlet megoldásához tartozik-e az eredeti egyenletnek valamely egzakt  $g(\lambda)$  megoldása, ez az úgynevezett **linearizálási stabilitás** kérdése.

## E.2. A vákuumbeli Einstein-egyenlet linearizálása

Tekintsük vákuumban az  $R_{ab} = 0$  Einstein-egyenletet. Legyen  ${}^0g_{ab}$  ennek valamely egzakt megoldása, és keressük az egyenlet  $g_{ab}(\lambda) = {}^0g_{ab} + \lambda\gamma_{ab}$  alakú megoldását, ahol  $\lambda\gamma_{ab}$  kis perturbáció. A linearizált egyenletet úgy kapjuk meg, hogy meghatározzuk az  $R_{ab}(\lambda)$  Ricci-tenzornak a  ${}^0g_{ab}$  „háttér metrikával” kifejezett alakját, majd ennek  $\lambda$  szerinti deriváltját tesszük zérussá a  $\lambda = 0$  helyen.

Jelölje  ${}^\lambda\nabla_a$  és  ${}^0\nabla_a$  rendre a  $g_{ab}(\lambda)$  és a  ${}^0g_{ab}$  metrikához tartozó gradiens-operátort. A köztük levő kapcsolatot olyan  $C^c_{ab}(\lambda)$  tenzormező határozza meg, amelyre a (3.3.17.) összefüggés értelmében

$$C^c_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2}g^{cd}(\lambda)\left({}^0\nabla_a g_{bd}(\lambda) + {}^0\nabla_b g_{ad}(\lambda) - {}^0\nabla_d g_{ab}(\lambda)\right). \quad (\text{E.2.5.})$$

A következő lépés, hogy kifejezzük a  $g_{ab}(\lambda)$  metrikához tartozó  $R_{abc}{}^d(\lambda)$  Riemann-tenzort az  ${}^0R_{abc}{}^d$  görbületi tenzorral és a  $C^c_{ab}(\lambda)$  tenzorral. Induljunk ki a görbületi tenzort definiáló (3.4.4.) összefüggésből,

$$[{}^\lambda\nabla_a, {}^\lambda\nabla_b]\omega_c = {}^\lambda R_{abc}{}^d\omega_d, \quad (\text{E.2.6.})$$

ahol  $\omega_a$  tetszőleges egy-forma, és helyettesítsük ebben  ${}^\lambda\nabla_a$  helyére a megfelelő kifejezést  ${}^0\nabla_a$ -val és  $C^c_{ab}(\lambda)$ -vel. Ezután a (3.6.33.) összefüggés levezetésekor alkalmazotthoz hasonló lépésekkel kaphatjuk, hogy

$$R_{abc}{}^d(\lambda) = {}^0R_{abc}{}^d - 2{}^0\nabla_{[a}C^d_{b]c}(\lambda) + 2C^e_{c[a}(\lambda)C^d_{b]e}(\lambda). \quad (\text{E.2.7.})$$

Innen a  $g_{ab}(\lambda)$  metrikához tartozó Ricci-tenzor:

$$R_{ac}(\lambda) = -2{}^0\nabla_{[a}C^b_{b]c}(\lambda) + 2C^e_{c[a}(\lambda)C^b_{b]e}(\lambda), \quad (\text{E.2.8.})$$

ahol felhasználtuk, hogy  ${}^0R_{ab} = 0$ , mert  ${}^0g_{ab}$  a vákuumbeli Einstein-egyenletek megoldása.

A Ricci-tenzornak ez az alakja kedvező, mert könnyen képezhetjük az

$$\dot{R}_{ac} = \left.\frac{dR_{ac}(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \quad (\text{E.2.9.})$$

deriváltat. A  $C^c_{ab}(\lambda)$  tenzor definíciójából értelemszerűen következik, hogy  $C^c_{ab}(0) = 0$ , (hiszen ekkor eltűnik a különbség  ${}^\lambda\nabla_a$  és  ${}^0\nabla_a$  között,) úgyhogy  $R_{ac}(\lambda)$ -nak a  $C^c_{ab}(\lambda)$ -ban másodrendű tagja nem ad járulékot  $\dot{R}_{ac}$ -hoz,

$$\dot{R}_{ac} = -2{}^0\nabla_{[a}\dot{C}^b_{b]c}, \quad (\text{E.2.10.})$$

ahol  $\dot{C}_{bc}^b = dC_{bc}^b(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=0}$ . Az (E.2.5.) kifejezést deriválva

$$\dot{C}_{ab}^c = \frac{1}{2} {}^0g^{cd} \left( {}^0\nabla_a \gamma_{bd} + {}^0\nabla_b \gamma_{ad} - {}^0\nabla_d \gamma_{ab} \right) \quad (\text{E.2.11.})$$

adódik, ahol  $\gamma_{ab} = dg_{ab}(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=0}$  és felhasználtuk, hogy az inverz-metrika deriválásából nem kapunk járulékot, mert  ${}^0\nabla_a {}^0g_{bc} = 0$ . Az (E.2.11.) kifejezést behelyettesítjük az (E.2.10.) kifejezésbe. Ekkor a vákuumban az

$$0 = \dot{R}_{ac} = -\frac{1}{2} {}^0g^{bd} {}^0\nabla_a {}^0\nabla_c \gamma_{bd} - \frac{1}{2} {}^0g^{bd} {}^0\nabla_b {}^0\nabla_d \gamma_{ac} + {}^0g^{bd} {}^0\nabla_b {}^0\nabla_{(c} \gamma_{a)d} \quad (\text{E.2.12.})$$

linearizált egyenlet adódik a  $\gamma_{ab}$  perturbációra. Itt a keresett  $\gamma_{ab}$  perturbációt leszámítva, csak a háttér-metrika és a hozzá tartozó gradiens-operátor szerepel. *Ezért elhagyhatjuk a háttérre utaló bal felső null-indexet, és a továbbiakban az indexek fel- és lehúzását a háttér-metrikával és az inverzével végezzük.* Az új jelölésben a megoldásra váró egyenlet:

$$0 = -\frac{1}{2} \nabla_a \nabla_c \gamma - \frac{1}{2} \nabla^b \nabla_b \gamma_{ac} + \nabla^b \nabla_{(c} g_{a)b}, \quad (\text{E.2.13.})$$

ahol  $\gamma = \gamma^a_a = g^{ab} \gamma_{ab}$ . Ha speciálisan a háttér a Minkowski-téridő, akkor  $g_{ab} = \eta_{ab}$  és  $\nabla_a = \partial_a$ , úgyhogy visszakapjuk a gyenge gravitációs hullámok leírására korábban használt egyenletet.

**Állítás:** A vákuumban érvényes linearizált Einstein-egyenlet az egyszerűbb

$$\nabla^b \nabla_b \gamma_{ac} - 2R^b_{ac}{}^d \gamma_{bd} = 0 \quad (\text{E.2.14.})$$

alakra hozható, ha az úgynevezett **transzverzális, spúrtalan mértéket** választjuk:

$$\nabla^a \gamma_{ab} = 0, \quad \gamma = 0. \quad (\text{E.2.15.})$$

(Az (E.2.14.) egyenlet szerkezetében hasonlít az elektromágneses vektorpotenciálra görbült téridőben érvényes (4.3.20.) Maxwell-egyenlethez.)

Azt használjuk ki, hogy a diffeomorfizmus-invariancia miatt azok a perturbációk fizikailag egyenértékűek, amelyek  $\gamma_{ab} \rightarrow \gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + 2\nabla_{(a} v_{b)}$  transzformációval kaphatók meg egymásból, ahol  $v^a$  tetszőleges vektormező (ld. a C.3. függelék erre vonatkozó állítását). Hasonlóan járunk el, mint amikor a Minkowski-háttéren linearizált egyenletek esetében rögzítettünk mértéket az 5. fejezetben. Megoldjuk a

$$\nabla^b \nabla_b v_a + R_a{}^b v_b = -\nabla^b \bar{\gamma}_{ab} \quad (\text{E.2.16.})$$

egyenletet, ahol  $\bar{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} \gamma$ . (A **10.1.2. tétel** értelmében létezik az egyenlet megoldása.) Majd a megoldásul kapott  $v^a$  vektormezőt és a mértéktranszformációt felhasználva elérjük, hogy

$$\nabla^b \bar{\gamma}_{ab} = 0 \quad (\text{E.2.17.})$$

legyen. Ebben a mértékben az (E.2.13.) egyenlet mindkét oldalának spúriját képezve kapjuk, hogy

$$\nabla^a \nabla_a \gamma = 0. \quad (\text{E.2.18.})$$



Hasonlóan, ahogyan az 5.3.1. fejezet elején láttuk a Minkowski-háttéren linearizált Einstein-egyenlet esetén, most is marad egy további, korlátozott mértékszabadság:

$$\gamma_{ab} \longrightarrow \gamma_{ab} + 2\nabla_{(a}w_{b)}, \quad (\text{E.2.19.})$$

ahol  $w^a$  olyan vektormező, amely kielégíti a

$$\nabla^b \nabla_b w_a + R_a{}^b w_b = 0 \quad (\text{E.2.20.})$$

egyenletet. Ez a szabadság felhasználható arra, hogy az (5.3.18.) és az (5.3.20.) feltételek analogjait kielégítsük, és elérjük, hogy a **10.1.2. tétel** alapján  $\gamma = 0$  legyen a teljes téridőben.

**Ezzel tehát megmutattuk, hogy tetszőleges  $g_{ab}$  vákuum-megoldás tetszőleges  $\gamma_{ab}$  perturbációja esetén választhatjuk a transzverzális, spúrtalan mértéket, amelyben**

$$\nabla^a \gamma_{ab} = 0, \quad \gamma = 0 \quad (\text{E.2.21.})$$

**a teljes téridőben.** Ugyanakkor, tetszőleges görbült háttéren általában nem lehetséges bevezetni a Minkowski-háttéren megengedett  $\gamma_{0\mu} = 0$ , ha  $\mu = 1, 2, 3$  sugárzási mértéket.

A  $\gamma = 0$  feltétel miatt az (E.2.13.) egyenlet jobb oldalának első tagja azonosan eltűnik. A harmadik tagot pedig azonosan átalakíthatjuk. Ehhez használjuk fel, hogy a Leibnitz-szabály és a Riemann-tenzor definíciója alapján

$$\begin{aligned} [\nabla_a, \nabla_b](\omega_c \omega_d) &= \nabla_a \nabla_b (\omega_c \omega_d) - \nabla_b \nabla_a (\omega_c \omega_d) \\ &= \nabla_a (\nabla_b \omega_c \cdot \omega_d + \omega_c \nabla_b \omega_d) - \nabla_b (\nabla_a \omega_c \cdot \omega_d + \omega_c \nabla_a \omega_d) \\ &= ([\nabla_a, \nabla_b] \omega_c) \omega_d + \omega_c [\nabla_a, \nabla_b] \omega_d \\ &= R_{abc}{}^e \omega_e \omega_d + R_{abd}{}^e \omega_e \omega_c, \end{aligned} \quad (\text{E.2.22.})$$

ahonnan

$$[\nabla_a, \nabla_b] \gamma_{cd} = R_{abc}{}^e \gamma_{ed} + R_{abd}{}^e \gamma_{ec}. \quad (\text{E.2.23.})$$

Ennek segítségével azt kapjuk, hogy

$$\nabla^b \nabla_{(c} \gamma_{a)b} = \nabla_{(c} \nabla^b \gamma_{a)b} + R^b{}_{(ca)}{}^d \gamma_{db} + R^b{}_{(c|b}{}^d \gamma_{a)d}. \quad (\text{E.2.24.})$$

Itt az első tag a transzverzális mérték miatt eltűnik; az utolsó tag is eltűnik, mert  $R^b{}_{cb}{}^d = R_c{}^d = 0$ , hiszen  $g_{ab}$  a vákuum-megoldás. Másrészt, mivel  $\gamma_{db} = \gamma_{bd}$  azért  $R^b{}_{ca}{}^d \gamma_{db}$  szimmetrikus az  $a, c$  indexekben, úgyhogy

$$\nabla^b \nabla_{(c} \gamma_{a)b} = R^b{}_{ca}{}^d \gamma_{db}. \quad (\text{E.2.25.})$$

Ekkor viszont az (E.2.13.) egyenletből a transzverzális, spúrtalan mértékben megkapjuk a keresett (E.2.14.) egyenletet.

Bár az (E.2.14.) egyenlet elég egyszerű alakúnak látszik, valójában az egyszerű alak nagyon bonyolult csatolt differenciál-egyenletrendszer takar, amelynek alapján a perturbációs analízis csak akkor sikeres, ha a háttér-metrika nagyfokú szimmetriával vagy egyéb „egyszerűsítő” tulajdonságokkal rendelkezik.

**Megjegyzés:** Végezetül ki kell térni az úgynevezett **linearizálási stabilitás** kérdésére, vagyis arra, hogy a linearizált Einstein-egyenletek megoldásához tartozik-e az egzakt egyenlet megoldásainak valamely egy-paraméteres családja. Ezt a kérdést a vákuumra vonatkozó Einstein-egyenlet esetén alaposan tanulmányozták (ld. [4]). Ha az  $(M, g_{ab})$  háttér-téridő rendelkezik kompakt, térszerű Cauchy-felülettel, akkor az Einstein-egyenlet akkor

és csak akkor mutat linearizálási stabilitást, ha a háttér-téridő nem rendelkezik Killing-vektormezővel. Ha a háttér-téridő rendelkezik Killing-vektormezővel, akkor az Einstein-egyenlet linearizálási stabilitásának szükséges feltétele az, hogy a  $\gamma_{ab}$  perturbáció elégítsen ki egy a Killing-vektormezőt is tartalmazó, másodrendű integrál-feltételt. Másrészt az a vélelem, hogy az aszimptotikusan lapos perturbációk tetszőleges aszimptotikusan lapos háttéren linearizálási stabilitást mutatnak, még akkor is, ha a háttér rendelkezik Killing-vektorral. Ezt azonban csak lapos háttér-téridő esetében mutatták meg.

## F. Az általános relativitáselmélet Lagrange- és Hamilton-féle tárgyalása

### F.1. Általános megjegyzések

Az általános relativitáselmélet, mint klasszikus elmélet dinamikai tartalmáról az Einstein-egyenletek teljes képet adnak. Ennek dacára sok szempontból előnyös lehet az elméletnek akár a Lagrange-féle, akár a Hamilton<sup>132</sup>-féle megfogalmazása. Például az Einstein-egyenletek a Lagrange-függvényből levezethetők, ami az általános relativitáselmélet „szépségét” mutatja. A hamiltoni tárgyalásmód abban segít, hogy mélyebben megértsük az általános relativitáselmélet dinamikai tartalmát, nevezetesen, hogy azt úgy foghassuk fel, mint egy  $h_{ab}$  térmetrika valamilyen idő-paraméter szerinti változását. A hamiltoni tárgyalásmód másik hozadéka, hogy tudjuk definiálni a teljes energiát, ha a térbeli végtelenben a téridő aszimptotikusan lapos.

Még fontosabb szerepet játszik mindkét tárgyalásmód, ha tovább akarunk lépni a gravitáció kvantumelmélete irányában. A klasszikus elmélet Lagrange-féle megfogalmazása a Feynman-féle pályaintegrálos kvantálás kiindulópontja, míg a kanonikus kvantálás kiindulópontja a klasszikus elmélet hamiltoni megfogalmazása.

### F.2. A Lagrange-féle megfogalmazás

#### F.2.1. A Lagrange-formalizmus

Tekintsük először át, hogy hogyan történik a klasszikus térelmélet Lagrange-féle tárgyalása. Tekintsünk olyan elméletet, ahol a fizikai mezőket az  $M$  sokaságon értelmezett tenzormező(k) írja (írják) le. Az egyszerűség kedvéért hagyjuk el a tenzorindexeket, és jelöljük a térmennyiség(ek)et  $\psi$ -vel. Legyen  $S[\psi]$  funkcionál, amely az  $M$ -en értelmezett  $\psi$  térkonfigurációkat képezi le számokra.

**Definíció:** Értelmezzük a **funkcionál-deriváltat**. Legyen  $\psi_\lambda$  a térkonfigurációk valamely  $\psi_0$  térkonfigurációból simán megkapható egy-paraméteres családja, amely eleget tesz valamilyen rögzített határfeltételeknek. Vezessük be a  $\delta\psi = d\psi_\lambda/d\lambda|_{\lambda=0}$  jelölést, és tegyük fel, hogy  $dS/d\lambda|_{\lambda=0}$  létezik a  $\psi_0$ -ból „induló” minden egy-paraméteres családra. Tegyük fel továbbá, hogy létezik olyan  $\chi$  sima tenzormező, hogy minden ilyen egy-paraméteres család esetén

$$\left. \frac{dS}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \int_M \chi \delta\psi \quad (\text{F.2.1.})$$

írható, ahol az integrandusban kontrakció történik valamennyi tenzorindexre. (A  $\chi$  tenzormező  $\psi$ -nek duálisa, azaz ha  $\psi$   $(k, l)$ -tenzor, akkor  $\chi$   $(l, k)$ -tenzor.) Ekkor azt mondjuk, hogy az  $S$  funkcionál a konfigurációs tér  $\psi_0$  helyén **funkcionálisan deriválható**, és  $\chi = \delta S / \delta\psi|_{\psi_0}$  az  $S[\psi]$  **funkcionál-deriváltja**.

---

<sup>132</sup>Sir William Rowan Hamilton, ír matematikus, 1805-1865.

**Definíció: A térelmélet Lagrange-féle megfogalmazása.** Tekintsük az  $S[\psi] = \int_M \mathcal{L}[\psi]$  funkcionált, ahol az  $\mathcal{L}$  a  $\psi$  térmennyiségnek és véges sok deriváltjának lokális függvénye,

$$\mathcal{L}|_x = \mathcal{L}(\psi(x), \nabla\psi(x), \dots, \nabla^k\psi(x)). \quad (\text{F.2.2.})$$

Tegyük fel, hogy  $S$  funkcionálisan deriválható, és azok a  $\psi$  térkonfigurációk, amelyek  $S$ -et szélsőértékké teszik, azaz amelyekre

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \psi} \right|_{\psi} = 0, \quad (\text{F.2.3.})$$

pontosan azok, amelyek kielégítik a téregyenleteket. Ekkor  $S$ -et a **hatásnak**,  $\mathcal{L}$ -et a **Lagrange-sűrűségnek** nevezzük,  $\mathcal{L}$  fentieknek megfelelő megválasztását pedig **az elmélet Lagrange-féle megfogalmazásának**.

A pont-mechanikában a hatáselv alapján megfogalmazott variációs feladatot a részecske (vagy részecskék) pályájának (pályáinak) rögzített végpontjai mellett kell megoldani. Hasonlóan, fizikai mezők esetén az (F.2.3.) variációs feladatot úgy tesszük egyértelművé, hogy a térkonfigurációkat egy  $U \subset M$  kompakt tartományon vizsgáljuk, és a  $\psi_\lambda$  térkonfigurációk azon egy-paraméteres családjaira szorítkozunk, amelyek  $\psi$  értékét a tartomány  $\bar{U}$  határán változatlanul hagyják.

## F.2.2. A Klein-Gordon-mező esete

**Állítás:** A  $\phi$  Klein-Gordon-mező esetén Minkowski-téridőben a Lagrange-sűrűség

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2}[(\partial_a\phi)(\partial^a\phi) + m^2\phi^2] \quad (\text{F.2.4.})$$

alakú, ami a jól ismert Klein-Gordon-egyenletre vezet.

Az (F.2.4.) Lagrange-sűrűség felhasználásával

$$\left. \frac{dS_{KG}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = - \int [(\partial_a\phi_0)\partial^a(\delta\phi) + m^2\phi_0(\delta\phi)] = \int [\partial^a\partial_a\phi_0 - m^2\phi_0](\delta\phi) \quad (\text{F.2.5.})$$

adódik, ahol az integrált a Minkowski-téridőn értelmezett természetes térfogatelemmel kell elvégezni, a felületi tag pedig nem ad járulékot a  $\phi_\lambda$ -ra kirótt határfeltétel miatt, amelyből  $\delta\psi = 0$  következik az  $\bar{U}$  határon. Ezért  $S$  funkcionál-deriválható és

$$\frac{\delta S_{KG}}{\delta \phi} = \partial^a\partial_a\phi - m^2\phi. \quad (\text{F.2.6.})$$

Az (F.2.4.) Lagrange-sűrűség esetén tehát az (F.2.3.) variációs feladat megoldása valóban a Klein-Gordon-egyenletre vezet.

## F.2.3. Az elektromágneses mező

Könnyen belátható, hogy az  $A_a$  vektorpotenciálra vonatkozó Maxwell-egyenletek megkaphatók az

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{ab}F_{ab} = -(\partial_{[a}A_{b]})(\partial^{[a}A^{b]}) \quad (\text{F.2.7.})$$

Lagrange-sűrűségből.

## F.2.4. Az általános relativitáselmélet

### 1. Az Einstein-egyenletek vákuumban

Az általános relativitáselméletben a térváltozó az  $M$  4-dimenziós téridő-sokaságon értelmezett  $g_{ab}$  metrika. Az  $\int_M$  integrált a  $g_{ab}$  metrikától függő  $\epsilon_{abcd}$  természetes térfogatelemmel kell számolni. Ez kényelmetlenség, mert a hatás funkcionál-deriváltjának képzésekor azt is figyelembe kell venni, hogy a térfogatelem függ a térváltozótól. Ezt a bonyodalmat elkerülhetjük, ha bevezetünk egy a metrikától független  $e_{abcd} = e_{[abcd]}$  térfogatelemet és minden  $\int_M$  integrált ezzel fejezünk ki. Ez úgy történhet, hogy választunk egy koordinátarendszert, és nevezzük az ehhez tartozó koordináta-térfogatelemet  $e_{abcd}$ -nek. Azonban bármely két térfogatelem csak egy  $f$  skálár-tényezőben különbözhet, úgyhogy  $\epsilon_{abcd} = f e_{abcd}$  kell, hogy fennálljon. Bármely olyan koordinátabázisban, amelyben  $e_{abcd}$  elemei csak  $\pm 1$  (és 0),  $f = \sqrt{-g}$ , ahol  $g$  a metrika ezen bázisban vett  $g_{\mu\nu}$  komponenseiből képezett mátrix determinánsa, úgyhogy  $\epsilon = \sqrt{-g}e$ . Ha adott  $e_{abcd}$ , akkor  $T^{a\dots b}_{c\dots d}$  **tenzorsűrűségeket** definiálunk: ha  $\tilde{T}^{a\dots b}_{c\dots d}$  a tenzor, amelynek értéke nem függ  $e_{abcd}$  megválasztásától, akkor a megfelelő tenzorsűrűség

$$T^{a\dots b}_{c\dots d} = \sqrt{-g} \tilde{T}^{a\dots b}_{c\dots d}. \quad (\text{F.2.8.})$$

Ahhoz, hogy a hatás ne függjön az  $e_{abcd}$  térfogatelem (azaz a koordinátarendszer) megválasztásától,  $\mathcal{L}$ -nek skálársűrűségnek kell lennie, és ahhoz, hogy  $dS/d\lambda$  is független legyen  $e_{abcd}$ -től,  $S$  funkcionál-deriváltjainak tenzor-sűrűségeknél kell lenniük.

