RENORMÁLÁSI CSOPORT A KVANTUMELMÉLETBEN

Sailer Kornél

Speciális előadás

Elméleti Fizikai Tanszék
Kossuth Lajos Tudományegyetem
Debrecen
1997.

Tartalom

1. Előszó

A renormálási csoport módszere arra keres és talál választ, hogy milyen viselkedést mutat egy fizikai rendszer különböző nagyításokban nézve. Milyennek látják a rendszert azok a hipotetikus megfigyelők, akiknek a mérései különböző téridőbeli felbontással bírnak.

A legtöbb fizikai rendszer különböző felbontásban különböző szerkezetet mutat. A különböző méretskálákon más folyamatok figyelhetők meg benne. Gondoljunk csak például egy makroszkopikus szilárdtestre. Amíg azt makroszkopikus testként szemléljük, addig megfigyelhetjük kollektív mozgásait, mint a benne terjedő rugalmas hullámokat. A rácsállandóval összemérhető méretskálán az egyedi atomok mozgását látjuk. Még kisebb méretskálán az atomok szerkezete, az atommag és az elektronok, tárulnak szemünk elé. Tovább növelve a felbontást, megfigyelhetjük az atommagon belül a nukleonokat, majd még nagyobb felbontásnál a nukleonokon belül a kvarkokat és a gluonokat. A megfigyelés tipikusan úgy történik, hogy valamilyen részecskét szóratunk az anyagon. A felbontást a bombázó részecske energiájának növelésével javítjuk. A szóráskísérletek jelentik azt a mikroszkópot, amellyel kísérleti úton felderíthetjük az anyag viselkedését különböző méret- ill. energiaskálákon. (Ne felejtsük el, hogy az igazi mikroszkóp is úgy működik, hogy a mintán szóródott fotonokat figyeljük meg.)

A renormálási csoport szolgáltatja azt az ,,elméleti mikroszkópot", amellyel a fizikai rendszer viselkedése különböző felbontásokban, azaz különböző méret- ill. energiaskálákon tanulmányozható.

Általában azt találjuk, hogy a fizikai jelenségek adott energiaskálán nem nagyon függnek attól, hogy mi történik a sokkal nagyobb, vagy a sokkal kisebb energiákon. Ez lehetővé teszi, hogy az adott energiaskálán észlelt fizikai jelenségeket egy korlátos energiatartományban érvényes, úgynevezett effektív elmélet keretében értelmezzük. Célkitűzésünk tehát nem az, hogy olyan elméletet keressünk, ami minden energiaskálán egyaránt érvényes. Helyette a fizikai jelenségeket effektív elméletek láncolatával értelmezzük. Az effektív elméletek egymással szomszédos (többnyire átfedő) energiatartományokban érvényesek. Nem tartalmaznak minden szabadsági fokot és kölcsönhatást, hanem csak azokat, amelyek az adott energiatartományban lényegesek. Az egyáltalán nem vagy a kevéssé lényeges szabadsági fokok és kölcsönhatások csak a lényeges kölcsönhatások csatolási állandóinak értékében jutnak kifejezésre. A csatolási állandók úgynevezett futó csatolási állandókká válnak, amelyeknek az értéke minden energiaskálán más és más. A renormálás lényege az, hogy tisztázzuk, hogyan lehet egy nagyenergiás folyamatok alapján definiált elméletből megkapni azt az effektív elméletet, amely az alacsonyenergiás folyamatokat írja le. Az effektív elmélet elnevezés arra utal, hogy a nem lényeges szabadsági fokokat nem vesszük explicit módon figyelembe, hanem csak összhatásukban.

Az elméleti mikroszkóp, a renormálás úgy működik, hogy az adott felbontásnál finomabb részletekért felelős szabadsági fokokat integrálisan vesszük figyelembe.

A lényeges és a lényegtelen szabadsági fokok szétválasztásának gondolata és a lényegteleneknek integrális módon való figyelembe vétele, széles körben alkalmazott módszer a fizikában.

1. Többcsatornás szórási folyamat során lehet, hogy csak a rugalmas szórásra vagyunk kíváncsiak és az összes többi csatornát együttesen akarjuk kezelni, mint rugalmatlan szórást. Ilyenkor bevált módszer a komplex optikai potenciált tartalmazó, nem hermitikus Hamilton-operátor használata. Ez felfogható úgy, mint alacsonyenergiás effektív Hamilton-operátor. A szórási folyamatban ütköző részecskék tömegközépponti energiájának növekedtével megnyílnak a rugalmatlan csatornák. Ezeknek a rugalmas szórásra gyakorolt hatását azonban csak közvetett módon, a részleteket elhanyagolva vesszük figyelembe. Az így nyert effektív kvantummechanika nem teljesíti az unitaritás feltételét.

2. A nem egyensúlyi statisztikus fizikában azokat a mennyiségeket tekintjük fontosnak, amelyeket megfigyelünk. Időbeli változásukra egzakt egyenletrendszert vezetünk le, amelyben a meg nem figyelt, irrelevánsnak nevezett szabadsági fokok hatása közvetve, integrálisan jelenik meg. Az irreleváns szabadsági fokok határozzák meg, hogy időben visszamenőleg mennyire „emlékezik” a rendszer a korábbi állapotaira, továbbá ezek kölcsönöznek a folyamatoknak véletlenszerű, sztochasztikus jelleget. A memóriaintegrál magfüggvényét paraméteres kifejezéssel, a maradékerőt véletlen zajjal szokás helyettesíteni. Paramétereik megválasztásával az irreleváns szabadsági fokok szerepét összhatásukban figyelembe vesszük, de explicit módon nem.

A renormálási csoport módszerének egyik gondolati eleme a fenti értelemben vett durva-szemcsésítés: szétválasztjuk az adott energiaskálán lényeges szabadsági fokokat a lényegtelenektől és az utóbbiak szerepét csak összhatásukban vesszük figyelembe. A másik gondolati elem az, hogy olyan rendszert vizsgálunk, amelynek végtelen sok lényeges szabadsági foka van. A szabadsági fokok közül nem választható ki csak véges sok lényeges. Ilyen a kritikus statisztikus fizikai rendszer és a kvantumtér is. Kritikus rendszerben a szabadsági fokok a különböző frekvenciájú termikus fluktuációk, a kvantumtérben pedig a kvantumfluktuációk. Kritikus rendszerben a termikus fluktuációk önhasonlóak, a korrelációs függvényük hatványfüggvény. Ez azt jelenti, hogy bármilyen frekvenciaintervallumban nézzük is meg a korrelációt, az ugyanúgy függ a frekvenciától. A kritikus jelenségek példáján bebizonyosodott, hogy a „közel kritikus” rendszerek viselkedését a kritikus rendszer létezése megszabja. A közel kritikus rendszert az jellemzi, hogy benne különböző mennyiségek hatványfüggvényszerű viselkedést mutatnak a hőmérséklet ill. a külső tér függvényében. A hatványkitevők között pedig olyan összefüggések állnak fenn, amelyek teljesen függetlenek a rendszer mikroszkopikus szerkezetétől. A kritikus jelenségek jól értelmezhetők a renormálási csoport módszerével. A kvantumtérelméletek esetében valami hasonló helyzetet fogunk látni. A renormálást egymást követő renormálási transzformációk révén hajtjuk végre. Minden transzformációs lépésben megszabadulunk végtelen sok szabadsági foktól, miközben továbbra is végtelen sok másikat megtartunk. Az ,,eldobott" szabadsági fokokat összhatásukban vesszük figyelembe, azaz abban, hogy módosítják a csatolási állandók értékét.

A jelen jegyzetben röviden átismételjük azt, amit kritikus rendszerekről tanultunk. Ezután megtanuljuk, hogy hogyan lehet a renormálási csoport módszerét a kvantumtérelméletre alkalmazni. Abból indulunk ki, hogy rendelkezésünkre áll egy nagyenergiás elmélet, mint a vizsgált rendszer mikroszkopikus leírása. Ezt olyan ultraibolya levágásnál ismerjük, amelyhez képest megfigyeléseink energiaskálája lényegesen kisebb. Azt kérdezzük, hogy az alacsonyenergiás megfigyeléseket milyen effektív elmélet magyarázza meg. Megtanuljuk, hogy a feltett kérdésre a renormálási csoport módszere segítségével konzisztens válasz adható. Végezetül a módszert a kvantummechanikára is alkalmazzuk, amelyet úgy fogunk tekinteni, mint $0+1$ dimenziós kvantumtérelméletet.

2. Fázisátalakulások (ismétlés)

Ebben a fejezetben átismételünk néhány fontos tapasztalati tényt és elméleti megfontolást a fázisátalakulásokkal kapcsolatban. Az elmondottak részletesen megtalálhatók az [1] jegyzetben.

2.1. A másodrendű fázisátalakulásokra vonatkozó tapasztalatok

A fázisátalakulások termodinamikai jellemzése során megtanultuk a fázisátalakulások elemi osztályozását aszerint, hogy hogyan viselkednek a fázisátalakulás során a termodinamikai potenciálok deriváltjai a rendszer állapothatározóinak függvényében. A termodinamikai potenciálok a változóiknak folytonos függvényei. Elsőrendű fázisátalakulásról beszélünk, ha a termodinamikai potenciálok első deriváltjai nem folytonosak. Ilyenkor a fázisátalakulás rendezetlen munkavégzéssel történő energialeadással ill. -felvétellel jár. Ezt az átadott energiát nevezzük látens hőnek,

$$Q = T_0(S_2 - S_1) = -T_0 \left(\left.\frac{\partial G}{\partial T}\right|_2 - \left.\frac{\partial G}{\partial T}\right|_1 \right), \tag{2.1}$$

ahol G a rendszer szabadentalpiája és T_0 az a hőmérséklet, amelyen fázisátalakulás történik az 1-es fázisból a 2-es fázisba. (A parciális deriváltakat állandó nyomáson kell képezni, és T_0 is függ a nyomástól.) Azokat a fázisátalakulásokat, amelyek során a termodinamikai potenciálok és azok első deriváltjai folytonosak, de a második deriváltjaiknak ugrása vagy szingularitása van, másodrendű fázisátalakulásoknak nevezzük. Az első deriváltak (az entrópia) folytonossága miatt a másodrendű fázisátalakulás nem jár látens hő keletkezésével (felvételével). A második deriváltaknak, mint a fajhőnek, a szuszceptibilitásnak, véges ugrása vagy szingularitása van a fázisátalakulási pontban.

Most először elmondom a tapasztalatokat. Ezután majd pontosabban is definiálom a használt fogalmakat és elmondom azokat a feltevéseket, amelyek alapján a tapasztalatok értelmezhetők.

A másodrendű fázisátalakulások általában rendezett és rendezetlen fázis között történnek. Mindig található egy úgynevezett rendparaméter, amelynek értéke a rendezetlen fázisban zérus, a rendezett fázisban pedig nem zérus. A rendparaméter értéke a fázisátalakulási ponttól távolodva folytonosan növekszik a rendezett fázisban és azt jellemzi, hogy mennyire távolodtunk el a fázisátalakulási görbétől. Adott egyéb állapothatározók esetén többnyire a rendezetlen fázis helyezkedik el a fázisátalakulási görbe magasabb hőmérsékleti oldalán, míg a rendezett fázis az alacsonyabb hőmérsékleti oldalon.

A tapasztalat szerint a rendszerek másodrendű fázisátalakulásnál a fázisátalakulási pont közelében kritikus viselkedést mutatnak. Ezen azt értjük, hogy a rendszert jellemző több mennyiség hatványfüggvény szerint viselkedik. Ezen hatványfüggvényekben szereplő kitevők a kritikus exponensek. A rendparaméter, a fajhő és a szuszceptibilitás ilyen hatványfüggvény-viselkedést mutatnak a $t = (T - T_0)/T_0$ redukált hőmérséklet és a külső tér függvényében, és kritikus exponenseik között meghatározott összefüggések, úgynevezett skálatörvények állnak fenn. A rendezetlen fázisban a fázisátalakulási pont közelében a rendparaméter korrelációs függvénye és a korrelációs hossz is hatványfüggvény-viselkedést mutat. A kritikus exponenseik olyan további skálatörvényeket elégítenek ki, amelyekben a rendszer d dimenziója is szerepel. Talán az a legfontosabb tapasztalat, hogy a skálatörvények minden rendszerre ugyanazok. Ezt nevezzük univerzalitásnak. A kritikus exponensek értéke azonban rendszerenként különböző lehet. A kritikus exponensek értékei szerint a rendszerek univerzalitási osztályokba sorolhatók. Az adott univerzalitási osztályba tartozó rendszerek csupán a dimenziójuk és a rendparaméter komponenseinek száma tekintetében egyeznek meg, egyébként teljesen különbözők lehetnek.

Első pillantásra nagyon meglepő az a tény, hogy teljesen különböző fizikai rendszerek a fázisátalakulási pontjuk közelében ugyanolyan kritikus viselkedést mutatnak. Ez azt is jelenti, hogy a kritikus viselkedés szempontjából érdektelen, hogy milyen a rendszer mikroszkopikus szerkezete. A jelen speciális előadások keretében az a célunk, hogy megértsük, miért van ez így.

Alább először röviden ismertetem azokat a fogalmakat, amelyek a kritikus viselkedés pontosabb megfogalmazásához szükségesek, majd pedig a Kadanoff-féle blokkosítási eljárás segítségével megmutatom, hogy a kritikus viselkedés magyarázata abban rejlik, hogy a fázisátalakulási pont közelében a fizikai rendszer skálainvariáns. A következő fejezetekben a renormálási csoport módszerét arra fogjuk használni, hogy azt vizsgáljuk, hogyan viselkedik a fizikai rendszer különböző skálákon. Ezen azt értem, hogy milyennek látjuk az adott rendszert olyan megfigyelések során, amelyek „durva szemcsések”, azaz nem érzékenyek a rendszer rövid hullámhosszú fluktuációira. A skálainvariancia azt jelenti, hogy a rendszer minden skálán ugyanolyannak látszik.

2.2. Fluktuációk és hosszútávú rend

2.2.1. A hosszútávú rend

A másodrendű fázisátalakulások általában a magas hőmérsékleti rendezetlen fázisból az alacsony hőmérsékleti rendezett fázisba történnek, és viszont. Mindkét homogén egyensúlyi fázist (állandó V térfogat és N részecskeszám esetén) a szabadenergia,

$F = E - TS$ minimuma jellemzi. A helyzet általában az, hogy magas hőmérsékleten a szabadenergiában a $-TS$ tag járuléka dominál. Ekkor az entrópia maximuma határozza meg a szabadenergia minimumát. A maximális entrópiájú makroállapotban tudunk a legkevesebbet a rendszer mikroállapotáról, ez a legrendezetlenebb állapot. Ugyanakkor az alacsony hőmérsékleti fázis szabadenergiájában az energiatag dominál és az energia minimuma határozza meg a rendszer egyensúlyát. Az entrópiatag lecsökkenése azt jelenti, hogy a rendszer mikroállapotát a makroszkopikus feltételek pontosabban meghatározzák, az alacsony hőmérsékletű fázis rendezett.

A rendezettség pontosabb definícióját a **korrelációs függvény** segítségével adhatjuk meg. Legyen $X(\vec{r})$ a rendszert jellemző lokális mennyiség. Ennek korrelációs függvénye:

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \langle (X(\vec{r}_1) - \langle X \rangle) (X(\vec{r}_2) - \langle X \rangle) \rangle \,. \tag{2.2}$$

Homogén rendszerben a korrelációs függvény csak az $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ relatív helyzetvektortól függ, homogén és izotróp rendszerben pedig csak annak r nagyságától.

Akkor mondjuk, hogy a fizikai rendszerben **hosszútávú rend** van, ha a korrelációs függvény az $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \to \infty$ határesetben nem tűnik el, hanem véges határértékhez tart. Ez ténylegesen azt jelenti, hogy a rendszerben egymáshoz képest tetszőlegesen távoli helyek lokális viselkedése között korreláció van.

Annak a tartománynak a ξ karakterisztikus méretét nevezzük **korrelációs hossz**nak, amelyen belül a $G(r)$ korrelációs függvény lényegesen különbözik nullától. A hosszútávú rend jelenléte azt jelenti, hogy a korrelációs hossz divergál, $\xi \to \infty$.

2.2.2. Termikus fluktuációk

Tegyük fel most azt a kérdést, hogy kialakulhat-e mindig hosszútávú rend. A válasz az, hogy nem. Az alacsony frekvenciás fluktuációk alacsony dimenzióban megakadályozzák a hosszútávú rend kialakulását. Ezt a következőkből látjuk:

1. Ha feltesszük, hogy a termodinamikai potenciál sűrűsége a fluktuációk lokális függvénye, akkor

    - a fluktuációk normális eloszlásúak,
    - és termodinamikai határesetben a fluktuációk kvadratikus kifejezéseinek várható értéke a $d = 1$ és 2 dimenziós rendszerben minden határon túl nő a hosszúhullámú fluktuációknak tulajdoníthatóan, ha a rendszer hőmérséklete nem zérus, $T \neq 0$.

    Itt most egy érvelést ismertetünk, amely abból indul ki, hogy a fluktuációk kicsinyek és lokalizáltak. Az érvelés azonban elvezet oda, hogy alacsony dimenzióban a fluktuációk minden határon túl nőnek. Ekkor azonban maga az érvelés, amelyet használtunk, érvényét veszti. Érvelésünk tehát nem bizonyító erejű, csupán annak jelzésére jó, hogy alacsony dimenzióban a fluktuációk jelentősége megnő, és tárgyalásukhoz körültekintően kell eljárjunk. A renormálási csoport módszere, amellyel később foglalkozunk, arra a célra lett kifejlesztve, hogy korrekt módon lehessen tárgyalni olyan rendszereket, amelyekben a fluktuációk nagyok, minden skálán jelen vannak, és a korrelációs hossz is végtelenhez tart.

Jelölje $y_\alpha(\vec{r}) = X_\alpha(\vec{r}) - \langle X_\alpha \rangle$ a lokális $X_\alpha(\vec{r})$ mennyiség fluktuációit. Az α index azt jelöli, hogy a szóbanforgó mennyiség többkomponensű is lehet. Tételezzük fel a **lokalitás**t, azaz hogy a termodinamikai potenciál $\phi(\vec{r})$ sűrűsége az $\vec{r}$ helyen csak a fluktuációknak ugyanezen a helyen felvett $y_\alpha(\vec{r})$ értékeitől függ. Ekkor a termodinamikai potenciál sűrűségét tetszőleges $\vec{r}$ helyen Taylor-sorba fejthetjük a fluktuációk szerint az $y_\alpha = 0$ értékek körül, ami megfelel az egyensúlyi, azaz a fluktuációk nélküli állapotnak. A termodinamikai potenciál sűrűségének $\partial\phi/\partial y_\alpha$ első deriváljai az egyensúlyi állapotban (az $y_\alpha = 0$ értékeknél) eltűnnek. Ezért a termodinamikai potenciálnak a fluktuációk miatt bekövetkező megváltozása az egyensúlyi értékhez képest:

$$\Delta\phi(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} y_\alpha(\vec{r}) y_\beta(\vec{r}) \left.\frac{\partial^2\phi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}\right|_{\vec{r},y=0} + \mathcal{O}(y^3). \tag{2.3}$$

Ez a fluktuációk kvadratikus kifejezése. Annak a konfigurációnak a relatív súlyát, amely az egyensúlyitól az $y_\alpha(\vec{r})$ fluktuációkban különbözik,

$$w \sim \exp\{-\Delta\Phi/k_B T\} \tag{2.4}$$

adja meg, ahol $\Phi = \int dV \phi(\vec{r})$ a termodinamikai potenciál. Az $y_\alpha(\vec{r})$ fluktuációk tehát normális eloszlásúak.

Annak érdekében, hogy külön-külön vizsgálhassuk a különböző hullámhosszúságú fluktuációk szerepét, térjünk át a fluktuációk Fourier-amplitúdóira, amelyeket az alábbi sor definiál:

$$y_\alpha(\vec{r}) \;=\; \sum_{\vec{k}} y_{\vec{k}\alpha} e^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{r}}. \tag{2.5}$$

A továbbiakban azzal a feltevéssel élünk, hogy minden fluktuáció térben erősen lokalizált valamely $\vec{r}_0$ hely közelében, ezért ezen hely körüli sorfejtésének első tagjánál jó közelítéssel megállhatunk:

$$y_\alpha(\vec{r}) \approx y_\alpha(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0)\, \nabla_{\vec{r}} y_\alpha|_{\vec{r}_0} + \mathcal{O}\left((r - r_0)^2\right). \tag{2.6}$$

Mindezeket beírva a termodinamikai potenciál megváltozásának (2.3) kifejezésébe, az alábbi eredményt kapjuk (ld. [1]):

$$\Delta\Phi = \frac{1}{V}\int dV\, (\phi(\vec{r}) - \langle\phi\rangle) = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} y_{\vec{k}\alpha} y^*_{\vec{k}\beta} \varphi_{\alpha\beta}(\vec{k}), \tag{2.7}$$

ahol

$$\varphi_{\alpha\beta}(\vec{k}) = k^2 A^{-1}_{\alpha\beta}(\vec{n}) + \mathcal{O}(k^3), \tag{2.8}$$

és $A_{\alpha\beta}(\vec{n})$ csak a $\vec{k}$ vektor irányától függ, de a nagyságától nem, $\vec{n} = \vec{k}/k$.

A fluktuációk kvadratikus alakja várható értékének kiszámítása egyszerű Gauss-integrál kiszámítását jelenti:

$$\begin{aligned} \langle y_{\vec{k}\alpha} y^*_{\vec{k}\,'\beta} \rangle &= \frac{\int \left(\prod dy_{\vec{K}\gamma} dy^*_{\vec{K}\gamma} \right) y_{\vec{k}\alpha} y^*_{\vec{k}\,'\beta} \exp\{-\Delta\Phi/k_B T\}}{\int \left(\prod dy_{\vec{K}\gamma} dy^*_{\vec{K}\gamma} \right) \exp\{-\Delta\Phi/k_B T\}} \\ &= \delta_{\vec{k}\vec{k}\,'} k_B T/\varphi_{\alpha\beta}(\vec{k}) = \delta_{\vec{k}\vec{k}\,'} k_B T A_{\alpha\beta}(\vec{n})/k^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ennek segítségével termodinamikai határesetben azt kapjuk, hogy

$$\langle y_\alpha(\vec{r}) y_\beta(\vec{r}) \rangle = k_B T \int \frac{d\Omega_n}{(2\pi)^d} A_{\alpha\beta}(\vec{n}) \int_\delta^{k_{max}} \frac{dk\ k^{d-1}}{k^2}, \tag{2.10}$$

ahol $\delta \to 0^+$. A fluktuációk hullámvektorának nagysága szerinti integrál viselkedése lényegesen különböző a d dimenziótól függően:

$$\int_\delta^{k_{max}} \frac{dk\ k^{d-1}}{k^2} \quad \sim \quad \begin{cases} 1/\delta, & \text{ha} \quad d = 1 \\ -\ln(\delta/k_{max}), & \text{ha} \quad d = 2 \\ k_{max}^{d-2}, & \text{ha} \quad d > 2 \end{cases} \tag{2.11}$$

A fluktuációk kvadratikus kifejezéseinek várható értéke tehát $d = 1$ és $d = 2$ dimenzióban IR divergens, ha a hőmérséklet nem zérus, $T \neq 0$.

2. Az IR fluktuációk megakadályozzák alacsony dimenzió esetén a hosszútávú rend kialakulását.

   Ennek kézenfekvővé tételéhez képzeljük el, hogy a rendszer szabadsági fokai az $\vec{r}_i$ rácspontokban helyezkednek el. Vizsgáljuk az $X(\vec{r}_i)$ lokális mennyiség $G(r)$ korrelációs függvényét. Az $X(\vec{r})$ mennyiség fluktuációja abból adódik, hogy az egyes rácspontok a termikus mozgás során véletlenszerűen elmozdulnak. Ha ebből a képből kiindulva kiszámoljuk a korrelációs függvényt, akkor arra a következő alakot kapjuk:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= \sum_{\vec{p} \neq 0} |X_{\vec{p}}|^2 e^{i\vec{p}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\,)} \left\langle e^{i\vec{p}(\vec{y}(\vec{r}_1) - \vec{y}(\vec{r}_2))} \right\rangle \\ &= \sum_{\vec{p} \neq 0} |X_{\vec{p}}|^2 \exp\left\{ i\vec{p}\vec{r} - \frac{1}{2} p_\alpha p_\beta \chi_{\alpha\beta}(\vec{r}) \right\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

   ahol

$$\chi_{\alpha\beta}(\vec{r}) = k_B T \int_0^{k_{max}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{A_{\alpha\beta}(\vec{n})}{k^2} 2\left(1 - \cos(\vec{k}\vec{r}\,)\right). \tag{2.13}$$

Itt felhasználtuk, hogy amennyiben y_i normális eloszlású valószínűségi változók $w \sim \exp\left\{-\frac{1}{2}\beta_{ij}y_iy_j\right\}$ valószínűségi sűrűséggel, akkor

$$\langle e^{\alpha_i y_i}\rangle = \exp\left\{\frac{1}{2}\alpha_i\alpha_j\langle y_iy_j\rangle\right\}. \tag{2.14}$$

A $\chi_{\alpha\beta}$ együttható a

$$\begin{aligned} & \langle (y_\alpha(\vec{r}_1) - y_\alpha(\vec{r}_2))\,(y_\beta(\vec{r}_1) - y_\beta(\vec{r}_2))\rangle \\ = \; & 2\langle y_\alpha(\vec{r}_1)y_\beta(\vec{r}_1) - y_\alpha(\vec{r}_1)y_\beta(\vec{r}_2)\rangle. \end{aligned} \tag{2.15}$$

várható értékkel arányos. Az (2.13) kifejezésben a kerek zárójelben szereplő első tag (1) az azonos helyen, a második tag (a koszinuszos) a különböző helyeken vett kitérések szorzatának várható értékétől származik.

A korrelációs függvény fenti alakjából látszik, hogy helyfüggését a fluktuációk kvadratikus kifejezéseinek várható értékei döntően befolyásolják. Tekintve, hogy $\chi_{\alpha\beta}$ az azonos és a különböző helyen vett fluktuációk szorzatának különbsége, ezért tetszőleges dimenzióban véges értékű, az integrál $k \to \delta$ határán δ^d szerint viselkedik. Ugyanakkor az integrál becsült értéke iránytól független $A_{\alpha\beta}$-t (azaz izotróp rendszert) feltételezve különböző dimenziókban különböző helyfüggést eredményez:

$$\chi_{\alpha\beta}(r) \sim \begin{cases} \frac{1}{2}k_BTA_{\alpha\beta}r, & \text{ha} \quad d=1 \\ \frac{1}{\pi}k_BTA_{\alpha\beta}\ln(rk_{max}) & \text{ha} \quad d=2 \\ h(r) & \text{ha} \quad d\geq 3 \end{cases} \tag{2.16}$$

ahol $h(r)$ az r távolságnak monoton csökkenő függvénye, a

$$h(r) \to \frac{1}{d-2}k_BTk_{max}^{d-2}A_{\alpha\beta} \tag{2.17}$$

határértékkel. Látjuk tehát, hogy az IR fluktuációk nagy ($r \to \infty$) távolságon a $\chi_{\alpha\beta}(r)$ együtthatókban szingularitást okoznak, amely $d = 1$ dimenzióban lineáris, $d = 2$ dimenzióban logaritmikus.

Ennek a szingularitásnak a következtében a korrelációs függvényt nagy távolságon a legkisebb, el nem tűnő $|\vec{p}| = p_0 \sim \pi/L$ értékhez tartozó módusok dominálják. Erre való tekintettel a korrelációs függvény aszimptotikus alakja $r \to \infty$ esetén:

$$G(r) \sim \begin{cases} \exp\left(-rT\cdot\text{const.}\right), & \text{ha} \quad d=1 \\ r^{-\text{const.}T}\cos(p_0r), & \text{ha} \quad d=2 \end{cases} \tag{2.18}$$

Ha tehát a rendszer hőmérséklete nem zérus, $T \neq 0$, akkor $d = 1$ dimenzióban a korrelációs függvény exponenciálisan cseng le nagy távolságon, $d = 2$ dimenzióban pedig hatványfüggvény szerint. A magasabb $d \geq 3$ dimenziókban nagy távolságon valamennyi Fourier-módus azonos súllyal (csak különböző fázissal) járul hozzá a korrelációs függvény aszimptotikus viselkedéséhez. A fenti általános érvelés alapján ilyenkor annyit lehet csak mondani, hogy az IR fluktuációk nem zárják ki a hosszútávú rend lehetőségét, azaz azt, hogy a korrelációs függvény nullától különböző véges határértékhez tartson $r \to \infty$ esetén.

A fenti általános megfontolás összhangban van több egzakt eredménnyel, amelyek konkrét modellekre vonatkoznak. Ising 1924-ben megmutatta, hogy az Ising-modellben $d = 1$ dimenzióban nincsen hosszútávú renddel jellemzett fázis [2]. Mermin és Wagner a Heisenberg-modellben mutatták meg, hogy $d = 1$ és $d = 2$ dimenzióban nem jöhet létre hosszútávú rend [3]. Hasonló eredményt kapott Mermin dobozba zárt olyan klasszikus részecskékből álló gáz esetén, amelyek Lennard-Jones típusú potenciállal hatnak kölcsön [5]. Hohenbergtől származik annak a bizonyítása, hogy sem Fermi-, sem Bose-rendszerben nem lehetséges $d = 1$ és $d = 2$ dimenzióban, nem zérus hőmérsékleten hosszútávú rend, azaz olyan fázis, amelyben a rendszer ψ hullámfüggvényéből képezett $\langle\psi\rangle$ vagy $\langle\psi\psi\rangle$ várható érték nullától különböző [4]. Mindezek elég általánosan alátámasztják, hogy létezik az úgynevezett **alsó kritikus dimenzió**, d_{ac}. Ha a rendszer dimenziója egyenlő az alsó kritikus dimenzióval vagy annál kisebb, akkor a rendszerben nem jöhet létre hosszútávú rend. Az Ising-modell esetén $d_{ac} = 1$, a Heisenberg-modell esetén, Fermi- és Bose-rendszerek esetén $d_{ac} = 2$. Látjuk tehát, hogy a rendszer dimenziójának nagyon lényeges szerepe van abban a tekintetben, hogy kialakulhat-e a rendszerben hosszútávú rend.

A $d + 1$ dimenziós téridőben megfogalmazott kvantumtérelméleti modell egy $d + 1$ dimenziós térben elhelyezkedő statisztikus fizikai rendszerrel analóg. Ezért a kvantumtérelméleti modellben a dimenziótól lényegesen függ, hogy milyen lehetséges fázisai vannak az adott modellel leírt rendszernek, vagyis hogy milyen vákuumállapotok lehetségesek.

2.3. Fázisátalakulások és szimmetriasérülés

2.3.1. Szimmetriasérülés

A másodrendű fázisátalakulások a rendszer bizonyos szimmetriáinak megsérülésével járnak együtt. Ez a **szimmetriasérülés** a mikroszkopikusan zajló dinamikai folyamatok következménye, nem pedig a szimmetria Wigner-féle explicit sérülése. A rendszer a mikroszkopikus szinten megőrzi ugyanis a szimmetriáját, azaz a rendszert mikroszkopikusan mind a rendezetlen, mind a rendezett fázisban ugyanaz a Hamilton-operátor írja le. A rendszer állapotainak szimmetriája azonban megváltozik a fázisátalakulás során. Induljunk ki abból, hogy a rendszer állapotai a rendezetlen fázisban $\mathcal{G}_0$ szimmetriával rendelkeznek (folytonos vagy diszkrét szimmetriacsoport). Amikor másodrendű fázisátalakulás történik a rendezett fázisba, akkor az állapotok szimmetriája lesérül a $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_0$ alcsoportra. Ez a szimmetriasérülés a rendszerben zajló dinamikai folyamatok következménye, **spontán szimmetriasérülés**. A rendezetlen fázis a magasabb szimmetriájú, míg a rendezett fázis az alacsonyabb szimmetriájú. A szimmetriasérülés azt jelenti, hogy ha a rendezett fázishoz tartozó valamely termodinamikai egyensúlyi állapoton végrehajtjuk a sérülő szimmetriának megfelelő transzformációt, akkor fizikailag megkülönböztethető másik állapotot kapunk. Azt azonban fel fogjuk tételezni, hogy az így nyert állapotban a termodinamikai potenciál értéke ugyanakkora, mint az eredeti állapotban. A tapasztalat valóban azt mutatja, hogy ha pl. ferromágneses anyagdarabban spontán mágnesezés alakul ki, akkor annak energiája nem függ attól, hogy az eredő mágneses momentum iránya milyen. Ugyanakkor az eredő mágneses momentum elforgatásával kapott állapotok fizikailag inekvivalensek. A szimmetriasértés következtében fizikailag inekvivalens állapotok energetikailag **elfajultak**.

2.3.2. Rendparaméter

A rendszerben létezik **rendparaméter**, Δ, amely arra jellemző, hogy melyik fázisban található a rendszer, ill. hogy a rendezett fázisban mennyire van ,,távol" a fázisátalakulási ponttól. A rendezetlen fázisban a rendparaméter értéke zérus. A rendezett fázisban a rendparaméter értéke a fázisátalakulási ponttól távolodva folytonosan nő.

Ha az 2.3.1. fejezetben vázolt szimmetriasérülésből és a rendezett fázis fizikailag inekvivalens állapotainak degenerációjából indulunk ki, akkor általános megfontolások révén beláthatjuk a rendparaméter létezését. Egyúttal megkonstruálhatjuk az **általánosított termodinamikai potenciál**t, amely egyidejűleg leírja a rendszer viselkedését a fázisátalakulási görbe mindkét oldalán.

1. Tekintsük a termodinamikai potenciált mint a p nyomás, a T hőmérséklet függvényét és a rendszer $\rho(\vec{r})$ sűrűségének a funkcionálját. Fejtsük ki a sűrűséget a rendezetlen fázis szimmetriáját megadó $\mathcal{G}_0$ csoport $[n]$ irreducibilis ábrázolásai szerint transzformálódó $f_i^{[n]}(\vec{r})$ függvények teljes rendszere szerint. Az egységábrázolásnak megfelelő $\mathcal{G}_0$-skalár $\rho_0(\vec{r})$ tagot válasszuk külön:
$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}) &= \rho_0(\vec{r}) + \rho'(\vec{r}) \\ &= \rho_0(\vec{r}) + {\sum_{[n]}}' \sum_i \eta_i^{[n]} f_i^{[n]}(\vec{r}).\end{aligned} \tag{2.19}$$
A jobboldali kifejezés $\rho_0(\vec{r})$ tagja $\mathcal{G}_0$-skalár, míg a $\rho'(\vec{r})$ tag nem az. A ${\sum_{[n]}}'$ összeg nem tartalmazza a skalár- azaz az egység-ábrázolást, erre utal az összegzés jele mellé írt vessző.

2. Bevezetjük azt az általánosított termodinamikai potenciált, ami makroszkopikusan írja le a rendszer $\eta_i^{[n]}$ együtthatókkal jellemzett sűrűségű állapotát. A termodinamikai potenciál a p nyomás, a T hőmérséklet és az $\eta_i^{[n]}$ együtthatók függvénye, és leírja a rendszer mindkét fázisát a fázisátalakulási pont közelében.

   A $\mathcal{G}_0$ szimmetriájú rendezetlen fázisban az egyensúlyi állapotot az jellemzi, hogy a sűrűség $\mathcal{G}_0$-skalár, azaz $\rho(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r})$ és a skalárábrázolástól különböző bázisfüggvények együtthatói mind zérusok, $\eta_i^{[n]} = 0$. A rendezetlen fázisban termodinamikai egyensúlyban a termodinamikai potenciál $\phi = \phi_0(p, T)$.

Ugyanakkor a rendezett fázisban az $\eta_i^{[n]}$ együtthatók a termodinamikai egyensúlyban sem tűnnek el. Nyilvánvalóan ez jelenti a szimmetria sérülését, hogy $\rho' \neq 0$, azaz hogy a sűrűség nem $\mathcal{G}_0$-skalár a rendezett fázisban. Ha a termodinamikai potenciált a fázisátalakulási pont környezetében az $\eta_i^{[n]}$ együtthatók szerint sorba fejtjük, akkor a

$$\phi = \phi_0(p,T) + \phi'(p,T,\eta_i^{[n]}) \tag{2.20}$$

alakhoz jutunk, ahol $\phi'(p,T,\eta_i^{[n]}=0)=0$.