**Állítás:** Vákuumban az Einstein-egyenleteknek megfelelő Lagrange-sűrűség az

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R \quad (\text{F.2.9.})$$

skalár-sűrűség, és a megfelelő hatás az

$$S[g^{ab}] = \int \mathcal{L}_G e \quad (\text{F.2.10.})$$

### Hilbert<sup>133</sup>-hatás.

**Megjegyzés:** Itt a térfogatelemet a differenciál-formák szokásos módján jelöltük. Másrészt, kényelmi okokból az inverz-metrikát használtuk dinamikai változóként. Egy-paraméteres variációk esetén a  $\delta g^{ab} = dg^{ab}/d\lambda$  és  $\delta g_{ab} = dg_{ab}/d\lambda$  jelöléseket használjuk, úgyhogy  $g^{ac}g_{cb} = \delta^a_b$  miatt  $\delta g_{ab} = g_{ac}g_{bd}\delta g^{cd}$ . Elvben az  $\int_M \chi \delta g^{ab}$  módon értelmezett  $\chi$  funkcionál-deriváltakhoz tetszőleges antiszimmetrikus tenzort hozzáadhatunk, mert  $g^{ab}$  és ennek következtében  $\delta g^{ab}$  szimmetrikus. A funkcionál-deriváltakat úgy egyértelműsítjük, hogy legyenek szimmetrikusak.

Tekintsük az inverz-metrikáknak a  $g^{ab}$ -ről induló tetszőleges egy-paraméteres családját, ekkor

$$\frac{d\mathcal{L}_G}{d\lambda} = \sqrt{-g}(\delta R_{ab})g^{ab} + \sqrt{-g}R_{ab}\delta g^{ab} + R\delta(\sqrt{-g}). \quad (\text{F.2.11.})$$

<sup>133</sup>David Hilbert, német matematikus, 1862-1943.

A perturbációkra vonatkozó (E.2.12.) összefüggésből kiindulva írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
g^{ac}\delta R_{ac} &= g^{ac}\left(-\frac{1}{2}g^{bd}\nabla_a\nabla_c\delta g_{bd}-\frac{1}{2}g^{bd}\nabla_b\nabla_d\delta g_{ac}+\frac{1}{2}g^{bd}\nabla_b\nabla_c\delta g_{ad}+\frac{1}{2}g^{bd}\nabla_b\nabla_a\delta g_{cd}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\nabla^d\nabla^a\delta g_{da}+\nabla^d\nabla^c\delta g_{dc}-\nabla^c(g^{bd}\nabla_c\delta g_{bd})-\nabla^d(g^{ac}\nabla_d\delta g_{ac})\right) \\
&= \nabla^a\nabla^b\delta g_{ab}-\nabla^a(g^{cd}\nabla_a\delta g_{cd}),
\end{aligned} \tag{F.2.12.}$$

vagyis írhatjuk, hogy

$$g^{ab}\delta R_{ab} = \nabla^a v_a, \quad v_a = \nabla^b(\delta g_{ab}) - g^{cd}\nabla_a(\delta g_{cd}). \tag{F.2.13.}$$

Használjuk még fel, hogy

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}\delta g_{ab} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab}. \tag{F.2.14.}$$

Ezeknek az összefüggéseknek a segítségével kapjuk, hogy

$$\frac{dS_G}{d\lambda} = \int \frac{d\mathcal{L}_G}{d\lambda} e = \int (\nabla^a v_a)\sqrt{-g}e + \int \left(R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}\right)\delta g^{ab}\sqrt{-g}e. \tag{F.2.15.}$$

A jobb oldalon az első tag egy divergencia integrálja az  $\epsilon = \sqrt{-g}e$  természetes térfogatelem szerint, amely a Stokes-tétel értelmében csak felületi tagot eredményez. Ezt most elhagyjuk az egyszerűség kedvéért, de megjegyezzük, hogy általában nem tűnik el, ha olyan variációkat tekintünk, amikor  $g^{ab}$  rögzített a határon, csak akkor válik nullává, ha  $g^{ab}$  első deriváltjait is rögzített értéken tartjuk a határon. A fejezet végén meghatározzuk ezt a felületi tagot, és megmutatjuk, hogyan kell módosítani  $S_G$ -t ahhoz, hogy kiejtsük.

Ha tehát eltekintünk a felületi tagtól, akkor

$$\frac{\delta S_G}{\delta g^{ab}} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \tag{F.2.16.}$$

adódik, úgyhogy  $\delta S_G/\delta g^{ab} = 0$  valóban az Einstein-egyenleteket adja vissza vákuumban.

**Megjegyzés:** Érdemes megemlíteni azt a lehetőséget, amit **Palatini**<sup>134</sup> **módsze-re** akná ki. Ha a gradiens-operátort (avagy a konnexit) nem azonosítjuk eleve a metrika által indukált gradiens-operátorral (vagy konnexióval), akkor a Hilbert-hatás

$$\mathcal{S}_G[g^{ab}, \nabla_a] = \int \sqrt{-g}R_{ab}g^{ab}e \tag{F.2.17.}$$

alakjában  $R_{ab}$ -t kizárólag a  $\nabla_a$  függvényének tekinthetjük, az így értelmezett hatás a **Palatini-hatás**.

**Állítás:** A Palatini-hatásra alkalmazott hatás-elv a vákuumbeli  $G_{ab} = 0$  Einstein-egyenleteket és a metrika és a konnexió kompatibilitását jelentő  $\nabla_c g^{ab} = 0$  feltételt szolgáltatja.

Ahhoz, hogy  $\nabla_a$ -t variáljuk, abból indulunk ki, hogy két tetszőleges gradiens-operátor,  $\nabla_a$  és  $\tilde{\nabla}_a$  közti eltérést a  $C^c_{ab}$  mátrix határozza meg. Rögzítsük ezért  $\nabla_a$ -t úgy, hogy legyen

<sup>134</sup>Attilio Palatini, olasz matematikus, 1889–1949.

az  $\lambda = 0$  esetén a  $g^{ab}$ -hez tartozó gradiens-operátor, és  ${}^\lambda\nabla_a$  variációját  $C_{ab}^c$  variálásával kapjuk meg. Használjuk fel az (E.2.10.) összefüggést, ahonnan

$$\delta R_{ab} = -2\nabla_{[a}\delta C_{c]b}^c \quad (\text{F.2.18.})$$

adódik. Ekkor a hatás variációja:

$$\left.\frac{dS_G}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = -2 \int g^{ab}(\nabla_{[a}\delta C_{c]b}^c)\sqrt{-g}e + \int \left(R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}\right)\delta g^{ab}\sqrt{-g}e. \quad (\text{F.2.19.})$$

Másrészt viszont a tenzormezők  $\nabla_a$  és  $\tilde{\nabla}_a$  szerinti deriváltjai közti kapcsolat miatt

$$\nabla_{[a}\delta C_{c]b}^c = \tilde{\nabla}_{[a}\delta C_{c]b}^c + \frac{1}{2}[2C_{cb}^d\delta C_{ad}^c - C_{ab}^d\delta C_{cd}^c - C_{cd}^c\delta C_{ab}^d], \quad (\text{F.2.20.})$$

amit behelyettesítünk. (A tenzormezők (3.2.17.) deriválási szabályát alkalmaztuk a  $\delta C_{db}^c$  tenzorra, majd antiszimmetrizáltunk az  $a, d$  indexekben, majd a  $c, d$  indexekben kontrakciót hajtottunk végre.) Kihasználjuk továbbá, hogy a

$$-2 \int g^{ab}(\tilde{\nabla}_{[a}\delta C_{c]b}^c)\sqrt{-g}e \quad (\text{F.2.21.})$$

integrál egy teljes divergenciának az  $\epsilon$  természetes térfogatelem szerinti integrálja, mert  $\tilde{\nabla}_a$  a metrikával kompatibilis gradiens-operátor. Ez a tag eltűnő felületi integrált eredményez, ha  $C_{ab}^c$  rögzített a határon. Így a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dS_G}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} &= \int g^{ab}[C_{ab}^d\delta C_{cd}^c + C_{cd}^c\delta C_{ab}^d - 2C_{cb}^d\delta C_{ad}^c]\sqrt{-g}e + \int \left(R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}\right)\delta g^{ab}\sqrt{-g}e \\ &= \int [C_{ab}^{bd}\delta_a^c + C_{dc}^d g^{ab} - 2C_{c\ a}^b]\delta C_{ab}^c\sqrt{-g}e + \int \left(R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}\right)\delta g^{ab}\sqrt{-g}e. \end{aligned} \quad (\text{F.2.22.})$$

A  $\delta S/\delta C_{ab}^c = 0$  egyenlőség a jobboldali első integrál integrandusában szereplő szögletes zárójel szimmetrizáltjának eltűnését jelenti, ahonnan  $C_{ab}^c = 0$ , azaz  $\nabla_a = \tilde{\nabla}_a$  következik. A hatás  $g^{ab}$  szerinti variálása pedig ismét az Einstein-egyenleteket eredményezi.

## 2. Az Einstein-egyenletek anyagmezők jelenlétében

Anyagmezők jelenlétében a teljes  $S$  hatást az anyagtérre vonatkozó  $S_M$  hatásból és az  $S_G$  Hilbert-hatásból összeadással kapjuk, a megfelelő Lagrange-sűrűség így  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \alpha_M \mathcal{L}_M$ , ahol  $\alpha_M$  alkalmasan választott állandó. Az anyagtér Lagrange-sűrűségét görbült téridőben úgy kell megválasztani, hogy belőle a hatás-elv segítségével az adott fizikai mező mozgásegyenletét kapjuk görbült téridőben. Például a skalármező esetén az

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}[g^{ab}(\nabla_a\phi)(\nabla_b\phi) + m^2\phi^2] \quad (\text{F.2.23.})$$

Lagrange-sűrűség adja vissza a

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi - m^2\phi = 0 \quad (\text{F.2.24.})$$

Klein-Gordon-egyenletet (azaz a (4.3.10.) egyenletet, ami a (4.3.13.) egyenlettel azonos az  $\alpha = 0$  esetben). Az elektromágneses mező

$$\nabla^a F_{ab} = 0 \quad (\text{F.2.25.})$$

Maxwell-egyenleteit pedig az

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}g^{ac}g^{bd}F_{ab}F_{cd} = -\sqrt{-g}g^{ac}g^{bd}(\nabla_{[a}A_{b]})(\nabla_{[c}A_{d]}) \quad (\text{F.2.26.})$$

Lagrange-sűrűségből kiindulva kaphatjuk meg.

Mivel a Hilbert-hatás nem függ az anyagmezőktől,  $S$  anyagmezők szerinti variációja szolgáltatja a fizikai mezők mozgásegyenleteit. A teljes hatásnak  $g^{ab}$  szerinti variációja pedig az

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab} \quad (\text{F.2.27.})$$

Einstein-egyenleteket kell visszaadja, ahol

$$T_{ab} = -\frac{\alpha_M}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}. \quad (\text{F.2.28.})$$

Az  $\alpha_{KG} = 16\pi$  választás esetén a Klein-Gordon-mező energiimpulzus-tenzorára

$$T_{ab}^{KG} = (\nabla_a \phi)(\nabla_b \phi) - \frac{1}{2}g_{ab}[(\nabla_c \phi)(\nabla^c \phi) + m^2 \phi^2] \quad (\text{F.2.29.})$$

adódik, az elektromágneses mező energiimpulzus-tenzorára pedig az  $\alpha_{EM} = 4$  választás esetén

$$T_{ab}^{EM} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{de}F^{de} \right) \quad (\text{F.2.30.})$$

adódik.

Általában, ha az elmélet kiindulópontjának nem a mozgásegyenleteket, hanem a hatást tekintjük, akkor az (F.2.28.) összefüggés tekinthető az anyagmező energiimpulzus-tenzora definíciójának.

**Megjegyzés:** Ha az anyagmezők Lagrange-sűrűsége nem függ a gradiens-operátor megválasztásától, akkor az Einstein-egyenleteknek és anyagmezők egyenleteinek csatolt rendszere a Palatini-hatás felhasználásával is megkapható.

**Állítás:** Az anyagmezők hatásfunkcionáljának diffeomorfizmus-invarianciájából következik, hogy az anyag energiimpulzus-tenzora (az anyagmezőkre vonatkozó mozgásegyenletek alapján) lokálisan megmarad,  $\nabla^a T_{ab} = 0$ . Ez megerősíti az (F.2.28.) összefüggéssel definiált  $T_{ab}$ -nek az anyagmező energiimpulzus-tenzoraként történő interpretációját.

A  $\psi$  anyagterek  $S_M$  hatásfunkcionálja diffeomorfizmus-invariáns kell legyen. Legyen  $f_\lambda : M \mapsto M$  egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport, akkor  $S_M[g^{ab}, \psi] = S[f_\lambda^* g^{ab}, f_\lambda^* \psi]$ . Innen adódik, hogy

$$0 = \frac{dS_M}{d\lambda} = \int \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} + \int \frac{\delta S_M}{\delta \psi} \delta \psi. \quad (\text{F.2.31.})$$



Ismeretes, hogy  $\delta g^{ab} = \mathcal{L}_w g^{ab} = 2\nabla^{(a} w^{b)}$ , ahol  $w^a$  a diffeomorfizmus-csoportot generáló vektormező. Használjuk ki, hogy  $\psi$  eleget tesz az anyag téregyenleteinek, azaz hogy  $\delta S_M / \delta \psi = 0$ . Ekkor azt kapjuk, hogy

$$0 = \int \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} 2\nabla^{(a} w^{b)} \sqrt{-g} e, \quad (\text{F.2.32.})$$

ahonnan az energiaimpulzus-tenzor definíciója értelmében

$$0 = \int T_{ab} (\nabla^a w^b) \epsilon = - \int (\nabla^a T_{ab}) w^b \epsilon. \quad (\text{F.2.33.})$$

Mivel ennek tetszőleges egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport, azaz tetszőleges  $w^a$  vektormező esetén fenn kell állnia tetszőleges téridő-tartományra történő integrálás esetén, azért innen következik, hogy

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \quad (\text{F.2.34.})$$

**Állítás:** A  $\nabla^a G_{ab} = 0$  kontrahált Bianchi-azonosság a Hilbert-hatás diffeomorfizmus-invarianciája következményének is tekinthető.

Ha az előző állítás bizonyításának a gondolatmenetét az  $S_G$  hatásra alkalmazzuk, akkor a  $\nabla^a G_{ab} = 0$  azonosságot kapjuk. Ez mutatja, hogy a Lagrange-féle tárgyalásmódban a Bianchi azonosság kontraháltja úgy tekinthető, mint az  $S_G$  hatás diffeomorfizmus-invarianciájának a következménye.

**Megjegyzés:** Érdekes felidézni, hogy az  $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$  Minkowski-téridőn értelmezett anyagmezők kanonikus  $\Theta_{ab}$  energiaimpulzus-tenzorát a téridőben történő globális eltolásokkal szembeni szimmetria következtében találjuk megmaradónak, mint a Noether-tétel egyik következményét, azaz  $\partial^a \Theta_{ab} = 0$ . A  $\Theta_{ab}$  tenzor azonban általában nem egyezik meg az (F.2.28.) definícióval kapott  $T_{ab}$  tenzorral, és általában nem is szimmetrikus. Klein-Gordon-mező esetén a kanonikus  $\Theta_{ab}^{KG}$  energiaimpulzus-tenzor és az (F.2.28.) definíció alapján kapott  $T_{ab}^{KG}$  energiaimpulzus-tenzor megegyezik,  $\Theta_{ab}^{KG} = T_{ab}^{KG}$ . Magasabb spinű anyagmezők esetén általában nincsen egyezés. Például az elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzorának kanonikus alakja nem egyezik meg az (F.2.28.) definícióból kapott  $T_{ab}^{EM}$  kifejezéssel és nem is mértékszimmetrikus. Másrészt ismeretes, hogy az energiaimpulzus-tenzor kanonikus alakja szimmetrizálható Minkowski-téridőben anélkül, hogy a megmaradó négyes-impulzus megváltozna. Ugyanakkor a kanonikus energiaimpulzus-tenzornak nem létezik olyan, természetes általánosítása görbült téridő esetére, amely megmaradó lenne. Mindezeket figyelembe véve, az (F.2.28.) definíciót tekintjük az energiaimpulzus-tenzor **fizikailag megalapozott** definíciójának, minthogy ez jelenik meg természetes módon az Einstein-egyenletekben.

### 3. A felületi tagok kiejtése

**Állítás:** Ha az  $\mathring{U}$  határon rögzített  $g^{ab}$  metrika szerint képezzük az  $S_G$  hatás variációját, akkor a nem kívánatos felületi tag kiejthető a hatás  $S_G \rightarrow S'_G = S_G + 2 \int_{\mathring{U}} K$  módosításával, ahol  $K$  a határfelület külső görbülete.

Térjünk vissza az

$$\int_U (\nabla^a v_a) \sqrt{-g} e = \int_U (\nabla^a v_a) \epsilon \quad (\text{F.2.35.})$$

integrál kiszámítására, ahol  $v_a = \nabla^b(\delta g_{ab}) - g^{cd}(\nabla_a g_{cd})$ . A Stokes-tételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\int_U (\nabla^a v_a) \epsilon = \int_{\tilde{U}} v_a n^a, \quad (\text{F.2.36.})$$

ahol a jobb oldalon az  $\tilde{U}$  határ nem null-felület,  $n^a$  a határon a külső normális, és az integrál a határfelület természetes térfogatelemével van értelmezve, amit külön nem jelöltünk. Felhasználva  $v_a$  explicit alakját, a határfelületen

$$\begin{aligned} v_a n^a &= n^a \nabla^b (\delta g_{ab}) - n^a g^{bc} (\nabla_a g_{bc}) = n^a g^{bc} [\nabla_c (\delta g_{ab}) - \nabla_a g_{bc}] \\ &= n^a h^{bc} [\nabla_c (\delta g_{ab}) - \nabla_a g_{bc}], \end{aligned} \quad (\text{F.2.37.})$$

ahol  $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$  az  $\tilde{U}$  határon indukált metrika. Mivel  $\delta g_{ab} = 0$  az  $\tilde{U}$  határon, ezért ott  $h^{bc} \nabla_c (\delta g_{ab}) = 0$ , úgyhogy

$$v_a n^a|_{\tilde{U}} = -n^a h^{bc} \nabla_a g_{bc}. \quad (\text{F.2.38.})$$

Most megmutatjuk, hogy az (F.2.38.) kifejezés a határfelület külső görbülete

$$K = K_a^a = h_a^b \nabla_a n^b \quad (\text{F.2.39.})$$

spúrjának variációjával hozható kapcsolatba, mivel

$$\begin{aligned} \delta K &= h_a^b (\delta C)^b_{ac} n^c \\ &= \frac{1}{2} n^c h_a^b g^{bd} [\nabla_a (\delta g_{cd}) + \nabla_c (\delta g_{ad}) - \nabla_d (\delta g_{ac})] \\ &= \frac{1}{2} n^c h^{ad} \nabla_c (\delta g_{ad}) = -\frac{1}{2} v_a n^a|_{\tilde{U}}. \end{aligned} \quad (\text{F.2.40.})$$

Ez azt jelenti, hogy ha  $S_G$ -t azzal a megszorítással variáljuk, hogy  $\delta g_{ab} = 0$  az  $U$  tartomány  $\tilde{U}$  határán, akkor a nem kívánatos felületi tag eltávolítható, ha a hatást módosítjuk:

$$S'_G = S_G + 2 \int_{\tilde{U}} K. \quad (\text{F.2.41.})$$

## F.3. A Hamilton-féle megfogalmazás

### F.3.1. A Hamilton-formalizmus

A hamiltoni tárgyalásmód lényegileg különbözik a Lagrange-féle tárgyalásmódtól abban, hogy amíg az utóbbi „téridő-kovariáns”, addig a hamiltoni tárgyalásmódban meg kell különböztetnünk a teret és az időt. Láttuk, hogy a Lagrange-féle leírás során a térmennyiségeket az  $M$  téridő-sokaságon értelmezzük, és a hatás is a téridő-sokaságon értelmezett integrál, amelynek variációja szolgáltatja a téregyenleteket. A hamiltoni tárgyalás első lépése, hogy a téridőn egy  $t$  időfüggvényt és egy  $t^a$  vektormezőt értelmezzünk úgy, hogy a  $t = \text{áll.}$   $\Sigma_t$  hiperfelületek térszerű Cauchy-felületek legyenek és  $t^a \nabla_a t = 1$  legyen. (Ha a téridő időirányítható és globálisan hiperbolikus, akkor ezt megtehetjük a **8.1.1. lemma** és a **8.3.14. tétel** értelmében.) A  $t^a$  vektormezőt úgy tekinthetjük, mint amelyik meghatározza, hogy „hogyan telik az idő” a téridőben. Segítségével a  $\Sigma_t$  hiperfelületeket azonosíthatjuk a kezdeti  $\Sigma_0$  hiperfelülettel. A Minkowski-téridőben  $t$  és  $t^a$  megválasztása

globális inerciarendszer választása révén történik. A görbült téridőben azonban általában nincsen ilyen kitüntetett választási lehetőségünk.

**Megjegyzés:** Legyenek  $t^a$  integrálgörbái a  $C(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto C \in M$  görbék a valós  $\lambda$ -val parametrizálva, és jelölje (átmenetileg)  $f : M \mapsto \mathbb{R}$  az időfüggvényt. Ekkor

$$t^a \nabla_a f = t(f) = \frac{d}{d\lambda}(f \circ C) = \frac{d}{d\lambda} f(\lambda), \quad (\text{F.3.1.})$$

ahol  $t(f)$  a  $C(\lambda)$  görbék  $t^a$  érintővektorának hatása az  $f$  idő-függvényre. A  $t^a \nabla_a f = 1$  feltétel tehát azt jelenti, hogy az integrálgörbék mentén  $df/d\lambda = 1$ , azaz  $f = \lambda$  választható. Visszatérve eredeti jelölésünkre, a  $t^a \nabla_a t = 1$  feltétel azt jelenti, hogy a  $t^a$  vektormező integrálgörbái mentén  $t$  a paraméter. Ha tehát  $t^a$  integrálgörbéi mentén megyünk a  $\Sigma_t$  hiperfelületről a szomszédos  $\Sigma_{t+dt}$  hiperfelületre, akkor a görbeparaméter  $t$ -ről  $t + dt$ -re változik.

Az  $M$ -en értelmezett függvények integráljait kézenfekvő lenne a természetes  $\epsilon_{abcd}$  térfogatelemmel, a  $\Sigma_t$  Cauchy-felületeken értelmezett függvények integráljait pedig az  $\epsilon_{abc}^{(3)} = \epsilon_{dabc} n^d$  térfogatelemmel értelmezni, ahol  $n^a$  a  $\Sigma_t$  Cauchy-felület normális egységvektora. Ezek a térfogatelemek azonban általában „időfüggek” abban az értelemben, hogy  $\mathcal{L}_t \epsilon_{abcd} \neq 0$  és  $\mathcal{L}_t \epsilon_{abc}^{(3)} \neq 0$ . Ilyen időfüggő térfogatelem használata nem célszerű akkor, amikor  $\Sigma_t$ -t  $\Sigma_0$ -val akarjuk azonosítani és a dinamikát, mint  $\Sigma_0$ -n értelmezett terménnyiségek időbeli változását akarjuk leírni. Ezért inkább  $M$ -en egy „időtől független”  $e_{abcd}$  térfogatelemet vezetünk be, amelyre  $\mathcal{L}_t e_{abcd} = 0$ . Erre lokálisan az egyik lehetőség, hogy a  $t$  koordináta mellett  $\Sigma_0$ -n további  $x^1, x^2, x^3$  koordinátákat vezetünk be úgy, hogy  $t^a = (\partial/\partial t)^a$  és  $e = dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  a megfelelő koordináta-térfogatelem. Ezután  $\Sigma_t$ -n az integrálokat az  $e_{abc}^{(3)} = e_{dabc} n^d$  térfogatelemmel fejezzük ki. Ezért a Lagrange-sűrűségnek  $M$ -en értelmezett skalársűrűségnek, a terménnyiséghez kanonikusan konjugált  $\pi$  impulzusnak pedig  $\Sigma_t$ -n értelmezett tenzorsűrűségnek kell lennie.

A hamiltoni leírás következő lépése, hogy definiáljuk a **konfigurációs teret**, azaz eldöntjük, milyen  $q$  tenzormező írja le a  $\psi$  fizikai mező pillanatnyi állapotát  $\Sigma_t$ -n. A fizikai mező lehetséges  $\pi$  „impulzusainak” terét nevezzük a konfigurációs térhez tartozó  $V_q^*$  „kotangens-térnek”. Ez egy végtelen-dimenziós tér. A  $q$  konfigurációk infinitezimális  $\delta q$  variációinak terét tekintjük „érintőtérnek”,  $\delta q$ -kat  $\Sigma_t$ -n értelmezett  $(k, l)$ -tenzorok ábrázolják. A nekik megfeleltetett  $\pi$  konjugált impulzusokat pedig  $\Sigma_t$ -n értelmezett  $(l, k)$ -tenzoroknak tekintjük úgy, hogy  $\pi : \delta q \mapsto \int_{\Sigma_t} \pi \delta q \in \mathbb{R}$ , ahol a tenzorindexekre kontrahálunk az integrandusban. Ezután meg kell adni egy előírást, ami meghatározza  $\pi$  és a  $\psi$  fizikai mező kapcsolatát  $\Sigma_t$ -n. Végül pedig keresnünk kell egy olyan  $\Sigma_t$ -n értelmezett  $H[q, \pi]$  **Hamilton-függvényt**, amely

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} \quad (\text{F.3.2.})$$

alakú, ahol a  $\mathcal{H}$  **Hamilton-sűrűség** a  $q$ -nak és  $\pi$ -nek valamint ezek térkoordináták szerinti véges rendű deriváltjainak lokális függvénye, és amelyről megköveteljük, hogy a

$$\begin{aligned} \dot{q} &\equiv \mathcal{L}_t q = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \\ \dot{\pi} &\equiv \mathcal{L}_t \pi = -\frac{\delta H}{\delta q} \end{aligned} \quad (\text{F.3.3.})$$

egyenletrendszer legyen ekvivalens a  $\psi$ -re vonatkozó téregyenlettel.

A részecske-rendszerek klasszikus mechanikájában szokásoshoz hasonló eljárással tudunk a Lagrange-sűrűség ismeretében olyan Hamilton-sűrűséget, ill. Hamilton-függvényt szerkeszteni, ami a hatás-elvvel egyenértékű Hamilton-egyenletekre vezet. A  $q$  konfigurációt a  $\Sigma_t$ -n értelmezett  $\psi$  fizikai mezővel azonosítjuk, és az  $\mathcal{L}$  Lagrange-sűrűségből, mint a  $q$ , annak idő szerinti és térkoordináták szerinti deriváltjainak függvényéből indulunk ki. Feltesszük, hogy  $\mathcal{L}$  az elsőnél magasabb rendű idő szerinti deriváltaktól nem függ, és akkor a  $q$  konfigurációhoz kanonikusan konjugált impulzust

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (\text{F.3.4.})$$

összefüggéssel definiáljuk. Ha ez az összefüggés feloldható  $\dot{q}$ -ra, mint  $\dot{q} = \dot{q}(q, \pi)$ , akkor a Hamilton-sűrűséget

$$\mathcal{H}(q, \pi) = \dot{q}\pi - \mathcal{L} \quad (\text{F.3.5.})$$

alakban értelmezzük, ahol  $\dot{q}$  helyére annak  $\dot{q}(q, \pi)$  alakját írjuk.

**Állítás:** A Hamilton-sűrűség fenti választása esetén az (F.3.3.) egyenletek egyenértékűek a hatás-elvből származtatott (F.2.3.) Euler-Lagrange-egyenletekkel.

Vezessük be a

$$J = \int_{t_1}^{t_2} H dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} = -S + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \pi \dot{q} \quad (\text{F.3.6.})$$

funkcionált. Képezzük  $J$ -nek a megváltozását  $\psi$  sima, egy-paraméteres  $\delta\psi$  variációja esetén, amely elegendő tesz a  $\delta\psi = 0$  feltételnek  $t = t_1$  és  $t = t_2$  esetén,

$$\frac{dJ}{d\lambda} = -\frac{dS}{d\lambda} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} (\pi \delta \dot{q} + \dot{q} \delta \pi) = -\frac{dS}{d\lambda} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} (-\dot{\pi} \delta q + \dot{q} \delta \pi), \quad (\text{F.3.7.})$$

ahol a második egyenlőségben parciálisan integráltunk. Másrészt

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_t} \left( \frac{\delta H}{\delta q} \delta q + \frac{\delta H}{\delta \pi} \delta \pi \right), \quad (\text{F.3.8.})$$

úgyhogy

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_t} \left( \frac{\delta H}{\delta q} \delta q + \frac{\delta H}{\delta \pi} \delta \pi \right) = -\frac{dS}{d\lambda} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} (-\dot{\pi} \delta q + \dot{q} \delta \pi) \quad (\text{F.3.9.})$$

adódik. Innen látjuk, hogy  $\delta S/\delta\psi$  akkor és csak akkor zérus, ha kielégülnek az (F.3.3.) egyenletek.

Az alábbiakban a fenti eljárást alkalmazzuk a Klein-Gordon-mezőre és az elektromágneses mezőre Minkowski-téridőben, és végül az általános relativitáselmélet esetére.

### F.3.2. A Klein-Gordon-mező esete

A Minkowski-téridőben globális inerciális koordinátarendszert választunk, hogy értelmezzük  $t$ -t és  $t^a$ -t; az  $e_{abcd}$  térfogatelemet az  $\epsilon_{abcd}$  természetes térfogatelemmel azonosíthatjuk,

mert most  $\mathcal{L}_t \epsilon_{abcd} = 0$ . A  $\Sigma_t$ -n értelmezett  $\phi$  Klein-Gordon-mezőt tekintjük a  $\Sigma_t$ -n értelmezett  $q$  konfigurációnak, és az (F.2.4.) Lagrange-sűrűséget átírjuk

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi - m^2\phi^2) \quad (\text{F.3.10.})$$

alakba. (Itt  $\Sigma_t$ -n a 3-dimenziós vektorok szokásos jelölését használjuk.) A fenti definíciók alapján:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}, \quad (\text{F.3.11.})$$

$$\mathcal{H}_{KG} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}(\pi^2 + \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi + m^2\phi^2) \quad (\text{F.3.12.})$$

és  $H_{KG} = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_{KG}$ . Innen az adódik, hogy

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{KG}}{\partial \pi} = \pi, \\ \dot{\pi} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{KG}}{\partial \phi} = (\Delta - m^2)\phi, \end{aligned} \quad (\text{F.3.13.})$$

ahol  $\Delta$  a 3-dimenziós Laplace-operátor. Ha az első egyenlőség alapján  $\pi$ -t behelyettesítjük a második egyenlet bal oldalába, akkor a Klein-Gordon-egyenletet kapjuk vissza. A  $H_{KG}$  Hamilton-funkcionál számértéke a Klein-Gordon-mező energiájával azonos. (Meg lehet mutatni, hogy  $H_{KG}$  számértéke azonos  $\int_{\Sigma_t} T^{00}$  értékével.)

### F.3.3. Az elektromágneses mező

Az még Minkowski-tér-időben sem teljesen magától értetődő, hogy hogyan alkalmazható a Hamilton-féle tárgyalásmód az elektromágneses mezőre. Kezdeti próbálkozásként  $q$ -t a  $\Sigma_t$ -n értelmezett  $A_a$  vektorpotenciállal azonosítjuk, majd felbontjuk a Cauchy-felülethez képest ortogonális és tangenciális komponensekre,

$$V = -A_a n^a, \quad A_a^{(3)} = h_a^b A_b, \quad (\text{F.3.14.})$$

ahol  $n^a$  a  $\Sigma_t$  hiperfelület egység-normálisa,  $h_{ab} = \eta_{ab} + n_a n_b$  pedig a  $\Sigma_t$ -n indukált metrika. Ekkor  $A_a = -V n_a + A_a^{(3)}$  és a térerősség tenzor el nem tűnő (idő-tér)- és (tér-tér)-komponensei rendre

$$F_{t\alpha} = \partial_t A_\alpha^{(3)} + \partial_\alpha V, \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta^{(3)} - \partial_\beta A_\alpha^{(3)}, \quad (\text{F.3.15.})$$

úgyhogy az (F.2.7.) Lagrange-sűrűség

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2}(\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}V) \cdot (\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}V) - \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \quad (\text{F.3.16.})$$

alakot ölt, ahol  $\vec{A}$  jelöli az  $A_a^{(3)}$  vektort  $\Sigma_t$ -n. Innen az  $\vec{A}$ -hoz és  $V$ -hez kanonikusan konjugált impulzussűrűségek rendre

$$\begin{aligned}\vec{\pi} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial \dot{\vec{A}}} = \dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} V \equiv -\vec{E}, \\ \pi_V &= \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial \dot{V}} = 0.\end{aligned}\tag{F.3.17.}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a 3-dimenziós vektorpotenciálhoz kanonikusan konjugált impulzus az elektromos térerősség vektorának mínusz egyszerese. A skalárpotenciál idő szerinti deriváltja viszont nem szerepel a Lagrange-sűrűségben, így  $V$  nem dinamikai változó, amit az mutat, hogy a  $V$ -hez konjugált impulzus azonosan eltűnik, és ezért a  $(\dot{V}, \dot{\vec{A}})$  nem fejezhető ki  $(\pi_V, \vec{\pi})$ -vel.

Hogy ezt a körülményt áthidaljuk, a  $q$  dinamikai változót  $\vec{A}$ -val azonosítjuk. Ekkor a Hamilton-sűrűség az eljárásunk a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{EM} &= \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}} - \mathcal{L}_{EM} \\ &= \vec{\pi} \cdot (\vec{\pi} - \vec{\nabla} V) - \frac{1}{2} \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{\pi} \cdot \vec{\nabla} V \\ &= \frac{1}{2} \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + V \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} - \vec{\nabla} \cdot (V \vec{\pi})\end{aligned}\tag{F.3.18.}$$

kifejezést szolgáltatja, ahol  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  a mágneses indukció. A kifejezés utolsó tagja teljes divergencia  $\Sigma_t$ -n, így csak felületi taggal járul hozzá a teljes  $H_{EM} = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_{EM}$  energiához. A végtelenben ez általában el is tűnik, úgyhogy a továbbiakban elhagyjuk a Hamilton-függvény felületi tagját.

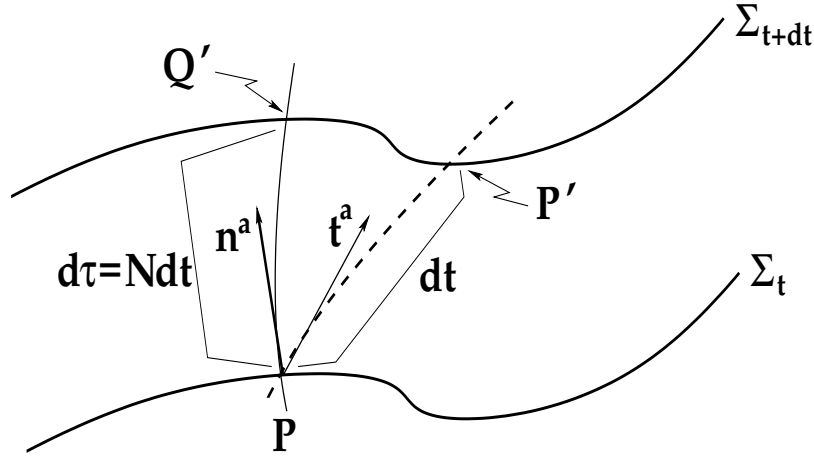
A  $V$  skalárpotenciál Lagrange-multiplikátor szerepét játssza, miközben  $\mathcal{H}$  az  $\vec{A}$  és  $\vec{\pi}$  függvénye, úgyhogy az elektromágneses mező állapotának időbeli változását az

$$\begin{aligned}\dot{\vec{A}} &= \frac{\delta H_{EM}}{\delta \vec{\pi}} = \vec{\pi} - \vec{\nabla} V = -\vec{E} - \vec{\nabla} V, \\ \dot{\vec{\pi}} &= -\vec{E} = -\frac{\delta H_{EM}}{\delta \vec{A}} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times \vec{B}\end{aligned}\tag{F.3.19.}$$

Hamilton-egyenletek és a

$$0 = \frac{\delta H_{EM}}{\delta V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\tag{F.3.20.}$$

elektromos Gauss-törvény, mint kényszerfeltétel írják le. Ezek az egyenletek a Maxwell-egyenletekkel egyenértékűek, és mutatják, hogy melyek a dinamikai egyenletek és mi a kényszerfeltétel. A hamiltoni tárgyalásmódnak olyan általánosítását kaptuk, amikor a dinamikai egyenletek mellett kényszerek is vannak. Ekkor a Hamilton-sűrűség a dinamikai változók mellett Lagrange-multiplikátor szerepét játszó mennyiséget is tartalmaz. Általában, ha egy elméletben a térváltozók csak mértéktranszformáció erejéig vannak egyértelműen meghatározva, akkor a **kényszeres hamiltoni tárgyalásmódot** tudjuk csak alkalmazni.



51. ábra. A téridő rétegzésének szemléltetése. A  $\Sigma_t$  Cauchy-felület  $P$  pontjából hiperfelület-ortogonális görbe mentén a  $\Sigma_{t+dt}$  hiperfelület  $Q'$  pontjába jutunk, míg a  $t^a$  vektormező integrálgörbéi mentén a  $P' \in \Sigma_{t+dt}$  pontba. Az eltolásvektor meghatározza a  $t^a$  vektor hiperfelülettel párhuzamos komponensét. Szemléletesen:  $Q'P' \Leftrightarrow N^a dt$ .

#### F.3.4. Az általános relativitáselmélet

##### 1. A kényszeres hamiltoni tárgyalásmód

Megint azzal kezdjük a hamiltoni tárgyalásmód alkalmazását, hogy bevezetünk egy  $t$  időfüggvényt és egy  $t^a$  időszerű vektormezőt úgy, hogy  $t^a \nabla_a t = 1$  legyen. Utóbbival meghatározzuk, hogy hogyan telik az idő. A bevezetett  $t$ -nek és  $t^a$ -nak azonban nem tudunk órákra alapozott mérési utasítással fizikai tartalmat tulajdonítani, mert nem ismerjük a  $g_{ab}$  metrikát. A  $t^a$  vektormezőt azonban az  $M$  téridő-sokaság minden pontjában fel tudjuk bontani az állandó  $t$ -hez tartozó  $\Sigma_t$  Cauchy-felületekre merőleges és azokkal párhuzamos komponensekre:

$$\begin{aligned} t_a &= g_{ab} t^b = (h_{ab} - n_a n_b) t^b = h_{ab} t^b - n_a n_b t^b \\ &= N_a + n_a N, \end{aligned} \quad (\text{F.3.21.})$$

ahol  $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$  a  $\Sigma_t$ -n indukált metrika,

$$N = -n_b t^b \quad \text{és} \quad N_a = h_{ab} t^b \quad (\text{F.3.22.})$$

rendre az úgynevezett **időtartam-függvény** (lapse function) és **eltolódás-vektor** (shift vector). Itt  $N$  azt méri, hogy a  $t$  időfüggvényhez képest hogyan telik a  $\tau$  sajátidő, ha a  $\Sigma_t$  hiperfelületre merőlegesen mozdulunk el;  $N^a$  pedig azt méri, hogy a  $t^a$  vektormezőnek mekkora a  $\Sigma_t$ -hez képest érintőirányú komponense (ld. a 51. ábrát).

**Megjegyzés:** Célszerű olyan koordinátarendszert használni, amikor a  $\Sigma_0$  Cauchy-felületen bevezetünk  $x^1, x^2$  és  $x^3$  térkoordinátákat, amjd ezeket a  $t^a$  vektormező integrálgörbéi mentén átemeljük a szomszédos  $\Sigma_t$  hiperfelületekre, miközben negyedik koordinátának  $x^0 = t$ -t

választjuk. Ekkor a 51. ábrán pl. a  $P$  és a  $P'$  pontok tér-koordinátái megegyeznek. Az  $N$  időtartam-függvény ekkor azt határozza meg, mennyit kell menni  $\Sigma_t$ -re ortogonálisan, hogy elérjük a  $\Sigma_{t+dt}$  Cauchy-felületet a  $Q'$  pontban:  $d\tau = Ndt$ . Az  $N^a$  eltolás-vektor azt határozza meg, hogy  $Q'$ -ből hogyan kell a  $\Sigma_{t+dt}$ -vel párhuzamosan elmozdulni, hogy a  $P$ -vel egyező tér-koordinátájú  $P'$  pontba jussunk:  $N^a dt$ .

A Lagrange-féle tárgyalásmód során használt  $g^{ab}$  inverz metrika helyett a hamiltoni tárgyalásban célszerűbb a  $h_{ab}$  térmetrikát, az  $N$  időtartam-függvényt és az  $N_a$  eltolódás-vektort használni térváltozókként.

**Állítás:** A téridő szerkezetének  $(h_{ab}, N, N_a)$  térváltozókkal történő jellemzése egyenértékű a  $g^{ab}$  inverz-metrikával történő jellemzéssel.

Egyrészt az (F.3.21.) összefüggésből

$$n_a = \frac{1}{N}(t_a - N_a) \quad (\text{F.3.23.})$$

adódik, úgyhogy az inverz-metrikát átírhatjuk

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b = h^{ab} - \frac{1}{N^2}(t^a - N^a)(t^b - N^b) \quad (\text{F.3.24.})$$

alakba.

Másrészt a  $h_{ab}$  térmetrika ismeretében meghatározhatjuk annak  $h^{ab}$  inverzét felhasználva, hogy  $h^{ac}h_{cb}$  az egység-leképezés a  $\Sigma_t$  hiperfelület érintőterén, és hogy  $h^{ab}\nabla_b t = 0$  (a  $t$  időfüggvénynek a  $\Sigma_t$  mentén a megváltozása zérus), majd ennek ismeretében meghatározhatjuk  $N^a = h^{ab}N_{a-t}$ . Látjuk tehát az (F.3.24.) összefüggésből, hogy  $(h_{ab}, N, N_a)$  ismerete egyértelműen meghatározza  $g^{ab}$ -t.