3. Ahhoz, hogy a rendezett fázishoz tartozó, fizikailag inekvivalens állapotok energia szerinti degenerációját biztosítsuk, fel kell tegyük, hogy a termodinamikai potenciál mindkét fázisban $\mathcal{G}_0$-skalár. Ugyanakkor az $\eta_i^{[n]}$ együtthatók értéke függ attól, hogy hogyan választunk bázist az egyes irreducibilis ábrázolások alterében. A degeneráció csak úgy állhat fenn, ha $\phi'(p,T,\eta_i^{[n]})$ ettől a bázisválasztástól nem függ. Ez azt jelenti, hogy a termodinamikai potenciál az adott $[n]$ irreducibilis ábrázoláshoz tartozó $\eta_i^{[n]}$ együtthatóktól csak azok olyan kifejezései révén függhet, amelyek $\mathcal{G}_0$-invariánsak, azaz $\mathcal{G}_0$-skalárok. (Adott irreducibilis ábrázolás alterében végrehajtott tetszőleges bázistranszformáció egyúttal a megfelelő $\eta_i^{[n]}$ együtthatók transzformációját is jelenti azon szabály szerint, hogy a sűrűség változatlan marad.)

   Mivel az $[n]$ irreducibilis ábrázolások között nem szerepel a skalár-ábrázolás, az $\eta_i^{[n]}$ együtthatókból nem szerkeszthető lineáris invariáns. Ezért a sorfejtés az $\sum_i \left(\eta_i^{[n]}\right)^2$ kvadratikus invariánsokkal kezdődik:

$$\phi' = \sum_{[n]}{}' A_n(p,T) \sum_i \left(\eta_i^{[n]}\right)^2 + \mathcal{O}(\eta^3). \tag{2.21}$$

4. Ahhoz, hogy a rendezetlen fázisban $\eta_i^{[n]} = 0$ jelentse az egyensúlynak megfelelő minimumot, szükséges, hogy minden $A_n(p,T) > 0$ legyen a rendezetlen fázisban.

   Ahhoz, hogy a rendezett fázisban az egyensúlyi állapotot ne azonosan eltűnő $\eta_i^{[n]}$ értékek jelentsék, léteznie kell legalább egy olyan n^* irreducibilis ábrázolásnak, amelyhez tartozó $A_{n^*}(p,T)$ együttható a rendezetlen fázisból jőve zérussá válik a fázisátalakulási pontban, majd a rendezett fázisban negatív értékeket vesz fel. Tegyük fel, hogy pontosan egy ilyen irreducibilis ábrázolás van. Rögzített p nyomást feltételezve, ekkor

$$A_{n^*}(p,T>T_c) > 0, \qquad A_{n^*}(p,T_c) = 0, \qquad A_{n^*}(p,T<T_c) < 0. \tag{2.22}$$

   A megfelelő többkomponensű $\eta_i^{[n^*]}$ vektort nevezzük **rendparaméter-vektor**nak. A belőle képezett invariáns definiálja a szűkebb értelemben vett Δ **rendparaméter**t:

$$\Delta^2 = \sum_i \left(\eta_i^{[n^*]}\right)^2. \tag{2.23}$$

   A termodinamikai potenciálnak a rendezetlen fázisban $\Delta = 0$ értéknél, a rendezett fázisban $\Delta \neq 0$ értékénél van szélsőértéke.

Itt érdemes megemlíteni, hogy abban az esetben, amikor a fázisátalakulás a (p,T)-diagramon fázisátalakulási görbe mentén megy végbe, egy és csak egy olyan n^* iorreducibilis ábrázolás van, amelyhez tartozó együttható a fázisátalakulási pontban zérussá válik, $A_{n^*}(p,T_c)=0$. Ha ugyanis mégegy ilyen lenne, akkor a fázisátalakulási hőmérsékletre és a nyomásra mégegy feltételi egyenlet adódna, ami azt jelentené, hogy a (p,T) diagramon a fázisátalakulás egyetlen izolált pontban megy végbe, ez pedig másodrendű fázisátalakulásoknál szimmetriaokoknál fogva kizárt. A másodrendű fázisátalakulásokhoz tehát egyetlen, fenti tulajdonságú n^* irreducibilis ábrázolás és a vele kapcsolatos rendparaméter tartozik.

5. A rendparaméterben negyedfokú tagok pozitív együtthatókkal való figyelembevétele biztosítja, hogy a szélsőérték valóban minimum legyen. Ugyanakkor ahhoz, hogy a minimum stabil egyensúlyi állapotnak feleljen meg, fel kell tennünk, hogy a köbös invariáns nem lép fel a termodinamikai potenciálban.

   A negyedfokú invariánssal kapcsolatban fontos megemlíteni, hogy az általában függ a rendparaméter-vektortól és nem csak annak a Δ nagyságától. Ezért tulajdonképpen a negyedfokú tag ad számot arról, hogy mely szimmetriák sérülnek a rendezett fázisban, azaz hogy mi lesz a rendezett fázis $\mathcal{G}$ szimmetriája.

   Vezessük be az $\eta_i^{[n^*]}=\Delta\gamma_i^{[n^*]}$ jelölést. A termodinamikai potenciál alakja a fentiek értelmében:

$$\phi=\phi_0+A(p,T)\Delta^2+B(p,T)\Delta^4\varphi^{(4)}(\gamma_i), \tag{2.24}$$

   ahol $\varphi^{(4)}(\gamma_i)$ jelöli az egyre normált γ_i-ből képezett negyedfokú invariánst. (Az egyszerűség kedvéért úgy veszem, hogy csak egyetlen ilyen invariáns létezik.) A negyedfokú tag együtthatója mindkét fázisban pozitív, $B(p,T)>0$. Végül annak megfelelően, hogy a γ_i rendparaméter-vektor mely γ_i^* állásához tartozik a termodinamikai potenciál minimuma, eldől, hogy a rendezett fázisban, termodinamikai egyensúlyban hogyan függ a sűrűség a helytől,

$$\rho(\vec{r})=\rho_0(\vec{r})+\Delta\sum_i\gamma_i^* f_i^{[n^*]}(\vec{r}). \tag{2.25}$$

   Ezáltal az is eldől, hogy $\rho(\vec{r})$ milyen transzformációk hatására marad invariáns és melyek hatására nem, azaz hogy mely szimmetriák sérülnek spontán és mi a rendezett fázis $\mathcal{G}$ szimmetriája.

6. Fel szokás tenni, hogy $A(p,T)$ a T hőmérsékletnek analitikus függvénye a T_0 fázisátalakulási hőmérsékleten is. Miután ezen a hőmérsékleten $A(p,T)$ előjelet vált, kézenfekvő az

$$A(p,T)\approx a(p)(T-T_0) \tag{2.26}$$

   közelítés a fázisátalakulási hőmérséklet közelében (adott p nyomáson).

A termodinamikai potenciál itt vázolt konstrukciója, amely a fázisátalakulások Landau-féle elméletének alapját képezi, tulajdonképpen a szimmetriasértésen alapuló fél-fenomenológikus eljárás. A termodinamikai potenciált nem a rendszer mikroszkopikus Hamilton-operátorából, azaz nem első elvek alapján vezetjük le, hanem úgy választjuk meg a benne szereplő tagokat, hogy a termodinamikai potenciál a rendezetlen és a rendezett fázist, mint termodinamikai egyensúlyi fázist adja vissza rendre az átalakulási hőmérsékletnél magasabb ill. alacsonyabb hőmérsékleten.

A Landau-elmélet alapján, vagyis a termodinamikai potenciál fenti alakjából kiindulva be lehet bizonyítani, hogy a rendszer a fázisátalakulási pont közelében kritikus viselkedést mutat. Ezért szokás az adott nyomáson jól definiált átalakulási hőmérsékletet kritikus hőmérsékletnek nevezni és T_c-vel jelölni. A kritikus exponensek meghatározásához a termodinamikai potenciált még további tagokkal kell kiegészíteni:

1. Induljunk ki a mágnesezés, mint rendparaméter példájából. Ha a külső mágneses tér az infinitezimális dh értékkel változik meg, akkor a mágnesezés és a mágneses tér kölcsönhatásából származó energia megváltozása $-\Delta\ dh$.

   A kérdést a termodinamika oldaláról közelítve meg, azt mondhatjuk, hogy a **külső tér** a rendparaméterhez tartozó intenzív mennyiség:

   $$\Delta(T,h) = -\left.\frac{\partial\phi}{\partial h}\right|_{p,T}. \tag{2.27}$$

   A külső tér jelenlétének a szimmetriák szempontjából is fontos szerepe van. A külső tér jelenléte a $\mathcal{G}_0$ szimmetriát explicit módon sérti. Ezért külső tér jelenlétében nincsen kritikus viselkedés. Azt csak az eltűnő külső tér, $h \to 0$ határesetében kapjuk vissza.

2. Ahhoz, hogy beszélhessünk a rendparaméter korrelációs függvényéről és vizsgálhassuk annak viselkedését az átalakulási hőmérséklet közelében, fel kell tételezzük, hogy **a rendparaméter lokális mennyiség** valamilyen $\Delta(\vec{r})$ helyfüggéssel. A helyfüggés abból adódik, hogy a rendparaméter mikroszkopikus eredetét tekintve úgy áll elő, hogy nagyszámú szabadsági fokot átlagolunk ki a rendszer makroszkopikus, de a rendszer L méretéhez képest kicsiny ℓ méretű darabjára, $\ell \ll L$. Pl. a ferromágneses fázisátalakulás rendparamétere a mágnesezés, ami az egyedi atomok mágneses momentumainak átlagértékeként áll elő.

   A Landau-elméletben hallgatólagosan azt tételezzük fel, hogy **a rendparamétert a korrelációs hossznál nagyobb méretű anyagdarabra történő átlagolással nyerjük**, $\xi \ll \ell \ll L$. Ez abban jut kifejezésre, hogy a termodinamikai potenciálban a rendparaméter deriváltjai közül csak az első deriváltakat vesszük figyelembe, azaz $+g\left(\partial\Delta/\partial\vec{r}\right)^2$ tagot adunk hozzá a termodinamikai potenciál sűrűségéhez. Ezt úgy tekinthetjük, mint **a rendparaméter gradiense szerinti sorfejtés** első tagját. A g csatolási állandó általában pozitív, $g > 0$. Ez azt jelenti, hogy a rendparaméter térbeli változása növeli a rendszer energiáját.

A kritikus exponensekre a Landau-elmélet által szolgáltatott értékek (levezetésüket ld. [1]-ben) nem egyeznek a tapasztalattal. Ez nem meglepő, hiszen a fluktuációkat a Landau-elmélet kiátlagolja, nem veszi figyelembe a rendparaméter magasabb deriváltjait. Ez a közelítés nyilvánvalóan elromlik, ha a hőmérséklet nagyon közel van a fázisátalakulási hőmérséklethez és a korrelációs hossz minden határon túl nő.

2.4. A kritikus viselkedés

2.4.1. A kritikus viselkedésre vonatkozó tapasztalatok

Miután bevezettük a legfontosabb fogalmakat, megfogalmazhatjuk konkrétabban, hogy mely mennyiségek mutatnak hatványfüggvény- azaz **kritikus viselkedést** a $t = (T - T_c)/T_c$ redukált hőmérséklet és a h külső tér függvényében a $t = 0$ és $h = 0$ értékek közelében. A konkrétság kedvéért alább termodinamikai potenciálként a szabadentalpiát használom. A **kritikus exponensek** definíciója a következő:

1. A rendparaméter hőmérsékletfüggésének kritikus exponense, β, a rendezett fázisban ($t < 0$), eltűnő külső tér ($h \to 0$) esetén van értelmezve:

$$\Delta = -\left.\frac{\partial G}{\partial h}\right|_{p,T} \sim (-t)^{\beta}, \qquad h \to 0. \tag{2.28}$$

2. A rendparaméter külső tértől való függésének kritikus exponense, δ a fázisátalakulási pontban van értelmezve:

$$\Delta(t = 0, h) \sim h^{1/\delta}. \tag{2.29}$$

3. A szuszceptibilitás hőmérsékletfüggésének kritikus exponense, γ:

$$\chi = \left.\frac{\partial \Delta}{\partial h}\right|_{p,T} = -\left.\frac{\partial^2 G}{\partial h^2}\right|_{p,T} \sim |t|^{-\gamma}, \qquad h \to 0. \tag{2.30}$$

4. A fajhő hőmérsékletfüggésének kritikus exponense, α:

$$C = T\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{p,h} = -T\left.\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right|_{p,h} \sim |t|^{-\alpha}. \tag{2.31}$$

A rendezetlen fázisban a korrelációs függvény exponenciálisan függ az r távolságtól. A ξ korrelációs hossz az a távolság, amelyen a korreláció e-ad részére csökken. Ennek hátterében a következő szemléletes kép áll, amelyet a kísérleti tapasztalat (a mágneses domének növekedésének megfigyelése) és a számítógépes szimulációk is megerősítenek: A homogén rendezett fázis fokozatosan alakul ki. Amikor még távol vagyunk a fázisátalakulási hőmérséklettől, akkor a rendezetlen fázisban kb. azonos valószínűséggel vannak, kb. azonos méretű rendezetlen és rendezett tartományok, szigetek. Nevezzük őket rendre szürkének ill. feketének. A fázisátalakulási hőmérséklet felé közeledve nőni kezd a korrelációs hossz. Ez azt jelenti, hogy átlagosan egyre nagyobb méretű fekete tartományokat találunk, amelyek méreteloszlása ugyancsak exponenciális, és a legnagyobb ilyen fekete sziget méretét azonosíthatjuk a ξ korrelációs hosszal. A fekete tartományok a rendszer egyre nagyobb térfogatát fedik le, ahogy közelebb megyünk a fázisátalakulási ponthoz. Végül azt elérve egyetlen, a rendszer teljes térfogatát kitöltő fekete szigetet kapunk: a homogén rendezett fázist. A korrelációs függvény exponenciális távolságfüggése tehát leírja a rendszert, amikor benne még csak **rövidtávú rendezettség** van jelen.

A tapasztalat szerint a kritikus exponensek között egyenlőségek állnak fenn, ezek a **skálatörvények**:

$$\gamma = \beta(\delta - 1), \tag{2.32}$$

$$\alpha + \beta(\delta + 1) = 2, \tag{2.33}$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2. \tag{2.34}$$

Ennek megfelelően a 4 darab kritikus exponens közül csak 2 független.

A Landau-elmélet a kritikus exponensek értékére nem ad a tapasztalattal egyező eredményt, de a Landau-elméletből kapott kritikus exponensek ($\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$, $\delta = 3$) kielégítik a skálatörvényeket.

További kritikus exponenseket szokás definiálni a rendparaméter korrelációs függvényének segítségével (zérus külső tér esetén).

1. A kritikus viselkedés további jellemzője, hogy a korrelációs függvény nagy távolságon hatványfüggvény szerint csökken a kritikus hőmérsékleten. A megfelelő η kritikus exponenst ez definiálja:

$$G(r, t = 0) \sim r^{-(d-2+\eta)}, \qquad \text{ha} \qquad r \to \infty. \tag{2.35}$$

2. A rendezetlen fázisban a fázisátalakulási pont felé közeledve, $t \to 0^+$ a korrelációs függvény aszimptotikus alakja exponenciális:

$$G(r, t) \sim e^{-r/\xi}, \qquad r \to \infty. \tag{2.36}$$

Ez definiálja a ξ korrelációs hosszat. A korrelációs hossz minden határon túl nő, ha a rendezetlen fázis oldaláról megközelítjük a fázisátalakulási pontot. A kritikus viselkedést az jellemzi, hogy a korrelációs hossz is hatványfüggvény-viselkedést mutat:

$$\xi \sim t^{-\nu}, \qquad \text{ha} \qquad t \to 0^+. \tag{2.37}$$

A korrelációs függvény és a korrelációs hossz segítségével bevezetett kritikus exponensek közvetlenül kapcsolatosak a rendparaméter fluktuációival. A tapasztalat szerint **dimenziófüggő skálatörvényeket** elégítenek ki:

$$2-\alpha=\nu d, \tag{2.38}$$

$$(2-\eta)\nu=\gamma, \tag{2.39}$$

$$2-\eta=d\frac{\delta-1}{\delta+1}. \tag{2.40}$$

Ezek a tapasztalatok természetesen $d=2$ és $d=3$ dimenziós rendszerekre vonatkoznak.

A Landau-elmélet a korrelációs függvény Fourier-transzformáltjára a rendezetlen fázisban az úgynevezett Ornstein-Zernike-viselkedésnek megfelelő alakot adja:

$$G(\vec{q}^{\,2})=\frac{k_BT}{2}\frac{1}{g(p)\vec{q}^{\,2}+a(p)T_ct}\sim\frac{1}{\vec{q}^{\,2}+\kappa^2(t)}, \tag{2.41}$$

ahol $\kappa(t)\sim t^{1/2}$. Ez a koordinátatérben a

$$G(r)\sim r^{-(d-2)}e^{-\kappa(t)r} \tag{2.42}$$

távolságfüggést jelenti. A korrelációk tehát növekvő távolsággal exponenciálisan lecsengenek a rendezetlen fázisban, ha $t>0$. A korrelációs hossz a fázisátalakulási ponthoz közeledve $\xi=1/\kappa(t)\sim t^{-1/2}$ szerint divergál, ahonnan leolvashatjuk, hogy $\nu=1/2$. Ugyanakkor a fázisátalakulási pontban, azaz $t=0$ esetén a korrelációs függvény hatványfüggvény alakját ölti, $G(r)\sim r^{-(d-2)}$, amiből $\eta=0$ adódik.

A Landau-elmélet alapján meghatározott $\nu=1/2$ és $\eta=0$ kritikus exponensek a dimenziótól függő skálatörvényeket általában nem elégítik ki, csak $d=4$ dimenzió esetén. Hogy miért játszik a $d=4$ dimenzió ilyen kitüntetett szerepet, megérthetjük a **Ginzburg-kritérium** alapján. Ismeretes, hogy a Landau-elmélet **átlagtér-közelítés**nek felel meg, amikor – az Ising-modell példájánál maradva – a spinekből képezett kvadratikus s_is_j kifejezést az $\frac{1}{2}\left(\langle s_i\rangle s_j+s_i\langle s_j\rangle\right)$ alakkal helyettesítjük a Hamilton-operátorban, és az $\langle s_i\rangle$ várható értéket, a rendparamétert szelf-konzisztens módon határozzuk meg. Szigorúan véve ezt a közelítést, a korrelációs függvény azonosan zérusnak adódik. Ha tehát összehasonlítjuk a korrelációs függvény

$$z_1 \;=\; \int_{V_\xi} dV G(r) \tag{2.43}$$

integrálját a rendparaméter négyzetének az integráljával,

$$z_2 \;=\; \int_{V_\xi} dV \Delta^2(r), \tag{2.44}$$

és azt találjuk, hogy $\epsilon_G = z_1/z_2 \ll 1$, akkor az átlagtér-közelítés jó közelítés. Ez a Ginzburg-kritérium arra nézve, hogy mikor alkalmazható az átlagtér-közelítés. (Az integrálokat a korrelációs hossznak megfelelő $V_\xi \sim \xi^3$ nagyságú térfogatra kell kiszámítani.) Ha a Ginzburg-kritériumot elemezzük, akkor azt

$$\epsilon_G = \text{const.}|t|^{-\nu(d_{fc}-d)} \tag{2.45}$$

alakba írhatjuk át [1], ahol a d_{fc} **felső kritikus dimenzió** a kritikus exponensekkel van kifejezve: $d_{fc} = (2\beta+\gamma)/\nu$. Használva a Landau-elméletből nyert kritikus exponenseket, $d_{fc} = 4$ adódik. A Ginzburg-kritérium azt jelenti, hogy $d < 4$ dimenzióban a fluktuációk olyan jelentősek, hogy az átlagtér-közelítés felmondja a szolgálatot, ha túl közel megyünk a fázisátalakulási hőmérséklethez. A rendszer a fázisátalakulási pont közelében skálainvariáns, de a Landau-elmélet nem alkalmazható, és valóban nem is tudja a dimenziótól függő skálatörvényeket értelmezni. A $d > 4$ dimenziókban az átlagtér-közelítés jó közelítés a fázisátalakulási hőmérséklet közelében. A termikus fluktuációk nem jelentősek. Az, hogy nem kapunk dimenziótól függő skálatörvényeket, mutatja, hogy a felső kritikus dimenziónál nagyobb dimenzióban a rendszer a fázisátalakulási pont közelében sem skálainvariáns. A $d = 4$ dimenzió az a kritikus dimenzió, amely már elég alacsony ahhoz, hogy a fluktuációk a fázisátalakulási pont közelében minden skálán jelentőssé váljanak, s ennek következtében a rendszer skálainvarianciát mutasson.

A legfontosabb tapasztalat az **univerzalitás**, azaz hogy a skálatörvények minden fizikai rendszerre ugyanazok. Ez már a Landau-elméletből is következik, de csak a dimenziótól független skálatörvényekre.

2.4.2. Skálainvariancia

A továbbiak szempontjából alapvető fontosságú a felismerés: a kritikus viselkedés oka az, hogy a rendszer a fázisátalakulási pont közelében minden méretskálán ugyanúgy viselkedik. Ezt nevezzük **skálainvarianciának**. A skálainvariancia következménye, hogy az általánosított termodinamikai potenciál a redukált hőmérsékletnek és a külső térnek általánosított homogén függvénye,

$$\phi(\lambda^{a_t} t, \lambda^{a_h} h) = \lambda \phi(t, h). \tag{2.46}$$

A termodinamikai potenciálnak ezt a tulajdonságát **statikus skálahipotézisként** emlegetik. Az elnevezés arra utal, hogy kezdetben egy feltevésről volt szó, amelyet később sikerült a skálainvariancia következményeként megérteni. A (2.46) statikus skálahipotézisből már következik a rendparaméternek és a termodinamikai potenciál második deriváltjainak a hatványfüggvény-viselkedése és a kritikus exponensek között fennálló, dimenziótól független skálatörvények.

Idézzük fel azt a Kadanofftól származó érvelést, amelynek alapján be tudjuk látni, hogy a skálainvariancia elvezet a statikus skálahipotézishez. Vegyük példaként az Ising-modellt. Valamely rács i csomópontjaiban klasszikus s_i spinek helyezkednek el, amelyek az $s_i = \pm 1$ értékeket vehetik fel. A rendszer Hamilton-függvénye

$$\beta H = -\bar{J} \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - \bar{h} \sum_i s_i, \tag{2.47}$$

ahol az első tag az első szomszéd spinek közötti kölcsönhatás energiája, a második tag a spinek kölcsönhatása a külső térrel. A T hőmérsékletet beleolvasztottuk a J csatolási állandóba és a h külső térbe, $\bar{J} = \beta J$, a $\bar{h} = \beta h$, $\beta = 1/(k_B T)$.

A fenti (2.47) Hamilton-függvény a rendszert mikroszkopikusan, valamennyi N szabadsági fokának explicit módon történő figyelembevételével írja le. Azt mondjuk, hogy ez a Hamilton-függvény írja le a rendszert az a rácsállandónak megfelelő skálán. Azok a mérések, amelyek érzékenyek az a rácsállandóval összemérhető kicsiny hullámhosszú fluktuációkra, a rendszert ezen a skálán „látják". Gondoljunk most el olyan „durva" mérést, amely nem érzékeli az $a < \lambda < a' = ba$, $(b > 1)$ hullámhosszúságú részleteket (fluktuációkat), hanem kiátlagol azokra. Ezekben a **„durva szemcsés" mérésekben** a rövid hullámhosszú fluktuációk hatása csak áttételesen jelentkezik. Annak érdekében, hogy vizsgálhassuk, hogyan is fog az új a' skálán viselkedni a rendszer, alkalmazzuk a **blokkosítási eljárást**. A blokkosítás lényege, hogy az eredeti rácsot lefedjük $a' = ba$ méretű diszjunkt blokkokkal, amelyeket az eredeti rácspontokból képezünk. Majd az egy blokkhoz tartozó s_i spineket (szabadsági fokokat) helyettesítjük egyetlen, a blokk középpontjába helyezett S_I blokkspinnel. Az eljárást az indokolja, hogy mindaddig, amíg a blokk mérete sokkal kisebb mint a korrelációs hossz, $a' \ll \xi$, addig az egy blokkon belüli spinek egymáshoz képest eléggé rögzítettek, nem fluktuálnak függetlenül az erős korreláció miatt. A blokkosítás után előállt H' Hamilton-függvény írja le a rendszert az a' skálán, azaz adja meg a rendszer viselkedését a megfelelően durva szemcsés mérések során.

A rendszert **skálainvariáns**nak nevezzük, ha az eredeti H Hamilton-függvény a csomóponti s_i spineknek ugyanolyan alakú függvénye, mint a blokkosított H' Hamilton-függvény az S_I blokkspineknek,

$$(\beta H)' = -\bar{J}' \sum_{\langle I,J \rangle} S_I S_J - \bar{h}' \sum_I S_I, \tag{2.48}$$

és ez a tulajdonság az ismételt blokkosítási lépések során megőrződik. Ilyenkor a kiátlagolt, nagyfrekvenciás szabadsági fokok hatása a csatolási állandók megváltozásában jelentkezik. Úgynevezett **csupasz csatolási állandókat** kapunk, amelyeknek az értéke függ attól, hogy mekkora az elméletben az UV levágás (blokkosítás előtt a, a blokkosítás után a'), vagyis amelyek a b paraméter függvényei.

A blokk ϕ' termodinamikai potenciálja az egy csomópontra jutó ϕ termodinamikai potenciálnak annyiszorosa, ahány csomópont van egy blokkban, azaz

$$\phi'(t', h') = b^d \phi(t, h), \tag{2.49}$$

hiszen a termodinamikai potenciál extenzív mennyiség. A mikroszkopikusan feltételezett skálainvariancia következménye, hogy a blokkosításkor a redukált hőmérsékletet és a külső teret át kell skálázni: $t \to t'$, $h \to h'$. Tegyük fel, hogy a blokkosítási utasítás lineáris, azaz hogy a blokkspin a csomópontok spinjeinek lineáris kifejezése. Ekkor abból, hogy a Hamilton-függvény külső teret tartalmazó tagja $-h\sum_i s_i = -h'\sum_I S_I$ a külső térben lineáris, következik, hogy h' a h-nak lineáris függvénye: $h' = f_1(b)h$. A tiszta tag zérus, hogy $h' = 0$ legyen $h = 0$ esetén. Másrészt a skálainvariancia $t \approx 0$ esetén érvényes. Kis t értékekre azonban a $t'(t)$ függvényt helyettesíthetjük sorfejtésének első el nem tűnő tagjával: $t' = f_2(b)t$, ahol a konstans tag megint zérus, hogy $t = 0$ esetén $t' = 0$ legyen. Ismételjük a blokkosítási lépéseket többször egymás után, a j-edik lépésben b_j-szeresre növelve a blokkméretet. Az egymás után végrehajtott j-edik és $(j+1)$-edik blokkosítás úgy is felfogható mint egyetlen blokkosítási lépés a skála $(b_{j+1}b_j)$-szeresre növelésével, azaz

$$f_i(b_{j+1})f_i(b_j) = f_i(b_{j+1}b_j) \tag{2.50}$$

$i = 1, 2$-re. Ennek a függvényegyenletnek a megoldása: $f_i(b) = b^{x_i}$. Következésképpen:

$$t' = b^{x_t}t, \qquad h' = b^{x_h}h. \tag{2.51}$$

A skálainvariancia a termodinamikai potenciál nyelvén azt jelenti, hogy a blokkosított rendszer termodinamikai potenciálja, $\phi'(t', h')$ az átskálázott t' és h' változóknak ugyanolyan függvénye, mint az eredeti (blokkosítás előtti) $\phi(t, h)$ termodinamikai potenciál az eredeti t és h változóknak:

$$\phi'(t', h') = \phi(t', h'). \tag{2.52}$$

A skálainvariancia felhasználásával kapjuk tehát a fentiek alapján, hogy

$$\phi(b^{x_t}t, b^{x_h}h) = b^d\phi(t, h). \tag{2.53}$$

Ha most bevezetjük a $\lambda = b^d$ és az $a_t = x_t/d$, $a_h = x_h/d$ jelölést, akkor az (2.46) statikus skálahipotézist kapjuk eredményül.

2.4.3. Skálatörvények

Az (2.46) statikus skálahipotézis segítségével kifejezhetjük a kritikus exponenseket az a_t és a_h kitevőkkel, és meggyőződhetünk róla, hogy azok a dimenziótól független skálatörvényeket kielégítik.

Például a β kitevőt az alábbiak szerint kapjuk meg. Deriváljuk a statikus skálahipotézis mindkét oldalát a h külső tér szerint parciálisan, majd a bal oldalt szorozzuk $\lambda^{a_h}/\lambda^{a_h} = 1$-gyel. Ekkor a

$$\Delta(\lambda^{a_t}t, \lambda^{a_h}h) = \lambda^{1-a_h}\Delta(t,h) \tag{2.54}$$

egyenletre jutunk. Válasszuk a tetszőleges λ-t az $-1 = \lambda^{a_t}t$ egyenlőséget kielégítőnek, és helyettesítsünk be $h = 0$-t. Ekkor leolvashatjuk, hogy $\Delta(t,0) \sim (-t)^{\beta}$, ahol $\beta = (1-a_h)/a_t$.

A többi kritikus exponens kifejezése is hasonlóan kapható meg.

A kritikus exponenseknek az a_t és a_h kitevőkkel kifejezett alakjai:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1-a_h}{a_t}, \qquad & \delta &= \frac{a_h}{1-a_h}, \\ \gamma &= \frac{2a_h-1}{a_t}, \qquad & \alpha &= \frac{2a_t-1}{a_t}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Látjuk, hogy a kritikus exponensek közül valóban csak 2 független, pontosabban, hogy visszavezethetők a 2 független a_t és a_h kitevőre. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról is, hogy a kritikus exponensek kielégítik a dimenziótól független skálatörvényeket.

2.4.4. Dimenziófüggő skálatörvények

A skálainvariancia alapján meghatározhatjuk a korrelációs függvény alábbi skálatulajdonságát:

$$G(r,t) = (r/a)^{2(x_h-d)}G\left(a, (r/a)^{x_t}t\right). \tag{2.56}$$

A bizonyítást elismételjük, hogy felfigyeljünk arra, hogy a használt szabadsági fokokat (esetünkben a spineket) renormálni kell.

Már láttuk, hogy blokkosítás után a külső tér $h' = hb^{x_h}$. A $S_I = \sum_{i\in I} s_i$ blokkspinek azonban még nincsenek ± 1 értékre normálva. A helyesen normált s_I blokkspineket az alábbi egyenlettel vezethetjük be:

$$h\sum_{i=1}^{N} s_i = h' \sum_{I=1}^{N/b^d} s_I, \tag{2.57}$$

azaz

$$h\sum_{i=1}^{N} s_i = h\sum_{I=1}^{N/b^d}\sum_{i\in I} s_i = h\sum_{I=1}^{N/b^d} S_I \equiv hb^{x_h}\sum_{I=1}^{N/b^d} s_I. \tag{2.58}$$

Innen látjuk, hogy hogyan kell a spineket átskálázni, renormálni:

$$s_I = b^{-x_h}S_I. \tag{2.59}$$

Ezért $\langle s_I \rangle = b^{-x_h}\langle S_I \rangle = b^{-x_h} b^d \langle s_i \rangle$ kapcsolat áll fenn a csomóponti és a blokkspin várható értéke között. Következésképpen a blokkspinekkel definiált korrelációs függvény,

$$G'(r', t') = \langle s_I s_J \rangle - \langle s_I \rangle \langle s_J \rangle, \tag{2.60}$$

és a csomóponti spinekkel definiált $G(r,t)$ korrelációs függvény

$$G'(r', t') = b^{2(d-x_h)} G(r,t) \tag{2.61}$$

kapcsolatban áll egymással. A skálainvariancia azonban azt is jelenti, hogy $G'(r', t') = G(r', t')$, tehát

$$G(r', t') = b^{2(d-x_h)} G(r,t). \tag{2.62}$$

Vegyük ezt az azonosságot az $r' = r/b$ helyen és használjuk fel, hogy $t' = b^{x_t} t$, majd miután az egyenlőség tetszőleges b-re igaz, helyettesítsünk be $b = r/a$-t. Ekkor megkapjuk a korrelációs függvény bizonyítani kívánt skálatulajdonságát.

A korrelációs függvény skálatulajdonságából következnek az alábbiak.

1. Az átalakulási hőmérsékleten, azaz $t = 0$ esetén a korrelációs függvény $G(r, t = 0) \sim r^{-(d-2+\eta)}$ hatványfüggvény alakú, ahol $\eta = d - 2(x_h - 1) = d + 2 - 2da_h$.
2. Ha $t > 0$, akkor $G(r,t) \sim G(a, (r/a)^{x_t} t) \sim G(a, (r/a)^{x_t} \text{ const } \xi^{-1/2}) \equiv g(r/\xi)$, ami csak a dimenziótlan r/ξ arány függvénye lehet, s így a korrelációs hossz kritikus exponense $\nu = 1/x_t$.

A skálainvariancia alapján meghatározott $\eta = d + 2 - 2da_h$, $\nu = d/a_t$ kritikus exponensek a dimenziótól függő skálatörvényeket is kielégítik.

A skálainvariancia feltételezése tehát elegendőnek bizonyul ahhoz, hogy az univerzalitás magyarázatát adjuk. Érdemes tehát kidolgozni a blokkosítás általános módszerét, amellyel szisztematikusan vizsgálható egy rendszer tetszőleges skálán, és pontosan megfogalmazni, hogy mit jelent a skálainvariancia. Ezek a kérdések a renormálási csoport elnevezéssel illetett módszer körébe tartoznak.

2.5. Összefoglalás

A fázisátalakulások legegyszerűbb, kvalitatív jellemzése a termodinamikai potenciálok és deriváltjaik viselkedése alapján történik. Ez a termodinamikai jellemzés azonban nyilvánvalóan nem ad számot a termikus fluktuációknak a fázisátalakulás során játszott szerepéről. Figyelmünket az úgynevezett folytonos fázisátalakulásokra irányítottuk, amelyek során a termodinamikai potenciálok első deriváltjai a rendszer termodinamikai állapothatározóinak folytonos függvényei, vagyis amelyek nem járnak látens hő képződésével. Ezeket a fázisátalakulásokat az jellemzi, hogy az egyik fázis, a rendezetlen fázis szimmetriája magasabb, a másiké, a rendezett fázisé alacsonyabb, miközben a rendszer Hamilton-operátorának szimmetriája nem változik meg. A szimmetriasérülés mértékét az úgynevezett rendparaméter méri, amely a rendezetlen fázisban zérus, a rendezett fázisban pedig a fázisátalakulási ponttól ,,távolodva" nő. A rendezett fázis sajátos példája a hosszútávú rendezettséget mutató fázis, amelyben a rendparaméter korrelációs függvénye nagy távolságokon véges, nem zérus határértékhez tart. A rendezetlen fázisban ez a határérték zérus, a korrelációs függvény általában exponenciálisan cseng le, amelynek ütemét a korrelációs hossz szabja meg. Kivételt képez a fázisátalakulási pontban lévő, kritikus rendszer, amelyben a korrelációs hossz a távolságnak hatványfüggvénye. A hatványfüggvény alakú távolságfüggés olyan speciális függés, amely minden nagyításban azonos távolságfüggést jelent, ugyanazt a hatványfüggvényt. A kritikus rendszerben tehát a rendparaméter termikus fluktuációinak korrelációja minden nagyításban azonos. A kritikus rendszer önhasonló, azaz skálainvariáns.

A skálainvariancia azt jelenti, hogy a rendszer Hamilton-függvénye minden nagyításban azonos alakú kölcsönhatási tagokat tartalmaz. A skálainvariancia következtében a fázisátalakulási ponthoz közeli rendszerben számos mennyiség hatványfüggvényszerű viselkedést és a kritikus pontban ennek megfelelő szingularitást mutat. A jellemző kitevők, az úgynevezett kritikus exponensek között részben a rendszer dimenziójától is független, részben pedig a dimenziótól függő összefüggések, skálatörvények állnak fenn.

3. A renormálási csoport

A renormálási csoport módszere olyan rendszerek következetes vizsgálatát teszi lehetővé, amelyekben nagyon sok (termodinamikai határesetben végtelen sok) szabadsági fokot kell figyelembe venni, azaz amikor nem lehet a priori azt mondani, hogy elegendő a végtelen sok szabadsági fok közül csak véges sokra tekintettel lenni. Tipikusan ilyen esetet jelentenek a kritikus rendszerek, amikor a fluktuációk minden hullámhosszon egyformán fontosak a végtelenhez tartó korrelációs hossz miatt. A kvantált terek ugyancsak végtelen szabadsági fokú rendszerek. A statisztikus fizikai kritikus rendszerekben a termikus fluktuációk, a kvantált terekben a kvantumfluktuációk jelentik a szabadsági fokokat.

A renormálási csoport módszerének az adja a jelentőségét, hogy segítségével azt tudjuk vizsgálni, hogy a mikroszkopikusan, Hamilton-operátorával adott rendszer hogyan viselkedik olyan mérésekkel szemben, amelyeknek a feloldása rosszabb, „durvább”. Statisztikus fizikai rendszerben a fluktuációk minimális hullámhosszát az a rácsállandó (avagy a részecskék átlagos távolsága) szabja meg. Az a' skálán végzett durva-szemcsés mérés kiátlagol a finom részletekre, a kis, $a < \lambda < a'$ hullámhosszúságú fluktuációkra. A feloldást fokozatosan ronthatjuk el (a' növelésével) egészen addig, amíg eljutunk oda, hogy csak a korrelációs hosszal összemérhető hullámhosszú fluktuációkat látjuk, majd pedig már azokat sem. Vizsgálhatjuk eközben, hogy a rendszert a különböző feloldásokon, a szóhasználat szerint a különböző a' skálákon, milyen effektív Hamilton-operátor írja le. Az effektív Hamilton-operátor explicit módon már csak azokat a szabadsági fokokat tartalmazza, amelyek a hosszúhullámú $\lambda > a'$ fluktuációkkal kapcsolatosak. Lényegében a statisztikus fizika alapkérdését feszegetjük: hogyan verhetünk hidat a rendszer mikroszkopikus és makroszkopikus viselkedése között.

Hasonló kérdésfeltevés a kvantumtérelméletben is érdekes. A kvantumtérelméletben nincsen természetes módon rácsállandó, azaz ultraibolya levágás. Másrészt a térelméleti modellek csak akkor jól definiáltak, ha regularizáljuk őket, azaz művileg bevezetünk bennük valamilyen UV levágást. Ezután feltehetjük a kérdést, hogy az így definiált kvantumfizikai rendszer hogyan viselkedik, ha alacsonyenergiás méréseknek vetjük alá, amikor a folyamatokban átadott impulzusok és energiák lényegesen kisebbek, mint az UV levágás, amelyen az elméletet mikroszkopikusan megfogalmaztuk. Egyúttal még az a kérdés is megvizsgálható, mely elméletekben független az alacsonyenergiás viselkedés attól, hogy hol és hogyan vezettük be az UV levágást.

A skálainvariancia a fenti megközelítésben azt jelenti, hogy a rendszer minden skálán ugyanolyannak látszik, pontosabban hogy az effektív Hamilton-operátor alakja minden a' skálán ugyanaz.

3.1. Renormálás

3.1.1. Blokkosítás, tizedelés

A **renormálás első lépése** a **blokkosítás** (*blocking*), vagy más néven **tizedelés** (*decimation*). Ennek lényege, hogy bizonyos szabadsági fokokat egyetlen szabadsági fokkal helyettesítünk. A változók megtizedelését az alábbi szempontokat figyelembe véve hajtjuk végre:

1. Megköveteljük, hogy a rendszer partíciós függvénye ne változzon meg.
2. Olyan blokkosítási, ill. tizedelési utasítást használunk, amelynek során fokozatosan távolítjuk el a rendszerből a nagyfrekvenciás (kis hullámhosszú) fluktuációkat.
3. Megköveteljük, hogy két egymás után végrehajtott blokkosítási lépés eredménye felfogható legyen, mint egyetlen blokkosítási lépés.

A blokkosítás értelemszerűen az a rácsállandójú rendszerből $a' = ba > a$ rácsállandójú rendszert csinál. A különböző b paraméterrel jellemzett blokkosítási transzformációk félcsoportot alkotnak. Ez a **renormálási csoport**. Nyilvánvaló, hogy általában, ha csak a durvább $a' = ba$ skálán ismert a rendszer, akkor nem lehet megmondani, hogy milyen a rendszer a finomabb a felbontással nézve. Elvileg végtelen sok olyan modell képzelhető el a finomabb a skálán, amely a durvább a' skálán ugyanazt a viselkedést eredményezi. Éppen ennek köszönhetően lehet beszélni univerzalitásról. Ennek köszönhetően lehetséges az is, hogy egy kvantumtér különbözőképpen regularizált modelljei azonos eredményeket szolgáltathatnak. Mindérre majd még visszatérünk.

Ha a rendszer az a rácsállandójú rács pontjaiban elhelyezett s_i spinekkel[1] a H Hamilton-operátor révén van definiálva, akkor partíciós függvénye

$$Z = \mathrm{Tr}_{\{s_i\}} e^{-\beta H(s_i)}. \tag{3.63}$$

Tegyük fel, hogy bevezetjük a blokkspineket $s_I = f_I(\{s_{i\in I}\})$ blokkosítási utasítással, ami az s_i változók fluktuációinak $a' = ba$ $(b > 1)$ méretű blokkokra történő kiátlagolását jelenti. Ekkor a blokkosított rendszer H' Hamilton-operátorát a

$$Z' = \mathrm{Tr}_{\{s_I\}} e^{-(\beta H)'(s_I)} \equiv Z \tag{3.64}$$

követelmény definiálja, azaz

$$e^{-(\beta H)'(s_I)} = \mathrm{Tr}_{\{s_i\}} \prod_{s_i} \delta(s_I - f_I(\{s_{i\in I}\}) e^{-\beta H(s_i)}. \tag{3.65}$$

[1] A spin szót itt teljesen általánosan használom. Gondolhatunk bármilyen térmennyiségre, amely egy térrács csomópontjaiban van definiálva.

A renormálási transzformáció (*RG transformation*) tehát értelemszerűen az a rácsállandójú rendszerből $a' = ba > a$ rácsállandójú rendszert csinál. Mivel a szimmetria megváltozása és a rendszer d dimenziójának a megváltozása a rendszer lehetséges fázisainak megváltozását eredményezi, ezért csak olyan renormálási transzformációk megengedettek, amelyek sem a rendszer dimenzióját, sem a rendszer Hamilton-operátorának szimmetriáit nem változtatják meg. Ez azt is biztosítja, hogy az adott fászishoz tartozó állapotokat ugyanehhez a fázishoz tartozó állapotokba képezi le a transzformáció. Mi itt olyan esetekkel fogunk foglalkozni, amikor a blokkosított változó és az eredeti változó között lineáris kapcsolat van. Ilyenkor az eredeti és a blokkosított változó ugyanolyan típusú fizikai mennyiség.[2]

3.1.2. Változók átskálázása

A **renormálás második lépésének a változók átskálázását** szokás nevezni.

A mennyiségek b-függése két részből tevődik össze. A triviális b-függés abból adódik, hogy a mennyiségek természetes (hosszúság–, ill. energia–)dimenzióval rendelkeznek. Ezért megváltozik a számértékük, ha megváltoztatjuk a hosszúságegységet a-ról a'-re. A dinamikai változók, mint a spin és a csatolási állandók, általában további, dinamikai eredetű, nem triviális b-függéssel is rendelkeznek Ha eleve dimenziótlan mennyiségekkel dolgozunk, akkor ezáltal a természetes dimenzióból adódó skálafüggést leválasztjuk. Ha a távolság két pont között az eredeti rendszerben ra, akkor a blokkosított rendszerben $r'a' = ra$, ahonnan $r' = r/b$ a dimenziótlan távolság megváltozása ($[r] = [r'] = 1$). A rendszer dimenziótlan térfogata a $Va^d = V'(a')^d$ egyenlet szerint skálázik: $V' = b^{-d}V$ ($[V] = [V'] = 1$). A dimenziótlan korrelációs hossz ($[\xi] = 1$) triviális skálafüggését $\xi a = \xi' a' = \xi' ab$ összefüggésből kapjuk: $\xi' = \xi/b$.

A blokkosítás során az állapotösszeg, ill. annak logaritmusa változatlan marad. Ezek dimenziótlan mennyiségek és így nincsen természetes skálafüggésük: $Z = Z'$ és $(\beta F) = (\beta F)'$, ahol F ill. F' rendre az eredeti ill. a blokkosított rendszer szabadenergiája. Az egy blokkra jutó szabadenergia ennek megfelelően skálázik:

$$(\beta f)' = (\beta F)'(V')^{-1} = (\beta F)V^{-1}b^d = b^d(\beta f). \tag{3.66}$$

A renormálás általában megváltoztatja a párkorrelációs függvény normálását. Ez pl. jól látszik abból, hogy a kritikus rendszerben

$$G(r') \sim (r')^{-(d-2+\eta)} \sim b^{d-2+\eta}r^{-(d-2+\eta)} \sim b^{d-2+\eta}G(r) \tag{3.67}$$

összefüggés áll fenn a blokkosítás előtti és utáni korrelációs függvény között. A blokkosítás előtti rendszert akkor tudjuk a blokkosítás utáni rendszerrel könnyen

[2]Vannak próbálkozások nem lineáris renomálási transzformációkkal történő vizsgálódásra is. Nem világos azonban, hogy szabad-e ilyen transzformációkat használni.

összehasonlítani, ha megköveteljük, hogy a párkorrelációs függvény normálása ne változzon meg. Ehhez a spinváltozókat nyilvánvalóan át kell normálni:

$$s_I = \tilde{Z}^{1/2}(b) s_i. \tag{3.68}$$

A fenti példában $\tilde{Z}^{1/2}(b) = b^{(d-2+\eta)/2}$.

Hasonlóan a spinváltozó Fourier-transzformáltjának átnormálását is végre kell hajtanunk, ${s'}_{\vec{q}} = Z^{1/2} s_{\vec{q}}$. A korrelációs függvény Fourier-transzformáltjának blokkosítás előtti és utáni alakja között a kritikus rendszer esetében a

$$G(q') \sim (q')^{-(2-\eta)} \sim (qb)^{-(2-\eta)} \sim b^{-(2-\eta)} G(q) \tag{3.69}$$

összefüggés áll fenn. Ahhoz, hogy ne változzon a korrelációs függvény normálása, a spinváltozót a $Z^{1/2} = b^{-(2-\eta)/2}$ faktorral kell szorozni.

3.2. A renormálási csoport trajektóriái és fixpontjai

A fizikai rendszer Hamilton-operátora $\beta H = \sum_n g_n O_n(s_i)$ alakban különböző O_n kölcsönhatási tagokat tartalmaz, amelyek csatolási állandói a g_n paraméterek. A blokkosítás után általában új kölcsönhatási tagok jelennek meg, továbbá a meglevő kölcsönhatások csatolási állandói is megváltoznak. Egyszerűsíthetjük a beszédet, ha azt mondjuk, hogy a Hamilton-operátorban eleve szerepel az összes lehetséges kölcsönhatási tag. Legfeljebb bizonyosaknak az a levágásnál zérus a csatolási állandója. Ekkor azt mondhatjuk, hogy a blokkosítás során a csatolási állandók megváltoznak. Általában b értékétől függő $g_n(b)$ úgynevezett futó csatolási állandókat kapunk, amelyeket a blokkosított $(\beta H)'$ Hamilton-operátor $(\beta H)' = \sum_n g_n(b) O_n(s_I)$ alakjából olvashatunk ki.

Képzeljük el a g_n csatolási állandók által meghatározott paraméterteret. A rendszer Hamilton-operátorát minden levágásnál, minden ba skálán egy pont ábrázolja a paramétertérben. A renormálási transzformáció során ez a pont vándorol a rácsállandó $a \longrightarrow a' = ba$ növelésének megfelelően a paramétertérben. Így áll elő az adott kezdőfeltételhez tartozó **renormálási csoport trajektória**. A kezdőfeltételt egy mikroszkopikus modell megadása jelenti, vagyis az, hogy megadjuk valamely a rácsállandó esetén a Hamilton-operátor alakját. Az egymást követő renormálási transzformációk a rendszert ábrázoló pontot a növekvő rácsállandónak, azaz a „durvítás”-nak, a rosszabb feloldásnak megfelelő irányba viszik. Ezt nevezzük **folyás**nak (*RG flow*). A paramétertérben a különböző kezdőfeltételekhez tartozó renormálási csoport trajektóriák összességét nevezzük folyási diagramnak (*flow diagram*).

Jelölje $\mathcal{R}_b$ a b paraméterű renormálási transzformációt. Ennek hatása a rendszer Hamilton-operátorára

$$(\beta H) = \sum_n g_n(a) O_n(s_i) \quad \longrightarrow \quad (\beta H)' = \mathcal{R}_b(\beta H) = \sum_n g_n(ab) O_n(s_I). \tag{3.70}$$

Ha ugyanezt a csatolási állandók transzformációjaként fogjuk fel, akkor

$$\underline{g} \quad \longrightarrow \quad \underline{g}' = \mathcal{R}_b(\underline{g}), \tag{3.71}$$

ahol $\underline{g}$ a csatolási állandók oszlopvektora.

A rendszer **skálainvariáns**, ha a Hamilton-operátorban a renormálási transzformáció hatására nem jelennek meg új kölcsönhatási tagok. Ez azt jelenti, hogy mindazon csatolási állandók, amelyek zérus értékűek az a skálán, a renormálási transzformáció után az $a' = ba$ skálán is zérus értékűek maradnak. A rendszer **szigorú értelemben skálainvariáns**, ha a renormálási transzformáció során a Hamilton-operátor változatlan marad:

$$(\beta H)' \equiv \mathcal{R}_b(\beta H) = \beta H. \tag{3.72}$$

A szigorú értelemben skálainvariáns rendszer $(\beta H)^*$ Hamilton-operátora tehát a renormálási transzformáció fixpontja:

$$\mathcal{R}_b\left((\beta H)^*\right) \quad = \quad (\beta H)^*. \tag{3.73}$$

A szigorú értelemben skálainvariáns rendszerben nemcsak hogy új kölcsönhatások nem jelennek meg, hanem a meglevő kölcsönhatások csatolási állandói sem változnak a dimenziójukból adódó triviális skálázástól eltekintve. Ez azt jelenti, hogy a dimenziótlan csatolási állandók a renormálási transzformáció hatására nem változnak meg, azaz a renormálási transzformáció fixpontját alkotják a paramétertérben:

$$\mathcal{R}_b \underline{g}^* = \underline{g}^*. \tag{3.74}$$

A szigorú értelemben skálainvariáns rendszerben a (dimenziótlan) korrelációs hossz sem változik, ha renormálási transzformációt hajtunk végre: $\xi^* = \xi^*/b$. Ez csak kétféleképpen lehetséges:

1. A korrelációs hossz végtelen, azaz $\xi^* = \infty$. Ekkor a fixpontot UV fixpontnak nevezzük. A másodrendű fázisátalakulási pontban levő rendszernek ilyen, UV fixpont felel meg.

2. A korrelációs hossz zérus, $\xi = 0$. Ekkor a fixpontot IR fixpontnak nevezzük. Ez a fixpont megfelelhet például $T \to \infty$ hőmérsékletű homogén rendszernek, amelyben a nagyon magas hőmérséklet szétzilál minden korrelációt.

3.3. Kétdimenziós Ising-modell háromszögrácson

Az alábbiakban megnézünk egy könnyen végigszámolható példát a renormálási transzformációra. A példa a kétdimenziós síkon, háromszögrácson megfogalmazott Ising-modell. Az elemi cellák a oldalélű egyenlő oldalú háromszögek. A rácspontokban ülő Ising-spinek ($s_i = \pm 1$) között elsőszomszéd-kölcsönhatás van:

$$\beta H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j . \tag{3.75}$$

A továbbiakban a β szorzót nem írjuk ki, hanem beleolvasztjuk a Hamilton-operátorba. A blokkosítást úgy végezzük, hogy a rácsot diszjunkt háromszögekkel fedjük le. Az egyes lefedő α háromszögek $i = 1, 2, 3$ csúcsaiban ülő s_α^i spineket a háromszög súlypontjába helyezett egyetlen s_α spinnel helyettesítjük. Ennek értékét az úgynevezett többségi szabály szerint választjuk meg. Ha a három spin többsége pozitív (negatív), akkor $s_I = +1$ (-1), azaz $s_I = \mathrm{sgn}(s_\alpha^1 + s_\alpha^2 + s_\alpha^3)$.

A blokkosítás előtti Hamilton-operátort fel lehet bontani a háromszögalakú blokkokon belüli

$$H_\alpha^{(0)} \;=\; -J \left(s_\alpha^1 s_\alpha^2 + s_\alpha^1 s_\alpha^3 + s_\alpha^2 s_\alpha^3 \right) \tag{3.76}$$

kölcsönhatások és az elsőszomszéd α, β blokkok közötti

$$V_{\alpha\beta}^{(1)} \;=\; -J s_\alpha^1 \left(s_\beta^2 + s_\beta^3 \right) \tag{3.77}$$

kölcsönhatások összegére: $H = \sum_\alpha H_\alpha^{(0)} + \sum_{\langle \alpha,\beta \rangle} V_{\alpha\beta}^{(1)}$.

A blokkosított rendszer H' Hamilton-operátorát az

$$e^{-H'} \;=\; \sum_{\{s_\alpha^i\}} \prod_\alpha \delta \left(s_\alpha - \ \mathrm{sgn} \ (s_\alpha^1 + s_\alpha^2 + s_\alpha^3) \right) e^{-H} \tag{3.78}$$

egyenlet definiálja. Vezessük be tetszőleges A mennyiség

$$\langle A \rangle_0 \;=\; \frac{\sum_{\{s_\alpha^i\}} \prod_\alpha \delta \left(s_\alpha - \ \mathrm{sgn} \ (s_\alpha^1 + s_\alpha^2 + s_\alpha^3) \right) A e^{-H_0}}{\sum_{\{s_\alpha^i\}} \prod_\alpha \delta \left(s_\alpha - \ \mathrm{sgn} \ (s_\alpha^1 + s_\alpha^2 + s_\alpha^3) \right) e^{-H_0}} \tag{3.79}$$

várható értékét. Ezek a várható értékek általában az s_α blokkspinektől függenek. A blokkosított rendszer Hamilton-operátorára a bevezetett várható érték segítségével

$$e^{-H'} \;=\; \left\langle e^{-V} \right\rangle_0 \sum_{\{s_\alpha^i\}} \prod_\alpha \delta \left(s_\alpha - \ \mathrm{sgn} \ (s_\alpha^1 + s_\alpha^2 + s_\alpha^3) \right) e^{-H_0} \tag{3.80}$$

adódik.

Valamely operátor exponenciális kifejezésének várható értéke kifejezhető ezen operátor momentumaival:

$$\left\langle e^{-V} \right\rangle \;=\; \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \right\}, \tag{3.81}$$

ahol C_n az úgynevezett kumulánsok. Ez a **kumuláns-kifejtés**. Az első néhány kumuláns:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \langle V \rangle, \\
C_2 &= \left\langle (V - \langle V \rangle)^2 \right\rangle, \\
C_3 &= \left\langle (V - \langle V \rangle)^3 \right\rangle, \\
C_4 &= \left\langle (V - \langle V \rangle)^4 \right\rangle - 3 \left\langle (V - \langle V \rangle)^2 \right\rangle^2, \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{3.82}$$

A kumuláns-kifejtést a következőképpen bizonyíthatjuk. Vezessük be a

$$Z(\lambda) = \left\langle e^{\lambda A} \right\rangle \tag{3.83}$$

„állapotösszeget” és képezzük belőle az $F(\lambda) = \ln Z(\lambda)$ „szabadenergiát”, majd fejtsük az utóbbit λ szerint Taylor-sorba:

$$F(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} C_n, \tag{3.84}$$

ahol $C_n = C_n(\lambda = 0)$ a kumulánsok és

$$C_n(\lambda) = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \ln \left\langle e^{\lambda A} \right\rangle. \tag{3.85}$$

Bevezetve a

$$\langle \ldots \rangle_\lambda = \frac{\left\langle \ldots e^{\lambda A} \right\rangle}{\langle e^{\lambda A} \rangle} \tag{3.86}$$

jelölést, a deriválások elvégzésével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
C_1(\lambda) &= \langle A \rangle_\lambda, \\
C_2(\lambda) &= \langle A^2 \rangle_\lambda - \langle A \rangle_\lambda^2.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Vezessük be az A operátor n-edik momentumát:

$$B_n(\lambda) = \langle (A - \langle A \rangle_\lambda)^n \rangle_\lambda. \tag{3.88}$$

A magasabb rendű kumulánsok a

$$\frac{d}{d\lambda} B_n(\lambda) = B_{n+1}(\lambda) - n B_{n-1}(\lambda) B_2(\lambda) \tag{3.89}$$

rekurziós képlet alapján számíthatók ki, felhasználva, hogy $C_2(\lambda) = B_2(\lambda)$.

A blokkosított rendszer Hamilton-operátorának meghatározását kezdjük a (3.80) kifejezés jobb oldalán szereplő összeg kiszámításával. Miután az egyes α háromszögek spinváltozóira történő összegzések függetlenek, az összeg faktorizálható:

$$\begin{aligned} & \sum_{\{s_\alpha^i\}} \prod_\alpha \delta\left(s_\alpha - \ \mathrm{sgn}\ (s_\alpha^1 + s_\alpha^2 + s_\alpha^3)\right) e^{-H_0} \\ &= \prod_\alpha^{N_b} \sum_{s_\alpha^1, s_\alpha^2, s_\alpha^3 = \pm 1} \delta\left(s_\alpha - \mathrm{sgn}(s_\alpha^1 + s_\alpha^2 + s_\alpha^3)\right) e^{-H_0} \\ &= z^{N_b}, \end{aligned} \tag{3.90}$$

ahol N_b a blokkok száma és

$$\begin{aligned} z &= e^{3J}\delta(s_\alpha - 1) \\ & \quad +3e^{-J}\delta(s_\alpha - 1) \\ & \quad +3e^{-J}\delta(s_\alpha + 1) \\ & \quad +e^{3J}\delta(s_\alpha + 1) \\ &= e^{3J} + 3e^{-J}. \end{aligned} \tag{3.91}$$

(Itt az egyes tagok megfelelnek rendre a három spin $(+1, +1, +1)$, $(+1, +1, -1)$, $(+1, -1, -1)$, $(-1, -1, -1)$ értékének.)

A (3.80) egyenletből tehát azt kapjuk a kumuláns-kifejtést is felhasználva, hogy

$$H' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n + N_b \ln z. \tag{3.92}$$

A kumulánsok értékének kiszámításához felhasználjuk az alábbi várható értékeket:

$$\begin{aligned} \langle s_\alpha^i \rangle_0 &= z^{-1}\left(e^{3J} + e^{-J}\right) s_\alpha = a_1 s_\alpha, \\ \langle s_\alpha^1 s_\alpha^2 \rangle_0 &= z^{-1}\left(e^{3J} - e^{-J}\right) = a_2, \\ \langle s_\alpha^1 s_\alpha^2 s_\alpha^3 \rangle_0 &= z^{-1}\left(e^{3J} - 3e^{-J}\right) s_\alpha = a_3 s_\alpha. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Ezek az egyes α háromszögekhez tartozó változókra vonatkozó összegek szorzataiként állnak elő, ugyanúgy, mint z, és ezért könnyen kiszámolhatók.

A blokkosított rendszer Hamilton-operátorának különböző közelítő kifejezéseit kapjuk aszerint, hogy a kumuláns-kifejtésben hányadik rendben állunk meg. A számolás részletei megtalálhatók [6] 6. fejezetében.

3.3.1. Elsőrendű közelítés

Ha a kumuláns-kifejtés $n = 1$ tagjával bezárólag vesszük figyelembe a tagokat, akkor

$$(H')^{(1)} = C_1 - N_b \ln z, \tag{3.94}$$

ahol

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \langle V\rangle = \left\langle \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle} V^{(1)}_{\alpha\beta}\right\rangle \\
&= -\left\langle \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle} J s^1_\alpha \left(s^2_\beta + s^3_\beta\right)\right\rangle = -J\sum_{\langle\alpha,\beta\rangle}\left\langle s^1_\alpha\right\rangle\left\langle s^2_\beta + s^3_\beta\right\rangle \\
&= -2a_1^2 J \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle} s_\alpha s_\beta. \qquad (3.95)
\end{aligned}
$$

A blokkosított rendszer Hamilton-operátora első közelítésben tehát tartalmazza a blokkspinektől független

$$
(H')^{(0)} = -N_b \ln\left(e^{3J} + 3e^{-J}\right) \qquad (3.96)
$$

tagot és az elsőszomszéd blokkok közötti $(H')^{(1)}$ kölcsönhatást. A blokkosítás során tehát a Hamilton-operátor megőrzi az eredeti alakját. A csatolási állandó azonban J-ről J'-re változik:

$$
J' = 2a_1^2 J = 2\left(\frac{e^{3J} + e^{-J}}{e^{3J} + 3e^{-J}}\right)^2 J. \qquad (3.97)
$$

Itt J az a, J' az $a\sqrt{3}$ rácsállandóhoz tartozó csatolási állandó.

Érdemes ezt a közelítő renormálási csoport egyenletet kicsit közelebbről tanulmányozni. A $2a_1^2 \geq 1$ (< 1) egyenlőtlenség megoldása $J \geq J^*$ ($J < J^*$), ahol $J^* = \frac{1}{4}\ln(2\sqrt{2}+1) \approx 0,336$ a renormálási transzformáció fixpontja. Hasonlóan $J^*_0 = 0$ és $J^*_\infty = +\infty$ is fixpontok. A J csatolási állandó értékének megfelelően osztályozhatjuk a lehetséges eseteket:

1. Azokban a modellekben, amelyekben az a skálán a csatolási állandó értéke nagyobb mint J^*, $J(a) > J^*$, a skála durvítása során a csatolási állandó minden határon túl nő, $J(a') \to +\infty$, ha $a' \to \infty$. Ezek a modellek az alacsonyenergiás viselkedés szempontjából erős csatolású rendszereket írnak le.

2. Azok a modellek, amelyekben a csatolási állandó UV levágásnál felvett értéke kisebb mint a J^* érték, az alacsonyenergiás viselkedés szempontjából triviális, kölcsönhatásmentes rendszereket írnak le.

3. A csatolási állandó J^* értéke esetén a modell szigorú értelemben skálainvariáns rendszert ír le.

A vizsgált közelítésben az Ising-modell minden esetben skálainvariáns, hiszen megőrződik a Hamilton-operátor alakja, az a tény, hogy benne csak elsőszomszéd kölcsönhatások vannak.

A $J > J^*$ pontokból induló renormálási csoport trajektóriák a $J_\infty = +\infty$ végtelenben lévő fixpontba futnak be (termodinamikai határesetben), a $J < J^*$ pontokból induló trajektóriák pedig a $J_0 = 0$ fixpontba. A $J - J^* = j$ csatolási állandó a blokkosítás során abszolútértékben monoton nő. Azt mondjuk, hogy a J^* fixpontban ez releváns csatolási állandó, a neki megfelelő elsőszomszéd kölcsönhatásnak tulajdoníthatóan a renormálási csoport trajektóriák távolodnak a J^* fixponttól. Ugyanakkor a renormálási csoport trajektóriák befutnak a $J = 0$ vagy a $J \to \infty$ fixpontba.

A fixpontokban a korrelációs hossz csak nulla vagy végtelen lehet. A renormálási csoport trajektóriákon a korrelációs hossz véges és szigorúan monoton csökken a folyási irányban haladva. Ezért a $J = J^*$ fixpontnak UV fixpontnak kell lenni, ahol a korrelációs hossz végtelen, ugyanakkor a másik két fixpontnak IR fixpontoknak, amelyekben a korrelációs hossz nulla.

Természetesen mindig ugyanannak, a kétdimenziós háromszögrácson definiált Ising-spinrendszernek a különböző fázisairól van szó. Tekintve, hogy a J csatolási állandó tulajdonképpen a $\beta \bar{J}$ szorzat helyett áll, kétféleképpen is lehet az eredményt értelmezni:

1. A tulajdonképpeni $\bar{J}$ csatolási állandót rögzítettnek képzeljük. Ekkor a skála változása a hőmérséklet változásának felel meg: J^* a T_c fázisátalakulási hőmérsékleten lévő rendszernek, $0 \le J < J^*$ a $T > T_c$ hőmérsékleti tartományban a rendezetlen fázisnak, és $J^* < J < \infty$ a $T_c > T \ge 0$ hőmérsékleti tartományban a rendezett fázisnak.

2. A hőmérsékletet (β-t) rögzítettnek képzeljük. Ekkor az eredményt úgy értelmezhetjük, hogy a rendszer az alacsonyenergiás mérésekkel szemben különböző viselkedést mutat aszerint, hogy a csatolási állandónak mi a kezdeti értéke a természetes a UV levágásnál. Ha $J(a) > J^*$, akkor a rendszer az alacsonyenergiás mérések szempontjából hosszútávú rendet mutat, ha $J(a) < J^*$, akkor pedig rendezetlen. A csatolási állandó $J(a) = J^*$ értékével jellemzett rendszer éppen a fázisátalakulási pontban van.

3.3.2. Másodrendű közelítés

A blokkosított rendszer Hamilton-operátora az alábbi alakot ölti, ha az első- és a másodrendű kumulánst vesszük figyelembe: $H' = (H')^{(0)} + (H')^{(1)} + (H')^{(2)}$, ahol

$$(H')^{(0)} = -N_b \ln\left(e^{3J} + 3e^{-J}\right), \tag{3.98}$$

$$(H')^{(1)} = -2a_1^2 J \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle} s_\alpha s_\beta, \tag{3.99}$$

$$
\begin{aligned}
(H')^{(2)} &= -\frac{1}{2}C_2 = -\frac{1}{2}\left[\langle V^2\rangle_0 - \langle V\rangle_0^2\right] \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\langle\alpha,\beta\rangle}\sum_{\langle\gamma,\delta\rangle}\left[\left\langle V_{\alpha\beta}^{(1)}V_{\gamma\delta}^{(1)}\right\rangle_0 - 4J^2a_1^4 s_\alpha s_\beta s_\gamma s_\delta\right], \qquad (3.100)
\end{aligned}
$$

rendre a nullad-, első- és másodrendű járulékok. A másodrendű kumuláns járulékában különválasztjuk az $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\gamma,\delta\rangle$ és a $\langle\alpha,\beta\rangle \neq \langle\gamma,\delta\rangle$ tagokat.

1. Az $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\gamma,\delta\rangle$ tagok járuléka:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{\langle\alpha,\beta\rangle}\left[\left\langle\left(V_{\alpha\beta}^{(1)}\right)^2\right\rangle_0 - 4J^2a_1^4\right] \\
&= \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle}\left[J^2\langle(s_\alpha^1)^2\rangle_0\langle(s_\beta^2+s_\beta^3)^2\rangle_0 - 4J^2a_1^4\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot 6N_b\left[2J^2(1+a_2) - 4J^2a_1^4\right]. \qquad (3.101)
\end{aligned}
$$

Ez tehát a blokkspinektől független járulék.

2. Az $\langle\alpha,\beta\rangle \neq \langle\gamma,\delta\rangle$ tagok járulékában minden tag kétszer szerepel, ezért a C_2 definíciójában szereplő $\frac{1}{2}$ faktor kiesik. Csak olyan tagok adnak járulékot, amikor az $\alpha\beta$ és a $\gamma\delta$ háromszögpárok egyik háromszöge közös. Legyen ez $\beta = \delta$. Rendre első-, másod- és harmadszomszéd spineknek nevezzük az egymástól a, $a\sqrt{3}$, és $2a$ távolságra levő spineket. Az alábbi kölcsönhatások jönnek létre:

(a) elsőszomszéd $\langle\alpha,\gamma\rangle$ blokkok közötti kölcsönhatás:

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\alpha,\beta,\gamma}2J^2\left[\left\langle(s_\alpha^1+s_\alpha^2)s_\beta^3(s_\beta^3+s_\beta^1)s_\gamma^2\right\rangle_0\right. \\
&\quad - \left.\left\langle(s_\alpha^1+s_\alpha^2)s_\beta^3\right\rangle_0\left\langle(s_\beta^3+s_\beta^1)s_\gamma^2\right\rangle_0\right] \\
&= -2J^2\sum_{\langle\alpha,\gamma\rangle}\left[2a_1^2(1+a_2) - 4a_1^4\right]s_\alpha s_\gamma; \qquad (3.102)
\end{aligned}
$$

(b) másodszomszéd $\langle\langle\alpha,\gamma\rangle\rangle$ blokkok közötti kölcsönhatás:

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\alpha,\beta\gamma}J^2\left[\left\langle(s_\alpha^1+s_\alpha^2)s_\beta^3s_\beta^1(s_\gamma^2+s_\gamma^3)\right\rangle_0\right. \\
&\quad - \left.\left\langle(s_\alpha^1+s_\alpha^2)s_\beta^3\right\rangle_0\left\langle s_\beta^1(s_\gamma^2+s_\gamma^3)\right\rangle_0\right] \\
&= -J^2\sum_{\langle\langle\alpha,\gamma\rangle\rangle}\left[4a_1^2a_2 - 4a_1^4 + a_1^2(3a_2+1) - 4a_1^4\right]s_\alpha s_\gamma \\
&\equiv -K\sum_{\langle\langle\alpha,\gamma\rangle\rangle}s_\alpha s_\gamma; \qquad (3.103)
\end{aligned}
$$

(c) harmadszomszéd $\langle\langle\langle\alpha,\gamma\rangle\rangle\rangle$ blokkok közötti kölcsönhatás:

$$
\begin{aligned}
& - \sum_{\alpha,\beta,\gamma} J^2 \left[\left\langle s_\alpha^1 (s_\beta^2 + s_\beta^3) s_\beta^1 (s_\gamma^2 + s_\gamma^3) \right\rangle_0 \right. \\
& - \left. \left\langle s_\alpha^1 (s_\beta^2 + s_\beta^3) \right\rangle_0 \left\langle s_\beta^1 (s_\gamma^2 + s_\gamma^3) \right\rangle_0 \right] \\
& = - \sum_{\langle\langle\langle\alpha,\gamma\rangle\rangle\rangle} 4J^2 a_1^2 (a_2 - a_1^2) s_\alpha s_\gamma \\
& \equiv -L \sum_{\langle\langle\langle\alpha,\gamma\rangle\rangle\rangle} s_\alpha s_\gamma . \qquad (3.104)
\end{aligned}
$$

A második kumuláns tehát új típusú (másod- és harmadszomszéd) kölcsönhatásokat generál a blokkspinek között. A Hamilton-operátor alakja tehát megváltozik a blokkosítás során. Az első blokkosítási lépés után a Hamilton-operátor

$$
H' = -J' \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle} s_\alpha s_\beta - K' \sum_{\langle\langle\alpha,\beta\rangle\rangle} s_\alpha s_\beta - L' \sum_{\langle\langle\langle\alpha,\beta\rangle\rangle\rangle} + E^{(0)} \qquad (3.105)
$$

alakot ölt, ahol

$$
E^{(0)} = -N_b \left[\ln z + 3J^2 (1 + a_2 - 2a_1^4) \right], \qquad (3.106)
$$

és a csatolási állandók:

$$
\begin{aligned}
J' &= 2a_1^2 J + 4a_1^2 J^2 (1 + a_2 - 2a_1^2), && (3.107) \\
K' &= J^2 a_1^2 (1 + 7a_2 - 8a_1^2), && (3.108) \\
L' &= 4a_1^2 J^2 (a_2 - a_1^2). && (3.109)
\end{aligned}
$$

A másod- és harmadszomszéd spinek közötti kölcsönhatás J^2-rendű.

A fenti egyenletek a csatolási állandók megváltozását adják meg az első blokkosítási lépés után, ha azzal a kezdőfeltétellel indulunk, hogy a mikroszkopikus szinten, a rácsállandó esetén adott Hamilton-operátor csak elsőszomszéd spinek közötti kölcsönhatást tartalmaz. Az általános renormálási csoport egyenleteknek akárhányadik blokkosítási lépésre érvényesnek kell lenni. Ezekhez az egyenletekhez úgy juthatunk, ha eleve olyan Hamilton-operátorral indulunk, amely tartalmaz másod- és harmadszomszéd spinek közötti kölcsönhatást is. Ugyanakkor, ha tartjuk magunkat ahhoz, hogy azzal a kezdőfeltétellel fogjuk a megoldást keresni, hogy az a skálán a Hamilton-operátor csak elsőszomszéd spinek közötti kölcsönhatást tartalmaz, akkor a másod- és harmadszomszéd spinek közötti kölcsönhatás K és L csatolási állandója $\mathcal{O}(J^2)$ rendű lesz. A következő fejezetben meghatározzuk az általános renormálási csoport egyenleteket a kumulánskifejtés második rendjében.