Most is a koordináta-időtől független  $e_{abcd}$  térfogatelemet használjuk a természetes  $\epsilon_{abcd}$  térfogatelem helyett, amelyre tehát  $\mathcal{L}_t e_{abcd} = 0$ , olyan koordináta-térfogatelemet választva  $e$ -nek, amelynek el nem tűnő komponensei  $\pm 1$ . Ekkor  $\epsilon = \sqrt{-g}e$ , ahol  $g$  a metrika ebben a bázisban vett  $g_{\mu\nu}$  komponenseinek a determinánsa. A  $\Sigma_t$ -n a megfelelő indukált térfogatelem  $e_{abc}^{(3)} = e_{dabc}t^d$ , ami a természetes indukált metrikával  $\epsilon_{abc}^{(3)} = \sqrt{h}e_{abc}^{(3)}$  kapcsolatban van, ahol  $h$  a térmetrika azon koordinátarendszerben vett  $h_{\mu\nu}$  komponensei mátrixának determinánsa, amelyben  $e_{abc}^{(3)}$  el nem tűnő komponensei  $\pm 1$  értékűek; ekkor

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}. \quad (\text{F.3.25.})$$

**Állítás:** A vákuumban érvényes Einstein-egyenleteket szolgáltató Lagrange-sűrűségnek a  $(h_{ab}, N, N_a)$  térváltozókkal kifejezett alakja:

$$\mathcal{L}_G = N\sqrt{h}(R^{(3)} + K_{ab}K^{ab} - K^2), \quad (\text{F.3.26.})$$

ahol  $R^{(3)}$  a  $\Sigma_t$ -n indukált görbület,  $K = K^a_a$  és  $\Sigma_t$  külső görbülete

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a), \quad (\text{F.3.27.})$$

ahol  $D_a$  a  $h_{ab}$  által indukált gradiens-operátor  $\Sigma_t$ -n. (A  $h_{ab}$  térmetrika generálja egyértelműen a  $D_a h_{bc} = 0$  tulajdonságú gradiens-operátort  $\Sigma_t$ -n, a  $[D_a, D_b]$  kommutátor pedig az  $R_{abcd}^{(3)}$  görbületi tenzort, amelyből a szokásos módon képezhető  $\Sigma_t$



skalárgörbülete.) Ez az  $\mathcal{L}_G$  **Lagrange-sűrűség Arnowitt-Misner-Deser-féle alakja, az ADM-Lagrange-sűrűség.**

Kifejezzük az  $S_G$  hatást a  $(h_{ab}, N, N_a)$  térváltozók funkcionáljaként. Induljunk ki az  $S_G = \int \mathcal{L}_G e = \int \sqrt{-g} Re$  Hilbert-hatásból. Az alább következő számítási lépésekben elhanyagoljuk a felületi tagokat. (Ezekre majd később visszatérünk.) Fejezzük ki a skalárgörbületet

$$R = 2(G_{ab}n^an^b - R_{ab}n^an^b) \quad (\text{F.3.28.})$$

alakban.  $-[G_{ab}n^an^b = R_{ab}n^an^b - \frac{1}{2}Rg_{ab}n^an^b = G_{ab}n^an^b = R_{ab}n^an^b - \frac{1}{2}R, \text{ ahonnan rendezéssel kapjuk a keresett összefüggést.}]$  Egyrészt a G. függelékben megmutatjuk, hogy

$$G_{ab}n^an^b = \frac{1}{2}(R^{(3)} - K_{ab}K^{ab} + K^2), \quad (\text{F.3.29.})$$

ahol  $K_{ab}$  a  $\Sigma_t$  Cauchy-felületnek a külső görbülete és  $K = K^a_a$ . Másrészt a görbületi tenzor definíciója alapján

$$\begin{aligned} R_{ab}n^an^b &= R_{acb}{}^cn^an^b = -n^a[\nabla_a, \nabla_c]n^c = n^a\nabla_c\nabla_an^c - n^a\nabla_a\nabla_cn^c \\ &= (\nabla_an^a)(\nabla_cn^c) - (\nabla_cn^a)(\nabla_an^c) + \nabla_c(n^a\nabla_an^c) - \nabla_a(n^a\nabla_cn^c), \end{aligned} \quad (\text{F.3.30.})$$

ahonnan a külső görbület  $K_{ab} = h_a{}^c\nabla_cn_b$  definíciójának (ld. a G. fejezetet) felhasználásával

$$R_{ab}n^an^b = K^2 - K_{ca}K^{ac} + \nabla_c(n^a\nabla_an^c) - \nabla_a(n^a\nabla_cn^c) \quad (\text{F.3.31.})$$

adódik. Itt a két utolsó tag teljes divergencia, úgyhogy ezeket elhagyjuk. Az (F.3.29.) és (F.3.31.) kifejezéseket behelyettesítjük  $R$  kifejezésébe:

$$R = R^{(3)} + K_{ab}K^{ab} - K^2. \quad (\text{F.3.32.})$$

Ezután még ki kell fejezzük a  $K_{ab}$  külső görbületet az új változókkal. Induljunk ki abból, hogy  $K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_N h_{ab}$  (ld. a G fejezetet). Ekkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_N h_{ab} = \frac{1}{2}\left(n^c\nabla_ch_{ab} + h_{ac}\nabla_bn^c + h_{cb}\nabla_an^c\right) \\ &= \frac{1}{2N}\left(Nn^c\nabla_ch_{ab} + Nh_{ac}\nabla_bn^c + Nh_{cb}\nabla_an^c\right) \\ &= \frac{1}{2N}\left(Nn^c\nabla_ch_{ab} + h_{ac}\nabla_b(Nn^c) + h_{cb}\nabla_a(Nn^c) - h_{ac}n^c\nabla_bN - h_{cb}n^c\nabla_aN\right), \end{aligned} \quad (\text{F.3.33.})$$

ahonnan

$$h_{ac}n^c\nabla_bN + h_{cb}n^c\nabla_aN = 0 \quad (\text{F.3.34.})$$

miatt

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}\left((t^c - N^c)\nabla_ch_{ab} + h_{ac}\nabla_b(t^c - N^c) + h_{cb}\nabla_a(t^c - N^c)\right) \quad (\text{F.3.35.})$$

adódik. Ha ezután felhasználjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N h_{ab} &= N^c\nabla_ch_{ab} + h_{cb}\nabla_a(N^c) + h_{ac}\nabla_b(N^c), \\ \mathcal{L}_t h_{ab} &= t^c\nabla_ch_{ab} + h_{cb}\nabla_at^c + h_{ac}\nabla_bt^c, \end{aligned} \quad (\text{F.3.36.})$$

akkor a  $K_{ab}$  külső görbület és a térmetrika „idő szerinti deriváltja”,  $\dot{h}_{ab} \equiv \mathcal{L}_t h_{ab}$  között az alábbi kapcsolatot találjuk:

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2N} \left( \mathcal{L}_t h_{ab} - \mathcal{L}_N h_{ab} \right) \\ &= \frac{1}{2N} \left( \dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a \right). \end{aligned} \quad (\text{F.3.37.})$$

Itt az utolsó egyenlőség felírásakor a metrika Lie-deriváltjára vonatkozó  $\mathcal{L}_v g_{ab} = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a$  azonosságot alkalmaztuk a  $\Sigma_t$ -n értelmezett  $N^a$  vektormező és a  $h_{ab}$  térmetrika esetén,

$$\mathcal{L}_N h_{ab} = D_a N_b + D_b N_a, \quad (\text{F.3.38.})$$

ahol  $D_a$  a  $h_{ab}$  térmetrikához tartozó gradiens-operátor  $\Sigma_t$ -n. A külső görbület (F.3.37.) kifejezését behelyettesítve a skalárgörbület (F.3.32.) kifejezésébe, majd ezt beírva az  $\mathcal{L}_G$  Lagrange-sűrűségbe, megkapjuk a keresett ADM-féle alakot.

Az  $\mathcal{L}_G$  Lagrange-sűrűség ADM-féle alakja csak  $h_{ab}$ -nek tartalmazza az idő-koordináta szerinti deriváltját, az  $N$  időtartam-függvényét és az  $N^a$  eltolódás-vektormezőét nem. Ezért utóbbiak Lagrange-multiplikátor szerepét játsszák hasonlóan, mint az elektrodinamikában a  $V$  skalárpotenciál. A dinamikai térváltozó tehát a  $\Sigma_t$ -n értelmezett térmetrika,  $h_{ab}$ ; a konfigurációs tér pedig a  $h_{ab}$  Riemann-metrikák tere. A  $h_{ab}$ -hez kanonikusan konjugált impulzus

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} = \sqrt{h} (K^{ab} - K h^{ab}). \quad (\text{F.3.39.})$$

Ha felhasználjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{cd}}{\partial \dot{h}_{ab}} &= \frac{1}{2N} \delta^a_c \delta^b_d, \\ \frac{\partial K}{\partial \dot{h}_{ab}} &= \frac{\partial K^c_c}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{\partial (h^{cd} K_{cd})}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{1}{2N} h^{cd} \delta^a_c \delta^b_d = \frac{1}{2N} h^{ab}, \end{aligned} \quad (\text{F.3.40.})$$

akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \pi^{ab} &= \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} \\ &= N \sqrt{h} \left( 2K^{cd} \frac{1}{2N} \delta^a_c \delta^b_d - 2K \frac{1}{2N} h^{ab} \right) = \sqrt{h} (K^{ab} - K h^{ab}), \end{aligned} \quad (\text{F.3.41.})$$

ami éppen a keresett kifejezés.

A Hamilton-sűrűség definíciója:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G &= \pi^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_G \\ &= -\sqrt{h} N R^{(3)} + N \frac{1}{\sqrt{h}} \left( \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) + 2\pi^{ab} D_a N_b \\ &= \sqrt{h} \left[ N \left( -R^{(3)} + \frac{1}{h} \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2h} \pi^2 \right) - N_b D_a \left( \frac{2}{\sqrt{h}} \pi^{ab} \right) \right. \\ &\quad \left. + D_a \left( \frac{2}{\sqrt{h}} \pi^{ab} N_b \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.3.42.})$$

A Hamilton-sűrűség explicit alakjának meghatározásához kifejezzük  $\dot{h}_{ab}$ -t  $\pi^{ab}$ -vel. Képezzük ehhez először a  $\pi = \pi_a^a = h_{ab}\pi^{ab}$  spúrt,

$$\pi = \sqrt{h}(h_{ab}K^{ab} - Kh_{ab}h^{ab}) = -2K\sqrt{h}, \quad (\text{F.3.43.})$$

amit visszahelyettesítve  $\pi^{ab}$  kifejezésébe, azt kapjuk, hogy

$$\pi^{ab} = \sqrt{h}K^{ab} + \frac{1}{2}\pi h^{ab}, \quad (\text{F.3.44.})$$

ahonnan

$$K^{ab} = \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ab} - \frac{1}{2}\pi h^{ab}\right). \quad (\text{F.3.45.})$$

Ezt és az (F.3.37.) összefüggést felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ab} &= 2NK_{ab} + D_a N_b + D_b N_a \\ &= \frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ab} - \frac{1}{2}\pi h^{ab}\right) + D_a N_b + D_b N_a. \end{aligned} \quad (\text{F.3.46.})$$

A fenti összefüggések segítségével a Hamilton-sűrűsége az alábbiak adódnak:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G &= \pi^{ab}\left[\frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi h_{ab}\right) + D_a N_b + D_b N_a\right] \\ &\quad - N\sqrt{h}\left[R^{(3)} + \frac{1}{h}\left(\pi^{ab} - \frac{1}{2}\pi h^{ab}\right)\left(\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi h_{ab}\right) - \frac{\pi^2}{4h}\right] \\ &= \sqrt{h}\left[N\left(\frac{2}{h}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{\pi^2}{h} - R^{(3)} - \frac{1}{h}\pi^{ab}\pi_{ab} + \frac{\pi^2}{h} - \frac{\pi^2}{4h}h^{ab}h_{ab} + \frac{\pi^2}{4h}\right)\right. \\ &\quad \left.+ \frac{2\pi^{ab}D_a N_b}{\sqrt{h}}\right] \\ &= \sqrt{h}\left[N\left(-R^{(3)} + \frac{1}{h}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2h}\pi^2\right) + D_a\left(\frac{2\pi^{ab}}{\sqrt{h}}D_a N_b\right) - N_b D_a\left(\frac{2\pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)\right]. \end{aligned} \quad (\text{F.3.47.})$$

(Felhasználtuk, hogy  $h_{ab}h^{ab} = {}^{(3)}\delta_a^a = 3$ .) Tehát megkaptuk a keresett (F.3.42.) kifejezést.

Az (F.3.42.) utolsó tagja a  $H_G = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_G e^{(3)}$  integrálhoz felületi taggal járul hozzá, amit elhanyagolunk. A  $H_G$  Hamilton-funkcionál  $N$  és  $N_a$  szerinti funkcionál-deriváltjai az alábbi kényszerekre vezetnek:

$$-R^{(3)} + \frac{1}{h}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2h}\pi^2 = 0, \quad (\text{F.3.48.})$$

$$D_a\left(\frac{2}{\sqrt{h}}\pi^{ab}\right) = 0. \quad (\text{F.3.49.})$$

Ezek a kényszerek a G. függelékben tárgyalt, a kezdeti feltételekre vonatkozó

kényszerek. Ugyanakkor az alábbi Hamilton-egyenletek a dinamikai egyenletek [3]:

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H_G}{\delta \pi^{ab}} = \frac{2N}{\sqrt{h}} \left( \pi_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} \pi \right) + 2D_{(a} N_{b)}, \quad (\text{F.3.50.})$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ab} = & -\frac{\delta H_G}{\delta h_{ab}} = -N\sqrt{h} \left( {}^{(3)}R^{ab} - \frac{1}{2} R^{(3)} h^{ab} \right) \\ & + \frac{N}{2\sqrt{h}} h^{ab} \left( \pi_{cd} \pi^{cd} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) \\ & - \frac{2N}{\sqrt{h}} \left( \pi^{ac} \pi_c{}^b - \frac{1}{2} \pi \pi^{ab} \right) \\ & + \sqrt{h} (D^a D^b N - h^{ab} D^c D_c N) \\ & + \sqrt{h} D_c \left( \frac{N^c \pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) - 2\pi^{c(a} D_c N^{b)}. \end{aligned} \quad (\text{F.3.51.})$$

Ezek ekvivalensek az  $R_{ab} = 0$  vákuumbeli Einstein-egyenletekkel, utóbbiaknak a kényszeres hamiltoni megfogalmazását jelentik.

## 2. A kényszerek eliminálhatóságáról.

### (a) Az elektrodinamika esete

Az elektrodinamika (a Minkowski-téridőben) és az általános relativitáselmélet hamiltoni tárgyalásmódja hasonlóságot mutat abban, hogy a fizikailag inekvivalens térkonfigurációk megválasztásában rejlő mértékszabadságból kényszer származik. Ez eltávolítható, ha a konfigurációs tér elemeit a térkonfigurációk ekvivalencia-osztályaival azonosítjuk. Ugyanakkor az általános relativitáselméletben abban is van bizonyos mértékszabadság, hogy hogyan választjuk meg a téridő rétegezését, amellyel kijelöljük az idő-koordinátát és a  $\Sigma_t$  térszerű Cauchy-felületeket. Az ebből származó kényszer nem távolítható el a konfigurációs tér ügyes választása révén. Ez jelentős különbség a Minkowski-téridőben vizsgált elektrodinamika esetéhez képest.

A kényszerek jelenléte azt jelenti, hogy hiába távolítottuk el a dinamikai változók közül az elektrodinamika esetében a  $V$  skalárpotenciált vagy az Einstein-egyenletek esetén az  $N$  és  $N_a$  mezőket, még mindig „túl bő” konfigurációs térrel dolgozunk. Pl. az elektrodinamikában  $\vec{A}$  és  $\vec{A} + \vec{\nabla}\chi$  fizikailag ekvivalens, egymástól csak mértéktranszformációban különböző konfigurációk, ha  $\chi$  tetszőleges függvény.

**Megjegyzés:** Ha az elektrodinamikában a konfigurációs teret az  $\vec{A}$  vektorpotenciálok  $\vec{\tilde{A}}$  mértékekvivalencia-osztályainak halmazával azonosítjuk, akkor kényszer nélküli hamiltoni tárgyalásmódot kapunk.

Tekintsük azon vektorpotenciálok  $\vec{\tilde{A}}$  ekvivalencia-osztályait, amelyek egymástól csak mértéktranszformációban különböznek. Ezen ekvivalencia-osztályok halmazát azonosítjuk a konfigurációs térrel. Az  $\vec{\tilde{A}}$  konfigurációnál a „kotangens-tér” a  $\delta\vec{\tilde{A}}$  variációk azon lineáris függvényeinek tere, amelyek csak az ekvivalencia-osztálytól függenek, vagyis a  $\vec{\pi}$  konjugált impulzus eleget kell tegyen a

$$\int_{\Sigma_t} \vec{\pi} \cdot [\delta\vec{\tilde{A}} - \vec{\nabla}(\delta\chi)] = \int_{\Sigma_t} \vec{\pi} \cdot \delta\vec{\tilde{A}} \quad (\text{F.3.52.})$$

azonosságnak. Ez az azonosság akkor és csak akkor áll fenn tetszőleges  $\delta\chi$  mértékfüggvény esetén, ha

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0. \quad (\text{F.3.53.})$$

A konfigurációs tér „új” választása esetén a kotangens-tér a  $\Sigma_t$ -n értelmezett divergenciamentes konjugált impulzusok tere. (Ekkor a (F.3.20.) kényszer automatikusan teljesül.) Ezért  $\mathcal{H}_{EM}$  kifejezéséből elhagyhatjuk a  $V\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}$  tagot, és írhatjuk, hogy

$$\tilde{\mathcal{H}}_{EM} = \frac{1}{2}(\vec{\pi} \cdot \vec{\pi} + \vec{B} \cdot \vec{B}), \quad (\text{F.3.54.})$$

ahol a  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{A}}$  csak az ekvivalencia-osztálytól függ. Következésképpen a Hamilton-egyenletek

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{EM}}{\delta \vec{\pi}} = \vec{\pi}, \quad (\text{F.3.55.})$$

$$\dot{\vec{\pi}} = -\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{EM}}{\delta \tilde{\vec{A}}} = -\vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (\text{F.3.56.})$$

alakot öltenek. Ha a konjugált impulzust az elektromos térerősségmező negatívjával azonosítjuk,  $\vec{\pi} \equiv -\vec{E}$ , akkor az (F.3.55.) és (F.3.56.) egyenletek ekvivalensek az  $\vec{E}$ -re és  $\vec{B}$ -re vonatkozó Maxwell-egyenletekkel. A  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0$  és  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  egyenletek automatikusan teljesülnek, az (F.3.55.) egyenlet mindkét oldalának rotációját véve a  $\dot{\vec{B}} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$  Faraday-törvényt, az (F.3.56.) egyenlet pedig a  $\dot{\vec{E}} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$  Ampère-törvényt szolgáltatja.

(b) *Az általános relativitáselmélet esete*

Az általános relativitáselméletben a  $h_{ab}$  konfigurációk megválasztásában szintén van mértékszabadságunk. Nevezetesen, ha  $\psi : \Sigma_t \mapsto \Sigma_t$  tetszőleges diffeomorfizmus  $\Sigma_t$ -n, akkor  $h_{ab}$  és  $\psi^* h_{ab}$  fizikailag ekvivalens Riemann-metrikák. Ez azt sugallja, hogy konfigurációs térnek a Riemann-metrikák  $\tilde{h}_{ab}$  ekvivalencia-osztályainak halmazát tekintjük, amikor is azokat a metrikákat soroljuk egy ekvivalencia-osztályba, amelyek átvihetők valamilyen diffeomorfizmussal egymásba. Az így értelmezett konfigurációs teret **Wheeler-féle szupertérnek** nevezzük. A konjugált impulzusoknak ekkor azonos módon kell hatniuk a Riemann-metrika olyan  $\delta h_{ab}$  variációin, amelyek csak diffeomorfizmusban különböznek egymástól. Ez a különbség a  $\Sigma_t$ -n értelmezett tetszőleges  $w^a$  vektormező által generált diffeomorfizmus esetén  $D_{(a} w_{b)}$  alakú. Ezért a konjugált impulzusoknak ki kell elégítenie az

$$\int_{\Sigma_t} \pi^{ab} (\delta h_{ab} + D_{(a} w_{b)}) = \int_{\Sigma_t} \pi^{ab} \delta h_{ab} \quad (\text{F.3.57.})$$

azonosságot a  $\Sigma_t$ -n értelmezett tetszőleges  $w^a$  vektormező esetén. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha

$$D_a \left( \frac{\pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) = 0 \quad (\text{F.3.58.})$$

teljesül. Az szupertér elemeihez konjugált impulzusok tehát automatikusan kielégítik az (F.3.49.) kényszert. Ha tehát a konfigurációs térnek a térmétrikák ekvivalencia-osztályainak terét választjuk, akkor az (F.3.49.) kényszer automatikusan kielégül.

Az (F.3.48.) kényszer azonban megmarad. Ezt a kényszert nem tudjuk feloldani, ami azzal kapcsolatos, hogy ez a kényszer a konjugált impulzusban kvadratikus. Az általános relativitáselmélet lényegi sajátása, hogy a hamiltoni megfogalmazása kényszeres, és ez komoly nehézséget jelent az elmélet kvantálása során.

3. *A hamiltoni tárgyalásmódban fellépő felületi tagok* kérdésével kapcsolatban az érdeklődő Olvasót a [1] tankönyv E függelékének utolsó bekezdéseire utaljuk.

## G. A kezdetiérték-feladat

### G.1. A kezdetiérték-feladat meghatározottsága

Egy klasszikus fizikai elméletben a **kezdetiérték-feladatról** (initial value problem) akkor beszélünk, ha bizonyos kezdeti (mérési) adatok (initial data) és a dinamikai törvények birtokában egyértelműen meghatározható a fizikai rendszer további időbeli fejlődése. A **kezdetiérték-feladatot jól meghatározottnak nevezzük**, ha az alábbi elvárások teljesülnek vele szemben:

1. A kezdeti adatok kicsiny megváltozása kicsiny változást okoz a (téridő bármely rögzített kompakt tartománya fölött értelmezett) megoldásban. Mivel a kezdeti feltételek csak véges pontossággal ismerhetők (és általában csak a téridő egy véges tartományában), ezért ez a fizikai történések előrejelezhetősége szempontjából fontos elvárás.
2. A kezdeti feltételek megváltoztatása tetszőleges  $S$  tartományon kívül, nem okozhat változást a megoldásban  $S$  kauzális jövőjében, azaz  $J^+(S)$ -ben. Ellenkező esetben volnának olyan fizikai hatások, amelyek a vákuumbeli fénysebességnél gyorsabban terjednének.