3.3.3. A renormálási csoport egyenletek

Induljunk ki tehát abból, hogy az effektív Hamilton-operátor, amelyet valahány blokkosítási lépés után kaptunk

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - K \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} s_i s_j - L \sum_{\langle\langle\langle i,j \rangle\rangle\rangle} s_i s_j \tag{3.110}$$

alakú, ahol (a $J \neq 0$, $K = L = 0$ kezdőfeltételnek köszönhetően) K, $L \sim \mathcal{O}(J^2)$. A következő blokkosítási lépés után a Hamilton-operátor a kumulánskifejtés második rendjében, $\mathcal{O}(J^2)$ rendű tagokkal bezárólag az alábbi alakot ölti:

$$H' = -J' \sum_{\langle \alpha,\beta \rangle} s_\alpha s_\beta - K' \sum_{\langle\langle \alpha,\beta \rangle\rangle} s_\alpha s_\beta - L' \sum_{\langle\langle\langle \alpha,\beta \rangle\rangle\rangle} s_\alpha s_\beta. \tag{3.111}$$

Miután K és L J^2 rendű, ezért a C_2 kumulánshoz csak magasabb rendben adnak járulékot. Ezért a C_2 kumulánst a vizsgált közelítésben nem kell újra számolnunk, hanem használhatjuk rá az előző fejezetben kapott eredményt. Ugyanakkor az elsőrendű kumulánsban további J^2 rendű tagok lépnek fel a másod- és harmadszomszéd spinek közötti kölcsönhatás miatt.

Az elsőrendű kumuláns a potenciál $C_1 = \langle V \rangle_0$ várható értéke. A blokkosítás előtti potenciált felbonthatjuk $V = V^{(1)} + V^{(2)}$ alakban. Itt

$$V^{(1)} = -J \sum_{\langle \alpha,\beta \rangle} s_\alpha^1 (s_\beta^2 + s_\beta^3) \tag{3.112}$$

az elsőszomszéd spinek közötti kölcsönhatás által generált kölcsönhatás az elsőszomszéd blokkok között, amelynek várható értékét már az első közelítésben meghatároztuk:

$$\langle V^{(1)} \rangle_0 = -2a_1^2 J \sum_{\langle \alpha,\beta \rangle} s_\alpha s_\beta. \tag{3.113}$$

A másod- és harmadszomszéd spinek közötti kölcsönhatás további kölcsönhatást generál az elsőszomszéd és a másodszomszéd blokkok között:

$$\begin{aligned} V^{(2)} &= -\sum_{\langle \alpha,\beta \rangle} \left[K(s_\alpha^1 s_\beta^1 + s_\alpha^2 s_\beta^2 + s_\alpha^3 s_\beta^3) + L(s_\alpha^3 s_\beta^2 + s_\alpha^2 s_\beta^3) \right] \\ &\quad - \sum_{\langle\langle \alpha,\beta \rangle\rangle} L s_\alpha^1 s_\beta^3. \end{aligned} \tag{3.114}$$

Ennek megfelelően kapjuk, hogy

$$\langle V^{(2)} \rangle_0 = -(3K + 2L) a_1^2 \sum_{\langle \alpha,\beta \rangle} s_\alpha s_\beta - L a_1^2 \sum_{\langle\langle \alpha,\beta \rangle\rangle} s_\alpha s_\beta. \tag{3.115}$$

A csatolási állandókra tehát az alábbi renormálási csoport egyenleteket kapjuk:

$$J' = 2a_1^2 J + 3a_1^2 K + 2a_1^2 L + 4a_1^2 J^2 (1 + a_2 - 2a_1^2), \tag{3.116}$$

$$K' = a_1^2 L + a_1^2 J^2 (1 + 7a_2 - 8a_1^2), \tag{3.117}$$

$$L' = 4a_1^2 J^2 (a_2 - a_1^2). \tag{3.118}$$

3.4. A linearizált renormálási transzformáció

A kétdimenziós Ising-modell (első közelítésben) tárgyalt példája alapján sejtjük, hogy a fázisátalakulási hőmérsékleten másodrendű fázisátalakulást szenvedő rendszernek a renormálási transzformáció UV fixpontja felel meg. Ugyanakkor a $T = 0$ ill. $T = \infty$ hőmérsékletű rendszernek IR fixpontok.

Általában tehát, ha egy rendszer fázisaira vagyunk kíváncsiak, akkor a renormálási transzformáció fixpontjait kell keresnünk. **A fixpont** a renormálási transzformáció tulajdonsága és nem függ attól, hogy milyen kezdeti Hamilton-operátor blokkosításával jutottunk el hozzá. (Megjegyzem, hogy az első közelítésben tárgyalt kétdimenziós Ising-modell esetén az UV fixponthoz blokkosítás révén semmilyen kezdeti Hamilton-operátorból sem juthatunk el, hiszen minden renormálási csoport trajektória távolodik ettől a fixponttól.) A fixpont tehát **a végtelen sok szabadsági fokú rendszernek a kollektív viselkedését írja le**, ami független a rendszert alkotó szabadsági fokok közötti mikroszkopikus kölcsönhatásoktól. A fixpont szigorúan skálainvariáns rendszert ír le.

Annak érdekében, hogy megértsük azon fizikai rendszerek viselkedését, amelyeknek a Hamilton-operátora csak kicsit különbözik a fixponti Hamilton-operátortól, megvizsgáljuk a renormálási transzformációt a fixpont közelében. **Feltesszük, hogy a renormálási transzformáció a csatolási állandóknak analitikus függvénye (még a fixpontban is).** Ekkor szabad a transzformációt a fixpont közelében sorba fejteni. Legyen $H = H^* + \epsilon\mathcal{O}$ egy a fixpontitól kicsit különböző Hamilton-operátor (ϵ infinitezimális paraméter). A fixpontot az

$$\mathcal{R}_b(H^*) \quad = \quad H^* \tag{3.119}$$

egyenlet definiálja. A linearizált L_b renormálási transzformációt az

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_b(H^* + \epsilon\mathcal{O}) &= \mathcal{R}_b(H^*) + \epsilon L_b\mathcal{O} \\ &= H^* + \epsilon L_b\mathcal{O} \end{aligned} \tag{3.120}$$

egyenlettel értelmezzük, ahol $\epsilon \to 0$.

Az L_b operátor $\mathcal{O}_j$ sajátvektorai,

$$L_b\mathcal{O}_j \quad = \quad \lambda_j(b)\mathcal{O}_j \tag{3.121}$$

egy teljes rendszert szolgáltatnak. A fixpont közelében tetszőleges Hamilton-operátor

$$H = H^* + \sum_j g_j\mathcal{O}_j \tag{3.122}$$

alakú. Itt a g_j csatolási állandók úgy vannak választva, hogy a $g_j = 0$ értékük felel meg a fixpontnak a paramétertérben. A $\lambda_j(b)$ sajátértékek mind hatványfüggvényei a blokkosítás b paraméterének:

$$\lambda_j(b) \quad = \quad b^{y_j}. \tag{3.123}$$

Az utóbbi tulajdonságot egyszerűen beláthatjuk, ha felhasználjuk a renormálási transzformáció félcsoport-tulajdonságát:

$$\mathcal{R}_b\left(\mathcal{R}_{b'}(H)\right) = \mathcal{R}_{bb'}(H). \tag{3.124}$$

Ebből következik, hogy

$$L_b\left(L_{b'}\mathcal{O}_j\right) = L_{bb'}\mathcal{O}_j, \tag{3.125}$$

ill. hogy a sajátértékekre fennáll az alábbi függvényegyenlet:

$$\lambda_j(bb') = \lambda_j(b)\lambda_j(b'). \tag{3.126}$$

A függvényegyenlet megoldása: $\lambda_j(b) = b^{y_j}$.

Mivel a fixpontban linearizált renormálási transzformáció sajátértékei a b skálaparaméter hatványfüggvényei, az $\mathcal{O}_j$ sajátvektorokat **skálaoperátorok**nak szokás nevezni. A fixpont közeléből vett tetszőleges H Hamilton-operátorra a renormálási transzformáció hatása:

$$\mathcal{R}_b\left(H(g_j)\right) = H^* + \sum_j g_j b^{y_j}\mathcal{O}_j = H\left(g_j b^{y_j}\right). \tag{3.127}$$

A fixpont közelében tehát a Hamilton-operátorok skálainvariánsak: a Hamilton-operátor alakja megőrződik, csak a csatolási állandók értéke változik renormálás során.

A csupasz csatolási állandók a fixpont közelében

$$g_j(b) = g_j(1)b^{y_j} \tag{3.128}$$

összefüggés szerint változnak az $a' = ba$ levágással. A csatolási állandókat azért nevezzük csupasz csatolási állandóknak, mert függenek az eredeti UV levágástól, pontosabban a csatolási állandónak ezen a levágáson felvett kezdeti értékétől. Ha az y_j **skálázási kitevő** pozitív ($y_j > 0$), negatív ($y_j < 0$), ill. zérus ($y_j = 0$), akkor a megfelelő csatolási állandót ill. skálaoperátort rendre **releváns, irreleváns,** ill. **marginális csatolási állandó**nak ill. **operátornak** nevezzük. A releváns (irreleváns) csatolási állandó a skála durvítása során (blokkosítás során) szigorúan monoton nő (csökken) a fixpont közelében, míg a marginális csatolási állandó értéke változatlan marad. A g_j csatolási állandóhoz tartozó skálázási kitevőt kifejezhetjük a megfelelő λ_j sajátérték logaritmusának a skálaparaméter logaritmusa szerinti deriváltjával:

$$y_j = \frac{\partial \ln \lambda_j}{\partial \ln b}. \tag{3.129}$$

Az y_j skálázási kitevők kielégítik az

$$y_j \leq d \tag{3.130}$$

egyenlőtlenséget. A skálázási kitevők maximális lehetséges értéke tehát a rendszer dimenziójával egyenlő.

Induljunk ki abból, hogy renormálási transzformációk egymásutáni alkalmazása révén megállapítható, hogy a szabadenergia sűrűsége a fixpont közelében, a skálázó csatolási állandók általánosított homogén függvénye:

$$f(g_1, g_2, \ldots) \quad = \quad b^{-d} f\left(g_1 b^{y_1}, g_2 b^{y_2}, \ldots\right). \tag{3.131}$$

Itt a termodinamikai határesetben a $g_j(b) = g_j b^{y_j}$ csatolási állandókat intenzív paramétereknek kell tekinteni, miután az effektív (azaz a blokkosított) Hamilton-operátorban, amely extenzív mennyiség kell legyen, extenzív $\mathcal{O}_j$ mennyiségeket szoroznak. Ekkor az egyes csatolási állandókhoz tartozó „mágnesezések”, $m_j = \frac{\partial f}{\partial g_j}$, a g_j-hez konjugált extenzív mennyiségek sűrűségei. Mint ilyenek, a csatolási állandóknak $g_j \to 0$ esetén is korlátos függvényei.

A (3.131) egyenletből deriválással kapjuk az alábbi azonosságot ($b \geq 1$ tetszőleges):

$$m_j(g_1, g_2, \ldots) \quad = \quad b^{y_j - d} m_j\left(g_1 b^{y_1}, g_2 b^{y_2}, \ldots\right). \tag{3.132}$$

Válasszuk valamely rögzített J-vel azt a b értéket, amelyre $b^{y_J}|g_J| = 1$:

$$m_j(g_1, g_2, \ldots) \quad = \quad |g_J|^{(d-y_j)/y_J} m_j\left(|g_J|^{-y_j/y_J} g_j, \ \mathrm{sgn}\ g_J\right). \tag{3.133}$$

Innen látjuk, hogy m_J akkor és csak akkor korlátos $g_J \to 0$ esetén, ha $y_j \leq d$ minden $j \neq J$-re. Mivel azonban J tetszőleges rögzített index, ezért ez az egyenlőtlenség valamennyi skálázási kitevőre fennáll.

3.5. Fixpont egyetlen releváns paraméterrel

3.5.1. Korrelációs hossz. Kritikus felület

Megmutatjuk, hogy az egyetlen releváns paraméterrel rendelkező fixpont környezetében levő Hamilton-operátorok kritikus viselkedést mutató rendszer(eke)t írnak le. Ehhez belátjuk, hogy

1. a korrelációs hossz a fixponthoz a releváns irányból közeledve hatványfüggvényszerűen divergál;
2. létezik a paramétertérben egy kritikus felület, amely tartalmazza a fixpontot és amelyen a korrelációs hossz végtelen;
3. a szabadenergia sűrűsége a releváns paraméter kezdeti értékének általánosított homogén függvénye, amiből következik a fajhő kritikus viselkedése valamint a korrelációs hossz és a fajhő kritikus exponensei között fennálló $\alpha = 2 - \nu d$ skálatörvény.

Vizsgáljunk tehát olyan fixpontot, amelyhez egyetlen releváns csatolási állandó, $g_1(b) = g_1(1)b^{y_1}$, és további irreleváns csatolási állandók tartoznak. $g_1(1)$ a releváns csatolási állandó kezdeti értéke a blokkosítatlan, a rácsállandójú eredeti mikroszkopikus rendszerben. Vizsgáljuk, hogy hogyan változik a dimenziótlan ξ korrelációs hossz $g_1(1)$ értékének függvényében. Tekintettel a $\xi' = \xi/b$ összefüggésre, kapjuk, hogy:

$$\xi(g_1(1)) = b\xi\left(g_1(1)b^{y_1}, \ldots\right), \tag{3.134}$$

ahol ... az irreleváns csatolási állandóktól való függést jelzi. Ez azonban b növelése esetén elhanyagolható. Természetesen $g_1(1)$ elég kicsi kell legyen, hogy a lineáris közelítést egyáltalán alkalmazni lehessen, vagyis ez az összefüggés a fixpont közelében érvényes. A korrelációs hosszra vonatkozó függvényegyenlet megoldása

$$\xi \sim |g_1(1)|^{-\nu} \tag{3.135}$$

alakú, ahol

$$\nu = 1/y_1. \tag{3.136}$$

Ha tehát az egyetlen releváns csatolási állandóval jellemzett fixpont releváns paraméterét a redukált hőmérséklettel azonosítjuk, akkor a korrelációs hossz kritikus viselkedését kapjuk eredményül, hiszen $y_1 > 0$ miatt $\nu > 0$ adódik. Minél közelebb van a releváns paraméter, azaz a redukált hőmérséklet értéke nullához, annál nagyobb a korrelációs hossz. A fixpont közelében lévő azon pontok hiperfelülete, amelyekben a releváns paraméter értéke zérus, azaz $g_1(1) \sim t = 0$, alkotják a kritikus felületet. A kritikus felület olyan rendszereknek felel meg, amelyekben a korrelációs hossz végtelen $\xi = \infty$. A fixpont rajta van a kritikus felületen. Minden olyan renormálási csoport trajektória, amely a kritikus felületen fekvő kezdőpontból indul, mindvégig rajta marad azon, hiszen $g_1(1) = 0$ esetén $g_1(b) \equiv 0$ marad. Ezek a trajektóriák belefolynak a fixpontba, mert az összes irreleváns paraméter értéke $b \to \infty$ esetén zérushoz tart.

A kétdimenziós Ising-modell első közelítésben vizsgált példájában egyetlen, releváns paraméter van az elméletben, a J csatolási állandó. A J^* fixpont közelében $g = J - J^*$ a releváns paraméter. A kritikus felület egyetlen pontból áll amiatt, hogy a paramétertér egydimenziós ebben a közelítésben. A renormálási transzformáció a paramétertérben

$$g' = 2a_1^2 g + (2a_1^2 - 1)J^*, \tag{3.137}$$

ahol $J = J^* + g$ szerepel a_1 kifejezésében J helyén. Az L_b linearizált renormálási transzformációnak az egy-dimenziós paramétertérben 1×1-es mátrix,

$$\frac{\partial g'}{\partial g} = 2a_1^2 + (J^* + g)4a_1 b_1 \tag{3.138}$$

felel meg, ahol

$$a_1 = \frac{e^{4J}+1}{e^{4J}+3}, \qquad b_1 = \frac{\partial a_1}{\partial J} = \frac{8e^{4J}}{(e^{4J}+3)^2}. \tag{3.139}$$

Ennek értéke a fixpontban egyúttal a normált, g irányú sajátvektor λ sajátértéke:

$$\begin{aligned} \lambda &= \left.\frac{\partial g'}{\partial g}\right|_0 = (1+4a_1b_1J^*)_{J=J^*} \\ &= 1,624 \end{aligned} \tag{3.140}$$

Ennek megfelelően a g csatolási állandó skálázási kitevője a $J = J^*$ fixpontban:

$$y = \frac{\ln\lambda}{\ln\sqrt{3}} = 0,883 > 0. \tag{3.141}$$

Ez azt jelenti, hogy a g csatolási állandó az UV fixpontban releváns paraméter és a renormálás során a b skálával

$$g(b) \;=\; g(1)b^y \qquad (b \geq 1) \tag{3.142}$$

összefüggés szerint változik. A Hamilton-operátor a fixpontban

$$H^* \;=\; -J^* \sum_{\langle i,j\rangle} s_i s_j \tag{3.143}$$

alakú, a fixpont közeléből induló renormálási csoport trajektóriákon (a fixpont közelében) pedig:

$$H(b) \;=\; H^* + g(1)b^y \sum_{\langle i,j\rangle} s_i s_j. \tag{3.144}$$

Tekintettel a szabadenergia sűrűségének $f' = b^d f$ triviális skálázására, az alábbi összefüggés adódik a fixpont közelében:

$$b^d f(g_1(1)) = f\left(g_1(1)b^{y_1}, \ldots\right), \tag{3.145}$$

ahol ... megint az irreleváns paraméterektől való függést jelenti, ami a fixponthoz elegendően közel elhanyagolható. Ez azt jelenti, hogy a szabadenergia sűrűsége a releváns $g_1(1)$ paraméternek általánosított homogén függvénye. Miután az összefüggés tetszőleges $b \geq 1$ esetén fennáll, választhatjuk a $b = |g_1(1)|^{-\nu}$ értéket. Ekkor megkapjuk, hogy a szabadenergia sűrűsége a releváns $g_1(1)$ paraméter hatványfüggvénye a fixpont közelében:

$$f(g_1(1)) \;=\; |g_1(1)|^{\nu d} f\left(\,\mathrm{sgn} g_1(1)\right). \tag{3.146}$$

Ha a releváns paramétert a t redukált hőmérséklettel azonosítjuk, akkor az

$$f(t) \;=\; |t|^{\nu d} f\left(\mathrm{sgn} t\right) \tag{3.147}$$

skálatulajdonságot kapjuk. Innen a fajhőre kritikus viselkedés adódik:

$$C(t) \;\sim\; \partial_t^2 f(t) \sim |t|^{\nu d-2} f\left(\mathrm{sgn} t\right) + \mathcal{O}\left(|t|^{\nu d-1}\right). \tag{3.148}$$

Abból tehát, hogy a szabadenergia sűrűsége a releváns $g_1(1)$ paraméternek általánosított homogén függvénye, és hogy ezt a paramétert a t redukált hőmérséklettel azonosítottuk, a fajhő kritikus exponensére az

$$\alpha \;=\; 2 - \nu d \tag{3.149}$$

összefüggés következik. Ez a kritikus exponensek közötti skálatörvény.

3.5.2. Korrelációs függvény

Megmutatjuk, hogy az egyetlen releváns paraméterrel rendelkező fixpont közelében a korrelációs függvény is kritikus viselkedést mutat.

Vizsgáljunk olyan mellékfeltételeknek eleget tevő statisztikus fizikai rendszert, amelyek minden rácsspin várható értékét külön beállítják. Az s_i spineknek megfelelő kémiai potenciálok: η_i. Az $\eta_i = 0$ eset felel meg a valóságos spinrendszernek. A megfelelő statisztikus sokaságot az alábbi állapotösszeg definiálja:

$$\Xi(\eta_j) \;=\; \mathrm{Tr}_{\{s_i\}} \exp\left\{-H(s_i) - \sum_i \eta_i s_i\right\}. \tag{3.150}$$

Képezzük ebből a $\phi(\eta_i) = -\ln \Xi(\eta_i)$ termodinamikai potenciált. A korrelációs függvényt a

$$G(r_{ij}) \;=\; \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_i \partial \eta_j}\right|_{\eta_i=0} \tag{3.151}$$

összefüggéssel számolhatjuk ki.

A korábbiakban láttuk, hogy a korrelációs függvény normálását változatlanul tarthatjuk, ha a spineket megfelelőképpen átskálázzuk minden renormálási lépésben. Ez egyúttal annak felel meg, hogy a Hamilton-operátortól megköveteljük, hogy a spinekben kvadratikus tagjának az együtthatója változatlan maradjon.

Az utóbbi állítás abból következik, hogy a korrelációs függvény pontosan a Hamilton-operátor kvadratikus tagja mátrixának inverze egy olyan rendszer esetén, amelynek a Hamilton-operátora csak ebből az egy tagból áll.

A spinek a fentiek szerint $\tilde{Z}^{1/2}(b) = b^{y_s}$ faktorral szorzódnak, $s_i' = b^{y_s} s_i$. Ennek következtében a megfelelő Lagrange-multiplikátorok az $\eta_i' = b^{-y_s}\eta_i$ törvény szerint változnak, ha a b skálaparaméter változik. Ezt felhasználva a termodinamikai potenciál a releváns t csatolási állandónak és az η_i „kémiai potenciáloknak" az általánosított homogén függvénye:

$$\phi(t, \ldots, \eta_i) \;=\; b^0 \phi(b^y t, \ldots, \eta_i b^{-y_s}). \tag{3.152}$$

Itt felhasználtuk, hogy a termodinamikai potenciál (miután a $\beta = 1/(k_B T)$ faktort beleolvasztottuk) dimenziótlan. Most is $\ldots$ jelöli a fixpont közelében elhanyagolható irreleváns paramétereket. A releváns paraméter (a redukált hőmérséklet) skálázási kitevője y, tehát a korrelációs hossz kritikus exponense $\nu = 1/y$.

A termodinamikai potenciálra vonatkozó fenti összefüggésből deriválással kapjuk, hogy

$$G(r, t) \;=\; b^{-2y_s}\, \partial_{\eta_i'} \partial_{\eta_j'} \phi(b^y t, \eta_i b^{-y_s})\Big|_{\eta=0}, \tag{3.153}$$

ahol r az i és j rácspontok közötti dimenziótlan, azaz rácsállandóban kifejezett távolság. Ekkor

$$G(r, t) \;=\; b^{-2y_s} G(r b^{-1}, b^y t) \tag{3.154}$$

áll fenn tetszőleges $b(\geq 1)$ esetén. Válasszuk a $b = r$ értéket, akkor a korrelációs hosszra vonatkozó $\xi \sim t^{-1/y}$ relációt is felhasználva, a

$$G(r, t) = r^{-2y_s} G(1, r^y t) = r^{-2y_s} \mathcal{G}(r/\xi) \tag{3.155}$$

skálatulajdonság adódik a korrelációs függvényre, ahol a $\mathcal{G}$ függvény csak az r/ξ hányadostól függ. Ez a skálatulajdonság a fixpont közelében áll fenn.

Ha a kritikus felületen vagyunk, akkor $t = 0$ és $1/\xi = 0$. Ezért ekkor a korrelációs függvény az r távolság hatványfüggvénye, azaz kritikus viselkedést mutat: $G(r, 0) = r^{-2y_s}\mathcal{G}(0)$. A korrelációs függvény kritikus exponense és a spinváltozó skálázási kitevője között az $\eta = 2y_s - d + 2$ összefüggés áll fenn.

3.6. Fixpont csak irreleváns paraméterekkel

3.6.1. Fixpont véges paraméterértéknél

Tegyük fel, hogy a fixpont, amelyet vizsgálunk, csak irreleváns paraméterekkel rendelkezik. Ez a fixpont olyan tulajdonságú, hogy a közeléből elindított minden renormálási csoport trajektória belefolyik.

Legyen g az az irreleváns csatolási állandó, amelynek a skálázási kitevője $y = -s$ $(s > 0)$ a legnagyobb. Ez a csatolási állandó csökken a leglassabban, ha b nő. A korrelációs hosszra fennáll az alábbi egyenlet:

$$\xi(g(1), \ldots) = b\xi(g(1)b^{-s}, \ldots), \tag{3.156}$$

ahol ... a többi, gyorsabban csökkenő irreleváns csatolási állandót jelöli. A fentiek alapján a korrelációs hossz a fixpont közelében $\xi \sim (g(1))^{\sigma}$ viselkedést mutat. Miután $\sigma = 1/s > 0$, a korrelációs hossz a fixponthoz közeledve zérushoz tart: $\xi \to 0$, ha $g(1) \to 0$. Ez a fixpont IR fixpont.

A kétdimenziós Ising-modell első közelítésben tárgyalt példájában találkoztunk ilyen fixponttal: $J_0^* = 0$.

Ha bevezetjük a $g = J - J_0^* = J$ csatolási állandót, amelyre a $g' = 2a_1^2 g$ renormálási csoport egyenlet áll fenn, akkor a $J_0^* = 0$ pontban linearizált renormálási transzformáció 1×1-es mátrixa a paramétertérben

$$\left.\frac{\partial g'}{\partial g}\right|_{g=0} = \left(2a_1^2 + 4a_1 b_1 g\right)_{g=0} = \frac{1}{2}. \tag{3.157}$$

Ez egyúttal az egyetlen skálázó operátor $\lambda = 1/2$ sajátértéke. A skálázási kitevő $y = \ln\lambda/\ln\sqrt{3} = -1,26 < 0$. A $J_0^* = 0$ fixpontban tehát a $g = J$ csatolási állandó irreleváns.

Példánk mutatja, hogy az az operátor, amely az UV fixpontban releváns, az IR fixpontban irreleváns lehet.

3.6.2. Fixpont a végtelenben

A kétdimenziós Ising-modell példáján láttuk, hogy a $J \to \infty$ határérték is fixpontot jelent. Ebben az esetben természetesen nem tehetjük meg, hogy a transzformációt a végtelenben levő pont körül kifejtjük. Ehelyett vizsgálhatjuk a renormálási transzformáció aszimptotikus alakját. Felhasználva, hogy $a_1 \to 1$, ha $J \to \infty$, a transzformáció $J' \sim 2J$ alakúvá egyszerűsödik, azaz lineáris. Ez különösen egyszerűvé teszi a végtelenben levő fixpont tulajdonságainak tisztázását.

A csatolási állandónak az i-edik és az $(i+1)$-edik blokkosítási lépést követő értékei között $J_{i+1} = 2J_i$ összefüggés áll fenn. Innen $J_i = 2^i J_0$, ahol J_0 a blokkosítások előtti kezdeti érték. Az i-edik blokkosítási lépés után a skála $b = \left(\sqrt{3}\right)^i$. Az aszimptotikus tartományban tehát $\ln(J/J_0) = \ln b \; \ln 2/\ln\sqrt{3}$, azaz $J \sim b^y$ és a skálázási kitevő: $y = \ln 2/\ln\sqrt{3} > 0$.

Ha a $J(1)$ kezdőérték maga is az aszimptotikus tartományban van, akkor a korrelációs hosszra a

$$\xi\left(J(1)\right) = b\xi\left(J(1)b^y\right) \tag{3.158}$$

függvényegyenlet adódik. Ennek megoldása $\xi \sim (J(1))^{-\nu}$, ahol $\nu = 1/y > 0$. Ez azt jelenti, hogy $J(1) \to \infty$ esetén, vagyis ha ,,közeledünk" a végtelenben lévő fixponthoz, akkor a korrelációs hossz nullához tart, $\xi \to 0$. Ez a fixpont is IR fixpont.

A fenti vizsgálat leegyszerűsödne, ha a J paraméterről áttérnénk a $\bar{g} = \tanh J$ csatolási állandóra, $0 \leq \bar{g} \leq 1$. Ennek a transzformációnak köszönhetően a fixpont ugyanis véges értékre kerül, $\bar{g} = 1$. Ekkor a szokásos módon elvégezhetjük a transzformáció linearizálását a fixpont környezetében.

A paraméterek transzformációjával azonban óvatosan kell bánnunk. Meg lehet mutatni, hogy a $J_i \to K_i(J_j)$ paramétertranszformáció akkor és csak akkor nem változtatja meg a linearizált renormálási transzformáció sajátértékeit, ha a transzformáció determinánsa nem szinguláris a fixpontban, azaz det $(\partial J_i/\partial K_j) \neq 0$ és véges a fixpontban.

A fenti példában

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{g}} \sim \frac{1}{4}\frac{1+\bar{g}}{1-\bar{g}} \tag{3.159}$$

a $\bar{g}_* = 1$ fixpont közelében és ez a derivált a fixpontban végtelenhez tart. A renormálási transzformáció alakja a $\bar{g}_* = 1$ fixpont közelében:

$$\bar{g}' \sim \tanh\left(2 \operatorname{ar}\tanh \bar{g}\right) \sim \frac{2\bar{g}}{1+\bar{g}^{\,2}}. \tag{3.160}$$

Vezessük be a $g = 1 - \bar{g}$ paramétert:

$$g' = 2\frac{1-g}{1+(1-g)^2} - 1 \sim \frac{1}{2}g^2 + \mathcal{O}(g^3). \tag{3.161}$$

A transzformáció lineáris közelítésben $\lambda = 0$ sajátértékkel rendelkezik. A g paraméter tehát irreleváns, mégpedig olyan ,,erősen", hogy egyetlen blokkosítási lépés már beviszi az értékét a $g = 0$ fixpontba. Ez természetesen csak a közelítés következménye. A megfelelő kritikus exponens $y_g \to -\infty$, ami nem azonos a J paraméter véges kritikus exponensével. A transzformáció (3.161) közelítő alakja ugyanakkor világosan mutatja, hogy a g paraméter irreleváns, értéke szigorúan monoton csökkenve közeledik a fixpontnak megfelelő $g_* = 0$ értékhez.

Végezetül a csatolási állandók választásával kapcsolatban érdemes megjegyezni a következőket:

- A legtermészetesebb az a választás, amikor a Hamilton-operátort az operátorok valamilyen $\{\mathcal{O}_j\}$ teljes rendszere lineáris kombinációjának képzeljük el és a lineáris kombináció együtthatóit használjuk mint csatolási állandókat:

$$H = H^* + \sum_j g_j \mathcal{O}_j. \tag{3.162}$$

- Nem okoz az sem különösebb szemléleti nehézséget, ha az operátorok terében felvett eredeti $\{\mathcal{O}_j\}$ bázisról áttérünk egy másikra, $\{\mathcal{Q}_j = \sum_i B_{ji}\mathcal{O}_i\}$, B_{ij} a bázistranszformáció mátrixa. Ez azt jelenti, hogy az eredeti g_j csatolási állandókról olyan újakra, h_j, térünk át, amelyek az eredetiek lineáris kombinációi:

$$H = H^* + \sum_i h_i \mathcal{Q}_i = H^* + \sum_{ij} h_i B_{ij} \mathcal{O}_j = H^* + \sum_j g_j \mathcal{O}_j, \quad (3.163)$$

  ahonnan $g_j = h_i B_{ij}$.

- Ha valamelyik g_j csatolási állandó helyett olyan h_j csatolási állandót használunk, amellyel $g_j = \varphi(h_j)$, ahol $\varphi(x)$ egyváltozós, a fixpontban is invertálható függvény, akkor ez nem változtatja meg a fixpontban a linearizált renormálási transzformáció sajátértékeit.

- Az általános paramétertranszformáció általában akkor és csak akkor nem változtatja meg a kritikus exponenseket, ha a Jacobi-mátrixa nem szinguláris.

3.7. Rendszer külső térben

Fizikailag az az eset is érdekes, amikor a fixpont több mint egy releváns paraméterrel rendelkezik. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor két releváns paraméter van: g_1 és g_2, a többi paraméter pedig irreleváns. Ezen belül is azzal az esettel foglalkozunk, amikor a g_2 paramétert külső térnek lehet tekinteni. A **külső tér valamilyen szimmetriasértő operátor csatolási állandója**. A g_2 csatolási állandó külső tér, hogy ha az általa csatolt $\mathcal{O}_2$ operátornak kevesebb a szimmetriája mint a g_1 által csatolt $\mathcal{O}_1$ operátornak. Ha az utóbbi szimmetriája a G_0 csoport, akkor az $\mathcal{O}_2$ operátor bizonyos G_0-beli transzformációkkal szemben nem invariáns. Jelölje rendre $y_1 > 0$ és $y_2 > 0$ a g_1 és a g_2 csatolási állandók skálázási kitevőit.

Amennyiben a külső tér zérus, $g_2(1) = 0$, akkor a fixpont közelében a korrelációs hossz viselkedését az y_1 kitevő szabja meg a már korábban tárgyalt módon. Ezért g_1-et azonosíthatjuk a redukált hőmérséklettel: $g_1(1) \sim t$, $y_1 \sim y_t$. Az irreleváns paraméterek a $t = 0$, $g_2(1) = 0$ fixpontra illeszkedő kritikus felületet határoznak meg, amelyen a korrelációs hossz végtelen, $\xi(t = 0, g_2(1) = 0) \to \infty$. A kritikus felület közelében pedig (zérus külső tér esetén)

$$\xi(t, 0) \sim |t|^{-\nu}, \qquad f(t, 0) \sim |t|^{\nu d} \quad (3.164)$$

érvényes, ahol $\nu = 1/y_1$.

Kérdés, hogy mi van akkor, ha a külső tér nem zérus, azaz ha $g_2(1) \neq 0$. Miután ebben az esetben két releváns paraméter van, a korrelációs hossz és a szabadenergia sűrűsége ezeknek általánosított homogén függvénye:

$$\begin{aligned} \xi(t, g_2(1)) &\sim b\xi\left(tb^{y_1}, g_2(1)b^{y_2}\right), \\ f(t, g_2(1)) &\sim b^{-d} f\left(tb^{y_1}, g_2(1)b^{y_2}\right). \end{aligned} \tag{3.165}$$

Válasszuk a fenti egyenletekben b értékét úgy, hogy $g_2(1)b^{y_2} = 1$ legyen. Ekkor az alábbi skálatulajdonságokat kapjuk:

$$\begin{aligned} \xi(t, g_2(1)) &= (g_2(1))^{-1/y_2}\, \xi\left(t(g_2(1))^{-y_1/y_2}, 1\right), \\ f(t, g_2(1)) &= (g_2(1))^{d/y_2}\, f\left(t(g_2(1))^{-y_1/y_2}, 1\right). \end{aligned} \tag{3.166}$$

A (3.166) függvényegyenleteknek minőségileg két különböző típusú megoldása van:

1. A korrelációs hossz véges értékű marad a $t = 0$ redukált hőmérsékleten is, ha a külső tér nem nulla. Ilyenkor továbbra is egy izolált fixponttal van dolgunk. Arra utalva, hogy a külső mágneses térbe helyezett Ising-spinrendszer esete ilyen, jelöljük a külső teret $g_2(1) \equiv h$-val.
2. A korrelációs hossz a $g_2(1) \equiv \Delta$ külső tér nem zérus értéke esetén is végtelenné válik valamilyen $T_c(\Delta)$ hőmérsékleten, ami általában különbözik a zérus külső térben levő rendszer kritikus hőmérsékletétől. Ilyenkor a fixpontokból álló vonal van jelen a releváns paraméterek alterében.

3.7.1. Izolált fixpont

Az irreleváns irányok a paramétertérben meghatározzák a fixpontra illeszkedő kritikus felületet, amely eleget tesz a $t = 0$, $h = 0$ egyenleteknek. Ha $h = 0$, akkor a korrelációs hossz $\xi \sim |t|^{-\nu} \sim |t|^{-1/y_t}$ skálatulajdonságot mutat a fixpont közelében és $\xi \to \infty$ a kritikus felületen.

A szabadenergia sűrűsége a redukált hőmérsékletnek és a külső térnek általánosított homogén függvénye:

$$f(t, h) = b^{-d} f\left(tb^{y_1}, hb^{y_2}\right). \tag{3.167}$$

Ebből az egyenletből deriválással kapjuk, hogy a külső térhez csatolt „mágnesezés”,

$$m(t, h) \equiv -\frac{\partial f(t, h)}{\partial h} = b^{y_h - d} m\left(tb^{y_t}, hb^{y_h}\right), \tag{3.168}$$

is a redukált hőmérséklet és a külső tér általánosított homogén függvénye. A blokkosított és az eredeti rendszer ,,mágnesezése" között tehát $m' = b^{d-y_h} m$ kapcsolat van.

Miután a fenti egyenletben $b \geq 1$ tetszőleges, $t \neq 0$ esetén választhatjuk a $|t| b^{y_t} = 1$ egyenletet kielégítő b értéket. Ekkor azt kapjuk, hogy:

$$m(t,h) \;=\; |t|^{\nu(d-y_h)} m\left(\,\mathrm{sgn}\; t, h|t|^{-\nu y_h}\right). \tag{3.169}$$

A mágnesezésre vonatkozó (3.169) egyenletből megkapjuk a β és γ kritikus exponenseket.

1. Vegyük a (3.169) egyenletet $h = 0$ esetén:

$$m(t,0) \;\sim\; |t|^{\nu(d-y_h)} \sim |t|^{\beta}, \tag{3.170}$$

ahonnan $\beta = \nu(d - y_h)$.

2. Képezzük a (3.169) egyenletből a h külső térhez tartozó szuszceptibilitást,

$$\begin{aligned} \chi(t,h) \;&\equiv\; \frac{\partial m}{\partial h} \\ &=\; |t|^{\nu(d-y_h)-\nu y_h} \chi\left(\,\mathrm{sgn}\; t, h|t|^{-\nu y_h}\right), \end{aligned} \tag{3.171}$$

ahonnan $h = 0$ esetén $\chi \sim |t|^{-\gamma}$ és $\gamma = -\nu(d - 2y_h)$.

A kritikus hőmérsékleten, $t = 0$ esetén, a (3.168) egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$m(0,h) \;=\; b^{-(d-y_h)} m\left(0, h b^{y_h}\right). \tag{3.172}$$

Innen a $|h| b^{y_h} = 1$ egyenletnek elegettevő b értéket választva

$$m(0,h) \;=\; |h|^{-(d-y_h)/y_h} m(0,1) \sim |h|^{-1/\delta} \tag{3.173}$$

adódik a $\delta = y_h/(d - y_h)$ kritikus exponenssel.

Az α, β, γ és δ kritikus exponenseket sikerült tehát kifejeznünk, mint a redukált hőmérséklet és a külső tér skálázási kitevőinek függvényeit. Ezek után egyszerű behelyettesítéssel igazolhatók a dimenziótól függő és a dimenziótól független skálatörvények.

3.7.2. Fixpontokból álló vonal

A (3.166) egyenletek akkor tudnak kritikus viselkedést eredményezni $\Delta \neq 0$ esetén, ha

$$\xi(x,1) \;=\; |x - x_c|^{-\nu'} \tag{3.174}$$

valamilyen $x_c \neq 0$ állandóval. Ezt behelyettesítve a (3.166) egyenletek közül a korrelációs hosszra vonatkozóba,

$$\xi(t,\Delta) \sim \Delta^{(\nu'-\nu)\phi}|t(\Delta)|^{-\nu'} \tag{3.175}$$

adódik. Itt a $\nu = 1/y_1$, $\nu\phi = 1/y_2$ jelölést használtuk, továbbá bevezettük a Δ külső tértől függő kritikus hőmérsékletet,

$$T_c(\Delta) = T_c(0)\left(1 + x_c\Delta^{y_1/y_2}\right) = T_c(0)\left(1 + x_c\Delta^{\phi}\right), \tag{3.176}$$

és a megfelelő redukált hőmérsékletet,

$$t(\Delta) = \frac{T - T_c(\Delta)}{T_c(\Delta)}. \tag{3.177}$$

Itt ν' a korrelációs hossz kritikus exponense a szimmetriasértő rendszerben. Ez várhatóan nem egyezik meg a szimmetrikus rendszer ν kritikus exponensével.

A szabadenergia sűrűségére a (3.166) egyenletekből $f(x,1) \sim |x - x_c|^{\sigma}$ esetén adódik skálázás. Ha $\sigma = \nu'' d$ alakban írjuk a kitevőt, akkor

$$f(t,\Delta) \sim \Delta^{(\nu-\nu'')d\phi}|t(\Delta)|^{\nu'' d} \tag{3.178}$$

adódik. Feltéve, hogy rögzített Δ esetén a korrelációs hossz és a szabadenergia kritikus exponense között ugyanaz az összefüggés, mint zérus külső tér esetén, $\nu'' = \nu$ érvényes.

A fixpontok tehát a $t\Delta^{-\phi} = 1$ egyenlettel meghatározott vonal mentén helyezkednek el a (t,Δ) releváns altérben. A $(t = 0, \Delta = 0)$ pontot leszámítva, ezek mind a szimmetriasértő rendszer fixpontjai. A szabadenergia sűrűségének végességéből $\nu' < \nu$ kell teljesedjen a fizikailag értelmes esetekben. Ekkor a korrelációs hossz $t \neq 0$, $\Delta \to 0$ esetén is végtelenhez tart.

3.8. Kétdimenziós Ising-modell háromszögrácson *(folytatás)*

Vizsgáljuk tovább a kétdimenziós háromszögrácson definiált Ising-modellt a kumulánskifejtés második rendjében. A korábban már levezetett renormálási csoport egyenletekből indulunk ki:

$$J' = 2a_1^2 J + 3a_1^2 K + 2a_1^2 L + 4a_1^2 J^2(1 + a_2 - 2a_1^2), \tag{3.179}$$
$$K' = a_1^2 L + a_1^2 J^2(1 + 7a_2 - 8a_1^2), \tag{3.180}$$
$$L' = 4a_1^2 J^2(a_2 - a_1^2). \tag{3.181}$$

A renormálási transzformációnak most is három fixpontja van, mint a kumuláns-közelítés első rendjében: $J = K = L = 0$ IR fixpont, ($J \to \infty$, $K = L = 0$) IR fixpont, és létezik egy (J^*, K^*, L^*) UV fixpont.

Ha $J = 0$, akkor $a_1 = \frac{1}{2}$ és $a_2 = 0$, s így könnyű belátni, hogy a $J = K = L = 0$ pont csakugyan fixpont. Hasonlóan $J \to \infty$ esetén $a_1 \to 1$ és $a_2 \to 1$, úgyhogy a renormálási transzformáció a $J' = 2J$, $K' = L' = 0$ alakra egyszerűsödik, amiből nyilvánvaló, hogy a $J \to \infty$, $K = L = 0$ is fixpont.

Az UV fixpont helyéről azt feltételezzük, hogy elég közel van ahhoz a ponthoz, anelyet a kumuláns-közelítés első rendjében fixpontnak találtunk. Ezért az UV fixpont olyan numerikus algoritmussal [6] található meg, amelyik a renormálási transzformációnak ezen fixpont közelében linearizált alakjára alapul.

A linearizált $\underline{g}' = L_b \underline{g}$ renormálási transzformációnak a g_i paraméterek terében az $(L_b)_{ij}$ mátrix felel meg. Ez a mátrix általában nem szimmetrikus, $(L_b)_{ij} \neq (L_b)_{ji}$. Az $(L_b)_{ij}$ mátrix minden $\lambda^{(n)}$ sajátértékéhez létezik egy baloldali $\bar{\phi}_i^{(n)}$ és egy jobboldali $\phi^{(n)}$ sajátvektor:

$$\bar{\phi}_i^{(n)}(L_b)_{ij} = \lambda^{(n)}\bar{\phi}_j^{(n)}, \qquad (L_b)_{ij}\phi_j^{(n)} = \lambda^{(n)}\phi_i^{(n)}, \tag{3.182}$$

amelyek kielégítik a teljességi relációt,

$$\sum_n \bar{\phi}_i^{(n)}\phi_j^{(n)} = \delta_{ij}, \tag{3.183}$$

és az ortogonalitási relációt,

$$\sum_j \bar{\phi}_j^{(n)}\phi_j^{(m)} = \delta_{nm}. \tag{3.184}$$

A csatolási állandók $\underline{g}$ oszlopvektorát kifejtjük a linearizált renormálási transzformáció jobboldali sajátvektorai által alkotott bázis szerint:

$$g_j = \sum_n u_n \phi_j^{(n)}. \tag{3.185}$$

A linearizált renormálási transzformáció

$$g_i' = \sum_{nj}(L_b)_{ij}u_n\phi_j^{(n)} = \sum_n u_n\lambda^{(n)}\phi_i^{(n)} \tag{3.186}$$

alakot ölt. Innen látszik, hogy az u_n csatolási állandók a skálázó csatolási állandók, miután a $\lambda^{(n)}$ sajátértékek mind $\lambda^{(n)} = b^{y_n}$ alakúak: $u_n' = u_n\lambda^{(n)} = u_n b^{y_n}$. Az eredeti g_i csatolási állandók segítségével a Hamilton-operátor $H(b) = H^* + \sum_i g_i\mathcal{O}_i$ alakú a $g_i^* = 0$ fixpont közelében. A skálázó csatolási állandók segítségével a Hamilton-operátor átírható a

$$H(b) = H^* + \sum_{in} u_n\phi_i^{(n)}\mathcal{O}_i = H^* + \sum_n u_n\mathcal{Q}_n \tag{3.187}$$

alakba, ahol $\mathcal{Q}_n = \sum_i \phi_i^{(n)} \mathcal{O}_i$ a skálázó operátorok. A skálázó u_n csatolási állandók a linearizált renormálási transzformáció baloldali sajátvektorai segítségével

$$u_n = \sum_j \bar{\phi}_j^{(n)} g_j \tag{3.188}$$

alakban fejezhetők ki az eredeti csatolási állandókkal. A fixpont közelében a renormálási transzformáció

$$g_i' - g_i = \sum_n u_n \left(\lambda^{(n)} - 1\right) \phi_i^{(n)} \tag{3.189}$$

alakú.

A fenti összefüggések alapján a fixpontot az alábbi algoritmussal kereshetjük meg:

1. Vegyünk egy becsült értéket a fixpont helyére, $J_i^{(1)}$. Legyen ez a kumulánskifejtés első rendjében talált $J_1 = J = 0.366$, $J_2 = K = 0$, $J_3 = L = 0$ érték. Vegyük továbbá az ebben a közelítésben talált $\lambda^{(n)}$ sajátértékeket és bal- és jobboldali sajátvektorokat.

2. Számoljuk ki a renormálási transzformáció nem linearizált (3.179) képletei szerint az egy renormálási lépés után kapott $J_i^{(1)'}$ értéket.

3. A (3.189) egyenlet alapján becsüljük meg az u_n csatolási állandókat:

$$u_n = \frac{1}{\lambda^{(n)} - 1} \sum_j \bar{\phi}_j^{(n)} \left(J_i^{(1)'} - J_i^{(1)}\right), \tag{3.190}$$

ahol a fixponttól mért csatolási állandókat $g_i = J_i^{(1)'} - J_i^{(1)}$ alakban becsültük.

4. A fixpontra a következő becslést a (3.185) egyenlet alapján kapjuk:

$$J_i^{(2)} = J_i^{(1)} - \sum_n u_n \phi_i^{(n)}. \tag{3.191}$$

5. Ezután ismételjük az algoritmus fenti lépéseit a fixpont új becsült értékével, mint kezdőértékkel.

A fenti algoritmussal a fixpontra $J^* = 0,2789$, $K^* = -0,0142$, $L^* = -0,0152$ adódott; a sajátértékek $\lambda^{(1)} = 1,7729$, $\lambda^{(2)} = 0,1948$, $\lambda^{(3)} = -0,1364$ és a megfelelő jobboldali sajátvektorok [6]:

$$\phi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,0432 \\ -0,0147 \\ -0,0458 \end{pmatrix}, \quad \phi^{(2)} = \begin{pmatrix} -0,0726 \\ 0,0690 \\ 0,0291 \end{pmatrix}, \quad \phi^{(3)} = \begin{pmatrix} -0,0294 \\ 0,0543 \\ 0,0168 \end{pmatrix}. \tag{3.192}$$

(A negatív sajátérték nyilvánvalóan az alkalmazott algoritmus és a közelítés pontatlansága miatt lép fel.) Egyértelműen látszik, hogy az u_1 csatolási állandó releváns,

$y_1 = \ln \lambda^{(1)} / \ln \sqrt{3} = 1.042 > 0$, az u_2 csatolási állandó pedig irreleváns, $y_2 = \ln \lambda^{(2)} / \ln \sqrt{3} < 0$. A továbbiakban az egzakt megoldásnak megfelelően az u_3 csatolási állandót is irrelevánsnak tekintjük.

Az UV fixpontról a következők mondhatók el. Tartozik hozzá egy a $\phi^{(1)}$ által meghatározott releváns irány. A $\phi^{(2)}$ és $\phi^{(3)}$ által meghatározott irreleváns irányok definiálják a fixpontra illeszkedő kritikus felületet. Ez a felület elmetszi a J tengelyt. A numerikus vizsgálat szerint a metszéspont a $J_c = 0,2575$ értéknél van. Ez megfelel a csak elsőszomszéd kölcsönhatást tartalmazó kritikus Ising-modellnek. Az ezzel a $(J_c, 0, 0)$ kezdőfeltétellel indított renormálási trajektória, mint a kritikus felület valamennyi trajektóriája, belefolyik a fixpontba. Azok a renormálási trajektóriák, amelyek az UV fixpont közeléből, a releváns irányban fekvő pontból indulnak el, a releváns irányban haladnak, majd a linearitási tartományból kikerülve belefolynak a $(J \to \infty, K = L = 0)$ avagy a $J = K = L = 0$ IR fixpontokba, aszerint, hogy a kritikus felület melyik oldaláról indultak.

3.9. Univerzalitás

Az (3.8.) fejezetben ismertetett példa kapcsán megfogalmazhatjuk, hogy mit értünk **univerzalitás**on:

- Mindazok a renormálási trajektóriák, amelyek az UV fixpontra illeszkedő kritikus felületről indulnak, belefolynak a fixpontba. Ez azt jelenti, hogy végtelen sok rendszer van, amelyek Hamilton-operátorai a kritikus felület pontjainak felelnek meg, és amelyek mind azonos kritikus viselkedéssel jellemzett fázisátalakulással rendelkeznek. A kritikus viselkedésük pontosan ugyanolyan mint a fixponti Hamilton-operátorral leírt rendszeré. Ez azt jelenti, hogy a kritikus viselkedés szempontjából nem érdekesek a kölcsönhatások részletei. **A fixponti Hamilton-operátorhoz tetszőleges irreleváns kölcsönhatást adva, még mindig olyan rendszerhez jutunk, amelynek a kritikus viselkedése ugyanaz marad, mint a fixponti rendszeré.**

- Az univerzalitás a kritikus felület közeléből induló renormálási trajektóriák folyásában is megnyilvánul. Bizonyos szempontból kitüntetett az a τ_R trajektória, amely a releváns irányban (ill. annak ellentettjében) indul. Ennek pontjai a fixpont linearitási tartományában olyan Hamilton-operátornak felelnek meg, amelyek a fixponti Hamilton-operátortól csak a releváns operátorral különböznek. Ezek skálainvariáns rendszert írnak le: a Hamilton-operátor alakja a linearitási tartományon belül nem változik, csak a csatolási állandó módosul a durva-szemcsésítés következtében a renormálási trajektória mentén. Vizsgáljunk most olyan τ trajektóriát, amelynek kezdőpontjához tartozó Hamilton-operátorban a releváns tag mellett kis irreleváns kölcsönhatás is van.

Ez a trajektória a renormálás során belesimul a skálainvariáns rendszerek τ_R trajektóriájába. A τ és a τ_R trajektória „távolsága" az irreleváns skálázási kitevők áltak meghatározott módon, a skálaparaméter hatványfüggvényeként csökken. Ha a linearitási tartomány elég nagy, akkor annak határához érve a τ trajektóriák a τ_R trajektóriához meglehetősen közel kerülnek, és ezért lényegében együtt futnak be $b \to \infty$ esetén az IR fixpontok valamelyikébe. **Az univerzalitás tehát azt jelenti, hogy az egymástól csak irreleváns kölcsönhatásokban különböző mikroszkopikus elméletek azonos alacsonyenergiás (IR) viselkedést mutatnak. Az IR viselkedés szempontjából az UV fixpont irreleváns operátorai csakugyan nem lényegesek.**

Az előző fejezetben tárgyalt példa esetén ez tényleg elmondható. Ennek az az oka, hogy az UV fixpontban irreleváns paraméterek, ill. azok lineáris kombinációi az IR fixpontok közelében is irrelevánsak maradnak. **Az univerzalitásnak van tehát egy szükséges feltétele: az, hogy az UV tartományban irreleváns paraméterek az IR tartományban is irrelevánsak maradjanak.** Elképzelhetők azonban olyan rendszerek, amelyeknek a paraméterterében több fixpont is létezik. Ilyenkor mindegyik fixpont környezetében található egy linearitási tartomány, amelyen belül az operátorok az adott fixpontban linearizált renormálási transzformáció sajátértékei szerint osztályozhatók relevánsakra és irrelevánsakra. Ez az osztályozás azonban a különböző fixpontok környezetében különböző eredményt adhat. Ha a renormálási csoport trajektória az F_1 fixpont közeléből az F_2 fixpont felé folyik, akkor előfordulhatnak a következő esetek:

1. Az F_1 közelében irreleváns paraméter az F_2 közelében is irreleváns marad. Ekkor az F_1 közelében definiált, csak irreleváns kölcsönhatások erejéig különböző modellek univerzalitást mutatnak az F_2 fixpont közelében.

2. Az F_1 közelében irreleváns paraméter az F_2 közelében relevánssá válik. Ekkor azok a renormálási csoport trajektóriák, amelyek az F_1 linearitási tartományának határán még kicsiny különbséggel együtt futnak, az F_2 fixpont felé tartva szétválnak. A „távolságuk" a skálaparaméter hatványfüggvényeként nő a relevánssá váló paraméter skálázási kitevője által meghatározott mértékben. Ilyenkor nem beszélhetünk univerzalitásról. A mikroszkopikus modellbe bevezetett irreleváns kölcsönhatások a rendszernek az alacsony energián mutatott viselkedését érdemben befolyásolják.

3.10. Összefoglalás

A kvantumtérelméletben a renormálási csoport transzformációt kézenfekvő az impulzustérben végrehajtani. Ekkor a renormálási transzformációt a következőképpen definiáljuk:

1. A partíciós függvény e^{-S_Λ} magját kiintegráljuk a $k < |p| < \Lambda$ impulzusú kvantumfluktuációk amplitúdói szerint, ahol Λ a rögzített UV levágás, k pedig az effektív elmélet skáláját megadó futó levágás.

2. Az eredményt úgy értelmezzük, mint az effektív elmélet partíciós függvényének e^{-S_k} magját.

Ezzel definiáltuk annak az effektív elméletnek az S_k hatásfunkcionálját, ami leírja a vizsgált rendszer viselkedését a k skálán. Utóbbin azt a fizikai viselkedést értjük, amit olyan megfigyelő lát, akinek a műszerei a k-nál nagyobb hullámszámú kvantumfluktuációkat nem tudják közvetlenül érzékelni. Az ilyen megfigyelő nem látja a rendszer nagyfrekvenciás, azaz kicsiny távolságokon megmutatkozó finom részleteit. Azok meglétét csak áttételesen észleli, amennyiben azok az alacsonyfrekvenciás, azaz nagyobb méretskálájú szerkezetben megnyilvánulnak.

A renormálási transzformációt úgy definiáltuk, hogy az eredeti és az effektív elmélet partíciós függvénye azonos. Éppen ez biztosítja, hogy annak a rendszernek az alacsonyenergiás viselkedését írja le az S_k hatás, amelyet ,,mikroszkopikusan" az S_Λ hatás definiál az UV levágásnál. Matematikai értelemben nem történik más, mint hogy a partíciós függvényben a különböző frekvenciájú kvantumfluktuációkra meghatározott sorrendben végezzük el az integrálást. Ezáltal a renormálási transzformáció, ill. a pályaintegrál úgy működik, mint egy mikroszkóp, amelynek a felbontását, azaz a nagyfrekvenciás részletekre való érzékenységét fokozatosan rontjuk el.

A renormálási transzformáció még ügyesebb kivitelezését nyerjük, amikor arra irányítjuk a figyelmet, hogy milyen változást okoz a k skálán talált effektív elméletben, ha kiintegráljuk azokat a további fluktuációkat, amelyek hullámszáma a $k - \Delta k < |p| < k$ egyenlőtlenséggel adott infinitezimális gömbhéjba esik. A változás az egyhurok-rendű járulék alakját ölti. Ez azonban a k skálán érvényes effektív elmélethez számolt egyhurok-rendű korrekció, ami az S_Λ hatással adott eredeti elméletnek különböző hurokrendű járulákait tartalmazza felösszegezve. A felösszegzés azáltal valósul meg, hogy az infinitezimális $\Delta S_k = S_{k-\Delta k} - S_k$ változást S_k-ból és nem S_Λ-ból kell meghatározni. A ΔS_k változás, amelyet a $k-\Delta k < |p| < k$ impulzusú kvantumfluktuációk okoznak, nem független a már előzőleg kiintegrált magasabb frekvenciájú módusoktól. A mozgó k levágástól függő hatásfunkcionálra differenciálegyenletet vezettünk le, a Wegner-Houghton-egyenlet. Fontos megjegyezni, hogy érvényességi körén belül ez az egyenlet egzakt. Az S_Λ hatás a Wegner-Houghton-egyenlet kezdőfeltétele.

A Wegner-Houghton-egyenlet S_k megoldása általában kifejthető valamilyen végtelen sok kölcsönhatási tagból (vertexből) álló teljes rendszer szerint. A kifejtés együtthatói a csatolási állandók. Ezek a k skálától függő, futó csatolási állandók. ,,Futásukban" van kódolva, hogy milyennek látja a rendszer fizikai viselkedését az a megfigyelő, aki méréseit a k energiaskálán végzi.

A csatolási állandók a rendszer (végtelen dimenziós) paraméterterét definiálják. Ebben a rendszert adott k skálán egy pont jellemzi. A rendszerhez tartozó effektív elméletek a renormálási trajektória mentén helyezkednek el. Ezek azok az effektív elméletek, amelyek renormálási transzformációkkal megkaphatók valamely kezdőfeltételnek megfelelő S_Λ hatásból. Az ultraibolya skálán választott különböző hatásokkal indulva a renormálási transzformáció különböző trajektóriákat szolgáltat. A renormálási transzformációnak a jellemzői a fixpontok, amelyek függetlenek attól, hogy az UV skálán milyen mikroszkopikus modellt választunk. A fixpontok száma és természete csak a rendszer dimenziójától és szimmetriájától függ. A fixpontokat aszerint lehet osztályozni, hogy a környezetükben hogyan viselkedik a renormálási transzformáció. A fixpont jellemzésének az a módja, hogy a fixpont közelében linearizáljuk a renormálási transzformációt és megkeressük a sajátértékeit és sajátvektorait. A skála $k \to k' = k/b$ megváltozásához tartozó sajátértékek mindig b^y alakú hatványfüggvények. Az $y > 0$, $= 0$, < 0 kitevőkhöz tartozó sajátvektorok, azaz kölcsönhatási vertexek rendre relevánsak, marginálisak ill. irrelevánsak. A releváns irányokban a renormálási trajektória eltávolodik az egymást követő renormálási transzformációk során a fixponttól, az irreleváns irányokban pedig közeledik hozzá.

Különösen fontos az olyan, ún. stabil fixpont, amelyhez egyetlen releváns paraméter tartozik. Az ilyen fixpont úgynevezett kritikus felületen fekszik, amelyet az irreleváns paraméterek definiálnak. A kritikus felület pontjai mind a fixponttal ekvivalens alacsonyenergiás viselkedést mutató rendszereket írnak le. A kritikus rendszer minden skálán önhasonló, azaz a hatás kifejezése minden skálán ugyanazokat a kölcsönhatási tagokat tartalmazza, és a dimenziótlan csatolási állandók értéke sem változik renormálási transzformáció során. A kritikus felület két oldalán elhelyezkedő pontok a rendszer két különböző fázisának felelnek meg. A releváns csatolási állandó értéke szabja meg, hogy melyik fázisban van a rendszer. A statisztikus fizikai kritikus rendszerekhez képest annyi az eltérés, hogy a hőmérséklet szerepét a (zérus hőmérsékletű) kvantumtérelméletben a releváns csatolási állandó veszi át.

Ha a renormálási csoportnak egyetlen stabil fixpontja van, akkor a megfelelő rendszerekre érvényes az univerzalitás:

1. A kritikus felülethez tartozó rendszerek azonos alacsonyenergiás viselkedést mutatnak.

2. A kritikus felület közeléből indított renormálaśi trajektóriák az irreleváns kölcsönhatások eltűnése révén belesimulnak abba a trajektóriába, amely a fixpontból a releváns irányban fut ki. Utóbbi felel meg a renormálható elmélet trajektóriájának.

Azok az elméleti modellek tehát, amelyek csak irreleváns kölcsönhatásokban különböznek az UV skálán, mind azonos alacsonyenergiás viselkedést mutatnak.

Elképzelhető olyan fixpont, amelynek csak releváns paraméterei vannak. Az ilyen fixpont igazi UV fixpont, amely olyan fundamentális elméletet ír le, ami nem kapható meg más elméletből effektív elméletként. Az olyan fixpont, amelynek csak irreleváns paraméterei vannak, IR fixpont. Bárhonnan induljon is egy renormálási trajektória, az belefut ebbe a fixpontba.

Ha az elméletnek több fixpontja van, akkor az bonyolultabb helyzetet jelent. Egyrészt az egyes fixpontok közelében mások lehetnek a releváns kölcsönhatások. Az a kölcsönhatás esetleg, ami az UV skálán releváns, az IR skálán irrelevánssá válik, míg az UV skálán irreleváns kölcsönhatások az IR skálán relevánssá válhatnak. Másrészt ez az univerzalitás elvesztéséhez is vezethet. Képzeljük el, hogy az UV skáláról olyan renormálási trajektóriákat indítunk, amelyek csak kicsiny irreleváns tagokban különböznek egymástól. Ezek az IR tartományt közel azonos módon, a renormálható elmélet trajektóriája közelében érik el. Az attól való kicsiny eltérésük azonban az IR tartományban jelentőssé válik, miután a megfelelő irreleváns csatolás releváns lesz. Ezért teljesen különböző IR viselkedést mutathatnak azok az elméletek, amelyek az UV skálán csak irreleváns paraméterekben különböznek.

4. Statisztikus fizika és kvantumtérelmélet

Ebben a fejezetben látni fogjuk, hogy a statisztikus fizikai spinmodellek átfogalmazhatók kvantumtérelméleti modellekké. Ez a kapcsolat egyúttal azt is jelenti, hogy a renormálási csoport a kvantumtérelméletben lényegében ugyanúgy alkalmazható a $T = 0$ hőmérsékletű rendszer különböző fázisainak megkeresésére, mint a statisztikus fizikában. Amíg a statisztikus fizikában a különböző fázisátalakulást általában a hőmérséklet változtatásával érjük el, addig a zérus hőmérsékletű kvantumtérelméletben valamely csatolási állandó játszhat hasonló szerepet.

Megvizsgáljuk, hogy mi a hagyományos, perturbatív értelemben vett renormálhatóság kapcsolata a kölcsönhatási vertexek renormálási csoport módszerrel történő osztályozásával, és hogy mi a kapcsolat a szokásos perturbatív renormálás és a renormálási csoport segítségével végzett renormálás között. Megtanuljuk, hogy a renormálási csoport eszközként szolgál arra, hogy a nagyenergiás (az UV levágásnál megfogalmazott) elméletből megkapjuk a neki megfelelő alacsonyenergiás effektív elméletet. A renormálási csoport olyan mint egy mikroszkóp, amelynek a felbontóképességét fokozatosan elrontjuk. Először nagy felbontásnál vagyunk, a kölcsönhatások finom (nagyenergiás) részleteit látjuk és ezeket lerögzítve definiálunk az UV skálán egy elméletet. Ezután azt a kérdést tesszük fel, hogy milyennek észleli az alacsonyenergiás megfigyelő a rendszert, ha az arról alkotott ,,mikroszkopikus", azaz UV skálán megfogalmazott modellünk helyes? A renormálási csoport módszere segítségével kiintegráljuk mindazokat a szabadsági fokokat, azokat a rövid hullámhosszú kvantumfluktuációkat, amelyek a rosszabb felbontás esetén már nem észlelhetők közvetlenül. Hatásuk beépül annak az effektív elméletnek a csatolási állandóiba, amelyet az eljárás eredményeképpen nyerünk. Alább megmutatjuk, hogy mindez hogyan kivitelezhető matematikai formában: egzakt egyenletet vezetünk le, amelynek a megoldása az effektív elmélet hatása, mint a felbontás függvénye. A felbontást azzal a futó UV levágással adjuk meg, amelynél nagyobb frekvenciájú kvantumfluktuációkat az alacsonyenergiás megfigyelő nem tud közvetlenül észlelni.

Végezetül foglalkozunk a skalártér renormálásával és trivialitásával.

4.1. Statisztikus fizikai modell kvantumtérelméleti átfogalmazása

Ebben a fejezetben az Ising-modell példáján megmutatjuk, hogyan lehet a statisztikus fizikai spinmodellnek egy kvantumtérelméleti modellt megfeleltetni. A megfeleltetés a **Hubbard-Stratonovich-féle transzformáción** alapul. Ennek lényege, hogy az s_i spinekben kvadratikus Hamilton-operátorú rendszer kanonikus állapotösszegét a rácspontokban értelmezett ϕ_i térre vonatkozó pályaintegrállá írjuk át, miáltal a spinekben lineáris klasszikus hatást kapunk a ϕ_i térre:

$$\begin{aligned} Z &= \mathrm{Tr}\exp\left\{\frac{\beta}{2}\sum_{ij} s_i J_{ij} s_j\right\} \\ &= \frac{\mathrm{Tr}\prod_i \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\phi_i}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{ij}\phi_i(\beta J)^{-1}_{ij}\phi_j + \sum_j \phi_j s_j\right\}}{\prod_i \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\phi_i}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{ij}\phi_i(\beta J)^{-1}_{ij}\phi_j\right\}}. \end{aligned} \tag{4.193}$$

Itt J_{ij} pozitív definit mátrix, Tr a spinkonfigurációkra való összegzést jelöli.

A bizonyítás rendkívül egyszerű, hiszen a jobb oldalon álló tört számlálójában és nevezőjében is Gauss-integrál szerepel, ami azonnal elvégezhető:

$$\text{nevező} = \left(\mathrm{Det}(\beta \underline{\underline{J}})\right)^{-1/2} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ln(\beta\underline{\underline{J}})\right\}, \tag{4.194}$$

$$\text{számláló} = \left(\mathrm{Det}(\beta \underline{\underline{J}})\right)^{-1/2}\mathrm{Tr}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{ij} s_i(\beta J)_{ij} s_j\right\}. \tag{4.195}$$

Itt tr a rácspontok helykoordinátáival indexelt mátrix spúrját jelöli.

Konkretizáljuk a spinmodellt a ferromágneses, elsőszomszédkölcsönhatással definiált Ising-modellre. Ekkor $s_i = \pm 1$ lehet és legyen az elsőszomszéd spinek kölcsönhatási erőssége J. A J_{ij} mátrixnak csak az elsőszomszéd indexekhez tartozó elemei különböznek zérustól. Tegyük fel továbbá, hogy a rendszer d dimenzióban él, a rácsállandójú kockarácson. Ekkor az i-edik rácspontnak $q = 2d$ darab elsőszomszédja van a $x_j = x_i \pm n^\mu a$ rácspontokban, ahol n^μ a μ irányban mutató egységvektor.

A spinekre való összegzés rácspontonként külön elvégezhető és a vizsgált esetben:

$$\sum_{s_i=\pm 1} e^{\phi_i s_i} = 2\cosh\phi_i = 2\exp\{\ln\cosh\phi_i\}. \tag{4.196}$$

Az állapotösszeg tehát az alábbi alakot ölti:

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ln(\beta\underline{\underline{J}})\right\}\prod_i\int\frac{d\phi_i}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-S\}, \tag{4.197}$$

ahol a hatás

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\langle i,j\rangle}\phi_i(\beta J)^{-1}_{ij}\phi_j + V(\{\phi_i\}) \tag{4.198}$$

és a potenciál

$$V(\{\phi_i\}) = -\sum_i \ln\cosh\phi_i. \tag{4.199}$$

A d dimenziós rácson értelmezett spinmodell tehát ekvivalens a d dimenziós euklideszi térben megfogalmazott önkölcsönható (rácsregularizált) kvantumtérelmélettel.

A potenciál speciális alakja azzal kapcsolatos, hogy a spinek egydimenziós belső térben vannak értelmezve és értékük ± 1. Ha a spineket többkomponensűeknek tekintjük és az értékkészletüket is kibővítjük, akkor más spinmodellekhez és a nekik megfelelő térelméleti modellekhez jutunk. A potenciál lokális, értéke az i-edik rácspontban csak a térmennyiség ezen rácspontban felvett értékétől függ.

Most megmutatjuk, hogy az elsőszomszéd spinek közötti kölcsönhatás a megfelelő térelméleti modellben a deriváltas kölcsönhatási tagot generálja, ugyanakkor a tér és a spinek közötti lineáris csatolásból származó potenciál végtelen sok lokális kölcsönhatási vertexet generál.

Vizsgáljuk meg közelebbről az elsőszomszéd spinek kölcsönhatásából adódó tagot a hatásban. Ehhez először a J_{ij} mátrixot kell invertálni:

$$J_{ij} = \begin{cases} J, & \text{ha } x_j = x_i + n_\mu a \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}, \tag{4.200}$$

Az invertálást a Fourier-térben végezzük el:

$$\begin{aligned} J(p) &= \sum_{r_{ij}} e^{-\mathrm{i}pr_{ij}} J_{ij} = J \sum_{\mu=1}^{d} \left(e^{-\mathrm{i}p_\mu a} + e^{\mathrm{i}p_\mu a} \right) \\ &= 2J \sum_{\mu=1}^{d} \cos(p_\mu a), \end{aligned} \tag{4.201}$$

$$(\beta J)^{-1}(p) = \frac{1}{2\beta J \sum_{\mu=1}^{d} \cos(p_\mu a)}. \tag{4.202}$$

Az $\mathcal{O}(a^2)$ rendű tagokkal bezárólag írhatjuk, hogy

$$\sum_{\mu=1}^{d} \cos(p_\mu a) \approx d - \frac{1}{2} p^2 a^2 = \frac{1}{2} q \left(1 - \frac{1}{q} p^2 a^2 \right), \tag{4.203}$$

ahol $q = 2d$ az úgynevezett koordinációs szám; minden rácspontnak q darab elsőszomszédja van. A keresett inverz matrix tehát az impulzustérben:

$$(\beta J)^{-1}(p) \approx \frac{1}{\beta J q} \left(1 + \frac{a^2 p^2}{q} \right). \tag{4.204}$$

A fentieket fekhasználva a hatásnak az elsőszomszéd spinek kölcsönhatásából adódó tagja az alábbi alakot ölti:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \phi_i (\beta J)^{-1}_{ij} \phi_j = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \phi_p \frac{1}{\beta J q} \left(1 + \frac{a^2}{q} p^2 \right) \phi_{-p}$$

$$= \frac{a^{-d}}{2\beta Jq}\int d^dx\phi^2(x) - \frac{a^{-(d-2)}}{2\beta Jq^2}\int d^dx\phi\Box_\Lambda\phi. \qquad (4.205)$$

A hatás ezen tagját a kvantumtérelméletben szokásos alakra hozzuk, bevezetve az átskálázott

$$\varphi = q^{-1}(\beta J)^{-1/2}a^{-(d-2)/2}\phi \qquad (4.206)$$

térmennyiséget:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\phi_i(\beta J)^{-1}_{ij}\phi_j = -\frac{1}{2}\int d^dx\varphi\Box_\Lambda\varphi + \frac{q}{2a^2}\int d^dx\varphi^2. \qquad (4.207)$$

Innen látjuk, hogy az elsőszomszéd spinek közötti kölcsönhatás egyrészt a skalártér elméletének szokásos deriváltas tagját, másrészt egy kvadratikus önkölcsönhatási tagot generál. Utóbbit összevonjuk a potenciál Taylor-sorának megfelelő tagjával. A potenciál Taylor-sora

$$-\ln\cosh\phi = -\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{2}{4!}\phi^4 \mp \ldots \qquad (4.208)$$

végtelen sok önkölcsönhatási vertex összege, amelyek az Ising-modell esetén speciálisan csak a térmennyiség páros kitevőjű hatványait tartalmazzák. Ez annak a következménye, hogy az Ising-modell diszkrét $s_i \to -s_i$ szimmetriája $\phi_i \to -\phi_i$ szimmetria alakjában átöröklődött a megfelelő térelméleti modellbe.