**Megjegyzés:** A determinisztikusan kaotikus mechanikai rendszerek az 1. elvárásnak a determinisztikus káosz lényegi tulajdonságánál fogva nem tesznek eleget. A kezdeti feltételek kicsiny megváltozása idővel exponenciálisan növekvő eltérést okoz a megoldásokban. Noha a Világegyetem kb. 14 milliárd éves fejlődését tekintve úgy látszik, hogy ez a fejlődéstörténet determinisztikus volt, nem zárhatjuk ki, hogy a Világegyetem kaotikus lenne egy a 14 milliárd évnél jóval nagyobb időskálán. Az Einstein-egyenletek nem lineárisak és végtelen szabadsági fokú rendszert írnak le. Feltehető ezért az a kérdés, hogy vannak-e az Einstein-egyenleteknek és a mezők hozzájuk csatolt egyenleteinek kaotikus megoldásai, és ha igen, akkor van azoknak fizikai jelentősége? Ezek nyitott kérdések, az úgynevezett **relativisztikus káosz** kérdéskörét képezik, amelyekre kb. az 1990-es évek közepe óta kezdtek el keresni a fizikusok a választ. *(Saját megjegyzés.)*

### G.2. A klasszikus, newtoni mechanika kezdetiérték-feladata

Az  $n$  szabadsági fokú klasszikus mechanikai rendszer Newton-féle mozgásegyenletei,

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = F_i\left(q_1, \dots, q_n, \frac{dq_1}{dt}, \dots, \frac{dq_n}{dt}\right), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{G.2.1.})$$

$n$  darab közönséges, másodrendű, csatolt differenciálegyenletet tartalmazó egyenletrendszer alkotnak. Ha adottak a  $t = t_0$  időpillanatban rendre az általános koordináták és az általános sebességek  $q_{10}, \dots, q_{n0}, (dq_1/dt)_0, \dots, (dq_n/dt)_0$  kezdeti értékei, akkor egyértelműen létezik a differenciálegyenletrendszer megoldása a  $t_0$  körüli bármely véges intervallumban. Továbbá, a rögzített  $t \neq t_0$  időpillanathoz tartozó  $q_1(t), \dots, q_n(t)$  megoldás folytonos függvénye a kezdeti adatoknak. A kezdeti adatok megváltozásának kauzális terjedése ugyanakkor nem tárgya a nem relativisztikus klasszikus mechanikának. Mindezek fényében a **newtoni mechanika kezdetiérték-feladata jól meghatározott**.

### G.3. Klasszikus, relativisztikus fizikai mezők kezdetiérték-feladata

A klasszikus relativisztikus fizikai mező példajaként vizsgáljuk a klasszikus Klein-Gordon-egyenletet,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - m^2 \phi, \quad (\text{G.3.1.})$$

Minkowski-téridőben. Ez az idő szerinti deriváltakban másodrendű parciális differenciálegyenlet a  $\phi$  skalármezőre. Annyi hasonlóságot mutat a (G.2.1.) mozgásegyenletekkel, hogy az egyenlet jobb oldala most is lehetővé teszi, hogy  $\phi$  és  $\partial\phi/\partial t$  kezdeti,  $t = t_0$  pillanatbeli értékeinek ismeretében kiszámolhatjuk  $\partial^2\phi/\partial t^2$  kezdeti értékét. Ez nem véletlen, mert a Klein-Gordon-egyenlet úgy is interpretálható, mint  $N$  darab, egymással első-szomszéd kölcsönhatásban levő oszcillátor rendszerének  $N \rightarrow \infty$  határesetete. Ez a matematikai és fizikai hasonlóság a (G.2.1.) és a (G.3.1.) egyenletek között sejtetni engedi, hogy igaz a következő állítás.

**Állítás:** Ha adottak a  $t = t_0$  időpillanatban a  $\phi$  és  $\partial\phi/\partial t$  függvények valamely térszerű  $\Sigma_0$  hiperfelületen, és ezek analitikusak, akkor létezik a (G.3.1.) egyenletnek ezen kezdőfeltételekhez tartozó egyértelmű megoldása.

A bizonyítás az alábbi lépésekből áll:

1. Ha  $\phi$  és  $\partial\phi/\partial t$  a  $t = t_0$  pillanatban a  $\Sigma_0$  térszerű hiperfelületen a térkoordináták analitikus függvényei, akkor kiszámolhatjuk  $\phi$  és  $\partial\phi/\partial t$  összes térderiváltjait a  $\Sigma_0$  hiperfelületen.
2. Ezután a (G.3.1.) egyenlet alapján meghatározhatjuk  $\partial^2\phi/\partial t^2$ -et  $\Sigma_0$ -n.
3. Utána képezzük a (G.3.1.) egyenlet mindkét oldalának  $t$  szerinti parciális deriváltját, és az előző pontok eredményei ismeretében meghatározzuk  $\partial^3\phi/\partial t^3$ -t  $\Sigma_0$ -n; majd képezzük ennek összes, térkoordináták szerinti parciális deriváltjait, stb.
4. Az eljárást végtelenségig folytatjuk, míg végül  $\phi$  összes deriváltja előáll a  $t = t_0$ -ban.
5. A  $t$  pillanathoz tartozó  $\phi$  megoldás a  $t = t_0$  körül formális Taylor-sorba fejthető, amelyről meg lehet mutatni, hogy véges a konvergenciasugara.

Ezen az úton az alábbi tételt lehet belátni.

**10.1.1. tétel: (Cauchy-Kowalewski<sup>135</sup>-tétel)** Legyenek  $t, x^1, \dots, x^{m-1}$  koordináták  $\mathbb{R}^m$ -ben. Tekintsük az  $\mathbb{R}^m$ -en értelmezett  $\phi_1, \dots, \phi_n$  függvények  $n$  darab parciális differenciálegyenletből álló

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} = F_i(t, x^\alpha; \phi_j; \partial\phi_j/\partial t; \partial\phi_j/\partial x^\alpha; \partial^2\phi_j/\partial t\partial x^\alpha; \partial^2\phi_j/\partial x^\alpha\partial x^\beta) \quad (\text{G.3.2.})$$

rendszerét, ahol  $F_i$ -k a változóiknak analitikus függvényei. Legyenek továbbá  $f_i(x^\alpha)$  és  $g_i(x^\alpha)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) analitikus függvények. Ekkor létezik a  $t = t_0$  hiperfelületnek ( $\Sigma_0$ ) olyan  $O \subset M$  nyílt környezete, amelyben a (G.3.2.) egyenletnek egyértelműen létezik

<sup>135</sup>Waldemar Hermann Gerhard Kowalewski, német matematikus, 1876–1950.



olyan megoldása, amely eleget tesz a  $\phi_i(t_0, x^\alpha) = f_i(x^\alpha)$ ,  $(\partial\phi_i/\partial t)(t_0, x^\alpha) = g_i(x^\alpha)$  kezdeti feltételeknek.

**Megjegyzés:** A **10.1.1. tétel** értelmében tehát a Klein-Gordon-egyenletnek létezik kezdetiérték-feladata, legalábbis analitikus kezdeti feltételek esetén. Ugyanakkor a tétel nem mond semmit arról, hogy a kezdetiérték-feladat jól meghatározott vagy sem.

1. Ha definiálunk a  $t = t_0$ -nak megfelelő  $\Sigma_0$  hiperfelületen értelmezett analitikus függvények terén valamilyen topológiát és a  $t$  időpillanathoz tartozó, azaz a  $\Sigma_t$  hiperfelületen értelmezett megoldások terén is egy topológiát, akkor nem biztos, hogy a kezdeti  $f_i$ ,  $g_i$  függvények folytonos megváltoztatása az analitikus megoldás folytonos megváltozását jelenti.
2. A tétel a kauzális terjedés vizsgálatára sem alkalmas. Egy analitikus függvényt egyértelműen meghatároz egy adott pontban felvett értéke és összes deriváltjainak ott felvett értéke, vagyis az értéke egy pont tetszőleges nyílt környezetében. Ezért, ha az analitikus kezdeti feltételeket megváltoztatjuk a  $\Sigma_0$  valamely kicsiny  $U \subset \Sigma_0$  nyílt tartományában, akkor azzal megváltoztatjuk őket  $\Sigma_0$ -n mindenütt. A kauzális terjedés vizsgálatához ezért nem analitikus kezdeti feltételekre van szükség. A **10.1.1. tétel** pedig ilyen esetre nem vonatkozik.

A Klein-Gordon-egyenlet esetében tehát a Cauchy-Kowalewski-módszer nem alkalmazható annak eldöntésére, hogy rendelkezik-e az egyenlet jól meghatározott kezdetiérték-feladattal. A (G.3.1.) egyenlet hiperbolikus jellegét, azaz hullámegyenlet jellegét és linearitását felhasználva azonban meg lehet mutatni a kezdeti feltételek analitikusságának megkövetelése nélkül, hogy a (G.3.1.) egyenlet kezdetiérték-feladata jól meghatározott.

1. Ha  $S_0$  tetszőleges gömbfelület  $\Sigma_0$ -ban, akkor a (G.3.1.) egyenletnek legfeljebb 1 megoldása létezik  $D(S_0)$ -ban. Itt  $D(S_0)$  az  $S_0$  gömbfelület teljes függőségi tartománya (ld. a 8. fejezetet).
2. Ha  $S_0$ -n kívül megváltoztatjuk a kezdeti feltételeket, akkor a megoldás  $D(S_0)$ -on nem változik meg.
3. A megoldás folytonosan függ a kezdeti feltételektől.
4. Ha a kezdeti feltételek sima függvények  $\Sigma_0$ -n, akkor a (G.3.1.) egyenletnek létezik sima megoldása  $D(S_0)$ -on, ahol  $S_0$  tetszőleges, vagyis a megoldás az egész  $\mathbb{R}^4$ -en (azaz  $D(\Sigma_0)$ -on) létezik.

**Megjegyzés:** Amíg a hiperbolikus egyenletnek létezik jól definiált kezdetiérték-feladata, addig a Laplace-egyenletnek nem létezik.

Az az állítás, hogy a (G.3.1.) egyenlet kezdetiérték-feladata jól meghatározott, lényegesen általánosítható.

**Állítás:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő, ahol  $g_{ab}$  tetszőleges sima Lorentz-metrika. Legyen  $\nabla_a$  az  $M$  sokaságon értelmezett bármely gradiens-operátor,  $A^a$  tetszőleges sima vektormező,  $B$ ,  $C$  tetszőleges sima skalármézők. Ekkor a **hiperbolikus**

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi + A^a\nabla_a\phi + B\phi + C = 0 \quad (\text{G.3.3.})$$

másodrendű, lineáris parciális differenciálegyenletnek jól meghatározott a kezdetiérték feladata, ha egy sima, térszerű  $\Sigma$  Cauchy-felületen adottak a  $(\phi, n^a\nabla_a\phi)$  kezdeti feltételek, ahol  $n^a$  a  $\Sigma$  egység-normálisa.

További általánosítások ismereteseek lineáris, másodrendű, hiperbolikus parciális differenciálegyenletek rendszerére. Erre egy példa az alábbi tétel.

**10.1.2. tétel:** Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő (vagy tetszőleges téridő globálisan hiperbolikus tartománya). Legyen  $\nabla_a$  bármely gradiens-operátor, továbbá  $\Sigma$  sima, térszerű Cauchy-felület, amelynek egység-normálisa  $n^a$ . Tekintsük az  $n$  darab  $\phi_1, \dots, \phi_n$  ismeretlen függvényre vonatkozó,  $n$  darab lineáris egyenletből álló alábbi egyenletrendszert,

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi_i + \sum_j (A_{ij})^a\nabla_a\phi_i + \sum_j B_{ij}\phi_j + C_i = 0, \quad (\text{G.3.4.})$$

amelyet **lineáris, diagonálisan másodrendű, hiperbolikus parciális differenciálegyenlet-rendszernek** neveznek. A (G.3.4.) egyenletrendszernek a  $\Sigma$  Cauchy-felületen megfogalmazott kezdetiérték-feladata jól meghatározott az alábbi értelemben. A  $\Sigma$ -n tetszőlegesen adott sima  $(\phi_i, n^a\nabla_a\phi_i)$  kezdeti feltételekhez a (G.3.4.) egyenletrendszernek egyértelműen létezik  $M$ -en mindenütt értelmezett megoldása. Ez a megoldás folytonosan függ a kezdeti feltételektől. Továbbá a kezdeti feltételeknek tetszőleges  $S \subset \Sigma$  zárt részhalmazon kívül történő megváltoztatása nem változtatja meg a megoldást  $D(S)$ -ben.

A fenti tétel tovább általánosítható speciális módon nem lineáris hiperbolikus parciális differenciálegyenletek rendszerére.

**Definíció:** Az  $M$  sokaságon értelmezett

$$g^{ab}(x; \phi_j; \nabla_c\phi_j)\nabla_a\nabla_b\phi_i = F_i(x; \phi_j; \nabla_c\phi_j), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{G.3.5.})$$

parciális differenciálegyenletek rendszerét **kvázilineáris, diagonálisan másodrendű, hiperbolikus parciális differenciálegyenlet-rendszernek** nevezik, ahol  $g^{ab}$  sima Lorentz-metrika,  $\nabla_a$  tetszőleges gradiens-operátor, és az  $F_i$  függvények valamennyi változójuk sima függvényei.

**Megjegyzés:** A (G.3.5.) egyenletrendszer abban különbözik a (G.3.4.) egyenletrendszertől, hogy a metrika függhet a keresett függvényektől és első deriváltjaiktól is, az  $F_i$  függvények pedig tartalmazhatnak nem lineáris függést is a keresett függvényektől és első deriváltjaiktól. Ugyanakkor a (G.3.5.) is lineáris a keresett függvények legmagasabb rendű, azaz második deriváltjaiban; innen a „kvázilineáris” elnevezés.

**10.1.3. tétel:** Legyen  $(\phi_0)_1, \dots, (\phi_0)_n$  a (G.3.5.) egyenletrendszer megoldása az  $M$  sokaságon és legyen  $(g_0)^{ab} = g^{ab}(x; (\phi_0)_j; \nabla_c(\phi_0)_j)$ . Tegyük fel, hogy az  $(M, (g_0)_{ab})$  téridő globálisan hiperbolikus (vagy, hogy az  $(M, (g_0)_{ab})$  téridőnek globálisan hiperbolikus tartományát tekintjük). Legyen  $\Sigma$  sima, térszerű Cauchy-felület az  $(M, (g_0)_{ab})$  téridőben. Ekkor a  $\Sigma$ -n megfogalmazott kezdetiérték-feladat jól meghatározott.

Ezen a következőket kell érteni:

- Tetszőleges, a  $\Sigma$ -n adott, a  $(\phi_0)_1, \dots, (\phi_0)_n$  megoldáshoz közeli kezdeti feltételek esetén létezik  $\Sigma$ -nak olyan  $O$  nyílt környezete, amelyben a (G.3.5.) egyenletrendszernek létezik  $\phi_1, \dots, \phi_n$  megoldása és  $(O, g_{ab}(x; \phi_j; \nabla_c\phi_j))$  globálisan hiperbolikus.
- A megoldás  $O$ -n egyértelmű, és kauzálisan propagál abban az értelemben, hogy ha a  $\phi'_1, \dots, \phi'_n$  megoldáshoz tartozó kezdeti feltételek  $\Sigma$  valamely  $S \subset \Sigma$  részhalmazán megegyeznek a

$\phi_1, \dots, \phi_n$  megoldáshoz tartozó kezdeti feltételekkel, akkor a  $\phi_1, \dots, \phi_n$  és a  $\phi'_1, \dots, \phi'_n$  megoldások megegyeznek  $O \cap D^+(S)$ -en.

- A megoldás folytonosan függ a kezdeti feltételektől.

## G.4. Kezdetiérték-feladat az általános relativitáselméletben

Az általános relativitáselméletben az Einstein-egyenletek kezdetiérték-feladatával szembe-  
esülünk. Látni fogjuk, hogy megfogalmazható jól meghatározott módon a kezdetiérték-  
feladat. Ez azonban nagyobb körütekintést igényel, mint a Klein-Gordon-egyenlet eseté-  
ben. Nevezetesen azt igényli, hogy a kezdeti feltételekre kényszerfeltételt kell kirónunk.  
Ehhez nagyon hasonló helyzet áll elő az  $A^a$  vektorpotenciálra vonatkozó Maxwell-egyenle-  
tek kezdetiérték-feladatával kapcsolatban, ahol szintén kényszereket kell kirónunk a kezdeti  
feltételekre és ezzel együtt mértéket kell választanunk. Először ezért a Maxwell-egyenletek  
kezdetiérték-feladatával foglalkozunk, és csak utána térünk majd rá az Einstein-egyenletek  
kezdetiérték-feladatának tárgyalására.

### G.4.1. A Maxwell-egyenletek kezdetiérték-feladata

Minkowski-téridőben (Minkowski-koordinátákat használva) vizsgáljuk az  $A^a$  vektorpoten-  
ciálra vonatkozó

$$\partial^a(\partial_a A_b - \partial_b A_a) = 0 \quad (\text{G.4.1.})$$

Maxwell-egyenleteket vákuumban (azaz külső források hiányában). Legyen  $\Sigma_0$  a  $t = t_0$   
társzerű hiperfelület, és legyen  $n^a$  a  $\Sigma_0$  normális egységvektora.

**Állítás:** A (G.4.1.) Maxwell-egyenletek alulhatározott egyenletrendszerként jelentenek  
az  $A_a$  vektorpotenciál 4 komponensére: 3 egyenletet (a vektorpotenciál társzerű  $A_\mu$  ( $\mu =$   
 $1, 2, 3$ ) komponenseire) és egy, a kezdeti feltételekre vonatkozó kényszert (aminek a fizikai  
jelentése a Gauss-törvény). Ezért a (G.4.1.) egyenletrendszernek nem létezik a szokásos  
matematikai értelemben jól meghatározott kezdetiérték-feladata.

Látszólag (G.4.1.) 4 darab egyenletet tartalmaz a vektorpotenciál 4 komponensére. A  
(G.4.1.) egyenletrendszer azonban nem (G.3.4.) alakú. Valójában az  $A_0$ -ra vonatkozó Maxwell-  
egyenlet nem tartalmazza a  $\partial^2 A_0 / \partial t^2$  idő szerinti második deriváltat, és átírható az  $\vec{E} = \vec{\nabla} A_0 -$   
 $(\partial \vec{A} / \partial t)$  elektromos térerősség segítségével a

$$0 = \vec{\nabla}^2 A_0 - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \equiv \varphi \quad (\text{G.4.2.})$$

Gauss-törvény alakjába. Indexjelölésben  $E_a = F_{ab} n^b = n^b (\partial_a A_b - \partial_b A_a)$  és  $\varphi = \partial_a F^{ab} = 0$ . A  
(G.4.2.) egyenlet kényszert jelent a kezdeti feltételekre, azaz  $A_\mu$  és  $\partial A_\mu / \partial t$  kezdeti értékeire  $\Sigma_0$ -n.

A (G.4.1.) rendszer másik 3 egyenlete ugyan tartalmazza a  $\partial^2 A_\mu / \partial t^2$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) idő szerinti  
második deriváltakat,

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 A_\mu + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial A_0}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right), \quad (\text{G.4.3.})$$

azonban szintén nem (G.3.4.) alakú, amelynek létezik jól meghatározott kezdetiérték-feladata. Másrészt ezen 3 egyenlet rendszerére alkalmazható a **10.1.1. tétel**, és a Cauchy-Kowalewski-módszer értelmében meghatározható  $\partial^2 A_\mu / \partial t^2$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) a  $\Sigma_0$ -n, majd a magasabb deriváltak is. Gondolhatnánk, hogy a (G.4.2.) egyenlet mindkét oldalát  $t$  szerint deriválva olyan egyenletre juthatunk, amelyből  $\partial^2 A_0 / \partial t^2$  meghatározható lenne a kezdeti feltételekből  $\Sigma_0$ -n. Ez azonban nincsen így. A  $\partial^a \partial^b F_{ab} = \partial^a \partial^b (\partial_a A_b - \partial_b A_a) = 0$  azonosságból ugyanis következik, hogy

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}^2 A_0, \quad (\text{G.4.4.})$$

ahonnan

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla}^2 A_0 - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi; \quad (\text{G.4.5.})$$

tehát a  $\varphi$  kényszer nem függ az időtől, vagyis ha a (G.4.2.) kényszer fennáll a  $t = t_0$  pillanatban, akkor minden időpillanatban fennáll. Másrészt akkor nem tudunk egyenletet kapni  $\partial^2 A_0 / \partial t^2$ -re, amelyből annak kezdeti értékét meg tudnánk határozni.

A **10.1.1. tétel** értelmében belátható, hogy analitikus kezdeti feltételek és az egész téridőn tetszőlegesen választott  $A_0$  esetén a (G.4.1.) egyenletrendszer  $A_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3$ )-ra vonatkozó egyenleteinek (analitikus esetben) létezik megoldása. Ez azonban nem fogja kielégíteni a Gauss-törvényt, úgyhogy a vektorpotenciálra vonatkozó Maxwell-egyenleteknek nincsen a szokásos matematikai értelemben jól definiált megoldása.

A fenti probléma azonban nem fizikai természetű. Ez abból adódik, hogy az olyan vektorpotenciálok, amelyek csak tetszőleges  $\chi$  skalárfüggvény  $\partial_a \chi$  gradiensében különböznek, fizikailag egyenértékűek, mert azonos elektromágneses mezőt írnak le. A fizikailag ekvivalens vektorpotenciálokat összekötő transzformáció a jól ismert mértéktranszformáció, úgyhogy arról van szó, hogy az egymásból mértéktranszformációval megkapható vektorpotenciálok fizikailag ekvivalensek. Ezért nem várhatjuk, hogy az  $A_a$  vektorpotenciálra vonatkozó Maxwell-egyenleteknek jól meghatározott kezdetiérték-feladata lenne. Be fogjuk azonban látni az alábbi állítást.

**Állítás:** A (G.4.1.) Maxwell-egyenleteknek a térszerű  $\Sigma_0$  hiperfelületen adott  $A_\mu$  és  $\partial A_\mu / \partial t$  kezdeti feltételek esetén létezik a mértéktranszformáció erejéig egyértelműen meghatározott megoldása, és a (G.4.1.) Maxwell-egyenletek fizikailag jól meghatározott kezdetiérték-feladattal rendelkeznek.