Az Ising-modellt tehát leképeztük a Hubbard-Stratonovich-transzformáció segítségével a φ skalártér rácsregularizált elméletére, amelyet az alábbi hatásfunkcionál definiál a $\Lambda_0 \sim 1/a_0$ kezdeti skálán:

$$S_{\Lambda_0} = -\frac{1}{2}\int dx\varphi\Box_{\Lambda_0}\varphi + \frac{q}{2a_0^2}\int dx\varphi^2 - \frac{1}{a_0^d}\int dx\ln\cosh\left(q\sqrt{\beta J}a_0^{(d-2)/2}\varphi\right). \qquad (4.209)$$

Ennek sorfejtett alakja:

$$S_{\Lambda_0} = -\frac{1}{2}\int d^dx\varphi\Box_{\Lambda_0}\varphi + \frac{q(1-\beta Jq)}{2a_0^2}\int d^dx\varphi^2 + \frac{1}{4!}2a_0^{d-4}q^4(\beta J)^2\int d^dx\varphi^4 + \ldots. \qquad (4.210)$$

A hatásban szereplő potenciál

$$U_{\Lambda_0} = g_2(\Lambda_0)\int d^dx\varphi^2 + g_4(\Lambda_0)\int d^dx\varphi^4 + \ldots + g_{2n}(\Lambda_0)\int d^dx\varphi^{2n} + \ldots \qquad (4.211)$$

alakú. A $V_{2n} = \int d^dx\varphi^{2n}$ $(n \geq 1)$ vertex kanonikus (energia-) dimenziója (lásd [7])

$$\delta(V_{2n}) = -d + 2n[\varphi] = -d + n(d-2). \qquad (4.212)$$

4.2. A kvantumtérelméletek renormálhatósága

A kvantumtérelmélet fejlődése során volt egy több évtizeden át tartó kezdeti szakasz, amikor a térelméletben jelentkező UV divergenciákra úgy tekintettek, mint az elmélet valamiféle hibájára, hiányosságára, nem tökéletes megfogalmazottságára. A renormálás Wilson-féle elméletének keretében világosodott az meg, hogy nem az elmélet hiányosságáról van szó. A divergenciáknak a megjelenése hozzátartozik a dolgok fizikai lényegéhez. Az okuk hasonló, mint a statisztikus fizikában a kritikus jelenségekben megjelenő szingularitásoké. Mi ez az ok?

A közel kritikus statisztikus fizikai rendszerben két egymástól távol eső hosszúságskála van jelen, az a rácsállandó és a $\tilde{\xi}$ korrelációs hossz. A kritikus rendszerben ezek hányadosa, a $\xi = \tilde{\xi}/a$ dimenziótlan korrelációs hossz végtelenhez tart: $\xi \to \infty$. A divergenciák oka az, hogy mindazok a fluktuációk lényegesek, amelyek hullámhossza ezen két nagyon távol eső hosszúságskála közé esik. Ezekből (a termodinamikai határesetben) végtelen sok van.

A kvantumtérelméleteket két, egymástól távol eső hosszúság-, ill. energiaskála jellemzi. Egyrészt ezeket az elméleteket valamilyen Λ UV levágáson kell megfogalmazni. A hatásba beírt kölcsönhatások alakját a nagyenergiás mérések alapján sejtjük meg. Másrészt az elmélet szolgáltat egy részecskespektrumot, amelynek legalján az m_R fizikai tömegű részecske van. Általában $\Lambda \gg m_R$, sőt a kvantumtérelmélet szokásos perturbatív megfogalmazásában az önkényesen bevezetett Λ UV levágást eltávolítjuk a végtelenbe. Pontosabban, azokat az elméleteket tekintjük jó elméleteknek, amelyekben az UV levágás konzisztens módon kitolható a végtelenbe. Ezek a (perturbatív úton) renormálható elméletek. A részecskék fizikai tömege egyúttal a korrelációs hossz reciproka. Ugyanakkor az UV levágás a rácsállandó reciprokának nagyságrendjébe esik az elmélet rácsregularizált alakjában. A divergenciák oka itt is az, hogy a rendszer végtelen sok szabadsági fokú. Minden kvantumfluktuáció fontos, s ezek frekvenciái a részecsketömegtől az UV levágásig nyúlnak. A dimenziótlan korrelációs hossz, Λ/m_R végtelenhez tart a renormálható elméletben, amikor a $\Lambda \to \infty$ határértéket vesszük. Amennyiben a fizikai tömeg zérus, akkor a dimenziótlan korrelációs hossz tetszőleges véges levágás esetén is végtelen. A renormálható elméletek a kontinuum limeszben (a $\Lambda \to \infty$ limesz megfelel az $a \to 0$ limesznek), továbbá a regularizált elméletek zérus fizikai tömeg esetén kritikus statisztikus fizikai rendszereknek felelnek meg.

Most megmutatjuk, hogy a kvantumtérelméletben a kölcsönhatásoknak a hatványkitevők számlálásának módszerével történő osztályozása nem renormálható, renormálható és szuperrenormálható kölcsönhatásokra azonos a renormálási csoport módszerben a kölcsönhatások irreleváns, marginális és releváns operátorokra történő osztályozásával.

Képzeljük el, hogy létezik az elméletnek egy UV fixpontja, amely (dimenziótlan) korrelációs hossz végtelen nagy értékének felel meg. A Λ UV levágás növelése során a renormálási csoport trajektórián éppen az ellenkező irányban haladunk, mint azt a statisztikus fizikában a blokkosítás során megszoktuk: csökkenő a rácsállandó irányában. Vizsgáljuk az előző fejezetben tárgyalt, az Ising-modellnek megfelelő skalártér példáján, hogy hogyan viselkednek az egyes kölcsönhatási tagok, ha $\Lambda \to \infty$. Általában a $\delta(V_{2n})$ kanonikus dimenziójú vertex g_{2n} csatolási állandója a skála változása során $\Lambda^{\delta(V_{2n})} \sim a^{-\delta(V_{2n})}$ faktorral szorzódik. Ekkor a következő osztályozás érvényes:

1. A vertex **nem renormálható**, ha $\delta(V_{2n}) > 0$. Ez növekvő Λ (csökkenő a) esetén növekvő csatolási állandót jelent. Az ilyen csatolási állandót neveztük **irreleváns**nak.

   Példánkban, ha $d = 1$ vagy 2, akkor nincsen olyan vertex, amely irreleváns, azaz nem renormálható lenne. $d = 3$ esetén az $n > 3$ vertexek, $d = 4$ esetén az $n > 2$ vertexek (φ^6, φ^8, $\ldots$), $d > 4$ esetén az $n > 1$ vertexek (φ^4, φ^6, $\ldots$) irrelevánsak.

2. A vertex **renormálható**, ha $\delta(V_{2n}) = 0$. Ez a skála változása során változatlanul maradó csatolási állandót jelent, azaz **marginális** csatolási állandót.

   Példánkban $d = 1$ és $d = 2$ dimenzióban nincsenek marginális operátorok. $d = 3$ dimenzióban az $n = 3$, azaz φ^6, $d = 4$ dimenzióban az $n = 2$ operátor, azaz φ^4 marginális. $d > 4$ dimenzióban nincsenek marginális operátorok

3. Végül a **szuperrenormálható** operátorok azok, amelyeknek a kanonikus dimenziója negatív, $\delta(V_{2n}) < 0$. Ekkor a megfelelő csatolási állandó növekvő Λ-val (csökkenő a-val) csökken. Ezek tehát **releváns** csatolási állandók.

   Példánkban $d = 1$ és $d = 2$ esetén minden vertex releváns, $d = 3$ dimenzióban φ^2 és φ^4, $d \geq 4$ dimenzióban φ^2 a releváns operátorok.

A fenti osztályozás a vertex kanonikus dimenzióján alapul, nem veszi figyelembe, hogy a skálafaktorok a kvantumeffektusok miatt változhatnak. Az az anomális dimenzió azonban, amit a vertexek a rendszer dinamikája, azaz a kvantumeffektusok miatt nyernek, a Planck-állandó nagyságrendjébe esik. Ezért az anomális dimenzió nem változtatja meg a fenti osztályozást a marginális esetet kivéve. A marginális operátor esetében a $\hbar$-rendű kvantumkorrekció dönti el, hogy az adott operátor végülis releváns vagy irreleváns operátorként viselkedik, ha a rendszer kvantumdinamikáját is figyelembe vesszük.

Az elmondottakkal kapcsolatban felmerül az a kérdés, hogy hogyan haladhatunk a renormálási trajektórián a blokkosítással ellentétes irányban? A kérdés az, hogy ha van egy elméletünk, amelyet a Λ_0 levágásnál definiáltunk, akkor milyen módon kaphatunk meg egy elméletet a $\Lambda > \Lambda_0$ levágáson, amelyből renormálási transzformáció révén az eredeti, Λ_0 levágáshoz tartozó elmélet adódik. A perturbatív renormálás egy ismert lehetőség arra, hogy hogyan haladhatunk a nagyobb levágások felé. Vegyük pl. a kvantumelektrodinamikát. A kvantumkorrekciók figyelembevételével minden Λ skálán kiszámoljuk az elektron tömegét, m_e, és a Coulomb-szórás hatáskeresztmetszetét, σ. Ezek a mennyiségek a Λ levágásnak, valamint az eredeti hatásban szereplő csupasz m_R tömegnek és e_R csatolási állandónak a függvényei lesznek: $m_e = f_1(m_R, e_R, \Lambda)$, $\sigma = f_2(m_R, e_R, \Lambda)$ Ezután a perturbációszámítás minden rendjében ellentagokat adunk a hatáshoz, amelyeket úgy választunk meg, hogy azokat is figyelembe véve, az eredményül kapott m_e tömeg és σ hatáskeresztmetszet függetlennek adódjon a Λ levágástól, amelyet azután a megfigyelt tömeggel és hatáskeresztmetszettel azonosítunk. Ez a kvantumelektrodinamika esetében lehetséges úgy, hogy közben a hatás alakja nem változik meg, csak a csatolási állandók változnak meg az egyes kölcsönhatási tagok előtt m_0-ról $m(\Lambda)$-ra és e_0-ról $e(\Lambda)$-ra, azaz az

$$m_e = f_1(m(\Lambda), e(\Lambda), \Lambda), \qquad \sigma = f_2(m(\Lambda), e(\Lambda), \Lambda) \tag{4.213}$$

renormálási feltételek teljesülnek, ahol a bal oldalon a mennyiségek a valóságos, megfigyelhető értékükkel szerepelnek. Az eredményül kapott futó csatolási állandók $m(\Lambda)$ és $e(\Lambda)$ skálafüggése ilymódon meghatározódik: rájuk a renormált tömegben és töltésben perturbációs sorokat kapunk, amelyek együtthatói függnek a Λ levágás aktuális értékétől. Ezek a futó csatolási állandók felelnek meg a renormálási csoport módszerben használt skálafüggő csatolási állandóknak.

Látszatra a perturbatív renormálás futó csatolási állandóit használva a renormálási csoport trajektóriát visszafolytathatjuk a $\Lambda \to \infty$ határesetig. A kvantumelektrodinamika azonban pontosan az az eset, amikor ez nem tehető meg. Az egyhurokrendű számolás szerint

$$e^2(\Lambda) \;=\; \frac{e_R^2}{1 - c e_R^2 \ln(\Lambda^2/m_e^2)}, \tag{4.214}$$

ahol c számkonstans. Ha tehát Λ értékét növeljük, akkor $e(\Lambda)$ értéke már véges $\Lambda_L \sim m_e e^{1/\alpha}$ értéknél végtelenné válik, $\alpha = 1/137$ a finomszerkezeti állandó. Ezt a szingularitást nevezzük **Landau-pólus**nak. A perturbációszámítás a Λ_L skálán érvényét veszti. A szingularitás „mögötti" fizikát nem tudjuk a Λ_L-nél alacsonyabb skálákról indulva felderíteni. A gyakorlati alkalmazás szempontjából szerencsés körülmény, hogy a Λ_L olyan nagy energiát jelent, amihez mérhető nagyságú energiaátadási folyamatok még a csillagokban sem ismeretesek.

A renormálási csoport trajektórián tehát csak akkor lehet mindkét irányban haladni, ha az elméletnek nincsen Landau-pólusa. Ekkor a renormálási csoport nem félcsoport, hanem valóban csoport.

4.3. Nem renormálható kvantumtérelméletek

Ha a fixpontnak vannak releváns skálaoperátorai, akkor az a fixpont UV fixpont, amelyhez tartozó rendszerben a korrelációs hossz végtelen. A releváns csatolási állandók értéke csökken, ha a renormálási trajektórián az UV fixpont felé haladunk (azaz csökkenő a irányában). Ha a hatás csak releváns operátorokat tartalmaz és renormálási transzformáció során megőrzi az alakját (skálainvariáns), azaz a perturbatív értelemben renormálható elméletnek felel meg, akkor a renormálási trajektórián beleszaladunk a fixpontba, mert nem fognak irreleváns kölcsönhatások generálódni. (Tegyük fel, hogy nincsen Landau-pólus.) Amennyiben azonban irreleváns operátorok is vannak jelen a hatásban, akkor azoknak a csatolási állandói rohamosan nőni kezdenek, amikor a Λ UV levágást növelve a renormálási trajektória az UV fixpont környezetébe ér. Ezek a kölcsönhatások eltérítik a renormálási csoport trajektóriát a fixpont közeléből.

Vizsgáljuk ugyanezt a renormálási csoport trajektóriák folyási irányában haladva. A renormálható elméleteknek az UV fixpontból kifolyó, teljesen a releváns altérben fekvő trajektóriák felelnek meg. Amennyiben univerzalitás van, akkor a nem-renormálható elméletek trajektóriái hozzásimulnak a megfelelő renormálható elmélet trajektóriáihoz. Mindazok az elméletek, amelyek csak irreleváns tagokban különböznek a renormálható elmélettől az UV fixpont közelében, azonos alacsonyenergiás fizikát eredményeznek. Ilyenkor elengendő vizsgálatainkat a renormálható elméletekre korlátozni. A kvantumtérelmélet hagyományos programja pontosan ezt is teszi.

Ha több fixpont is van, akkor azonban lehet, hogy nem lesz univerzalitás. Vizsgáljunk példaként olyan esetet, amikor két fixpont van. Az egyik UV fixpont, F_1, és a közeléből elindított renormálási csoport trajektóriák a másik fixpont, F_2 felé folynak. Az alábbi táblázat összefoglalja a lehetőségeket:

F_1 (QED)	F_2 (szilárdtestfiz.)	Példa
releváns	releváns	elektron tömege
releváns	irreleváns	müon tömege
irreleváns	irreleváns	elektromágneses futó csatolási áll.
irreleváns	releváns	szupravezető kondenzátum

A fenti példákban az egyik fixpont a kvantumelektrodinamika fixpontja, a másik a szilárdtestek (elektronok és atomtörzsek elektromágneses) effektív elméletének a fixpontja. Az elektron tömege nyilvánvalóan mindkét energiaskálán releváns, a müon tömege a szilárdtestfizikában irreleváns (olyanannyira, hogy nem is szükséges szerepeltetni), az elektromágneses kölcsönhatás futó csatolási állandója monoton csökken az energiával, tehát mindvégig irreleváns. Végezetül a $\langle\psi\psi\rangle$ elektronkondenzátum a kvantumelektrodinamikában irreleváns, ugyanakkor a szupravezetők viselkedésében releváns mennyiség.

Valószínűleg az erős kölcsönhatás jelenségkörében is megvalósul az, hogy a nagyenergiás szempontból irreleváns operátor az alacsonyenergiás viselkedés szempontjából relevánssá válik. A tapasztalat szerint a kvantumszíndinamika részecskéi nem a kvarkok és a gluonok, mert ezeket nem lehet mint szabad részecskéket gerjeszteni a vákuumból. A vákuumból csak hadronok gerjeszthetők. A nagyenergiás megfigyelő (pl. a mélyen rugalmatlanul szórt lepton) a hadronok belsejében szabadnak látja a kvarkokat és a gluonokat, ill. olyan úgynevezett perturbatív vákuumot lát, amelyben a kvarkok és a gluonok szabad részecskékként mozoghatnak. Az alacsonyenergiás megfigyelő a hadronokat látja és nem észlel szabad kvarkokat és gluonokat. Ezért az alacsonyenergiás megfigyelő számára a vákuum bezáró. Az a tény, hogy az UV viselkedés a gluonok és kvarkok nyelvén mondható el egyszerűen, míg a hadronok alacsonyenergiás kölcsönhatásainak ezen a nyelven való megértése rendkívül bonyolulttá válik a bezárás miatt, azt látszik alátámasztani, hogy alacsony energián, a bezáró fázisban mások a releváns csatolási állandók és operátorok, mint nagy energián, a perturbatív fázisban.

Ha az az eset valósul meg, hogy alacsonyabb energiaskálán a renormálási csoport trajektóriák olyan IR fixpont közelébe kerülnek, ahol valamely, az UV fixpont közelében irreleváns kölcsönhatás relevánssá válik, akkor nem beszélhetünk többé univerzalitásról. Ekkor az alacsonyenergiás viselkedés szempontjából fontos az is, hogy az UV skálán megfogalmazott elméletbe milyen irreleváns kölcsönhatásokat írtunk bele. Ekkor a nem renormálható elméletek trajektóriái nem fognak belesimulni a renormálható elmélet trajektóriájába, hanem el fogják hagyni azt, amikor túlfolynak az UV és az IR viselkedést elválasztó **átmeneti tartományon**. Ebben nyilvánul meg az, hogy a különböző nem renormálható elméletek különböző alacsonyenergiás fizikának felelnek meg. Ha tehát nincsen univerzalitás, akkor nem szorítkozhatunk csupán a renormálható elméletek vizsgálatára. Annak az elméletnek, amely egyszerre akar helyesen számot adni a nagyenergiás és az alacsonyenergiás viselkedésről, szükségképpen kell tartalmaznia az UV fixpont közelében irreleváns operátorokat is.

4.4. Effektív elméletek

A renormálási csoport módszerének segítségével nagyenergiás, fundamentálisnak tekintett mikroszkopikus elméletből alacsonyenergiás effektív elméletet származtathatunk le.

Ha a kölcsönhatások valamilyen egyesített elméletére gondolunk, akkor a paramétertérben feltehetően különböző fixpontokat találunk különböző energiaskálákon. A nagy energiáktól az alacsonyabbak felé haladva ezek a nagyegyesített elmélet (GUT), a Standard Modell, a kvantumszíndinamika, a kvantumelektrodinamika stb. fixpontjai. Ebben a felfogásban minden ismert kölcsönhatás elmélete adott energiaskálán működő effektív elmélet. Az egyes effektív elméleteket úgy lehet megkapni, hogy elindulunk pl. egy a GUT skálán megfogalmazott elmélettel. Ezután renormálási transzformációkat végezve haladunk az alacsonyabb energiaskálák felé. A nagyobb energiájú kölcsönhatásoknak valamilyen emléke megmarad az alacsonyabb energiaskálákon levő fixpontok közelében. Nekik tulajdoníthatóan ezen fixpontok közelében irreleváns kölcsönhatások generálódnak. Az általános elmélet renormálásával kapott renormálási csoport trajektória tehát nem folyik be az alacsonyabb energiaskálán levő fixpontokba, hanem csak megközelíti azokat, miközben elhalad mellettük.

4.5. A Wegner-Houghton-egyenlet

A **valós térbeli renormálás**, azaz az euklideszi koordinátatérben elvégzett blokkosítás meglehetősen nehezen kivitelezhető technikailag a kvantumtérelméletben, ahol általában mindig Fourier-módusokban gondolkozunk, a különböző mennyiségeket az impulzustérben vizsgáljuk. Célszerű ezért olyan **renormálási transzformációt** definiálni, amelyet **az impulzustérben** hajtunk végre, és amely fizikai tartalmában megfelel a blokkosításnak. A blokkosítás lényege az volt, hogy a korrelációs hossznál lényegesen kisebb méretű blokkokat definiáltunk, amelyen belüli szabadsági fokokat egyetlen effektív szabadsági fokkal helyettesítettünk. Ezáltal kizártuk a dinamikai változónak az egy-egy blokkon belüli fluktuációit. A lényeg tehát az, hogy zárjuk ki az $a < \lambda < a' = ba$ ($b > 1$) hullámhosszúságú fluktuációkat anélkül, hogy a partíciós függvény megváltozna. Ennek impulzustérben az felel meg, hogy a $\Lambda/b < k < \Lambda$ hullámszámú, **gyors fluktuációk**at különválasztjuk a $0 \leq k < \Lambda/b$ hullámszámú **lassú fluktuációk**tól, és a lassú módusokra vonatkozó effektív hatást úgy definiáljuk, hogy a gyors módusokra kiintegrálunk.

Induljunk ki a térelméletnek a Λ UV levágással regularizált alakjából, azaz az S_Λ hatásból. Annak a blokkosításnak, amikor az a rácsállandójú cellákról $a' = ba$ oldalélű blokkokra térünk át, az impulzustérben az felel meg, hogy az UV levágást lejjebb visszük Λ-ról $k = \Lambda/b$-re. Bontsuk fel a teret Fourier-módusokra és válasszuk külön a lassú és a gyors módusokat:

$$\phi(x) \;=\; \sum_{|Q|\leq\Lambda} e^{\mathrm{i}Qx}\phi_Q = \sum_{q\in I_k} e^{\mathrm{i}qx}\phi_q + \sum_{p\in\Delta I_\Lambda} e^{\mathrm{i}px}\phi_p, \tag{4.215}$$

ahol I_k a $k = \Lambda/b$ ($b \geq 1$) sugarú impulzusgömb belseje: $0 \leq |q| \leq k$, ΔI_Λ a $k = \Lambda/b$ és Λ sugarú gömbfelületek által határolt gömbhéj: $k < |p| \leq \Lambda$. A gömb belsejéből származó q impulzusokkal jellemzett módusok a lassú módusok és a gömbhéjból vett p impulzusú módusok a gyors módusok. A lassú módusokra vonatkozó $S_k[\phi_q]$ effektív hatást a partíciós függvény azonos átalakításából kiindulva,

$$Z = \left(\prod_{q\in I_k}\int d\phi_q\right) e^{-S_k(\phi_q)} = \left(\prod_{q\in I_k}\int d\phi_q\right)\left(\prod_{p\in\Delta I_\Lambda}\int d\phi_p\right) e^{-S_\Lambda(\phi_q,\phi_p)}, \tag{4.216}$$

az alábbi integrállal (pályaintegrál!) definiáljuk:

$$e^{-S_k[\phi_q]} = \left(\prod_{p\in\Delta I_\Lambda}\int d\phi_p\right) e^{-S_\Lambda(\phi_q,\phi_p)}. \tag{4.217}$$

Ez a definíció elvileg lehetővé teszi, hogy tetszőlegesen választott $k \le \Lambda$ levágás esetén meghatározzuk az effektív hatást. Ez a hatás definiálja a k-nál kisebb impulzusú lassú módusok effektív elméletét. Az S_k hatás mondja meg, hogy hogyan viselkedik a rendszer olyan mérésekkel szemben, amelyeknek rosszabb a felbontása mint $a' \sim 1/k$. Ezek a mérések kiátlagolják a gyors fluktuációkat. A gyors fluktuációk hatása abban nyilvánul meg, hogy a hatásfunkcionál is függ k-tól, S_k általában más funkcionál mint a mikroszkopikus S_Λ hatás.

A **Wegner-Houghton-féle renormálási csoport egyenlet**hez úgy jutunk el, hogy a gyors módusok kiintegrálását, azaz a **renormálás**t **infinitezimális lépésekben** végezzük el. Ez a következőképpen történik. Tegyük fel, hogy a gyors ϕ_Q $(k < |Q| \le \Lambda)$ módusokat már kiintegráltuk, és így megkaptuk az S_k hatást. Integráljuk ki ezután a ϕ_p módusokat, amelyeknek az impulzusa a Δk vastagságú $k - \Delta k < |p| \le k$ gömbhéjban (ΔI_k) található:

$$\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S_{k-\Delta k}(\phi_q,\phi_p=0)\right\} = \left(\prod_{p\in\Delta I_k}\int d\phi_p\right)\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S_{k-\Delta k}(\phi_q,\phi_p)\right\}. \tag{4.218}$$

A pályaintegrál kiértékeléséhez fejtsük sorba a jobb oldalon álló exponens kitevőjét a $\phi_p \equiv 0$ hely körül:

$$S_k(\phi_q,\phi_p) = S_k(\phi_q,\phi_p=0) + \sum_{p\in\Delta I_k} F_p\phi_p + \frac{1}{2}\sum_{p,p'\in\Delta I_k} K_{p,p'}\phi_p\phi_{p'} + \mathcal{O}(\phi_p^3), \tag{4.219}$$

ahol

$$F_p = \left.\frac{\partial S_k}{\partial\phi_p}\right|_{\phi_p=0}, \qquad K_{p,p'} = \left.\frac{\partial^2 S_k}{\partial\phi_p\partial\phi_{p'}}\right|_{\phi_p=0}. \tag{4.220}$$

Ha elhanyagoljuk a sorfejtés kvadratikusnál magasabb rendű tagjait, akkor a (4.218) egyenlet jobb oldalán Gauss-integrált kapunk, amelyet könnyen el tudunk végezni:

$$\begin{aligned}
\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S_{k-\Delta k}(\phi_q,\phi_p=0)\right\} &= \mathcal{N}\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S_k(\phi_q,\phi_p=0)\right\}\left(\text{ Det } K_{pp'}\right)^{-1/2}\cdot \\
&\quad\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\hbar}\sum_{p,p'\in\Delta I_k}F_p(K^{-1})_{pp'}F_{p'}\right\} \\
&= \mathcal{N}\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S_k(\phi_q,\phi_p=0)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\text{ Tr }_{\Delta I_k}\ln K\right\}\cdot \\
&\quad\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\hbar}\sum_{p,p'\in\Delta I_k}F_p(K^{-1})_{pp'}F_{p'}\right\}. \qquad (4.221)
\end{aligned}$$

Képezzük az egyenlet mindkét oldalának logaritmusát és szorozzunk be a $\hbar/\Delta k$ tényezővel:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta k}\left\{S_k\left(\phi_q,\phi_p=0\right)-S_{k-\Delta k}\left(\phi_q,\phi_p=0\right)\right\} \\
&= -\frac{\hbar}{2\Delta k}\text{ Tr}_{\Delta I_k}\ln K+\frac{1}{2\Delta k}\sum_{p,p'\in\Delta I_k}F_p(K^{-1})_{pp'}F_{p'}. \qquad (4.222)
\end{aligned}$$

A használt sorfejtés ellenére a kapott (4.222) egyenlet **egzakt**.

Ezt a kumuláns-kifejtés felhasználásával látjuk be a Wegner és Houghton által adott bizonyítást követve [8]. Írjuk át a (4.218) definíciót az alábbi alakba:

$$\begin{aligned}
\exp\{-S_{k-\Delta k}\} &= \exp\{-S_k\}\left\langle e^{-V}\right\rangle_0\left(\prod_{p\in\Delta I_k}\int d\phi_p\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{p,p'}\phi_p(K_0)_{pp'}\phi_{p'}\right\} \\
&= \exp\left\{-S_k-\frac{1}{2}\sum_{p\in\Delta I_k}(\ln K_0)_{p,-p}\right\}\left\langle e^{-V}\right\rangle_0, \qquad (4.223)
\end{aligned}$$

ahol $(K_0)_{p,p'}=K_0(p)\delta_{p+p'}$ a hatás második deriváltjának diagonális része,

$$\begin{aligned}
V &= \sum_{p\in\Delta I_k}F_p\phi_p+\frac{1}{2}\sum_{p,p'\in\Delta I_k}\left(K_{p,p'}-(K_0)_{p,p'}\right)\phi_p\phi_{p'}+\ldots \\
&\equiv \sum_{n=1}^{\infty}\delta^n S_{p_1,\ldots,p_n}\phi_{p_1}\cdots\phi_{p_n}, \qquad (4.224)
\end{aligned}$$

továbbá bevezettük a

$$\langle\ldots\rangle_0 = \frac{\left(\prod_{p\in\Delta I_k}\int d\phi_p\right)e^{-\frac{1}{2}(\phi K_0\phi)}\ldots}{\left(\prod_{p\in\Delta I_k}\int d\phi_p\right)e^{-\frac{1}{2}(\phi K_0\phi)}} \qquad (4.225)$$

várható értéket; $(\ldots)$ az impulzusindexekre vonatkozó kontrakciót jelöli.

A V potenciál exponenciális kifejezésének várható értékét kumulánsok szerint kifejtjük. Az egyes kumulánsok a

$$\langle \delta^{n_1} S \phi_{1,1} \ldots \phi_{1,n_1} \delta^{n_2} S \phi_{2,1} \ldots \phi_{2,n_2} \ldots \delta^{n_l} S \phi_{l1} \ldots \phi_{l,n_l} \rangle_{0,con} \tag{4.226}$$

típusú várható értékek összefüggő részeinek az összes impulzusokra vett összege. Egy-egy ilyen tagban az impulzusok l csoportba sorolhatók aszerint, hogy melyik deriválthoz tartoznak. Minden tag előállítható

$$\langle \phi_{p_i} \phi_{p_j} \rangle_0 \quad = \quad g(p_i) \delta_{p_i + p_j} \tag{4.227}$$

típusú párosítások szorzataiként (Wick-tétel), ahol p_i és p_j minden esetben két különböző impulzuscsoportból való, ami biztosítja az összefüggőséget. A kumuláns ilyen tagjait $n_1 + n_2 + \ldots + n_l$ impulzusra kell összegezni. A párosításokból adódó Kronecker-delták azonban az összegzések felét megszüntetik. Marad tehát $(n_1 + n_2 + \ldots + n_l)/2$ független impulzusra történő összegzés. Az impulzusok mindegyike a ΔI_k infinitezimális gömbhéjból való.

Az egyes kumulánsokhoz olyan tagok is járulékot adnak, amelyekben az impulzusok bizonyos csoportjainak az összege éppen nulla. Ez általában nem változtatja meg a kumuláns nagyságrendjét, kivéve, ha ezek az impulzuscsoportok pontosan egybeesnek az egyes deriváltakhoz tartozó impulzusokat tartalmazó csoportokkal, vagy ezen csoportok egyesítésével. Ilyenkor ugyanis a kumuláns kevesebb független impulzusra történő összegzést fog tartalmazni. A Wick-tétel miatt az összes impulzus összege nulla. Ha $M+1$ darab impulzuscsoport van, amelyekben az impulzusok összege zérus, akkor a független impulzusok száma, amelyekre végül összegezni kell:

$$N \quad = \quad \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + \ldots + n_l) - M. \tag{4.228}$$

Legyen az egyes nullára összegződő impulzuscsoportokban az impulzusok száma $m_1, \ldots, m_M, m_{M+1}$. Bármelyik m_i valamely n_j-k összege, és minden n_j csak egyszer szerepel. Itt $M \leq l-1$, mert legfeljebb $l-1$ csoport impulzusainak összege lehet függetlenül nulla. Ha ugyanis $M = l-1$, akkor már az l-edik impulzuscsoport impulzusainak az összege is szükségszerűen nulla, miután (a Wick-tétel miatt) az összes impulzus összege nulla.

Ahhoz, hogy a (4.222) egyenletben a $\Delta k \to 0$ határesetben ne veszítsünk el tagokat, szükséges és elegendő csak a $\mathcal{O}(\Delta k)$ renddel bezárólag megtartani a tagokat. Azokat a tagokat kell tehát a kumulánsokban megőriznünk, amelyek $N = 1$ független impulzus-integrált tartalmaznak, ugyanis minden integrál arányos a gömbhéj térfogatával, azaz Δk-val. Az ilyen tagokban

$$2 = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_{M+1}}{M+1} \quad \geq \quad \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_l}{l}. \tag{4.229}$$

Azokat a tagokat kell tehát megőrizni, amelyekben az egy csoportba tartozó impulzusok átlagos száma $\overline{m}_i = 2$, és amelyekben az egyes deriváltakban átlagosan $\overline{n}_i \geq 2$ impulzus szerepel.

Egy impulzuscsoportban, amelyhez tartozó impulzusok összege zérus, legalább $m_i = 2$ impulzusnak kell lennie, mert egy impulzus önmagában nem lehet zérus, hiszen minden impulzus a ΔI_k gömbhéjból való. Ezért minden $m_i = 2$. Ez vagy úgy lehet, hogy a két impulzust tartalmazó csoport 2 impulzusa egyetlen második deriválthoz tartozik, $\delta^2 S_{p,-p}$, vagy pedig két első deriválthoz, $\delta^1 S_p \delta^1 S_{-p}$.

A fenti bizonyítás azt jelenti, hogy a Wegner-Houghton-egyenlet, ahogy felírtuk, egzakt, mert csak a hatás első és második deriváltjai adnak a pályaintegrálhoz járulékot. Az is látszik, hogy a második deriváltnak csak a diagonális része lép fel.

A Wegner-Houghton-egyenlet érvényességét illetően az alábbiakat kell megjegyezni:

1. A levezetés során felhasználtuk, hogy az effektív hatásnak a ΔI_k gömbhéjból vett impulzusok nulla, vagy legalábbis kicsiny értékénél van minimuma. Ez indokolja a sorfejtést és teszi lehetővé a pályaintegrálnak Gauss-integrálra való visszavezetését. Abban az esetben, ha az IR viselkedést valamilyen nem zérus impulzusú Fourier-módus dominálja, akkor k-val elérve ezt a domináló módust, megszűnik a sorfejtés jogossága és az egyenlet érvényét veszti.

2. Ha a Wegner-Houghton-egyenlet jobb oldalán a logaritmus alatt szereplő $K_{pp'}$ mátrix nem pozitív definit, azaz van zérus vagy negatív sajátértéke, akkor az egyenlet ugyancsak érvényét veszti. A levezetésben kihasználtuk ugyanis, hogy a Fourier-amplitúdókból alkotott minden sajátvektorra nézve Gauss-integrált kapunk. Ha azonban valamely sajátvektorhoz tartozó kvadratikus tag együtthatója eltűnik (zérus sajátérték jelenik meg), akkor nem kapunk Gauss-integrált. Ekkor a hatás sorfejtésének kvadratikusnál magasabb rendű tagjai nem hanyagolhatók el.

Vegyük tehát a $V \to \infty$ és $\Delta k \to 0$ határesetet. Ekkor a Δk vastagságú infinitezimális gömbhéj impulzusaira történő összegzés a d dimenziós térszögben az impulzusok irányára való integrálással helyettesíthető:

$$\sum_{p \in \Delta I_k} \ldots \; = \; V k^{d-1} \Delta k \int \frac{d\omega}{(2\pi)^d} \ldots \tag{4.230}$$

A (4.222) Wegner-Houghton-egyenlet ekkor az alábbi alakot ölti:

$$k \frac{\partial S_k}{\partial k} \; = \; -\frac{k^d}{2} \int \frac{d\omega}{(2\pi)^d} \left[\hbar \left(\ln K \right)_{k\hat{n},-k\hat{n}} - F_{k\hat{n}} (K^{-1})_{k\hat{n},-k\hat{n}} F_{-k\hat{n}} \right], \tag{4.231}$$

ahol $\hat{n}$ az infinitezimális vastagságú ΔI_k gömbhéjból vett $p = k\hat{n}$ impulzusok irányát megadó egységvektor és $d\omega$ az ezen irány körüli infinitezimális térszög. Itt egyúttal felhasználtuk azt is, hogy csak a diagonális impulzustérbeli kifejezések adnak járulékot az egyenlet jobb oldalához.

A Wegner-Houghton-egyenlet a skálafüggő hatásfunkcionálra vonatkozó parciális integro-differenciálegyenlet. Az egyenlethez a Λ UV levágáson definiált hatás szolgál kezdeti feltételként. Az egyenlet megoldása az az S_k effektív hatás, ami a $[0, k]$ impulzusú lassú módusok fizikáját írja le. A lassú módusok ezen effektív elméletében természetesen áttételesen – a benne szereplő kölcsönhatások csatolási állandóinak a k skálától való függésében – figyelembe van véve az a tény, hogy a ,,háttérben" vannak gyors kvantumfluktuációk is, amelyekhez a lassú módusok csatolódnak.

Az egyenlet jobb oldala azt mondja meg, hogy az infinitezimális Δk vastagságú ΔI_k gömbhéjban található impulzusokkal jellemzett módusok milyen járulékot adnak az effektív hatáshoz. Ez a járulék azonban nem a Λ levágáson vett hatással van kifejezve, hanem az S_k hatással. Ezért egy újabb infinitezimális gömbhéj járuléka már attól is függ, hogy a korábban kiintegrált nagyobb frekvenciájú módusok hogyan változtatták meg a hatást. Az alacsonyabb energiás módusok járuléka tehát nem független a magasabb frekvenciás módusok járulékától.

4.6. A skalártér renormálása

Vegyük az egykomponensű skalártér ,,egyszerű" példáját annak illusztrálására, hogy hogyan dolgozhatunk a Wegner-Houghton-egyenlet segítségével.