Rögzítsünk Lorentz-mértéket,

$$\partial^a A_a = 0, \quad (\text{G.4.6.})$$

amelyben a (G.4.1.) egyenletek a

$$\partial^a \partial_a A_b = 0 \quad (\text{G.4.7.})$$

alakra egyszerűsödnek. A (G.4.6.) és a (G.4.7.) egyenletrendszer fizikailag ekvivalens a (G.4.1.) egyenletrendszerrel abban az értelemben, hogy (G.4.1.) megoldásai a (G.4.6.) és (G.4.7.) megoldásaitól csak mértéktranszformációban különbözhetnek.

Legyenek adottak az  $A_\mu$  és  $\partial A_\mu / \partial t$  kezdeti feltételek  $\Sigma_0$ -n. Hajtsunk végre alkalmas mértéktranszformációt  $\Sigma_0$ -n, hogy  $\Sigma_0$ -n  $\partial^a A_a = 0$  legyen. Ekkor a (G.4.7.) egyenlet fennállása a teljes  $M$  téridőben biztosítja, hogy

$$\partial^a \partial_a (\partial^b A_b) = \partial^b (\partial^a \partial_a A_b) = 0 \quad (\text{G.4.8.})$$

$M$ -n mindenütt. Alkalmazzuk a  $\partial^a \partial_a (\partial^b A_b) = 0$  egyenletre a **10.1.2. tételt**. Ennek értelmében, ha  $\partial^a \partial_a A_b = 0$  az  $M$ -n, akkor a  $\partial^b A_b = 0$  mértékfeltétel  $M$ -en akkor és csak akkor teljesül mindenütt, ha  $\partial^b A_b = 0$  és  $\partial_t (\partial^b A_b) = 0$  teljesül a  $\Sigma_0$  hiperfelületen. Azt, hogy  $\partial^b A_b = 0$  a  $\Sigma_0$ -n, már elértük, amikor a  $\Sigma_0$ -n megadott kezdeti feltételeken elvégeztük a megfelelő mértéktranszformációt. A  $\partial(\partial^b A_b)/\partial t \Big|_{\Sigma_0} = 0$  feltétel pedig éppen a (G.4.2.) kényszer megkövetelése a kezdeti feltételektől. Valóban,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\partial^b A_b) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial A_0}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= \vec{\nabla}^2 A_0 - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varphi, \end{aligned} \quad (\text{G.4.9.})$$

ahol felhasználtuk a (G.4.7.) egyenletek közül az  $A_0$ -ra vonatkozót. Ez tehát azt jelenti, hogy a  $\Sigma_0$ -n a Lorentz-feltételt kielégítő kezdeti feltételek esetén a Lorentz-feltétel mindenhol teljesül  $M$ -en, ha a (G.4.7.) egyenletek mindenhol teljesülnek  $M$ -en. Ezért csak a (G.4.7.) egyenleteket kell megoldanunk a Lorentz-feltételt kielégítő kezdeti feltételekkel.

A (G.4.7.) egyenletek azonban (G.3.4.) alakúak, úgyhogy a **10.1.2. tétel** értelmében létezik adott, a Lorentz-feltételt kielégítő kezdeti feltételekhez tartozó megoldásuk, továbbá a megoldás a kezdeti feltételektől folytonosan függ, és rendelkezik a kauzális terjedés tulajdonságával.

Végül az eredeti kezdeti feltételekhez tartozó megoldást úgy kapjuk, hogy a Lorentz-feltételt kielégítő megoldást annak a mértéktranszformációnak az inverzével transzformáljuk, amellyel az eredeti kezdeti feltételeket a Lorentz-feltételnek eleget tevő kezdeti feltételekbe transzformáltuk  $\Sigma_0$ -n. Az eredeti (G.4.1.) egyenletek azonos kezdeti feltételekhez tartozó két megoldása mértéktranszformációval a (G.4.7.) egyenletek azonos kezdőfeltételekhez tartozó megoldásaiba transzformálható. A (G.4.7.) egyenletek adott kezdőfeltételekhez tartozó megoldása azonban egyértelmű, s ezért az eredeti (G.4.1.) egyenletek azonos kezdeti feltételekhez tartozó két megoldása csak mértéktranszformációban különbözhet egymástól, vagyis fizikailag egyenértékű.

Ezzel beláttuk, hogy a (G.4.1.) egyenletek fizikailag jól meghatározott kezdetiérték-feladattal rendelkeznek.

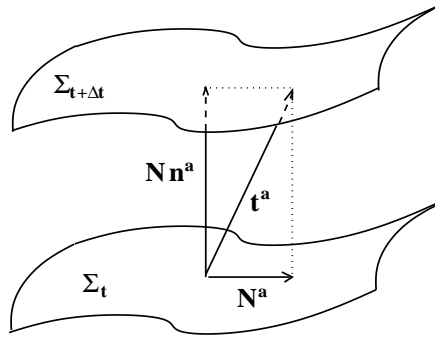
A fenti állítást „fizikaibb nyelvre” is átfogalmazhatjuk:

**Állítás:** Legyenek  $\vec{E}$  és  $\vec{B}$  sima vektormezők az  $M$  Minkowski-téridő (inerciális időkoordináta szerinti)  $t = t_0$  időpillanathoz tartozó  $\Sigma_0$  hiperfelületén, amelyekre teljesül  $\Sigma_0$ -n, hogy  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . Ekkor a  $\partial^a F_{ab} = 0$  Maxwell-egyenleteknek létezik a fenti kezdeti feltételekhez tartozó egyértelműen meghatározott  $F_{ab}$  megoldása; továbbá az  $F_{ab}$  megoldás folytonosan függ az  $\vec{E}$  és  $\vec{B}$  vektormezők  $\Sigma_0$ -n adott kezdeti értékeitől, és az  $F_{ab}$  megoldás a  $\Sigma_0$  kauzális jövőjének tetszőleges  $p \in J^+(\Sigma_0)$  pontjában csak a kezdeti feltételeknek a  $J^-(p) \cap \Sigma_0$  tartományon felvett értékétől függ. (Itt  $J^+(\Sigma_0)$  és  $J^-(p)$  rendre a  $\Sigma_0$  hiperfelület kauzális jövője és a  $p$  pont kauzális múltja (ld. a 8. fejezetet).)

## G.4.2. A vákuumra vonatkozó Einstein-egyenletek kezdetiérték-feladata

### 1. A kezdeti adatok megválasztása

Térjünk most rá a vákuumra vonatkozó  $G_{ab} = 0$  Einstein-egyenletek kezdetiérték-feladatának a vizsgálatára. Amíg a klasszikus fizika más fejezeteiben a mozgásegyenletek megoldását adott téridő-háttéren keressük a térmennyiségnek és deriváltjainak



52. ábra. Az időszerű  $t^a$  vektormező ortogonális felbontásának szemléltetése globálisan hiperbolikus téridőben,  $\Sigma_t$  és  $\Sigma_{t+\Delta t}$  szomszédos Cauchy-felületek,  $n^a$  a  $\Sigma_t$  egység-normálisa,  $N$  az időtartam-függvény,  $N^a$  az eltolódási vektor.

adott kezdeti értékei mellett, addig az általános relativitáselméletben magát a téridőt is meg kell határoznunk. Nem magától értetődő tehát, hogy melyek egyáltalán azok a kezdeti adatok, amelyek ismeretében a feladat megoldható, azaz a téridő geometriai szerkezete meghatározható.

A kérdés megválaszolása érdekében az általános relativitáselméletre olyan szemmel kell néznünk, mint valamilyen mennyiség időbeli változását leíró elméletre. Ezzel kapcsolatban már az is kérdés, hogy mi a szóbanforgó mennyiség és mi az idő. Legyen  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridő. (Ha a téridő nem lenne globálisan hiperbolikus, akkor maga a kezdetiérték-feladat sem lenne megfogalmazható.) Az ilyen téridőt a **8.3.14. tétel** értelmében  $\Sigma_t$  Cauchy-felületekkel rétegezhetjük, amelyeket a  $t$  globális időfüggvény parametrizál. Legyen  $n^a$  olyan egységvektor-mező, amely mindenütt a  $\Sigma_t$  hiperfelületek normálisa. A  $g_{ab}$  téridő-metrika bármely  $\Sigma_t$  hiperfelületen indukál egy térmetrikát, a  $h_{ab}$  3-dimenziós Riemann-metrikát,

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b. \quad (\text{G.4.10.})$$

Az F.3.4. fejezetben ismertetett módon bevezethetjük az  $M$ -en értelmezett  $t^a$  vektormezőt a  $t^a \nabla_a t = 1$  tulajdonsággal, ami azt fejezi ki, hogy  $t^a$  integrálgörbéi mentén egységnyi affin-távolságot haladva a  $t$  „idő” egységnyit változik. A  $t^a$  időszerű vektormezőt felbontva az (F.3.21.) egyenlőség szerint  $\Sigma_t$ -re ortogonális és  $\Sigma_t$ -vel párhuzamos összetevőkre bevezethetjük az  $N = -n_a t^a$  időtartam-függvényt és az  $N_a = h_{ab} t^b$  eltolódás-mezőt (ld. (F.3.22.)).

Az „idő úgy telik”, hogy a  $t = 0$ -hoz tartozó  $\Sigma_0$  felületről a  $\Sigma_t$  hiperfelületig „mozdulunk el”. Feleltessük meg  $\Sigma_t$  és  $\Sigma_0$  pontjait egymásnak a  $t^a$  vektormező által generált egy-paraméteres diffeomorfizmussal. Ekkor úgy tekinthetjük az „idő múlását”, mint a térmetrika megváltozását  $h_{ab}(0)$ -ról  $h_{ab}(t)$ -re. Az  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridőre tehát úgy tekinthetünk, mint a  $h_{ab}$  3-dimenziós Riemann-metrika időbeli változására egy adott  $\Sigma_t$  3-dimenziós sokaságon. Ez azt sugallja, hogy a 3-dimenziós Riemann-féle térmetrikát kell dinamikai változónak tekinteni az általános relativitáselméletben. Ezt erősíti meg az is, hogy az F.3.4. fejezetben tárgyalt hamiltoni

leírásban is a térmetrika játssza a dinamikai változó szerepét. Az  $N$  időtartam-függvény és az  $N^a$  eltolódási-vektormező csak azt mondják meg, hogyan kell „a  $t$  időben előre haladni”. Az elmondottak értelmében azt várjuk, hogy a megfelelő kezdeti adatok a következők lehetnek: a  $h_{ab}$  Riemann-metrikának és idő szerinti deriváltjának az értéke egy  $\Sigma$  3-dimenziós sokaságon.

A 9.4.3. fejezetben a  $K_{ab}$  külső görbületet használtuk annak jellemzésére, hogy milyen a téridőbe beágyazott  $\Sigma$  hiperfelületen értelmezett térmetrika „idő szerinti deriváltja” (ld.  $K_{ab}$  4. tulajdonságát). Ekkor hiperfelület-ortogonális időszerű geodetikusból és a hozzájuk tartozó  $\xi^a$  érintővektormezőből indultunk ki:  $K_{ab} = \nabla_a \xi_b = h_a^c \nabla_c \xi_b$ , felhasználva, hogy  $K_{ab}$  is térszerű. Most  $n^a$  egy másik, a  $\Sigma$  hiperfelületre ortogonális időszerű egységvektor. Ezért a gradiensének  $\Sigma$ -hoz tangenciális komponense meg kell egyezzen  $\xi^a$  gradiensének  $\Sigma$ -hoz tangenciális komponensével,

$$K_{ab} = h_a^c \nabla_c \xi_b = h_a^c \nabla_c n_b. \quad (\text{G.4.11.})$$

Megmutatjuk, hogy

$$K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab}. \quad (\text{G.4.12.})$$

Mivel  $\mathcal{L}_n n_a = 0$ , ezért

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_n (g_{ab} + n_a n_b) = \frac{1}{2} (\nabla_a n_b + \nabla_b n_a + n_b \mathcal{L}_n n_a + n_a \mathcal{L}_n n_b) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_a n_b + \nabla_b n_a). \end{aligned} \quad (\text{G.4.13.})$$

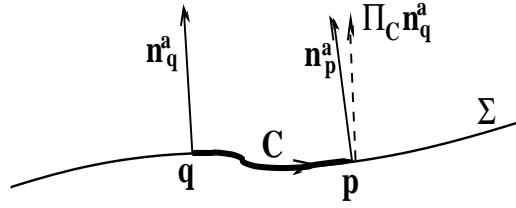
Az  $n^a$  érintővektorú, hiperfelület-ortogonális időszerű görbék kongruenciájának elcsavarodása  $\omega_{ab} = \frac{1}{2} (\nabla_b n_a - \nabla_a n_b) = 0$ , ahonnan  $\nabla_a n_b = \nabla_b n_a$ , úgyhogy  $\frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} = \nabla_a n_b$ . Másrészt  $n^a \nabla_a n_b = n^a \nabla_b n_a = \frac{1}{2} \nabla_b (n^a n_a) = 0$  miatt  $\nabla_a n_b$  térszerű, úgyhogy

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} = \nabla_a n_b = h_a^c \nabla_c n_b. \quad (\text{G.4.14.})$$

Ezt akartuk bizonyítani.

A (G.4.12.) összefüggéssel a külső görbületet általánosítottuk a téridőnek nem geodetikus, időszerű görbékre ortogonális hiperfelületekkel történő rétegezésére. A térmetrika  $\dot{h}_{ab} = \mathcal{L}_t h_{ab}$  „idő szerinti” deriváltja és a  $\Sigma$  hiperfelületek  $K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab}$  külső görbülete közötti összefüggést az (F.3.27.) egyenlet határozza meg. Geometriailag  $K_{ab}$  azáltal jellemzi, hogy a  $\Sigma$  hiperfelület mennyire görbül, hogy a hiperfelület különböző szomszédos pontokban vett érintővektorai mennyire nem párhuzamos eltoljtjai egymásnak. Ez közvetlenül adódik  $\nabla_c n_b$  geometriai jelentéséből és abból, hogy  $K_{ab}$  kifejezésében ennek térszerű vetületét képezzük. A geometriai viszonyokat a 53. ábra illusztrálja.

Eddigi megfontolásaink alapján az sejthető, hogy az általános relativitáselméletben megfelelő kezdeti adatokként a  $(\Sigma, h_{ab}, K_{ab})$  adathármas szolgál, ahol  $\Sigma$  egy 3-dimenziós sokaság,  $h_{ab}$  a  $\Sigma$ -n értelmezett Riemann-metrika,  $K_{ab}$  pedig a  $\Sigma$ -n értelmezett szimmetrikus tenzormező. Alább majd azt fogjuk megmutatni,



53. ábra. A  $\Pi_C n_q^a$  vektor az  $n_q^a \in V_q$  vektor párhuzamos eltoltja  $q \in \Sigma$ -ból a szomszédos  $p \in \Sigma$ -ba a  $q$ -t  $p$ -vel összekötő  $C$  geodetikus mentén. Definíciójából adódóan  $K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b$  méri, hogy  $n_p^a \in V_p$  és  $\Pi_C n_q^a \in V_p$  vektorok mennyire különböznek egymástól, és ezzel jellemzi, hogy mennyire görbül  $\Sigma$ .

hogy ha a fenti adathármas bizonyos kényszerfeltételeknek eleget tesz, akkor ehhez az adathármashoz, mint kezdeti feltételhez tartozik a vákuumbeli Einstein-egyenleteknek olyan globálisan hiperbolikus  $(M, g_{ab})$  téridő-megoldása, amely  $\Sigma$ -val diffeomorf Cauchy-felületekkel rétegezhető, és ahol  $h_{ab}$  a  $\Sigma$ -n indukált metrika,  $K_{ab}$  pedig a  $\Sigma$ -n indukált külső görbület. Azt is meg fogjuk mutatni, hogy ez a kezdetiérték-feladat jól meghatározott.

## 2. Kapcsolat a téridő és a téridőbe beágyazott hiperfelület geometriai jellemzői között

A továbbiak szempontjából hasznos, ha összefüggéseket keresünk az  $(M, g_{ab})$  téridőn értelmezett metrika, gradiens-operátor és görbületi tenzor és azon hasonló mennyiségek között, amelyeket ezek indukálnak az  $M$  téridőbe beágyazott 3-dimenziós térszerű  $\Sigma$  hiperfelületen. A  $g_{ab}$  metrika a  $\Sigma$  hiperfelületen a (G.4.10.) összefüggés szerinti  $h_{ab}$  Riemann-metrikát indukálja. A **3.1.1. tétel** értelmében a  $h_{ab}$  térmetrika egyértelműen meghatároz viszont  $\Sigma$ -n egy  $D_a$  gradiens-operátort, amelyre  $D_a h_{bc} = 0$ . A  $D_a$  gradiens-operátor segítségével pedig definiálhatjuk a  ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$  görbületi tenzort  $\Sigma$ -n.

Legyen  $v^a \in V_p$  tetszőleges vektor a  $p \in \Sigma \subset M$  pontban. Ez a vektor egyértelműen felbontható egy  $\Sigma$ -ra merőleges  $v_\perp^a = v_\perp n^a$  és egy azzal párhuzamos  $v_\parallel^a$  komponensre,

$$v^a = v_\perp^a + v_\parallel^a = v_\perp n^a + v_\parallel^a, \quad (\text{G.4.15.})$$

ahol  $n^a$  a  $\Sigma$  hiperfelület egység-normálisa és  $v_\parallel^a n_a = 0$ . Ha  $v_\perp = 0$ , akkor  $v^a = v_\parallel^a$ , és ekkor a  $v^a$  vektor úgy tekinthető, mint a  $\Sigma$  hiperfelület  $p$  pontban vett érintőterének vektora. A  $v_\perp = 0$  feltétel azonos a

$$h^a_b v^b = v^a \quad (\text{G.4.16.})$$

feltétellel, ahol  $h^a_b = g^{ac} h_{cb}$  és  $h_{ab}$ -t a (G.4.10.) összefüggés definiálja. Ennek általánosításaként fogalmazható meg a következő állítás:

**Állítás:** Bármely a  $p \in \Sigma \subset M$  pontban értelmezett  $T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$  téridőbeli tenzort a  $\Sigma$  3-dimenziós hiperfelület  $p$  pontban vett érintőterén (és annak duálisán) értelmezett tenzornak tekinthetjük, ha

$$T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} = h^{a_1}_{c_1} \dots h^{a_k}_{c_k} h^{d_1}_{b_1} \dots h^{d_l}_{b_l} T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l}. \quad (\text{G.4.17.})$$



Fordítva, a  $\Sigma$  felület  $p$  pontjában ( $\Sigma$  érintőterén) definiált tenzor egyértelműen meghatároz egy (G.4.17.) tulajdonságú, a téridő  $p$  pontbeli érintőterén értelmezett tenzort. (A  $h^a_b$  tenzor a projektor szerepét játssza, amely az  $M$  téridő  $p$  pontban vett  $V_p$  érintőterét vetíti a  $\Sigma$  hiperfelület  $p$  pontban vett érintőterére.)

Értelmezzük most a  $\Sigma$  3-dimenziós sokaságon a  $h_{ab}$  metrikához tartozó, egyértelműen meghatározott  $D_a$  gradiens-operátort.

Legyen  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  a  $\Sigma$  sokaságon értelmezett tenzormező, és tekintsük ezt, mint az  $M$  téridőnek (G.4.17.) tulajdonságú tenzorát. Ennek a tenzornak nem tudjuk képezni a  $\nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  deriváltját, mert ahhoz ismernünk kellene  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ -t a  $\Sigma$  hiperfelület környezetében is, nem csak  $\Sigma$ -n. A  $h_d^c \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  mennyiség azonban jól definiált, mert nem igényli  $\Sigma$ -ból kifelé mutató irányokban deriváltak képzését. Ez a mennyiség azonban még általában nem a (G.4.17.) tulajdonságú tenzor. Ha azonban a komponenseit vetítjük  $h^a_b$  segítségével, akkor a  $\Sigma$ -n értelmezett (G.4.17.) tulajdonságú tenzormezőt kapunk. Így jutunk a következő lemmához.

**10.2.1 lemma:** Legyen  $(M, g_{ab})$  a téridő és  $\Sigma$  térszerű hiperfelület  $M$ -ben. Legyen  $h_{ab}$  a (G.4.10.) összefüggéssel meghatározott indukált metrika  $\Sigma$ -n, és jelölje  $D_a$  a **3.1.1. tétel** értelmében a  $h_{ab}$ -hez tartozó, egyértelműen meghatározott gradiens-operátort (azaz amelyre  $D_c h_{ab} = 0$ ). Legyen továbbá  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  a  $\Sigma$  sokaságon értelmezett tenzormező, és tekintsük ezt, mint az  $M$  téridőnek (G.4.17.) tulajdonságú tenzorát. Ekkor a  $D_a$  gradiens-operátort a

$$D_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = h^{a_1}_{d_1} \dots h^{a_k}_{d_k} h_{b_1}^{e_1} \dots h_{b_l}^{e_l} h_c^f \nabla_f T^{d_1 \dots d_k}_{e_1 \dots e_l} \quad (\text{G.4.18.})$$

összefüggés határozza meg, ahol  $\nabla_a$  a  $g_{ab}$  téridő-metrikához tartozó gradiens-operátor.

Először megmutatjuk, hogy a (G.4.18.) összefüggés jobb oldalával értelmezett operátor eleget tesz a gradiens-operátortól elvárt, a 3.2. fejezetben megfogalmazott 1.-4. követelményeknek. A linearitás, a Leibnitz-szabály és a kontrakcióval történő felcserélhetőség automatikusan következik abból, hogy  $\nabla_a$  ezeknek eleget tesz.

A 4. követelmény belátásához tekintsünk egy  $\Sigma$ -n értelmezett  $\phi$  sima függvényt. Vegyük továbbá a  $\Sigma$  hiperfelület  $\mathfrak{P}_p$  érintőterét a  $p \in \Sigma$  pontban és abban a  $\mathfrak{t}^a \in \mathfrak{P}_p$  érintővektort. Ekkor  $\mathfrak{t}^a$ -t  $M$ -en értelmezett (G.4.17.) tulajdonságú vektornak tekintve,

$$\mathfrak{t}(\phi) = \mathfrak{t}^a \nabla_a \phi = \mathfrak{t}^a h_a^b \nabla_b \phi = \mathfrak{t}^a D_a \phi \quad (\text{G.4.19.})$$

adódik, ami igazolja a 4. követelményt.