A Wegner-Houghton-egyenlet a skálafüggő S_k hatásfunkcionálra vonatkozó parciális integro-differenciálegyenlet. Az egyenlet megoldása csak úgy lehetséges, hogy a hatásfunkcionál alakjára valamilyen feltevéssel élünk. Ez a feltéves általában akkor kecsegtet a megoldás reményével, ha végtelen sok tagot, különböző kölcsönhatást tartalmaz. Ez azért van, mert láttuk, hogy általában a renormálási transzformáció nem őrzi meg a hatás alakját, ha az véges sok tagból áll, hanem új operátorokat is generál benne. Egyúttal éppen abban van az egyenlet óriási előnye a szokásos, perturbációszámításon alapuló renormálással szemben, hogy a hatás valamennyi tagjának fejlődését nyomon lehet követni, ahogy a k skálát a Λ UV levágásról indulva csökkenteni kezdjük. Ez azt jelenti, hogy nemcsak a releváns csatolási állandók fejlődését tudjuk vizsgálni az egyenlet segítségével, hanem az irrelevánsakét is. Ez a szokásos renormálás keretein belül nem lehetséges. Olyankor renormálható elmélettel, vagyis csak releváns és marginális csatolási állandókkal indulunk és csak ezeknek a fejlődését vizsgáljuk. A Wegner-Houghton-egyenlet azáltal, hogy az irreleváns csatolási állandók fejlődését is nyomon követi, lehetővé teszi annak a kérdésnek a vizsgálatát is, hogy valamely az UV skálán irreleváns operátor relevánssá válik-e az IR skálán.

4.6.1. Lokális potenciál és hullámfüggvény-renormálás

Az elmondottak szellemében a (4.231) egyenlet megoldását most olyan alakban fogjuk keresni, amikor megengedjük a hatásban az $U_k(\phi(x))$ **lokális potenciál** és a tértől általában ugyancsak lokálisan függő $Z_k(\phi(x))$ **hullámfüggvény-renormálás** jelenlétét:

$$S_k = \frac{1}{2}\int dx Z_k(\phi)\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \int dx U_k(\phi). \tag{4.232}$$

A (4.231) egyenletből csatolt parciális differenciálegyenleteket vezethetünk le az $U_k(z)$ és $Z_k(z)$ függvényekre:

$$k\partial_k U_k(z) = -\alpha k^d \ln\frac{k^2 Z_k(z) + U_k^{(2)}(z)}{\text{const}}, \tag{4.233}$$

$$k\partial_k Z_k(z) = -\alpha k^d \left[\frac{Z_k^{(2)}(z)}{k^2 Z_k(z) + U_k^{(2)}(z)} - 2Z_k^{(1)}(z)\frac{k^2 Z_k^{(1)}(z) + U_k^{(3)}(z)}{\left(k^2 Z_k(z) + U_k^{(2)}(z)\right)^2}\right]. \tag{4.234}$$

A zárójelben írt felső indexek a térmennyiség (a z változó) szerinti deriváltakat jelölik.

A bizonyításhoz a hatást impulzusreprezentációban írjuk fel. Továbbá az egyes egyenletek leszármaztatásához úgynevezett projekciós technikát fogunk felhasználni [9].

Tegyük fel, hogy a lokális potenciál és a hullámfüggvény-renormálás a térmennyiségnek analitikus függvényei:

$$\begin{aligned}\int dx U_k(\phi) &= V\sum_{r=2}^{\infty} u_r(k)\sum_{q_1,\dots,q_r}\phi_{q_1}\cdots\phi_{q_r}\delta_{q_1+\dots+q_r},\\ \frac{1}{2}\int dx Z_k(\phi)\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi &= -\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty} g_r(k)\sum_{q_1,\dots,q_{r+2}} q_{1\mu}q_{2\mu}\phi_{q_1}\cdots\phi_{q_{r+2}}\delta_{q_1+\dots+q_{r+2}}\end{aligned} \tag{4.235}$$

A potenciál és a hullámfüggvény-renormálás $u_r(k)$ és $g_r(k)$ skálafüggő csatolási állandóinak a segítségével definiáljuk az alábbi függvényeket:

$$U_k(z) = \sum_{r=2}^{\infty} u_r(k) z^r, \qquad Z_k(z) = \sum_{r=0}^{\infty} g_r(k) z^r. \tag{4.236}$$

Vezessük be továbbá az alábbi projektor-operátort, amely a térmennyiség F funkcionáljainak a terén hat és azokat függvényekre képezi le:

$$\mathcal{P}F = \exp\left\{-z\frac{\partial}{\partial\phi_0}\right\} F\Big|_{\phi_q=0}. \tag{4.237}$$

Ez a projektor lényegében azt csinálja, hogy az F funkcionálban csak azokat a tagokat hagyja meg, amelyek csak a ϕ_0 zéró-módust tartalmazzák és helyettesíti a ϕ_0 amplitúdót a z valós változóval. A (4.237) projektornak megvan az a tulajdonsága, hogy funkcionálok szorzatának projekciója egyenlő az egyes funkcionálok projekcióinak a szorzatával.

Az U_k potenciálra vonatkozó egyenletet úgy kapjuk meg, hogy a (4.231) egyenlet mindkét oldalára hattatjuk a $\mathcal{P}$ projektort. Szükségünk lesz a hatás első és második deriváltjaira:

$$\begin{aligned} V^{-1}\frac{\partial S_k}{\partial \phi_q} &= \sum_{r=2}^{\infty} r u_r(k) \sum_{q_1,\dots,q_{r-1}} \phi_{q_1}\cdots\phi_{q_{r-1}}\delta_{q_1+\dots+q_{r-1}+q} \\ &-\sum_{r=0}^{\infty} g_r(k) \sum_{q_1,\dots,q_{r+1}} (q_\mu q_{1\mu})\phi_{q_1}\cdots\phi_{q_{r+1}}\delta_{q_1+\dots+q_{r-1}+q} \\ &-\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty} r g_r(k) \sum_{q_1,\dots,q_{r+1}} (q_{1\mu} q_{2\mu})\phi_{q_1}\cdots\phi_{q_{r+1}}\delta_{q_1+\dots+q_{r-1}+q}, \end{aligned} \tag{4.238}$$

$$\begin{aligned} V^{-1}\frac{\partial^2 S_k}{\partial \phi_q \partial \phi_Q} &= \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1) u_r(k) \sum_{q_1,\dots,q_{r-2}} \phi_{q_1}\cdots\phi_{q_{r-2}}\delta_{q_1+\dots+q_{r-2}+q+Q} \\ &-\sum_{r=0}^{\infty} g_r(k) \sum_{q_1,\dots,q_r} \Big[(q_\mu Q_\mu) + (q_\mu q_{1\mu})r + (Q_\mu q_{1\mu})r \\ &+\frac{1}{2}(q_{1\mu} q_{2\,mu})r(r-1)\Big]\phi_{q_1}\cdots\phi_{q_r}\delta_{q_1+\dots+q_r+q+Q}. \end{aligned} \tag{4.239}$$

A megfelelő deriváltak projekciója:

$$V^{-1}\mathcal{P}\frac{\partial S_k}{\partial \phi_q} = \delta_q U_k^{(1)}, \tag{4.240}$$

$$V^{-1}\mathcal{P}\frac{\partial^2 S_k}{\partial \phi_q \partial \phi_Q} = \left[U_k^{(2)} - (q_\mu Q_\mu) Z_k\right]\delta_{q+Q}. \tag{4.241}$$

A fentiekből következik, hogy $\mathcal{P} f_p = 0$, mert p a k sugarú, Δk vastagságú gömbhéjból vett impulzus, ami nem zérus. A (4.231) egyenlet mindkét oldalára hatva a $\mathcal{P}$ projektorral, megkapjuk a (4.233) egyenletet.

Válasszunk ezután P és P' impulzusokat az I_k gömb belsejéből úgy, hogy a nagyságuk $|P| = |P'| = l$ legyen. A hullámfüggvény-renormálásra vonatkozó (4.234) egyenletet úgy származtatjuk le, hogy a (4.231) egyenlet mindkét oldalát deriváljuk a ϕ_P módus szerint majd ezután alkalmazzuk a $\mathcal{P}$ projektort.

Használjuk a továbbiakban is a p jelölést az infinitezimális ΔI_k gömbhéjból vett impulzusokra. Képezzük az alábbi deriváltakat:

$$V^{-1}\frac{\partial K_{p_1 p_2}}{\partial \phi_P}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1)(r-2)u_r(k) \sum_{q_1,\ldots,q_{r-3}} \phi_{q_1}\cdots\phi_{q_{r-3}}\delta_{q_1+\ldots+q_{r-3}+p_1+p_2+P} \\
&- \sum_{r=0}^{\infty} g_r(k) \sum_{q_1,\ldots,q_{r-1}} [(p_{1\mu}p_{2\mu})r + (p_{1\mu}P_\mu)r + (p_{2\mu}P_\mu)r \\
&+ (P_\mu q_{1\mu})r(r-1) + (p_{1\mu}q_{1mu})r(r-1) + (p_{2\mu}q_{1mu})r(r-1) \\
&+ \frac{1}{2}(q_{1\mu}q_{2\mu})r(r-1)(r-2)\Big] \phi_{q_1}\cdots\phi_{q_{r-1}}\delta_{q_1+\ldots+q_{r-3}+p_1+p_2+P},
\end{aligned}
\tag{4.242}
$$

$$
\begin{aligned}
&V^{-1}\frac{\partial^2 K_{p_1p_2}}{\partial\phi_P\partial\phi_{P'}} \\
&= \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1)(r-2)(r-3)u_r(k) \sum_{q_1,\ldots,q_{r-4}} \phi_{q_1}\cdots\phi_{q_{r-4}}\delta_{q_1+\ldots+q_{r-4}+p_1+p_2+P+P'} \\
&- \sum_{r=0}^{\infty} g_r(k) \sum_{q_1,\ldots,q_{r-2}} \Big\{\Big[(p_{1\mu}p_{2\mu}) + (p_{1\mu}P_\mu) + (p_{1\mu}P'_\mu) \\
&\quad +(p_{2\mu}P_\mu) + (p_{2\mu}P'_\mu) + (P_\mu P'_\mu)\Big] r(r-1) \\
&+ \Big[(p_{1\mu}q_{1\mu}) + (p_{2\mu}q_{1\mu}) + (P_\mu q_{1\mu}) + (P'_\mu q_{1\mu})\Big] r(r-1)(r-2) \\
&+ \frac{1}{2}(q_{1\mu}q_{2\mu})r(r-1)(r-2)(r-3)\Big\} \phi_{q_1}\cdots\phi_{q_{r-2}}\delta_{q_1+\ldots+q_{r-2}+p_1+p_2+P+P'}.
\end{aligned}
\tag{4.243}
$$

A projekció az alábbi kifejezéseket állítja elő:

$$
\begin{aligned}
V^{-1}\mathcal{P}K_{p_1p_2} &= \Big[k^2 Z_k(z) + U_k^{(2)}(z)\Big]\delta_{p_1+p_2} \\
&\equiv A\delta_{p_1+p_2},
\end{aligned}
\tag{4.244}
$$

$$
\begin{aligned}
V^{-1}\mathcal{P}\frac{\partial K_{p_1p_2}}{\partial\phi_P} &= \Big[U_k^{(3)} - (p_1p_2 - l^2)Z_k^{(1)}\Big]\delta_{p_1+p_2+P} \\
&\equiv B(p_1p_2)\delta_{p_1+p_2+P},
\end{aligned}
\tag{4.245}
$$

$$
\begin{aligned}
V^{-1}\mathcal{P}\frac{\partial^2 K_{p_1p_2}}{\partial\phi_P\partial\phi_{P'}} &= \Big[U_k^{(4)} + (k^2 + l^2)Z_k^{(2)}\Big]\delta_{p_1+p_2+P+P'} \\
&\equiv C\delta_{p_1+p_2+P+P'}.
\end{aligned}
\tag{4.246}
$$

Itt felhasználtuk, hogy

$$
(p_1+p_2)(P+P') + (PP') + (p_1p_2) = -l^2 - k^2. \tag{4.247}
$$

A Wegner-Houghton-egyenlet jobb oldalán a logaritmus argumentumában a $K_{pp'}$ mátrixot felbontjuk a diagonális K_d és a diagonálisban csupa nullákat tartalmazó K_o mátrix összegére, $K = K_d + K_o$,

$$
\ln K = \ln K_d + \ln(1 + K_d^{-1}K_o) = \ln K_d + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(K_d^{-1}K_o)^n. \tag{4.248}
$$

A projekciók során felhasználjuk, hogy $\mathcal{P}K_o = 0$. Képezzük $\ln K$ deriváltjait:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\phi_P}\ln K &= \frac{\partial}{\partial\phi_P}\ln K_d + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big[(K_d^{-1}K_o)^{n-1}\frac{\partial}{\partial\phi_P}(K_d^{-1}K_o)\\ &+(K_d^{-1}K_o)^{n-2}\frac{\partial}{\partial\phi_P}(K_d^{-1}K_o)\cdot(K_d^{-1}K_o)+\dots\\ &+\frac{\partial}{\partial\phi_P}(K_d^{-1}K_o)\cdot(K_d^{-1}K_o)^{n-1}\Big],\end{aligned}\tag{4.249}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\phi'_P\partial\phi_P}\ln K &= \frac{\partial^2}{\partial\phi'_P\partial\phi_P}\ln K_d + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big[(K_d^{-1}K_o)^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial\phi'_P\partial\phi_P}(K_d^{-1}K_o)\\ &+(K_d^{-1}K_o)^{n-2}\frac{\partial}{\partial\phi'_P}(K_d^{-1}K_o)\frac{\partial}{\partial\phi_P}(K_d^{-1}K_o)+\dots\Big].\end{aligned}\tag{4.250}$$

Ezen deriváltak vetületeinek a spúrja:

$$\mathrm{Tr}_{\Delta I_k}\mathcal{P}\frac{\partial}{\partial\phi_P}(\ln K)_{p_1p_2} = \mathrm{Tr}_{\Delta I_k}\left(\frac{B(p_1p_2)}{A}\delta_{p_1+p_2+P}\right) = \frac{B(-k^2)}{A}\delta_P,\tag{4.251}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\Delta I_k}\mathcal{P}\frac{\partial^2}{\partial\phi'_P\partial\phi_P}\ln K &= \mathrm{Tr}_{\Delta I_k}\left(\mathcal{P}K_d^{-1}\cdot\mathcal{P}\frac{\partial^2}{\partial\phi'_P\partial\phi_P}\ln K\right)\\ &-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{\Delta I_k}\mathcal{P}\Big[K_d^{-1}\frac{\partial K_d}{\partial\phi_{P'}}K_d^{-1}\frac{\partial K}{\partial\phi_P}+K_d^{-1}\frac{\partial K_d}{\partial\phi_P}K_d^{-1}\frac{\partial K}{\partial\phi_{P'}}\\ &+K_d^{-1}\frac{\partial K}{\partial\phi_{P'}}K_d^{-1}\frac{\partial K_o}{\partial\phi_P}+K_d^{-1}\frac{\partial K}{\partial\phi_P}K_d^{-1}\frac{\partial K_o}{\partial\phi_{P'}}\Big]\\ &= \mathrm{Tr}_{\Delta I_k}\left(\mathcal{P}K_d^{-1}\cdot\mathcal{P}\frac{\partial^2}{\partial\phi'_P\partial\phi_P}\ln K\right)\\ &-\mathrm{Tr}_{\Delta I_k}\left(\mathcal{P}K_d^{-1}\mathcal{P}\frac{\partial K_d}{\partial\phi_{P'}}\mathcal{P}K_d^{-1}\mathcal{P}\frac{\partial K}{\partial\phi_P}\right)\\ &= \left[\frac{C}{A}-\left(\frac{B(-k^2)}{A}\right)^2\right]\delta_{P+P'}.\end{aligned}\tag{4.252}$$

A Wegner-Houghton-egyenlet mindkét oldalát ϕ_P szerint deriválva a projekció után az alábbi egyenletre jutunk:

$$\delta_P k\partial_k U_k^{(1)} = -\alpha k^d\partial_z\ln(U_k^{(2)}+k^2Z_k)\delta_P,\tag{4.253}$$

ami $P=0$ speciális választás esetén éppen a (4.233) egyenlet z szerinti deriválásával kapható egyenlet, s így avval összhangban van.

Ha a Wegner-Houghton-egyenlet mindkét oldalát kétszer deriváljuk, ϕ_P és $\phi_{P'}$ szerint, akkor vetítés után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\delta_{P+P'}k\partial_k\left[U_k^{(2)}(z)+l^2Z_k(z)\right] = -\alpha k^d\delta_{P+P'}\left[\frac{C}{A}-\left(\frac{B(-k^2)}{A}\right)^2\right].\tag{4.254}$$

Mivel ennek az egyenletnek tetszőleges l^2-re fenn kell állni, külön-külön egyenlőnek kell lenni a két oldalon az l^0, l^2, stb. rendű tagok együtthatóinak. A nulladrendű tagok összehasonlítása az alábbi egyenletre vezet:

$$k\partial_k U_k^{(2)} = -\alpha k^d \left[\frac{U_k^{(4)} + k^2 Z_k^{(2)}}{U_k^{(2)} + k^2 Z_k} - \left(\frac{U_k^{(3)} + k^2 Z_k^{(1)}}{U_k^{(2)} + k^2 Z_k} \right)^2 \right], \tag{4.255}$$

ami a (4.233) egyenlet z szerinti kétszeri deriválásával nyerhető és így avval összhangban van. Az l^2 rendű tagok összehasonlí tása szolgáltatja a hullámfüggvény-renormálásra vonatkozó (4.234) egyenletet. Végül az egyenlet bal- és a jobb oldala l^4 rendű tagokban eltér, ami mutatja, hogy a renormálás során magasabb rendű deriváltak is generálódnak, amelyeket a vizsgált közelítésben elhanyagoltunk.

4.6.2. A dimenziótlan mennyiségekre vonatkozó renormálási csoport egyenletek

Térjünk át dimenziótlan mennyiségekre a k levágás megfelelő hatványainak a leválasztásával. Jelöljük hullámvonallal a megfelelő dimenziótlan mennyiségeket. Már a spinmodellek vizsgálata során láttuk, hogy a dimenziótlan mennyiségekre történő áttéréssel leválasztjuk az egyes mennyiségek triviális, dimenziójukból adódó skálafüggését. Ez a lépés tehát megfelel annak, hogy a nagyfrekvenciás módusokat kiintegráljuk és utána újra skálázzuk a mennyiségeket, hogy az új levágás az új egységekben az eredeti értékére kerüljön.

A téridő koordináta: $x_\mu \to \tilde{x}_\mu = kx_\mu$. Vezessük be a Z_k hullámfüggvény-renormálás dimenzióját: $[Z_k] = -\eta$, azaz $Z_k = k^{-\eta}\tilde{Z}_k$. A hatás deriváltas tagjából állapítjuk meg a térmennyiség dimenzióját, amire ekkor

$$0 = \left[\int d^d x Z (\partial\phi)^2 \right] = [k^{-d}][Z][k^2][\phi^2] = -(d-2+\eta) + 2[\phi], \tag{4.256}$$

azaz

$$[\phi] = \frac{d-2+\eta}{2} \tag{4.257}$$

adódik, úgyhogy $\phi = k^{(d-2+\eta)/2}\tilde{\phi}$. A lokális potenciál dimenziója a

$$0 = \left[\int d^d x U \right] = -d + [U] \tag{4.258}$$

feltételből $[U] = d$, és így $U = k^d \tilde{U}$.

A térmennyiség szerinti parciális deriváltak a dimenziótlan mennyiségek segítségével az alábbi alakot öltik:

$$\begin{aligned}
U^{(1)} &= \partial_\phi U = k^{-(d-2+\eta)/2} k^d \partial_{\tilde\phi} \tilde U, \\
U^{(2)} &= k^{-(d-2+\eta)+d} \partial^2_{\tilde\phi} \tilde U = k^{2-\eta} \partial^2_{\tilde\phi} \tilde U, \\
U^{(3)} &= k^{-3(d-2+\eta)/2+d} \partial^2_{\tilde\phi} \tilde U, \\
Z^{(1)} &= \partial_\phi Z = k^{-(d-2+\eta)/2-\eta} \partial_{\tilde\phi} \tilde Z, \\
Z^{(2)} &= \partial^2_\phi Z = k^{-(d-2+\eta)-\eta} \partial^2_{\tilde\phi} \tilde Z.
\end{aligned} \tag{4.259}$$

Külön figyelmet érdemelnek a (4.233) és (4.234) egyenletek bal oldalán álló k szerinti parciális deriváltak, amelyeket rögzített ϕ mellett kell képezni:

$$k\partial_k U(\phi) = k\partial_k \left[k^d \tilde U \left(k^{-(d-2+\eta)/2}\phi\right)\right] = k^d \left[d - \frac{d-2+\eta}{2} \tilde\phi \partial_{\tilde\phi} + k\partial_k\right] \tilde U(\tilde\phi), \tag{4.260}$$

$$k\partial_k Z(\phi) = k\partial_k \left[k^{-\eta} \tilde Z \left(k^{-(d-2+\eta)/2}\phi\right)\right] = k^{-\eta} \left[-\eta - \frac{d-2+\eta}{2} \tilde\phi \partial_{\tilde\phi} + k\partial_k\right] \tilde Z(\tilde\phi). \tag{4.261}$$

Mindezeket egybevetve az alábbi egyenletrendszert kapjuk eredményül:

$$\left[d - \frac{d-2+\eta}{2} \tilde\phi \partial_{\tilde\phi} + k\partial_k\right] \tilde U_k(\tilde\phi) = -\alpha \ln\left(\tilde Z_k(\tilde\phi) + \tilde U^{(2)}_k(\tilde\phi)\right), \tag{4.262}$$

$$\left[-\eta - \frac{d-2+\eta}{2} \tilde\phi \partial_{\tilde\phi} + k\partial_k\right] \tilde Z_k(\tilde\phi) = -\alpha \left[\frac{\tilde Z^{(2)}_k}{\tilde Z_k + \tilde U^{(2)}_k} - 2\tilde Z^{(1)}_k \frac{\tilde Z^{(1)}_k + \tilde U^{(3)}_k}{\left(\tilde Z_k + \tilde U^{(2)}_k\right)^2}\right]. \tag{4.263}$$

4.6.3. Gauss-fixpont

A dimenziótlan mennyiségekre átírt Wegner-Houghton-egyenletek különösen alkalmasak a renormálási csoport fixpontjainak a keresésére. Miután a dimenzióból adódó triviális skálafüggéstől megszabadultunk, a fixpontra vonatkozó egyenleteket a k szerinti parciális deriváltakat zérussá téve kapjuk:

$$\left[d - \frac{d-2+\eta}{2} \tilde\phi \partial_{\tilde\phi}\right] \tilde U_*(\tilde\phi) = -\alpha \ln\left(\tilde Z_*(\tilde\phi) + \tilde U^{(2)}_*(\tilde\phi)\right), \tag{4.264}$$

$$\left[-\eta - \frac{d-2+\eta}{2}\tilde{\phi}\partial_{\tilde{\phi}}\right]\tilde{Z}_*(\tilde{\phi}) \quad = \quad -\alpha\left[\frac{\tilde{Z}_*^{(2)}}{\tilde{Z}_*+\tilde{U}_*^{(2)}} - 2\tilde{Z}_*^{(1)}\frac{\tilde{Z}_*^{(1)}+\tilde{U}_*^{(3)}}{\left(\tilde{Z}_*+\tilde{U}_*^{(2)}\right)^2}\right]. \tag{4.265}$$

Nyilvánvaló, hogy a fixpontra vonatkozó egyenleteknek $\tilde{Z}_* = 1$ és $\tilde{U}_* = \frac{1}{2}M^2\tilde{\phi}^2 +$ const. a megoldása tetszőleges d dimenzió esetén, ha a futó tömeg zérus $M^2 = 0$ és $\eta = 0$. A fixpontnak ekkor a tömeg nélküli szabad skalártér hatása felel meg: $S_* = \frac{1}{2}\int d^dx\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi$. Ezt a fixpontot Gauss-fixpontnak nevezzük, mert a szabad hatással, a fixpontnak megfelelő elméletre felírt partíciós függvény Gauss-integrál. A Gauss-fixpontnak zérus futó tömeg, azaz végtelen korrelációs hossz felel meg. A Gauss-fixpont tehát UV fixpont.

A Gauss-fixpont skálázó operátorait úgy kapjuk, hogy azokat a megoldásokat keressük, amelyek a

$$k\partial_k\tilde{U}_k = -\lambda\tilde{U}_k, \qquad k\partial_k\tilde{Z}_k = -\lambda\tilde{Z}_k \tag{4.266}$$

sajátértékegyenleteket kielégítik. Ezek $\sim k^{-\lambda}$ szerint skáláznak. $\mathcal{O}(\hbar^0)$ rendben a lokális potenciálra és a hullámfüggvény-renormálásra vonatkozó egyenletek szétcsatolódnak:

$$\left[d - \frac{d-2}{2}\tilde{\phi}\partial_{\tilde{\phi}} - \lambda\right]\tilde{U}_k = 0, \tag{4.267}$$

$$\left[-\frac{d-2}{2}\tilde{\phi}\partial_{\tilde{\phi}} - \lambda\right]\tilde{Z}_k = 0. \tag{4.268}$$

Az egyenletek szétcsatolódása következtében a skálázó operátorokban nem keverednek a potenciál- és a deriváltas tagok. Könnyű látni, hogy a $\tilde{\phi}^n$, $(n = 2, 4, \ldots)$ alakú potenciáltagok megoldásai a (4.267) egyenletnek a

$$\lambda_n \quad = \quad d - n\frac{d-2}{2} \tag{4.269}$$

sajátértékkel. (Feltételezve a $\phi \to -\phi$ szimmetria megőrződését, csak a páros hatványokat vizsgáljuk.) Innen látjuk, hogy $d = 4$ dimenzióban $\lambda_n = 4 - n$, ami az alábbi eseteket jelenti:

$\lambda_n > 0$,	ha	$n < 4$;	releváns
$\lambda_n = 0$,	ha	$n = 4$;	marginális
$\lambda_n < 0$,	ha	$n > 4$;	irreleváns

A tömegtag tehát $d = 4$ dimenzióban releváns, a ϕ^4 kölcsönhatás marginális és a ϕ^6, ϕ^8, stb. kölcsönhatások irrelevánsak.

A $\tilde{\phi}^s$ ($s \geq 0$ egész) alakú hullámfüggvény-renormálás a $\lambda_s = -\frac{1}{2}(d-2)s$ sajátértékhez tartozik, s így $s > 0$ esetén irreleváns, $s = 0$ esetén marginális a $d > 2$ dimenziókban. Ezért a szokásos deriváltas tag, ami a fixponti hatásban is szerepel, marginális.

A fixponti skálázó operátorok osztályozása a kvantumfluktuációk hatásának figyelembevételével nem változik lényegesen, azaz az irreleváns és a releváns operátorok megmaradnak rendre irrelevánsnak ill. relevánsnak. A ϕ^4 kölcsönhatási tag $d = 4$ dimenzióban irrelevánssá válik.

4.6.4. A független módus közelítés

Hanyagoljuk el a hullámfüggvény-renormálást. A lokális potenciálra vonatkozó renormálási csoport egyenletnek megadjuk a közelítő megoldását az UV-tartományban. Ez a közelítés azon alapul, hogy a ΔI_k infinitezimális gömbhéj járulékának kiszámításakor elhanyagoljuk annak a hatását, hogy előzőleg már a $k < |q| \leq \Lambda$ módusokat kiintegráltuk, és hogy ezért az újabb módusok kiintegrálásakor a már megváltozott S_k hatásból kellene kiindulnunk. Ehelyett az egyes infinitezimális rétegekhez tartozó módusokat úgy integráljuk ki, mintha azok függetlenek lennének. A (4.233) egyenlet jobb oldalán ennek megfelelően az S_k hatás helyett az eredeti UV-levágásnál definiált S_Λ hatást használjuk. Valószínű, hogy ez a közelítés addig nem rossz, amíg nem integráltunk ki túl sok módust, vagyis amíg az aktuális k levágás még közel van az eredeti Λ levágáshoz, azaz az UV-tartományba esik.

Független módus közelítésben a lokális potenciálra vonatkozó egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\partial_k U_k = -\frac{\hbar}{2}\frac{k^{d-1}\Omega_d}{(2\pi)^d}\ln\frac{k^2+U''_\Lambda}{k^2}, \tag{4.270}$$

ahol a potenciál minimumának értékét meghatározó, a térmennyiségtől független konstanst k^2-nek választottuk a logaritmus argumentumában.

Megmutatjuk, hogy **a független módus közelítésben $\hbar$ rendben meghatározott skálafüggő U_k lokális potenciál megegyezik a perturbatív renormálás során használatos egyhurokrendű effektív potenciállal, ha $k \to 0$.**

A független módus közelítés lehetővé teszi, hogy a skálafüggő lokális potenciált közvetlen integrálással határozzuk meg:

$$U_k(\phi) = U_\Lambda(\phi) + \frac{\hbar}{2(2\pi)^d}\int_{k\leq|q|\leq\Lambda} d^dq \ln\left(1+\frac{U''_\Lambda}{q^2}\right) \tag{4.271}$$

Nyilvánvaló, hogy a független módus közelítés azt jelenti, hogy a skálafüggő lokális potenciálban a U_Λ potenciálhoz képesti $\hbar$ rendű korrekciót vesszük csak figyelembe: $U_k = U_\Lambda + \hbar u_k^{(1)}$.

Ha a (4.271) egyenlet jobb oldalán álló kifejezést összehasonlítjuk a perturbációszámításban használatos effektív hatás

$$\Gamma = \Gamma_{fa} + \hbar\Gamma^{(1)} + \ldots \tag{4.272}$$

egyhurokrendű járulékával, ami éppen az ún. effektív potenciál, $\Gamma^{(1)} = U_{eff}$, akkor azt látjuk, hogy az $U_{eff} = u^{(1)}_{k=0}$ egyenlőség áll fenn (ld. [7]).

Ha nem élnénk a független módus közelítéssel, akkor a (4.271) egyenlet helyett az egzakt

$$U_k(\phi) \;=\; U_\Lambda(\phi) + \frac{\hbar}{2(2\pi)^d}\int_{k\le|q|\le\Lambda} d^dq \ln\left(1 + \frac{U''_\Lambda + \hbar u^{(1)}_q + \ldots}{q^2}\right) \tag{4.273}$$

integrálegyenletet kapnánk a skálafüggő lokális potenciálra. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy megjelennek benne a $\hbar$-ban magasabb rendű korrekciók is: $U_k = U_\Lambda + \hbar u^{(1)}_k + \hbar^2 u^{(2)}_k + \ldots$.

A fentiek alapján tehát elmondhatjuk, hogy **a skálafüggő lokális potenciál interpolál az UV levágáson definiált potenciál és az effektív potenciál között.**

Most kiszámoljuk a skálafüggő lokális potenciált független módus közelítésben $d = 4$ dimenzióban. A (4.271) egyenlet jobb oldalán álló integrálban áttérünk az $u = q^2$ integrálási változóra, majd parciálisan integrálunk:

$$\begin{aligned} U_k \;=\; & U_\Lambda + \frac{\hbar}{64\pi^2}\left[\Lambda^2 \ln\left(1 + \frac{U''_\Lambda}{\Lambda^2}\right) - k^2 \ln\left(1 + \frac{U''_\Lambda}{k^2}\right)\right. \\ & \left. + (\Lambda^2 - k^2)U''_\Lambda - (U''_\Lambda)^2 \ln\frac{\Lambda^2 + U''_\Lambda}{k^2 + U''_\Lambda}\right] \end{aligned} \tag{4.274}$$

4.6.5. Perturbatív ellentagok a $\lambda\phi^4$ elméletben

A renormálási csoporttal az UV tartományban, független módus közelítésben végzett vizsgálatnak és a szokásos, ellentagok hozzáadásával végzett perturbatív renormálásnak a kapcsolatát a $\lambda\phi^4$ elmélet keretében mutatjuk meg.

A skálafüggő potenciál független módus közelítésben kapott explicit alakja, (4.274) tetszőleges U_Λ potenciállal definiált elméletre érvényes. Számoljuk ki azt most

$$U_\Lambda \;=\; \frac{1}{2}\mu^2_\Lambda\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda_\Lambda\phi^4 \tag{4.275}$$

alakú csupasz potenciál esetén. A hagyományos renormálás egyhurokrendű ellentagjait a

$$\mu^2_\Lambda = \mu^2_R + \delta\mu^2, \qquad \lambda_\Lambda = \lambda_R + \delta\lambda \tag{4.276}$$

felbontás adja meg, ahol a renormált csatolási állandókat az alábbi renormálási feltételek definiálják:

$$\mu_R^2 = U_k''|_{\phi=0,k=0}, \qquad \lambda_R = U_k^{(4)}\Big|_{\phi=0,k=0}. \tag{4.277}$$

Ahhoz, hogy megkapjuk az egyhurokrendű ellentagok együtthatóit, $\delta\mu^2$-et és $\delta\lambda$-t, behelyettesítjük a (4.275) potenciált és a (4.276) felbontást a (4.274) egyenlet jobboldalán álló kifejezésbe, majd azt az egyhurok-rendű tagokkal bezárólag, $\delta\mu^2$-ben és $\delta\lambda$-ban első rendig menve sorba fejtjük. Ezután a renormálási feltételeket jelentő (4.277) egyenletekből kifejezzük az ellentagok együtthatóit. A hosszadalmas számolás eredménye:

$$\begin{aligned}\delta\mu^2 &= -\frac{\hbar}{32\pi^2}\lambda_R\left(\Lambda^2 + \mu_R^2 \ln\frac{\mu_R^2}{\Lambda^2}\right),\\ \delta\lambda &= -\frac{3\lambda_R^2}{32\pi^2}\left(1 + \ln\frac{\mu_R^2}{\Lambda^2}\right).\end{aligned} \tag{4.278}$$

Ezt az eredményt közvetlenül összehasonlíthatjuk a levágással reguralizált elméletben a szokásos perturbatív úton egyhurok-rendben meghatározott ellentagok alakjával (ld. [7], 12. oldal):

$$\begin{aligned}\delta\mu^2 &= \frac{1}{32\pi^2}\lambda_R\left[\Lambda^2 + \mu_R^2 \ln\frac{\mu_R^2}{\Lambda^2+\mu_R^2}\right],\\ \delta\lambda &= -\frac{3\lambda_R^2}{32\pi^2}\ln\frac{\mu_R^2}{\mu_R^2+\Lambda^2}.\end{aligned} \tag{4.279}$$

Látjuk, hogy a véges részektől és a logaritmikus korrekció pontos alakjától eltekintve azonos eredményt kaptunk. Az ellentagok véges részeiben rejlő különbség annak a következménye, hogy a [7] jegyzetben végzett számolás a minimális levonási sémában történt (renormálási feltételek explicit felírása helyett), ami azt jelenti, hogy az ellentagoknak a véges részeit nullának vettük. A logaritmikusan divergens kifejezésekben azért szerepel $\Lambda^2 + m^2$ helyett most csak Λ^2, mert a (4.271) egyenlet jobb oldalán a logaritmus argumentumában a tértől független állandót nem $(q^2 + U_\Lambda''(0))$-nak, hanem q^2-nek választottuk.

4.6.6. A Wilson-Fisher-féle fixpont

A skalártér elméletének (lokális potenciált és hullámfüggvény-renormálást figyelembe vevő közelítésben) minden d dimenzióban van egy fixpontja, a fentebb megtalált Gauss-fixpont.

A Gauss-fixpont azonban szabad térelméletnek felel meg, így $d = 4$ dimenzióban nem biztosít semmiféle érdekes alacsonyenergiás fizikát. Azt jelenti, hogy minden olyan elmélet, amely a Gauss-fixponthoz tartozó kritikus felületen van megfogalmazva (zérus tömeg, $m_\Lambda^2 = 0$), triviális, azaz szabad effektív elméletet ad $d = 4$ dimenzióban akkor is, ha tetszőleges lokális U_Λ önkölcsönhatással indulunk. Ha nem nulla tömeggel indítjuk a renormálási csoport trajektóriát, az irreleváns önkölcsönhatások csatolási állandói akkor is nullához tartanak, ha $k \to 0$, míg a tömegparaméter értéke nő. Az alacsonyenergiás effektív elmélet ekkor szabad tömeges elmélet. Ez persze akkor van így, ha nincsen egy másik fixpont, amelynek közelében esetleg mások a releváns operátorok.