Igazoljuk most, hogy a (G.4.18.) összefüggés jobb oldalával értelmezett  $D_a$  operátor a  $h_{ab}$ -hez tartozó gradiens-operátor, azaz hogy  $D_c h_{ab} = 0$ . A (G.4.18.) szabályt felhasználva kapjuk, hogy

$$D_c h_{ab} = D_c (g_{ab} + n_a n_b) = h_a^e h_b^f h_c^d \nabla_d (g_{ef} + n_e n_f) = 0, \quad (\text{G.4.20.})$$

mert  $\nabla_c g_{ab} = 0$  és  $h_a^b n_a = 0$  definíció szerint.

Végül felhasználva, hogy  $D_c h_{ab} = 0$ , tetszőleges, a  $\Sigma$ -n értelmezett  $\phi$  sima függvény esetén írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} D_a D_b \phi &= D_a (h_b^c \nabla_c \phi) = h_b^c h_a^d \nabla_d \nabla_c \phi \\ &= h_b^c h_a^d \nabla_c \nabla_d \phi = D_b D_a \phi \end{aligned} \quad (\text{G.4.21.})$$

ahol felhasználtuk, hogy  $\nabla_a$  torziómentes.

Ezzel beláttuk, hogy a (G.4.18.) összefüggés jobb oldalával értelmezett  $D_a$  teljesíti a gradiens-operátortól elvárt 1.-5. követelményeket, és, hogy ez a  $h_{ab}$  tértmetrikához tartozó gradiens-operátor. Akkor viszont *ez a gradiens-operátor  $\Sigma$ -n*, mert a **3.1.1. tétel** értelmében a  $h_{ab}$ -hez tartozó gradiens-operátor egyértelműen meghatározott.

**Állítás:** A  $\Sigma$  térszerű hiperfelületen a  $D_a$  gradiens-operátor révén definiált görbületi tenzor

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d = h_a^f h_b^g h_c^k h^d{}_j R_{fgk}{}^j - K_{ac} K_b^d + K_{bc} K_a^d, \quad (\text{G.4.22.})$$

ahol  $R_{abc}{}^d$  a téridő görbületi tenzora,  $K_{ab}$  pedig  $\Sigma$  külső görbülete.

Legyen  $\omega_a$  a  $\Sigma$ -n értelmezett duális vektormező (egy-forma). Ekkor a  $\Sigma$  hiperfelület görbületi tenzorát az alábbi összefüggés definiálja:

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d \omega_d = D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c. \quad (\text{G.4.23.})$$

A (G.4.18.) szabály felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} D_a D_b \omega_c &= D_a (h_b^d h_c^e \nabla_d \omega_e) \\ &= h_a^f h_b^g h_c^k \nabla_f (h_g^d h_k^e \nabla_d \omega_e) \\ &= h_a^f h_b^d h_c^e \nabla_f \nabla_d \omega_e + h_a^f h_b^g h_c^k [\nabla_f (h_g^d h_k^e)] (\nabla_d \omega_e) \\ &= h_a^f h_b^d h_c^e \nabla_f \nabla_d \omega_e + h_a^f h_b^g h_c^e (\nabla_f h_g^d) (\nabla_d \omega_e) + h_a^f h_b^d h_c^k (\nabla_f h_k^e) (\nabla_d \omega_e). \end{aligned} \quad (\text{G.4.24.})$$

Felhasználva, hogy  $h_a^b n_b = 0$ ,  $K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b$  és  $h_a^c K_{cb} = K_{ac}$ , azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} h_a^b h_c^d (\nabla_b h_d^e) &= h_a^b h_c^d \nabla_b (g_d^e + n_d n^e) = h_a^b h_c^d (\nabla_b n_d) n^e + h_a^b h_c^d n_d (\nabla_b n^e) \\ &= h_a^b h_c^d (\nabla_b n_d) n^e = h_c^d K_{ad} n^e = K_{ac} n^e. \end{aligned} \quad (\text{G.4.25.})$$

Helyettesítsük ezt vissza a (G.4.24.) utolsó egyenlősége jobboldali kifejezésébe, ekkor

$$D_a D_b \omega_c = h_a^f h_b^d h_c^e \nabla_f \nabla_d \omega_e + h_c^e K_{ab} n^d (\nabla_d \omega_e) + h_b^d K_{ac} n^e (\nabla_d \omega_e) \quad (\text{G.4.26.})$$

adódik. Itt

$$h_b^d n^e (\nabla_d \omega_e) = h_b^d [\nabla_d (n^e \omega_e)] - h_b^d (\nabla_d n^e) \omega_e = -h_b^d (\nabla_d n^e) \omega_e = -K_b^e \omega_e, \quad (\text{G.4.27.})$$

úgyhogy azt találjuk, hogy

$$D_a D_b \omega_c = h_a^f h_b^d h_c^e \nabla_f \nabla_d \omega_e + h_c^e K_{ab} n^d (\nabla_d \omega_e) - K_{ac} K_b^e \omega_e. \quad (\text{G.4.28.})$$

Képezzük most a kapott egyenlőség mindkét oldalának antiszimmetrizáltját az  $a$  és  $b$  indexekben, és használjuk fel, hogy  $h_c^e K_{(ab)} n^d (\nabla_d \omega_e) = 0$ , akkor az alábbi azonosságot nyerjük,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^{(3)}R_{abc}{}^e \omega_e &= h_{(a}^f h_{b)}^d h_c^e \nabla_f \nabla_d \omega_e - \frac{1}{2} K_{ac} K_b^e \omega_e + \frac{1}{2} K_{bc} K_a^e \omega_e \\ &= h_a^f h_b^d h_c^e \nabla_{(f} \nabla_{d)} \omega_e - \frac{1}{2} K_{ac} K_b^e \omega_e + \frac{1}{2} K_{bc} K_a^e \omega_e \\ &= \frac{1}{2} h_a^f h_b^d h_c^e R_{fde}{}^g \omega_g - \frac{1}{2} K_{ac} K_b^e \omega_e + \frac{1}{2} K_{bc} K_a^e \omega_e \\ &= \frac{1}{2} h_a^f h_b^d h_c^j R_{fdj}{}^g h_g^e \omega_e - \frac{1}{2} K_{ac} K_b^e \omega_e + \frac{1}{2} K_{bc} K_a^e \omega_e, \end{aligned} \quad (\text{G.4.29.})$$

ahonnan

$${}^{(3)}R_{abc}{}^e = h_a^f h_b^d h_c^j h_g^e R_{fdj}{}^g - K_{ac} K_b{}^e + K_{bc} K_a{}^e \quad (\text{G.4.30.})$$

adódik. Ez a bizonyítani kívánt összefüggés.

**Állítás:** A  $\Sigma$  külső görbületének gradiensei és a téridő Ricci-tenzora között fennáll a

$$D_a K_b{}^a - D_b K_a{}^a = R_{cd} n^d h_b{}^c \quad (\text{G.4.31.})$$

azonosság. A (G.4.22.) és a (G.4.31.) azonosságokat **Gauss-Codacci**<sup>136</sup>-féle relációknak<sup>137</sup> nevezik.

### 3. A vákuumbeli Einstein-egyenletek kezdetiérték-feladatának lokális megoldása

Térjünk most rá a vákuumban érvényes Einstein-egyenletek kezdetiérték-feladatának vizsgálatára. Kezdeti adatokként a  $h_{ab}$  Riemann-metrikát és a szimmetrikus  $K_{ab}$  tenzormezőt adjuk meg egy 3-dimenziós  $\Sigma$  sokaságon. Megpróbálunk az Einstein-egyenletek megoldásaként olyan  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus téridőt keresni, amelyben  $\Sigma$  olyan Cauchy-felület, hogy rajta  $h_{ab}$  és  $K_{ab}$  rendre az indukált metrika és a külső görbület. A következőképpen fogunk eljárni. Olyan lokális  $\{y^\mu\}$  koordinátarendszerben írjuk fel az Einstein-egyenleteket a metrika  $g_{\mu\nu}$  komponenseire, amelyben az idő-koordináta  $y^0 = t$  és a  $t = 0$  felület felel meg  $\Sigma$ -nak (ill.  $\Sigma$  azon részének, amely a választott koordinátarendszerrel lefedhető). Az Einstein-egyenletet ezután olyan alakra hozzuk, amelyről explicit módon látszik, hogy kvázilineáris, diagonális másodrendű, hiperbolikus egyenlet, azaz (G.3.5.) alakú. Ekkor a **10.1.3. tétel** alapján beláthatjuk, hogy létezik az egyenletnek lokálisan a kívánt tulajdonságú megoldása. Végül vázoljuk, hogy hogyan „globalizálható” a kapott eredmény, amivel belátjuk, hogy a kezdetiérték-feladat az egész téridőre kiterjedően létezik. Így tudjuk majd megfogalmazni a **10.2.2. tételt**.

#### (a) A kezdeti adatokra vonatkozó kényszerfeltételek

Kezdjük tehát azzal, hogy felírjuk a vákuumbeli Einstein-egyenletet a választott koordinátarendszerben explicit alakban. Használjuk fel a Ricci-tenzor komponenseinek (3.6.34.) alakját, ahol a Christoffel-szimbólumokat a (3.3.11.) kifejezéssel helyettesítjük. Ekkor a Ricci-tenzor komponenseinek a metrikával és annak deriváltjaival kifejezett explicit alakjára

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} g^{\alpha\beta} [-2\partial_\beta \partial_{(\nu} g_{\mu)\alpha} + \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}] + F(g, \partial g) \quad (\text{G.4.32.})$$

<sup>136</sup>Delfino Codazzi, olasz matematikus, 1824–1873.

<sup>137</sup>A differenciálgeometriában jól ismert Gauss-Codazzi-Mainardi azonosságokról van szó. Gaspare Mainardi, olasz matematikus, 1800–1879.

adódik, ahol  $F$  a metrikának és első deriváltjainak nem lineáris kifejezése, ahonnan

$$\begin{aligned}
R &= g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\rho,\sigma} g^{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} [-2\partial_\beta \partial_{(\sigma} g_{\rho)\alpha} + \partial_\alpha \partial_\beta g_{\rho\sigma} + \partial_\rho \partial_\sigma g_{\alpha\beta}] + \bar{F}(g, \partial g) \\
&= - \sum_{\alpha,\beta,\rho,\sigma} g^{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} [-\partial_\beta \partial_\rho g_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha \partial_\beta g_{\rho\sigma}] + \bar{F}(g, \partial g), \tag{G.4.33.}
\end{aligned}$$

ahol  $F$  és  $\bar{F}$  a metrikának és első deriváltjainak nem lineáris kifejezései. A (G.4.32.) és a (G.4.33.) kifejezések segítségével kapjuk meg az Einstein-tenzor komponenseit:

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R G_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta} [-2\partial_\beta \partial_{(\nu} g_{\mu)\alpha} + \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}] \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sum_{\alpha,\beta,\rho,\sigma} g^{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} [-\partial_\beta \partial_\rho g_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha \partial_\beta g_{\rho\sigma}] + \tilde{F}_{\mu\nu}(g, \partial g), \tag{G.4.34.}
\end{aligned}$$

ahol  $\tilde{F}_{\mu\nu}(g, \partial g)$  ismét a metrikának és első deriváltjainak nem lineáris kifejezései.

Az Einstein-tenzor komponenseinek (G.4.34.) kifejezései azonban nem olyan alakúak, mint a (G.3.5.) egyenlet bal oldala. Legyen  $n^a$  a  $t = 0$  hiperfelület egység-normálisa, ekkor be lehet látni, hogy az Einstein-tenzornak a  $t = 0$  hiperfelületre ortogonális  $G_{\mu\nu} n^\nu$  komponensei nem tartalmazzák a metrika komponenseinek idő szerinti második deriváltját. Ezért a  $G_{ab} = 0$  Einstein-egyenleteknek ezek a

$$\sum_\nu G_{\mu\nu} n^\nu = 0 \tag{G.4.35.}$$

komponensei a  $t = 0$  pillanatban csak a kezdeti adatoktól függenek. Ezek az egyenletek nem dinamikai egyenletek, hanem **a kezdeti feltételekre kirótt kényszerfeltételek**. (Ezek az analogonjai az elektrodinamikában a kezdeti skalár- és 3-asvektorpotenciálra kirótt Gauss-törvénynek, mint kényszernek.)

A (G.4.22.) és a (G.4.31.) Gauss-Codacci-azonosságok segítségével a kényszerek koordináta-invariáns alakját is megtalálhatjuk. A (G.4.31.) azonosság segítségével írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0 &= h^b_a G_{bc} n^c = h^b_a \left( R_{bc} - \frac{1}{2} g_{bc} R \right) n^c = h^b_a R_{bc} n^c - \frac{1}{2} h^b_a n_b = h^b_a R_{bc} n^c \\
&= D_b K^b_a - D_a K^b_b. \tag{G.4.36.}
\end{aligned}$$

Ez a **kezdeti adatokra vonatkozó egyik kényszerfeltétel**. Ehhez azonban még egy további kényszer is társul. Induljunk ki abból, hogy

$$\begin{aligned} R_{abcd}h^{ac}h^{bd} &= R_{abcd}(g^{ac} + n^an^c)(g^{bd} + n^bn^d) \\ &= R + 2R_{ac}n^an^c + R_{abcd}n^an^bn^cn^d \\ &= R + 2R_{ac}n^an^c = 2G_{ac}n^an^c, \end{aligned} \quad (\text{G.4.37.})$$

ahol felhasználtuk, hogy  $R_{abcd}$  a két utolsó indexében antiszimmetrikus. A (G.4.22.) azonosságot használva azonban azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R &= h^{ac}h^b{}_d {}^{(3)}R_{abc}{}^d \\ &= h^{ac}h^b{}_dh^f{}_ah^g{}_bh^k{}_ch^d{}_j R_{fgk}{}^j - h^{ac}h^b{}_dK_{ac}K_b{}^d + h^{ac}h^b{}_dK_{bc}K_a{}^d \\ &= h^f{}_ah^g{}_bh^{ak}h^b{}_j R_{fgk}{}^j - (K^a{}_a)^2 + K_{ab}K^{ab} \\ &= h^{fk}h^g{}_j R_{fgk}{}^j - (K^a{}_a)^2 + K_{ab}K^{ab} \\ &= h^{fk}h^{gj}R_{fgkj} - (K^a{}_a)^2 + K_{ab}K^{ab}, \end{aligned} \quad (\text{G.4.38.})$$

aminek segítségével az Einstein-egyenletekből a **további**

$$\begin{aligned} 0 &= G_{ab}n^an^b = \frac{1}{2}R_{abcd}h^{ac}h^{bd} \\ &= \frac{1}{2}\left({}^{(3)}R + (K^a{}_a)^2 - K_{ab}K^{ab}\right) \end{aligned} \quad (\text{G.4.39.})$$

**kényszer adódik a kezdeti adatokra.**

Az elektrodinamikában a  $\partial^a\partial^b(\partial_a A_b - \partial_b A_a) = 0$  azonosság biztosítja, hogy ha a Gauss-törvény, mint kényszer fennáll a  $t = 0$  pillanatbeli adatokra, és érvényesek a 4-esvektorpotenciál tér-komponenseire vonatkozó Maxwell-egyenletek, akkor minden  $t$  pillanatban teljesül a Gauss-törvény. Megmutatták, hogy az általános relativitáselméletben hasonló a helyzet [1]: a

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad (\text{G.4.40.})$$

Bianchi-azonosság következtében, ha a (G.4.36.) és a (G.4.39.) kényszerek fennállnak a kezdeti pillanatban, és érvényben vannak mindenütt az Einstein-egyenletek (tér-tér)-komponensei, akkor a kényszerek is minden pillanatban fennállnak.

(b) *Az Einstein-egyenletek harmonikus koordinátákban*

Az elmondottak értelmében a  $G_{ab} = 0$  Einstein-egyenletek **alulhatározott** egyenletrendszerként jelentenek a metrika  $g_{\mu\nu}$  komponenseire. Csak a (tér-tér)-komponensekre vonatkozó 6 darab egyenlet dinamikai egyenlet, ugyanakkor a metrika  $g_{\mu\nu}$  komponensei 10 darab ismeretlen függvényt jelentenek. Ez az alulhatározottság azonban ugyanúgy nem fizikai, mint a 4-esvektorpotenciálra vonatkozó Maxwell-egyenletek esetében. Az alulhatározottság oka az, hogy a téridő geometriáját a metrika  $g_{\mu\nu}$  komponensei redundáns módon írják le. A C. függelékben rámutattunk, hogy ha  $\phi : M \mapsto M$  diffeomorfizmus, akkor

$(M, g_{ab})$  és  $(M, \phi^* g_{ab})$  ugyanazt a fizikai téridőt jelentik. A  $g_{ab}$  és a  $\phi^* g_{ab}$  metrikák koordináta-komponenseit a  $\phi$  diffeomorfizmushoz tartozó (2.3.15.) koordinátatranszformáció kapcsolja össze. Ezért ha az Einstein-egyenleteknek két olyan  $g_{\mu\nu}$  és  $g'_{\mu\nu}$  megoldását tekintjük, amelyek a (2.3.15.) transzformációval kaphatók meg egymásból, akkor ezek ugyanazt a fizikai megoldást jelentik. Mivel a tenzorok koordináta-komponenseinek (2.3.15.) transzformációs szabályában 4 darab tetszőleges függvény van jelen, azért a metrika 10 darab  $g_{\mu\nu}$  komponense között „durván szólva” csak 6 darab „nem mértékszabadsággal kapcsolatos” függvény szerepelhet. Ebből látható, hogy az Einstein-egyenletek pontosan a megfelelő számú, azaz 6 darab dinamikai egyenletet tartalmaznak, és sejteni lehet, hogy jól definiált módon megfogalmazható az általános relativitáselmélet kezdetiérték-feladata. Annak érdekében, hogy megmutassuk a jól definiált kezdetiérték-feladat létezését, alkalmas mértékválasztással fogunk élni, ugyanúgy, mint ahogy ezt tettük az elektrodinamika esetében. Olyan mértéket, azaz olyan koordinátarendszert választunk, amelyben az Einstein-egyenletek (G.3.5.) alakot öltenek.

Úgynevezett  $\{x^\mu\}$  **harmonikus koordinátákat** vezetünk be, amelyekre

$$H^\mu \equiv \nabla_a \nabla^a x^\mu = 0. \quad (\text{G.4.41.})$$

Adott  $(M, g_{ab})$  téridőben az  $\{x^\mu\}$  harmonikus koordinátákat a következőképpen vezethetjük be  $\Sigma$  azon részének környezetében, amelyet lefedtünk az  $\{y^\mu\}$  koordinátarendszerrel. Az  $\{y^\mu\}$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) koordináták és normális irányú deriváltjaik  $\Sigma$ -n felvett értékeit kezdeti adatoknak tekintjük a harmonikus koordinátákat meghatározó (G.4.41.) egyenlethez. Ez az egyenlet (G.3.4.) alakú, ezért létezik jól meghatározott kezdetiérték-feladata. Mivel a  $\{\nabla_a y^\mu\}$  duális vektorok lineárisan függetlenek  $\Sigma$ -n, azért a (G.4.41.) egyenlet fenti kezdetiérték-feladatának  $\{x^\mu\}$  megoldásaiból képezett  $\{\nabla_a x^\mu\}$  duális vektorok is lineárisan függetlenek  $\Sigma$ -nak  $M$ -beli környezetében. Ezért  $\{x^\mu\}$  lokális koordinátarendszer. Tehát az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy  $\Sigma$  környezetében **létezik lokális harmonikus koordinátarendszer**.

Kezdjük azzal, hogy a kovariáns divergencia koordináta-bázisban történő képzési szabálya szerint felírjuk explicit alakban a harmonikus koordinátákat meghatározó feltételi egyenletet:

$$\begin{aligned} 0 &= H^\mu = \nabla_a (g^{ab} \nabla_b x^\mu) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta x^\mu) \\ &= \sum_\alpha \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\mu}) \\ &= \sum_\alpha \left( \partial_\alpha g^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} \partial_\alpha g_{\rho\sigma} \right), \end{aligned} \quad (\text{G.4.42.})$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\partial_\beta x^\mu = \partial x^\mu / \partial x^\beta = \delta_\beta^\mu \quad (\text{G.4.43.})$$

és

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}(-g)^{-1/2} \partial_\alpha g = \frac{1}{2}(-g)^{-1/2} (-g) \sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} \partial_\alpha g_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} \partial_\alpha g_{\rho\sigma}.\end{aligned}\quad (\text{G.4.44.})$$

A vákuumbeli  $R_{\mu\nu} = 0$  Einstein-egyenletek harmonikus koordinátákban

$$0 = R_{\mu\nu}^H = R_{\mu\nu} + \sum_{\alpha} g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha \quad (\text{G.4.45.})$$

alakba is írhatók. A Ricci-tenzor bármely koordinátarendszerben érvényes (G.4.33.) alakja és a harmonikus koordinátákra vonatkozó (G.4.42.) feltétel segítségével megkapjuk a Ricci-tenzor harmonikus koordinátákban felírt  $R_{\mu\nu}^H$  alakját, úgyhogy az Einstein-egyenletek harmonikus koordinátákban

$$0 = R_{\mu\nu}^H = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} + \hat{F}_{\mu\nu}(g, \partial g) \quad (\text{G.4.46.})$$

alakot öltenek, ahol  $\hat{F}_{\mu\nu}(g, \partial g)$  a metrika komponenseinek és azok első deriváltjainak nem lineáris kifejezése. Az Einstein-egyenletek tehát egyenértékűek a (G.4.46.) egyenletekből és a harmonikus koordinátákra vonatkozó (G.4.41.) feltétellel álló egyenletek rendszerével. A (G.4.46.) egyenletet **redukált Einstein-egyenletnek** nevezik. A harmonikus koordináták bevezetésének köszönhetően elértük, hogy a kapott redukált Einstein-egyenlet ugyanolyan alakú, mint a (G.3.5.) egyenlet, amelyre a **10.1.3. tétel** már alkalmazható.

(c) *A kezdetiérték-feladat lokális megoldása*

Most kerültünk abba a helyzetbe, hogy belássuk, hogy a vákuumra vonatkozó Einstein-egyenleteknek létezik lokális megoldása olyan kezdeti feltételek esetén, amelyek „elegendően közeliak a lapos téridőhöz”. A következő lépésben a kezdeti adatokra vonatkozó „elegendően közeliak a lapos téridőhöz” megszorítástól meg fogunk szabadulni azt felhasználva, hogy minden görbült téridő „elegendően kis skálán vizsgálva” lapos téridővel közelíthető. Végül be fogjuk látni, hogy a kényszereket kielégítő tetszőleges kezdeti feltételek esetén egyértelmű az Einstein-egyenletek lokális megoldása.

i. *lépés*

Legyen  $h_{ab}$  Riemann-metrika és  $K_{ab}$  szimmetrikus tenzormező a 3-dimenziós  $\Sigma$  sokaságon, és teljesüljenek a (G.4.36.) és a (G.4.39.) kényszerek. Fedjük le  $\Sigma$ -t (ill. annak egy darabját) koordinátarendszerrel és jelölje  $h_{\mu\nu}$  és  $K_{\mu\nu}$  a  $h_{ab}$  és  $K_{ab}$  tenzorok koordináta-komponenseit. Írjunk elő  $\Sigma$ -n olyan kezdeti feltételeket  $g_{\mu\nu}$ -re és  $\partial g_{\mu\nu}/\partial t$ -re, hogy (a)  $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ) legyen, és (b) hogy a kezdeti adatokból (G.4.12.) alapján számolt külső görbület  $K_{\mu\nu}$  legyen. Erre egy különösen egyszerű lehetőség az a választás, hogy  $g_{00} = -1$ ,  $g_{0\mu} = 0$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) és  $\partial g_{\mu\nu}/\partial t = K_{\mu\nu}$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) legyen. Mivel így a  $\partial g_{0\mu}/\partial t$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ )

deriváltak még nincsenek rögzítve, ezeket megválaszthatjuk úgy, hogy  $H^\mu = 0$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) (azaz a (G.4.42.) feltétel) is teljesüljön  $\Sigma$ -n. Tekintsük most ezekkel a kezdeti feltételekkel a (G.4.46.) redukált Einstein-egyenletet. Tudjuk, hogy ennek a lapos téridő (a Minkowski-téridő) megoldása. Ha a kezdeti feltételek „elég közel vannak” a lapos téridőnek megfelelő kezdeti feltételekhez, akkor a **10.1.3. tétel** értelmében a (G.4.46.) egyenlet megoldható  $\Sigma$  azon darabjának  $\mathcal{O}$  környezetében, amelyet az eredetileg választott koordináta-rendszerrel lefedtünk. Ez a megoldás pedig olyan globálisan hiperbolikus téridő, amelyben a  $\Sigma$ -nak a szóbanforgó  $\Sigma \cap \mathcal{O}$  darabja Cauchy-felület.

A (G.4.46.) egyenletnek ez a megoldása az Einstein-egyenlet megoldása  $\mathcal{O}$ -ban, ha  $H^\mu = 0$  (azaz a (G.4.42.) egyenlőség) is mindenütt teljesül  $\mathcal{O}$ -ban. Ezt a következőképpen lehet belátni. A tetszőleges koordinátákban kifejezett  $G_{\mu\nu}$  kifejezhető a harmonikus koordinátákban felírt  $R_{\mu\nu}^H$  Ricci-tenzor segítségével (ld. (G.4.45.)), mint

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^H - \frac{1}{2}R^H g_{\mu\nu} - \sum_{\alpha} \left( g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha - \frac{1}{2} \partial_\alpha H^\alpha \right). \quad (\text{G.4.47.})$$

Ha a (G.4.46.) egyenlet teljesül  $\Sigma$ -n, akkor  $\Sigma$ -n

$$G_{\mu\nu}|_{\Sigma} = - \sum_{\alpha} \left( g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha - \frac{1}{2} \partial_\alpha H^\alpha \right)_{\Sigma}. \quad (\text{G.4.48.})$$

Innen adódik, hogy  $\partial H^\mu / \partial t = 0$   $\Sigma$ -n, mivel  $\sum_{\nu} G_{\mu\nu} n^\nu|_{\Sigma} = 0$  és  $H^\mu|_{\Sigma} = 0$ . Másrészt viszont, ha (G.4.46.) teljesül  $\mathcal{O}$ -ban, akkor ugyanebben a környezetben

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\mu} \nabla^\mu G_{\mu\nu} = - \sum_{\rho, \mu, \alpha} g^{\rho\mu} \nabla_\rho \left( g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha - \frac{1}{2} \partial_\alpha H^\alpha \right) \\ &= - \sum_{\rho, \mu, \alpha} \frac{1}{2} g_{\alpha\nu} g^{\rho\mu} \partial_\rho \partial_\mu H^\alpha + \{\text{alacsonyabb rendű, } H^\alpha\text{-ban lineáris tagok}\}. \end{aligned} \quad (\text{G.4.49.})$$

Szorozzuk ezt az egyenletet  $g^{\lambda\nu}$ -vel és összegezzünk  $\nu$ -re, ekkor (G.3.4.) alakú egyenletet kapunk  $\mathcal{O}$ -ban. Utóbbinak a **10.1.2. tétel** értelmében egyértelműen létezik a  $H^\mu$  megoldása. Mivel azonban a kezdeti feltételek  $H^\mu|_{\Sigma} = \partial H^\mu / \partial t|_{\Sigma} = 0$  azonosan eltűnnek, azért a megoldás  $H^\mu \equiv 0$   $\mathcal{O}$ -ban mindenütt.

Ezzel beláttuk, hogy vákuumban az Einstein-egyenleteknek létezik lokális megoldása olyan kezdeti feltételek esetén, amelyek elég közel vannak a lapos téridő-megoldás kezdeti feltételeihez. A **10.1.3. tétel** értelmében ez a megoldás a kezdeti adatoktól folytonosan függ és rendelkezik a kauzális terjedés tulajdonságával.

## ii. lépés

Most megmutatjuk, hogy a lokális megoldás akkor is létezik, ha a  $(g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu} / \partial t)_\Sigma$  kezdeti feltételek nincsenek közel a sík téridő-megoldás kezdeti feltételeihez. Legyen  $p \in \Sigma$ , akkor alkalmas koordinátatranszformációval elérhetjük, hogy ebben a pontban  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$  és  $x^\mu = 0$  legyen. Legyen továbbá  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Skálázzuk át a kezdeti feltételeket:

$$(g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu} / \partial t)_\Sigma \longrightarrow (\lambda^{-2} g_{\mu\nu}, \lambda^{-2} \partial g_{\mu\nu} / \partial t)_\Sigma, \quad (\text{G.4.50.})$$

majd pedig hajtsuk végre az  $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \lambda^{-1} x^\mu$  koordinátatranszformációt.



Ezek után a tenzorkomponensek (2.3.15.) transzformációs szabálya értelmében

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= \lambda^{-2} g^{\alpha\beta}(\lambda x') \partial'_\alpha x^\mu \partial'_\beta x^\nu = g_{\mu\nu}(\lambda x'), \\ \frac{\partial g'_{\mu\nu}(x')}{\partial t'} &= \lambda \frac{\partial g_{\mu\nu}(\lambda x')}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{G.4.51.})$$

adódik. Innen látszik, hogy ha  $\lambda \rightarrow 0$ , akkor a kezdeti feltételek tetszőlegesen közel kerülnek a lapos téridő-megoldás kezdőfeltételeihez. Ezért létezik olyan elegendően kicsiny  $\lambda_0$ , amely mellett már van  $g_{\mu\nu}^0(x')$  megoldása az Einstein-egyenleteknek az új  $\lambda = \lambda_0$ -hoz tartozó kezdeti feltételek mellett a  $p$  pont környezetében. Ekkor a  $g_{\mu\nu}^0(\lambda_0^{-1}x)$  az Einstein-egyenleteknek az eredeti kezdeti feltételekhez tartozó megoldása.

iii. *lépés*

Végül annak bizonyítása maradt hátra, hogy a  $(h_{ab}, K_{ab})$  kezdeti feltételekhez tartozó lokális megoldás egyértelmű. Legyen  $(\mathcal{O}^H, g_{ab}^H)$  az Einstein-egyenleteknek a  $(g_{\mu\nu}^H, \partial g_{\mu\nu}^H / \partial t)_\Sigma$  kezdeti feltételekhez tartozóan harmonikus koordinátákban a fentebb leírt módon talált téridő-megoldása. Legyen  $(\mathcal{O}, g_{ab})$  az Einstein-egyenleteknek egy másik (nem feltétlenül harmonikus koordinátákban talált) megoldása, amely  $\Sigma$ -nak ugyanazt a darabját fedi le, mint  $(\mathcal{O}^H, g_{ab}^H)$ , és amely ugyanazokat a kezdeti  $(h_{ab}, K_{ab})$  feltételeket indukálja  $\Sigma$ -n. Meg akarjuk mutatni, hogy létezik olyan  $\psi$  diffeomorfizmus, amelyik  $\Sigma$ -nak egy  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$  környezetét leképezi  $\Sigma$ -nak egy  $\mathcal{U}^H \subset \mathcal{O}^H$  környezetére úgy, hogy  $g_{ab}$ -t  $g_{ab}^H$ -ba képezi le, azaz amelyre  $\psi^* g_{ab} = g_{ab}^H$ . Mivel  $g_{ab}$  és  $g_{ab}^H$  ugyanazokat a kezdeti adatokat indukálják  $\Sigma$ -n, ezért létezik olyan  $\phi$ , hogy  $\phi^* g_{ab}$  koordinátakomponenseinek és azok idő szerinti deriváltjainak  $\Sigma$ -n vett értékei megegyeznek a  $(g_{\mu\nu}^H, \partial g_{\mu\nu}^H / \partial t)_\Sigma$  kezdeti feltételekkel. (Végtelen sok ilyen diffeomorfizmus létezik, mert  $\phi$  tetszőleges lehet azokban a pontokban, amelyek nem pontjai  $\Sigma$ -nak.) Ezután felhasználhatjuk a  $\phi^{-1}$  inverz leképezést, hogy  $\mathcal{O}^H$  koordinátáit  $\mathcal{O}$  koordinátáiba transzformáljuk. Az így kapott koordináták és idő szerinti deriváltjaik kezdeti értékeit kezdeti feltételekként használjuk, hogy megoldjuk a (G.4.41.) egyenletet  $\mathcal{O}$ -n annak érdekében, hogy harmonikus koordinátákat kapjunk  $\mathcal{O}$ -n. Ezeket a harmonikus koordinátákat, mint címkéket használjuk: legyen  $\psi$  az a leképezés, amelyik  $\mathcal{O}$  valamely pontját  $\mathcal{O}^H$  azon pontjába képezi le, amelynek ugyanazok a harmonikus koordinátái. (Általában  $\psi$  a  $\Sigma$ -nak csak valamely  $\mathcal{O}$ -beli környezetében lesz értelmezve, és csak  $\Sigma$ -nak valamely  $\mathcal{O}^H$ -beli környezetére képez le.) Ekkor  $\psi^* g_{ab}$  harmonikus koordinátákban vett komponensei a megfelelő  $\mathcal{O}^H$ -beli környezetben kielégítik a (G.4.46.) redukált Einstein-egyenleteket és ugyanazon kezdeti adatokhoz tartoznak, mint  $g_{ab}^H$ . Ekkor viszont a **10.1.3 tétel** értelmében  $\psi^* g_{ab} = g_{ab}^H$  kell fennálljon  $\Sigma$  megfelelő  $\mathcal{O}^H$ -beli környezetében, ami akkor azt jelenti, hogy a lokális megoldás egyértelmű.

(d) *A globális megoldás*

A kezdetiérték-feladat lokális megoldásának egzisztenciájára és unicitására vonatkozó eredmények „globálissá tehetők”, ennek vázlatos leírását ld. [1]-ben.

A fentiek eredménye az alábbi tételben foglalható össze.

**10.2.2. tétel:** Legyen  $\Sigma$  3-dimenziós  $C^\infty$  sokaság,  $h_{ab}$  sima Riemann-metrika  $\Sigma$ -n és  $K_{ab}$  sima, szimmetrikus tenzormező  $\Sigma$ -n. Tegyük fel, hogy  $h_{ab}$  és  $K_{ab}$  kielégítik a (G.4.36.) és a (G.4.39.) kényszereket. Ekkor egyértelműen létezik az  $(M, g_{ab})$   $C^\infty$  téridő, amelyet a  $(\Sigma, h_{ab}, K_{ab})$  kezdeti adatok *maximális*

**Cauchy-fejlesztésének** (maximal Cauchy development) nevezünk, az alábbi tulajdonságokkal:

1.  $(M, g_{ab})$  az Einstein-egyenletek megoldása.
2.  $(M, g_{ab})$  globálisan hiperbolikus és benne  $\Sigma$  Cauchy-felület.
3. A  $\Sigma$ -n indukált metrika és külső görbület rendre  $h_{ab}$  és  $K_{ab}$ .
4. Bármely más 1.-3. tulajdonságú téridő izometrikusan leképezhető az  $(M, g_{ab})$  téridő egy részhalmazába.

Továbbá az  $(M, g_{ab})$  téridő a függőségi tartományra vonatkozó elvárást az alábbi értelemben teljesíti. Tegyük fel, hogy a  $(\Sigma, h_{ab}, K_{ab})$  és a  $(\Sigma', h'_{ab}, K'_{ab})$  kezdeti feltételekhez rendre az  $(M, g_{ab})$  és  $(M', g'_{ab})$  maximális Cauchy-fejlesztések tartoznak. Tegyük fel továbbá, hogy létezik olyan  $\phi : S \subset \Sigma \mapsto S' \subset \Sigma'$  diffeomorfizmus, amely  $(h_{ab}, K_{ab})|_{\Sigma}$ -t átviszi  $(h'_{ab}, K'_{ab})|_{\Sigma'}$ -be. Ekkor  $D(S)$  az  $(M, g_{ab})$  téridőben izometrikus  $D(S')$ -vel az  $(M', g'_{ab})$  téridőben. Végül a  $g_{ab}$  megoldás  $M$ -ben folytonosan függ a  $(h_{ab}, K_{ab})|_{\Sigma}$  kezdeti feltételektől.

**Megjegyzés:** Ha egy elméletben létezik kezdetiérték-feladat, akkor érdekes kérdés annak legalább a „durva” becslése, hogy **hány szabadsági fok szerepel az elméletben**, azaz az elmélet dinamikai egyenleteinek hány független megoldása van. Vegyünk sorra néhány fontos esetet.

1. A klasszikus pontmechanikában  $n$  darab kezdeti koordináta és  $n$  darab kezdeti sebesség megadása szükséges a kezdeti feltételek megadásához, és ehhez a  $2n$  darab adathoz a mechanikai rendszer  $n$ -dimenziós konfigurációs tere tartozik: a szabadsági fokok száma a kezdeti adatok számának fele.
2. A klasszikus Klein-Gordon-mező esetében a megfelelő kezdeti adatok előírása a skálármezőnek és idő szerinti deriváltjának, azaz 2 darab függvénynek a megadását jelentik valamely  $\Sigma$  Cauchy-felületen. A klasszikus mechanikai analógiának megfelelően mondhatjuk, hogy a Klein-Gordon-mezőnek a tér minden pontjában  $2 : 2 = 1$  darab szabadsági foka van.
3. Elemezzük most a gravitációs mező szabadsági fokainak számát az általános relativitáselméletben. Az Einstein-egyenletekhez tartozó megfelelő kezdeti feltételek megadása a  $\Sigma$  3-dimenziós sokaságon 12 darab függvény megválasztását jelenti:  $h_{ab}$  6 darab független komponensét és  $K_{ab}$  6 darab független komponensét. Ezek az adatok azonban ki kell, hogy elégítsék a (G.4.36.) és a (G.4.39.) kényszereket, azaz 4 darab kényszert, úgyhogy a  $\Sigma$ -n függetlenül megadható függvények száma  $12 - 4 = 8$ . A látszólag függetlenül megadható 8 darab függvénynek megfelelő téridő-megoldások között azonban vannak fizikailag egyenértékűek. Nevezetesen bármely  $\phi : \Sigma \mapsto \Sigma$  diffeomorfizmus esetén a  $(\phi^* h_{ab}, \phi^* K_{ab})$  kezdeti adatokhoz ugyanaz a fizikai téridő-megoldás tartozik, mint a  $(h_{ab}, K_{ab})$  kezdeti adatokhoz. A 3-dimenziós  $\Sigma$  sokaságon értelmezett diffeomorfizmusnak megfelelő koordinátatranszformációt 3 darab szabadon választható függvény határozza meg. Ezért a 8 darab látszólag

független függvény közül 3 az ilyen  $\phi$  diffeomorfizmusoknak felel meg, úgyhogy  $8 - 3 = 5$  függvény marad, amelyeket a  $\Sigma$  sokaságon „szabadon” választhatunk meg, hogy elkerüljük a mértékekivivalens megoldásokat. Azonban azok a kezdeti adatok, amelyek nem kaphatók meg egymásból valamely  $\phi$  diffeomorfizmus révén, még mindig adhatnak fizikailag ekvivalens téridő-megoldásokat, amelyek csak abban különböznek, hogy másképpen helyezkedik el bennük a  $\Sigma$  Cauchy-felület. Durván szólva ahhoz azonban, hogy a Cauchy-felület helyzetét meghatározzuk a téridőben egy további függvény megadása szükséges (pl. az idő-függvény megadása). Így a fizikailag inekvivalens téridő-megoldásokat eredményező kezdeti feltételek megadásában csak  $8 - 3 - 1 = 4$  darab függvény választható meg függetlenül. Ez azt jelenti, hogy a tér (azaz  $\Sigma$ ) minden pontjában a gravitációs mezőnek  $4 : 2 = 2$  szabadsági foka van. Ez pontosan annyi, mint a lapos téridőben propagáló zérus tömegű, lineáris, 2-es spinű mező szabadsági fokainak a száma. Jegyezzük azonban meg, hogy a függvényeknek ez a leszámllása semmilyen információt nem ad arra nézve, hogy mely függvények választhatók meg valóban szabadon, mely függvényeket határoznak meg a kényszerek, és mely függvények felelnek meg mértéktranszformációknak. A gravitáció kvantálásának fő nehézsége éppen abban rejlik, hogy nem tudjuk megjelölni, hogy pontosan melyek a valóban fizikai szabadsági fokok.

#### G.4.3. Az Einstein-egyenletek kezdetiérték-feladata anyag jelenlétében

Anyag jelenlétében az Einstein-egyenletek:  $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ . Ekkor a (G.4.36.) és a (G.4.39.) kényszerek is módosulnak:

$$\begin{aligned} G_{ba}n^a &= D^a(K_{ab} - h_{ab}K^c_c) = -8\pi J_b, \\ G_{ab}n^an^b &= \frac{1}{2}\left({}^{(3)}R + (K^a_a)^2 - K_{ab}K^{ab}\right) = 8\pi\rho, \end{aligned} \quad (\text{G.4.52.})$$

ahol  $J_b = -h_b^c T_{ca}n^a$  és  $\rho = T_{ab}n^an^b$  rendre az anyag energia-áramsűrűsége és energiasűrűsége  $\Sigma$ -n.

Az, hogy anyag jelenlétében a csatolt Einstein-egyenletek és az anyagra vonatkozó állapotegyenlet, ill. téregyenletek rendszerének kezdetiérték-feladata jól meghatározott-e, attól függ alapvetően, hogy milyen az állapotegyenlet, ill. a téregyenletek alakja, továbbá hogy milyen alakú az anyag energiaimpulzus-tenzora.

- Ha az anyagnak a téridő-metrikával kifejezett téregyenletei (G.3.5.) alakúak, és  $T_{ab}$  csak a térmennyiségtől, a metrikától és ezeknek első deriváltjaitól függ, akkor harmonikus koordinátákban az Einstein- és téregyenletek rendszere (G.3.5.) alakú egyenletrendszer, és létezik jól meghatározott kezdetiérték-feladata. Erre példa (a) az Einstein-Klein-Gordon-egyenletek és (b) az Einstein-Maxwell-egyenletek.
- Olyan esetekben is létezhet jól meghatározott kezdetiérték-feladat, amikor az Einstein-egyenletek és az anyagra vonatkozó egyenletek rendszere nem (G.3.5.) alakú. Például, ha az anyag ideális folyadék, akkor is lehet jól definiált a kezdetiérték-feladat, ha a folyadék  $P = P(\rho)$  állapotegyenlete megfelelő alakú.

**Megjegyzés:** Az, hogy a kezdetiérték-feladat jól meghatározott, nem tünteti ki az Einstein-féle elméletet a gravitáció másféle elméletei közül. Pl. a Jordan<sup>138</sup>-Brans<sup>139</sup>-Dicke<sup>140</sup>-elméletnek, és néhány magasabb deriváltakat tartalmazó gravitációs elméletnek is létezik jól definiált kezdetiérték-feladata.

**Megjegyzés:** A jól definiált kezdetiérték-feladat létezése általában nem magától értetődő vonása az elméleteknek. Például a magasabb spinű lineáris téregyenletek görbült téridő esetére történő természetes általánosítása általában nem rendelkezik jól meghatározott kezdetiérték-feladattal.

---

<sup>138</sup>Ernst Pascual Jordan, német fizikus, 1902–1980.

<sup>139</sup>Carl Henry Brans, amerikai fizikus, 1935–

<sup>140</sup>Robert Henry Dicke, amerikai fizikus, 1916–1997.

## Hivatkozások

- [1] Robert M. Wald, *General relativity* (The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [2] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large-scale structure of space-time* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973).
- [3] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, „*The Dynamics of General Relativity*”, *Gravitation: An Introduction to Current Research* ed. by L. Witten (Wiley, New York, 1962).
- [4] A.E. Fischer, J.E. Marsden, „*The Initial Value Problem and the Dynamical Formulation of General Relativity*”, *General Relativity, an Einstein Centenary Survey* ed. by S.W. Hawking, W. Israel (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979).