Egy próbálkozás arra nézve, hogy esetleg másik fixpontot találjunk, az alábbi ötleten alapul. Tekintsük a Wegner-Houghton-egyenletben szereplő dimenziót folytonos paraméternek és vizsgáljuk meg a $d = 4 - \epsilon$ dimenzió esetét, ahol $\epsilon \ll 1$. Most megmutatjuk, hogy ekkor a Gauss-fixponton kívül találunk még egy másik fixpontot is, az úgynevezett Wilson-Fisher-féle fixpontot. A remény eredetileg az volt, hogy a $4 - \epsilon$ dimenzióban talált nem triviális fixpont az $\epsilon \to 0$ határesetben is megmarad és különbözni fog a Gauss-fixponttól. Ez azt jelentené, hogy a renormálási csoport trajektóriák a $k \to 0$ határesetben kölcsönható effektív elméletet szolgáltatnak. A négynél kicsit kisebb dimenzióban, mint látni fogjuk, ez így is van. Azt is megmutatjuk azonban, hogy ha vesszük az $\epsilon \to 0$ határesetet, akkor a Wilson-Fisher-fixpont egybeesik a Gauss-fixponttal. Ezért $d = 4$ dimenzióban ez a módszer is megerősíti azt az eredményt, hogy a skalártér elmélete triviális (szabad) alacsonyenergiás viselkedést ad, bármilyen kölcsönhatásokat tételezzünk is fel az UV skálán.

Hanyagoljuk el a hullámfüggvény-renormálást és induljunk ki a skálafüggő lokális potenciálra vonatkozó (4.262) egyenletből:

$$\left(d - \frac{d-2}{2} + k\partial_k\right)\tilde{U}_k = -\hbar\frac{\Omega_d}{2(2\pi)^d}\ln\frac{1+\tilde{U}_k''}{1+\tilde{U}_k''(0)} \tag{4.280}$$

Keressük ennek az egyenletnek $d = 4 - \epsilon$ esetben az

$$\tilde{U}_k(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \tag{4.281}$$

alakú közelítő megoldását.

Pontosabban keressünk fixpontot, amelyhez tartozó

$$U_*(\phi) = \frac{1}{2}\mu_*^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda_*\phi^4 \tag{4.282}$$

potenciál a

$$\left[4 - \epsilon - \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)\phi\partial_\phi\right]\tilde{U}_* = -\hbar\frac{\Omega_{4-\epsilon}}{2(2\pi)^{4-\epsilon}}\ln\frac{1+\tilde{U}_*''}{1+\mu_*^2}. \tag{4.283}$$

egyenlet közelítő megoldása az $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ rendű tagokkal bezárólag. A megoldás keresése során feltesszük, hogy $\mu_*^2 \sim \epsilon$ és $\lambda_* \sim \epsilon$, és az egyenlet jobb oldalán a logaritmust sorba fejtjük az ϵ^2 rendű tagokkal bezárólag. Külön-külön összehasonlítva az egyenlet két oldalán a ϕ^2 és ϕ^4 tagok együtthatóit, kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \mu_*^2 &= -\hbar\frac{\Omega_4}{4(2\pi)^4}\lambda_* \equiv -A\lambda_*, \\ \lambda_* &= \frac{2(2\pi)^4}{3\Omega_4}\epsilon. \end{aligned} \tag{4.284}$$

Az eredmény az, hogy $d = 4 - \epsilon$ dimenzióban a Gauss-fixponton kívül még egy fixpont van a (μ^2, λ) paramétertérben, amelynek a Gauss-fixponttól való távolsága $\sim \epsilon$.

Elvégezve a fixpontok analízisét az alábbi folyási diagramot nyerjük:

Innen látszik, hogy a $\mu^2 = -A\lambda$ egyenes a kritikus felület. A Wilson-Fisher-fixpont is UV fixpont egy irreleváns és egy releváns csatolási állandóval. A kritikus felület pontjaiból indított renormálási csoport trajektóriák belefolynak a Wilson-Fisher-fixpontba, ami egy tömeges, és véges λ_* negyedfokú önkölcsönhatással jellemezhető alacsonyenergiás effektív elméletet jelent. A kritikus felületen kívülről indított trajektóriák elfolynak a végtelenbe aszimptotikusan hozzásimulva a $\lambda = \lambda_*$ egyeneshez. Tehát ezek is véges csatolási állandójú negyedfokú kölcsönhatással jellemzett alacsonyenergiás effektív elméletet adnak. Ebből látjuk, hogy $d = 4 - \epsilon$ dimenzióban az elmélet nem triviális. (Legalábbis a vizsgált közelítésben nem.) Másrészt viszont, ha $\epsilon \to 0$, akkor a Wilson-Fisher-fixpont egybeesik a Gauss-fixponttal és újra triviális alacsonyenergiás fizikát kapunk.

4.6.7. Mi a skalártér trivialitásának jelentősége?

A skalártér elméletének 4-dimenzióban nem létezik nem triviális fixpontja. Ez azért aggasztó, mert a Standard Modell egyik fontos eleme a Higgs-mechanizmus. Azt tételezzük fel, hogy létezik egy önkölcsönható skalár tér, amelynek a várható értéke a vákuumban nem zérus. Ennek következtében a Standard Modell lokális mértékszimmetriája spontán sérül. A skalár tér minimális csatolással, $g\phi AA$ alakban csatolódik az A mértéktérhez, ami a fotonokat és a tömeges vektorbozonokat írja le. Ha a skalártér várható értéke a vákuumban nem nulla, $\langle\phi\rangle = v \neq 0$, akkor a fenti csatolás egy $gvAA$ típusú tömegtagot jelent. A Higgs-mechanizmus révén tehát a tömeges mértékterek tömegét úgy generáljuk, hogy közben nem sértjük meg explicit módon a lokális mértékszimmetriát. (Ahhoz pesze kis ügyességre van szükség, hogy valóban csak a tapasztalat szerint tömeges mértéktereknek generáljunk tömeget.) Ezek a megfontolások a perturbációszámításon alapulnak.

A Higgs-mechanizmus azonban csak akkor igazán helyes fizikai kép, ha nem csak a perturbációszámítás keretei között igaz. Azt kell igazolni, hogy létezik önkölcsönható skalártér, mint alacsonyenergiás effektív elmélet. A skalártér trivialitása azonban éppen azt jelenti, hogy ha az UV levágásnál megfogalmazott csupasz skalártér elmélete tartalmaz is önkölcsönhatást, akármilyen legyen is az, az mindig ,,kimosódik" az alacsonyenergiás effektív elméletből. A vákuum tehát csak a szabad skalártér vákuuma lehet. Ebben pedig a tér várható értéke zérus, úgyhogy nem működhet a Higgs-mechanizmus.

4.7. Összefoglalás

A statisztikus fizika és a kvantumtérelmélet közötti analógiára láttunk példát. Megmutattuk, hogy a d dimenziós térben definiált spinmodell átfogalmazható $(d-1)+1$ dimenziós (euklideszi) téridőben definiált kvantumtérelméletté a Hubbard-Stratonovich-transzformáció segítségével. A hasonlóság abban is megnyilvánul, hogy a kvantumtérben és a statisztikus fizikai rendszerben is automatikusan jelen van két, egymástól távoleső energia- ill. távolságskála. A kvantumtérnek általában minden kvantumfluktuációja fontos, amelynek a frekvenciája a legkisebb tömegű egyrészecskés gerjesztés tömege és azon UV levágás közé esik, amelyen az elméletet megfogalmaztuk. A statisztikus fizikai rendszerben mindazok a termikus fluktuációk fontosak, amelyeknek a hullámhossza a korrelációs hossz és a rácsállandó közé esik. Az UV levágás a kvantumtérelméletekben sokkal nagyobb mint az az energiaskála, amelyen az elmélet segítségével jóslatokat akarunk mondani. Perturbatív értelemben renormálható elméletben az UV levágást ,,kitolhatjuk" a végtelenbe. Ez analóg azzal, hogy kritikus statisztikus fizikai rendszerben a korrelációs hossz tart a végtelenhez. A kvantumtérelmélet UV divergenciáit és a kritikus rendszer szinguláris viselkedését a kritikus pontban egyaránt az okozza, hogy az UV skála és az IR skála egymástól végtelen távolra kerül és mindazon végtelen sok fluktuáció, amelynek a frekvenciája a két skála közé esik, egyaránt jelentős, mert a fluktuációk minden skálán nézve önhasonlóak: a korrelációs függvényük hatványfüggvény.

Megmutattuk, hogy a renormálási csoport segítségével hogyan lehet a Λ UV levágáson megfogalmazott kvantumtérelméletből alacsonyenergiás effektív elméletet nyerni, amely az azon megfigyelő által észlelt fizikát írja le, amely csak a tetszőlegesen választott $k < \Lambda$ mozgó UV levágásnál kisebb frekvenciájú kvantumfluktuációkat érzékeli közvetlenül. Az effektív elméletet a k skálától függő S_k hatásfunkcionál írja le, amely az egzakt renormálási csoport egyenletnek, a Wegner-Houghton-egyenletnek a megoldása. Az egyenlethez a kezdőfeltételt a Λ levágáson megfogalmazott hatás adja. A Wegner-Houghton-egyenlet megadja, hogy a $k - \Delta k < p < k$ frekvenciájú, Δk infinitezimális vastagságú gömbhéjba eső impulzusú kvantumfluktuációk mennyiben módosítják az effektív elméletet. A látszólag egyhurok-rendű járulék valójában az egzakt járulék, mert azzal az S_k hatással van kifejezve, amely a magasabb frekvenciájú módusok jelenlétét közvetve a csatolási állandóinak értékeiben már figyelembe veszi.

A Wegner-Houghton-egyenlet segítségével végtelen sok kölcsönhatási tag skálafüggése követhető nyomon. A k skála változása következtében változik az S_k hatás, ami egyenértékű a benne lévő végtelen sok csatolási állandó skálafüggésével. Ilyen módon azt is nyomon lehet követni, ha az UV tartományban irreleváns kölcsönhatás az IR tartományban relevánssá válik. Ez azért lehet fontos, mert vannak olyan fizikai jelenségek, amelyek azzal kapcsolatosak, hogy az UV és az IR tartományban más kölcsönhatások relevánsak. Ilyen pl. a szupravezető kondenzátum kialakulása szilárdtestben, vagy a kvantumszíndinamika bezáró fázisának léte.

A szokásos perturbatív renormálás során csak a releváns és marginális kölcsönhatások skálafüggését vizsgáljuk az UV tartományban. A perturbatív renormálás kapcsán a kölcsönhatási vertexeket osztályozzuk a hatványkitevők leszámlálásának módszerével szuperrenormálható, renormálható és nem renormálható vertexekre. Ez az osztályozás megegyezik az UV tartományban linearizált renormálási csoport transzformáció alapján végzett releváns, marginális és irreleváns vertexekre történő osztályozással.

Az UV viselkedést extrapolálva a $k \to 0$ skáláig független módus közelítésben azt találjuk, hogy az effektív elmélet potenciálja éppen az egyhurokrendű effektív potenciál. Ez természetesen közelítés, mert a különböző frekvenciájú módusok nem függetlenek. Az alacsonyabb frekvenciájú módusok járuléka az effektív elmélet hatásfunkcionáljához a már kiintegrált magasabb frekvenciás módusoktól is függ. A renormálási csoport tehát a $k \to 0$ határesetben általában más potenciált ad, mint amit egyhurok közelítésben kapunk. Az effektív elmélet potenciálja a $k \to 0$ határesetben azért fontos, mert ennek a minimuma ill. a minimum körüli viselkedése szabja meg rendre, hogy mekkora a tér várható értéke a vákuumban, ill. hogy milyen az egyrészecskés gerjesztések tömege.

Végezetül foglalkoztunk a skalártér trivialitásának kérdésével. A trivialitás azt jelenti, hogy bármilyen önkölcsönható skalártérrel indulunk is az UV levágástól, a módusok fokozatos kiintegrálása a $k \to 0$ limeszben mindig kölcsönhatás mentes, szabad elmélethez vezet. A dolog jelentőségét az adja meg, hogy a Standard Modellben a tömegeket a Higgs-mechanizmus révén szokás generálni. A Higgs-mechanizmus szükséges feltétele olyan skalártér, amelynek a várható értéke a vákuumban nem zérus. A skalártérnek a renormálási csoport segítségével történő nem perturbatív vizsgálata ugyanakkor azt mutatja, hogy ilyen nem zérus vákuum várható érték nem lehetséges, mert a skalártér az alacsonyenergiás megfigyelő számára kölcsönhatás mentes szabad tér.

5. A renormálási csoport a kvantummechanikában

Ebben a fejezetben a [10] irodalomban adott elemzést ismételjük meg. Megmutatjuk, hogy a kvantummechanikai részecske pályájának sehol sem differenciálható volta és a Heisenberg-féle határozatlansági reláció között szoros kapcsolat van. Ezután megfogalmazzuk a kvantummechanikát mint 0+1-dimenziós kvantumtérelméletet. Megmutatjuk, hogy hogyan lehet ennek alapján a kvantummechanikát perturbatív úton tárgyalni és hogy hogyan alkalmazható a hatványkitevők leszámolásának módszere a vertexek renormálhatóságának vizsgálatára. A kvantummechanikai átmeneti amplitúdóra alkalmazva a Huygens-elvet, megkapjuk a kvantummechanika renormálási csoport egyenletét. Az átmeneti amplitúdó segítségével definiáljuk a blokkosított hatást, ami adott Δt időskálán adja meg a rendszer viselkedését, azaz azt adja meg, hogy milyennek észleli a rendszert az a megfigyelő, aki Δt időközönként végez méréseket. A renormálási csoport egyenlet az az eszköz, amelynek segítségével kiszámolható, hogy hogyan függ a blokkosított hatás a Δt időskálától. Ha ezt ismerjük, meg tudjuk mondani, hogy ugyanazt avagy mennyiben más fizikát észlel két megfigyelő, akik különböző gyakorisággal figyelik meg a rendszert.

5.1. Sehol sem differenciálható pálya és a határozatlansági reláció

A kvantummechanikában egy részecske leírásának kiindulópontja az alapállapotból alapállapotba történő átmenet amplitúdója:

$$Z = \left(\prod_i \int d^3x_i\right) \exp\{\mathrm{i}S[\vec{x}(t)]/\hbar\}, \tag{5.285}$$

ahol $S = \int_0^T dtL(\vec{x},\dot{\vec{x}})$ a klasszikus hatás mint az $\vec{x}(t)$ pálya funkcionálja. A pályaintegrál alakjából látszik, hogy a kvantummechanika $0+1$-dimenziós kvantumtérelmélet, amelyben az időparaméter az egyetlen dimenzió, a térmennyiség szerepét pedig a részecske pályája játssza.

Elöljáróban **megmutatjuk, hogy a pályaintegrálhoz lényeges járulékot adó pályák sehol sem differenciálhatóak, aminek az operátorok nyelvén az felel meg, hogy a kanonikusan konjugált változók operátorai nem cserélhetők fel.** Ennek az a következménye, hogy időben minél közelebb eső két megfigyelésből határozzuk meg a részecske sebességét, azt annál nagyobbnak találjuk. Várható ezért, hogy a sebességfüggő kölcsönhatások a rövid időskálákon felerősödnek. Ez indokolja, hogy a kvantummechanikai rendszereket is vessük alá a renormálási csoport segítségével végzett vizsgálatnak. Sebességfüggő kölcsönhatások esetén a rendszer várhatóan másképpen fog viselkedni a nagy időbeli felbontást biztosító és az időben rossz felbontású megfigyelésekkel szemben.

Tekintsük a szabad részecske pályaintegrálját:

$$\left\langle \vec{x}_f \left| \exp\left\{ \mathrm{i}\frac{T}{2m\hbar}\frac{d^2}{dx^2} \right\} \right| \vec{x}_i \right\rangle$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar\Delta t} \right)^{\frac{3}{2}(N+1)} \prod_{j=1}^{N} \int d\vec{x}_j \exp\left\{ \mathrm{i}\frac{m}{2\hbar\Delta t} \sum_{j=0}^{N} (\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)^2 \right\}. \quad (5.286)$$

A pályaintegrálhoz azok a pályák adnak lényeges járulékot, amelyekre

$$\kappa = \frac{m(\Delta x)^2}{\hbar\Delta t} \sim 1. \quad (5.287)$$

Azoknak a pályáknak a járulékai ugyanis kiesnek a fázisok gyors oszcillációi miatt, amelyekre $\kappa > 1$, a $\kappa < 1$ pályáknak pedig az integrálási mértékből láthatóan kicsiny a fázistérfogata.

A lényeges járulékot adó pályákat tehát a $\kappa \sim 1$ tulajdonság, azaz a

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 \sim \frac{\hbar}{m\Delta t} \quad (5.288)$$

tulajdonság jellemzi. Ennek értelmében a részecske sebességére annál nagyobb értékeket kapunk, minél kisebb az a Δt idő, ami azon két helymérés között telik el, amelyekből nyert Δx koordináta-különbségből akarjuk a részecske sebességét meghatározni. Másképpen szólva a pályának seholsem létezik az érintője, seholsem differenciálható. Ha a pályaintegrált ténylegesen kiszámoljuk (elhanyagolva a végpontok járulékát), akkor megkapjuk a fenti becslés helyett a megfelelő pontos összefüggést:

$$\left\langle \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 \right\rangle = \frac{\mathrm{i}\hbar}{m\Delta t}. \quad (5.289)$$

Az a tény, hogy a kvantummechanikai pályaintegrálhoz a seholsem differenciálható pályák adják a lényeges járulékot, azt is eredményezi, hogy a koordináta és az impulzus nem felcserélhető, hanem a Heisenberg-féle csererelációt elégíti ki. Valóban, az

$$\begin{aligned} \langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle &= \frac{m}{\Delta t} \langle x_{k+1} (x_{k+1} - x_k) - (x_{k+1} - x_k) x_k \rangle \\ &= \frac{m}{\Delta t} \left\langle (x_{k+1} - x_k)^2 \right\rangle = \mathrm{i}\hbar \end{aligned} \quad (5.290)$$

összefüggés adódik, ami a kanonikus cserereláció a pályaintegrál nyelvén.

Miután a Δt időtartam alatt bekövetkező elmozdulásra a $(\Delta x)^2 \sim \Delta t$ nagyságrendi becslés érvényes, a pályaintegrálhoz lényeges járulékot adó pályák Brown-mozgás pályáinak tekinthetők. Minél rövidebb időközönként nézünk rá a pályára, annál nagyobb lesz az egymást követően talált koordinátaértékek szórása. A $v = \Delta x/\Delta t$ „sebesség” eleget tesz a

$$v\sqrt{\Delta t} \sim \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \tag{5.291}$$

becslésnek, azaz annál nagyobbnak adódik, minél rövidebb időközzel elvégzett két mérés eredményéből határozzuk meg. Ezért a nagyon finom időbeli feloldással rendelkező mérések szempontjából, vagyis nagyon rövid időskálán várható, hogy a sebességfüggő kölcsönhatások felerősödnek. A részecske tehát nagyon kis időskálán esetleg más viselkedést mutat, mint nagy időskálán. Ez indokolja, hogy vessük alá az egyrészecskés kvantummechanikai rendszert a renormálási csoport segítségével végzett vizsgálatnak.

5.2. Perturbációszámítás

Vizsgáljuk először a kvantummechanikai egyrészecske-feladatot mint $0+1$ dimenziós térelméletet a perturbációszámítás módszerével. A partíciós függvény:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^T dt\hat{H}\right\}\\
&= \lim_{N\to\infty} C_N \prod_{j=0}^{N}\int d\vec{x}_j \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Delta t\sum_{n=0}^{N}\frac{m}{2}\left(\frac{\vec{x}_{n+1}-\vec{x}_n}{\Delta t}\right)^2 - V(\vec{x}_n)\right.\\
&\quad\left. + \frac{\vec{x}_{n+1}-\vec{x}_n}{\Delta t}\vec{A}(\eta_+\vec{x}_{n+1}+\eta_-\vec{x}_n)\right\}\\
&\equiv \lim_{N\to\infty} C_N \prod_{j=0}^{N}\int d\vec{x}_j \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Delta t\sum_{n=0}^{N} L_n\right\},
\end{aligned} \tag{5.292}$$

ahol az időben periódikus határfeltételt írtunk elő, $\vec{x}_0 = \vec{x}_{N+1}$. A vektorpotenciált nem két egymást követő helyzetvektor közötti felezőpontban, hanem ahhoz képest eltolt pontban számoljuk ki. A felezőponttól való eltérést az η valós paraméter jellemzi, $\eta_\pm = \frac{1}{2} \pm \eta$.

A perturbációszámítás kiindulópontja, hogy a potenciálokat Taylor-sorukkal tekintjük adottnak:

$$\begin{aligned}
V(\vec{x}) &= V_0 + V^i x^i + V^{ij}x^i x^j + V^{ijk}x^i x^j x^k + \dots,\\
A_l(\vec{x}) &= a_l + a_l^i x^i + a_l^{ij}x^i x^j + a_l^{ijk}x^i x^j x^k + \dots
\end{aligned} \tag{5.293}$$

A pályaintegrálban szereplő exponenciális kifejezést a potenciálok csatolási állandói szerint sorba fejtjük. Ezután, hasonlóan mint a kvantumtérelméletben általában, az egyes tagokat Feynman-gráfokkal ábrázolhatjuk.

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk a kvantummechanika, mint $0+1$ dimenziós térelmélet és a d dimenziós kvantumtérelmélet közötti párhuzamot.

	Kvantummechanika	Kvantumtérelmélet
Koordinátatér	t, idő	x_μ
Térmennyiség	$\vec{x}(t)$	$\phi(x)$
Vákuum	$\psi_0(\vec{x}) \Leftrightarrow \|0\rangle$	$F_0[\phi] \Leftrightarrow \|0\rangle$
Állapotok	$x^{j_1}\cdots x^{j_n}\psi_0 \Leftrightarrow \|x^{j_1}\ldots x^{j_n}\rangle$	$\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)F_0 \Leftrightarrow \|\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\rangle$
Átmeneti amplitúdók (Feynman-gráf, $m+n$ külső láb)	$\langle x^{j_1}\ldots x^{j_n}\|U(t)\|x^{i_1}\ldots x^{i_m}\rangle$	$\langle\phi(x_{j_1})\ldots\phi(x_{j_n})\|U(t)\|\phi(x_{i_1})\ldots\phi(x_{i_m})\rangle$

Miután a partíciós függvényben az időben periódikus pályákra kell integrálni, a pályát Fourier-sorba fejthetjük,

$$\vec{x}(n\Delta t) \;=\; \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}kn\right\}\vec{x}_k, \tag{5.294}$$

ill. a $\Delta t = T/N$, $N\to\infty$ kontinuum-határesetben Fourier-integrál alakjában állíthatjuk elő,

$$\vec{x}(t) \;=\; \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t}\frac{d\omega}{2\pi}e^{\mathrm{i}\omega t}\vec{x}(\omega). \tag{5.295}$$

Az utóbbi előállítás mutatja, hogy a $\Delta t\to 0$ határesetben esetleg fellépő szingularitás a kvantumtérelmélet UV divergenciáinak analogonja. A renormálási csoporttal végzett vizsgálatot éppen az a gyanú motiválja, hogy erősen sebességfüggő kölcsönhatás a kvantummechanikában UV divergenciát eredményezhet.

Számoljuk ki a szabad részecske propagátorát:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\hat{T}\left(x^i(t_n)x^j(t_m)\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^T dt\hat{H}\right\}\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}C_N\left(\prod\int d\vec{x}_i\right)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}L_1\Delta t\right\}\cdots\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}L_{n-1}\Delta t\right\}x_n^i\\
&\quad\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}L_n\Delta t\right\}\cdots\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}L_{m-1}\Delta t\right\}\\
&\quad x_m^j\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}L_m\Delta t\right\}\cdots\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}L_N\Delta t\right\}\\
&= \delta^{ij}\frac{\mathrm{i}T}{4mN^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\exp\left\{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}k(n-m)\right\}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{N}k\right)+\mathrm{i}\epsilon}.
\end{aligned} \tag{5.296}$$

A folytonos határesetben a szabad részecske propagátora:

$$G_0^{ij}(t_1-t_2) \;=\; \delta^{ij}\frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{\exp\{\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)\}}{4(\Delta t)^{-2}\sin^2(\omega\Delta t/2)+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{5.297}$$

Vegyük észre, hogy **a $G_0^{ij}(t)$ szabad propagátornak az idő szerinti második deriváltja a $t\to 0$ limeszben UV-divergens, ami annak a kifejeződése, hogy a pályák seholsem differenciálhatóak, ill. hogy a kanonikus csererelációk fennállnak.**

Képezzük az alábbi kifejezést, a szabad propagátor $t=0$ pontban vett idő szerinti második differenciahányadosát $\Delta t\to 0$ esetén:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\Delta t)^2}\left[G_0^{ij}(\Delta t)+G_0^{ij}(-\Delta t)-2G_0^{ij}(0)\right]\\
&= -\delta^{ij}\frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{1+\mathrm{i}\omega\Delta t-\frac{1}{2}\omega^2(\Delta t)^2+1-\mathrm{i}\omega\Delta t-\frac{1}{2}\omega^2(\Delta t)^2-2}{\omega^2(\Delta t)^2}\\
&= -\delta^{ij}\frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t}\frac{d\omega}{2\pi}\\
&= -\delta^{ij}\frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\frac{1}{\Delta t}.
\end{aligned} \tag{5.298}$$

Másrészről a második differenciahányados:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\Delta t)^2}\left[G_0^{ij}(\Delta t)+G_0^{ij}(-\Delta t)-2G_0^{ij}(0)\right]\\
&= \frac{1}{(\Delta t)^2}\left\langle x_{n+1}^i x_n^j + x_n^i x_{n+1}^j - x_n^i x_n^j - x_{n+1}^i x_{n+1}^j\right\rangle\\
&= -\delta^{ij}\left\langle\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\right\rangle.
\end{aligned} \tag{5.299}$$

A szabad propagátor második deriváltjának szingularitása következtében visszakapjuk tehát a kanonikus csererelációt:

$$\left\langle\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\right\rangle \;=\; \frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\frac{1}{\Delta t}. \tag{5.300}$$

Érdemes azt is megfigyelni, hogy a kanonikus cserereláció lényegében azon múlik, hogy a szabad részecske propagátora ω^{-2} viselkedést mutat, vagyis hogy a hatás (parciális integrálás után) az idő szerinti második deriváltat tartalmaz, $\int dt\vec{x}\,(d/dt)^2\,\vec{x}$. Ha magasabb rendű derivált szerepelne a hatásban, $\int dt\vec{x}\,(d/dt)^n\,\vec{x}$, ahol $n\geq 3$, akkor a kanonikus cserereláció nem teljesülne. Pl. $n=3$ esetén a propagátor csak logaritmikusan divergens, $n>3$ esetén pedig véges, úgyhogy a koordináta és a hozzá kanonikusan konjugált impulzus felcserélhetővé válnak.

A szabad propagátor második deriváltjának szingularitásából következően a pályaintegrál akkor és csak akkor mértékinvariáns, ha a vektorpotenciált az osztópontok közötti felezőpontokban vesszük, vagyis ha $\eta = 0$.

Ennek belátása érdekében számoljuk ki a vektorpotenciál vezetőrendű járulékát a partíciós függvényhez:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N} \left\langle (x^i_{n+1} - x^i_n) a^j_i (\eta_+ x^j_{n+1} + \eta_- x^j_n) \right\rangle \\
&= a^j_j \frac{i\hbar T}{4mN} \sum_{k=1}^{N} \frac{(\exp\{i2\pi k/N\} - 1)(\eta_+ \exp\{-i2\pi k/N\} + \eta_-)}{\sin^2(k\pi/N)} \\
&= a^j_j \eta \frac{i\hbar T \Delta t}{m} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \frac{d\omega}{2\pi} = \eta \frac{i\hbar T}{m} \partial_j A_j(0).
\end{aligned} \tag{5.301}$$

5.3. Renormálhatóság

A kvantummechanika renormálhatóságának kérdését vizsgálhatjuk a hatványkitevők számlálásának módszerével, amely a perturbációszámításon alapszik. Ez a vizsgálat a kvantumtérelméletek hasonló vizsgálatának a 0+1 dimenzióra történő alkalmazása.

A kvantummechanikai pályaintegrálban definíció szerint a rácsregularizált hatást kell használnunk. Ez azt jelenti, hogy az időbeli fejlődés teljes T időtartamát felosztjuk N darab Δt hosszúságú intervallumra. Az idő szerinti első deriváltnak a rácsregularozált kvantummechanikában a Fourier-transzformáltak nyelvén az

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow \frac{1}{\Delta t} (\exp\{i\omega\Delta t\} - 1) \tag{5.302}$$

kifejezés felel meg. Ennek a viselkedése a frekvencia $\omega \longrightarrow \lambda\omega$, azaz az idő $\Delta t \longrightarrow \Delta t/\lambda$ átskálázása esetén:

$$\frac{1}{\Delta t/\lambda} (\exp\{i(\omega\lambda)(\Delta t/\lambda)\} - 1) = \lambda \frac{1}{\Delta t} (\exp\{i\omega\Delta t\} - 1). \tag{5.303}$$

Ezért az idő szerinti deriválás kanonikus dimenziója 1.

A hatás dimenziója

$$[S] = TM(L/T)^2 = ML^2T^{-1}. \tag{5.304}$$

A hatás általában az alábbi szerkezetű:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_n \Delta t \sum_{d,s} G_{ds} \left(\frac{\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n}{\Delta t}\right)^d \left(\frac{\vec{x}_{n+1} + \vec{x}_n}{2}\right)^s \\
&\longrightarrow \sum_{d,s} \int dt G_{ds} \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^d \vec{x}^s,
\end{aligned} \tag{5.305}$$

ahol G_{ds} a d sebességlábbal és s koordinátalábbal rendelkező vertex csatolási állandója. Innen a vertex dimenziója $[V_{ds}] = T^{1-d}L^{d+s}$, a csatolási állandó dimenziója $[G_{ds}] = ML^{2-d-s}T^{d-2}$.

A renormálhatóság a hurokintegrálok látszólagos (frekvencia-) dimenzióján múlik. Ennek meghatározása érdekében induljunk ki egy tetszőleges Feynman-diagram dimenziójából, amelynek E külső lába van, és azok közül E_d valamely vertex sebesség-végződésén keresztül csatlakozik a Feynman-gráf belsejéhez. A Feynman-diagram az $\langle x \dots x \rangle$ E-pontfüggvényhez ad járulékot, s így dimenziója L^E. Másrészről fennáll az alábbi dimenzió-egyenlet:

$$L^E = (L^2)^E T^{-E_d} T^1 [I][G](ML^2T^{-1})^{-V}. \tag{5.306}$$

A jobb oldalon az első tényezőt a külső lábaknak megfelelő szabad propagátorok adják, a második tényező a sebességvégződésektől jön, a harmadik tényező az általános energiamegmaradást kifejező Dirac-delta következménye, $[I]$ ill. $[G]$ a hurokintegrál, ill. a csatolási állandók dimenziója. Az utolsó tényező pedig annak a következménye, hogy a V darab vertex mindegyike be van osztva $\hbar$-sal. Legyen ℓ a belső vonalak száma, indexelje α az egyes vertexeket, amelyeknek rendre d_α sebeségvégződésük és s_α koordinátavégződésük van, ekkor

$$2\ell + E = \sum_\alpha (d_\alpha + s_\alpha). \tag{5.307}$$

Használjuk fel, hogy $[G] = \prod_\alpha [G_\alpha]$, és fejezzük ki a (5.306) egyenletből a hurokintegrál dimenzióját:

$$\begin{aligned} [I] &= L^{-E}T^{E_d-1}\prod_\alpha \left(ML^2T^{-1}/[G_\alpha]\right) = L^{-E}T^{E_d-1}\prod_\alpha (T^{1-d_\alpha}L^{d_\alpha+s_\alpha}) \\ &= L^{-E+\sum_\alpha (d_\alpha+s_\alpha)}T^{-1+E_d-\sum_\alpha (d_\alpha-1)} \\ &= \left(L^2T^{-1}\right)^\ell T^{-1-(E/2)+E_d-\sum_\alpha \delta(V_\alpha)}, \end{aligned} \tag{5.308}$$

ahol

$$\delta(V_\alpha) = \frac{d_\alpha - s_\alpha}{2} - 1 \tag{5.309}$$

a V_α vertex látszólagos dimenziója. Tekintve, hogy a hurokintegrálban szereplő $d\omega_1 \cdots d\omega_\ell/(2\pi\hbar)^\ell$ fázistérfogat egy további $[\hbar]^\ell$ faktort tartalmaz, az 1PI Feynman-gráf látszólagos $\omega(I)$ frekvenciadimenzióját $[I][\hbar]^{-\ell} = M^{-\ell}T^{-\omega(I)}$ definiálja, úgyhogy:

$$\omega(I) = 1 + \frac{E}{2} - E_d + \sum_\alpha \delta(V_\alpha). \tag{5.310}$$

A hurokintegrál (5.310) látszólagos dimenziója alapján látszik, hogy ha a vertex $\delta(V_\alpha)$ látszólagos dimenziója pozitív, nulla, ill. negatív, akkor az a vertex rendre nem renormálható, renormálható, ill. szuperrenormálható. (Újabb és újabb vertexet rakva be az adott számú és típusú végződéssel rendelkező 1PI Feynman-diagramba, annak a látszólagos dimenziója rendre nő, változatlan marad, ill. csökken.)

A renormálhatóság perturbatív vizsgálata alapján megállapíthatjuk, hogy a kvantummechanika (szuper)renormálható szabad részecske esetén, avagy tetszőleges x^s, $s \geq -2$ potenciálban mozgó részecske esetén. Ugyanakkor az erősen szinguláris potenciálban mozgó részecske kvantummechanikája, és az erősen sebességfüggő (magasabb rendű időderiváltakat tartalmazó) kölcsönhatás nem renormálható.

Vertex	d	s	$\delta(V)$	
v^2	2	0	0	renormálható
x^s	0	> -2	< 0	szuperren.
	0	-2	0	renormálható
	0	< -2	> 0	nem ren.
v^d	> 2	0	> 0	nem ren.

5.4. Futó csatolási állandók

Futó csatolási állandókon a blokkosított hatásban szereplő csatolási állandókat értjük. A **blokkosított hatás**t a kvantummechanikai átmeneti amplitúdó segítségével definiáljuk az alábbi módon:

$$\langle \vec{x}|\hat{U}(t)|\vec{y}\rangle = \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(\vec{x},\vec{y};t)\right\}, \tag{5.311}$$

ahol $\hat{U}(t)$ az időfejlesztő operátor. Az $S(\vec{x},\vec{y};t)$ blokkosított hatás meghatározza tehát a t idő alatti átmenet amplitúdóját az $|\vec{y}\rangle$ állapotból az $|\vec{x}\rangle$ állapotba. Ezért a kvantummechanikai rendszer olyan jellemzésére szolgál, amikor a megfigyelések t időközönként következnek, mint stroboszkopikus felvételek sorozata. A blokkosított hatás ebben az értelemben a rendszer t időskálán mutatott viselkedését adja meg.

A blokkosított hatást célszerű úgy parametrizálni, hogy Taylor-sorba fejtjük az $\vec{x}-\vec{y}$ különbség (a „sebesség") és az $\vec{x}+\vec{y}$ vektor szerint:

$$S(\vec{x},\vec{y};t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{j_1\ldots j_n}(\vec{x}+\vec{y};t)(x^{j_1}-y^{j_1})\cdots(x^{j_n}-y^{j_n}), \tag{5.312}$$

ahol

$$s_n^{j_1\ldots j_n}(\vec{x}+\vec{y};t) = \sum_{m=0}^{\infty} s_{n,k_1\ldots k_m}^{j_1\ldots j_n}(t)(x^{k_1}+y^{k_1})\cdots(x^{k_m}+y^{k_m}), \tag{5.313}$$

ahol $s^{j_1 \dots j_n}_{n,k_1 \dots k_m}(t)$ a futó csatolási állandók.

A $V(\vec{x})$ skalár- és $\vec{A}(\vec{x})$ vektorpotenciál terében mozgó pontrészecske esetén a csatolási állandók a $t \to 0$ esetben:

$$s_0 = -V\left(\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}\right), \qquad s_1^j = A^j\left(\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}\right), \qquad s_2^{ij} = \delta^{ij}\frac{m}{2t}. \tag{5.314}$$

A blokkosított hatás definíciójából következően kielégíti az alábbi renormálási csoport egyenletet:

$$S(\vec{x},\vec{y};t+\Delta t) \;=\; -\mathrm{i}\hbar \ln\left[\int d\vec{z} \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(\vec{x},\vec{z};\Delta t)\right\}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(\vec{z},\vec{y};t)\right\}\right]. \tag{5.315}$$

A kvantummechanika (5.315) renormálási csoport egyenletét az átmeneti amplitúdó általános tulajdonságát, a Huygens-elvet felhasználva írtuk fel. Fontos azt megjegyezni, hogy ehhez nincsen szükség arra, hogy létezzen a rendszernek a Hamilton-operátora. Így a (5.315) renormálási csoport egyenlet olyan esetben is fennáll, ha nem létezne Hamilton-operátor és nem írható fel Schrödinger-egyenlet. Ilyen eset elvileg akkor állhat elő, ha a blokkosított hatásnak nem létezik $t \to 0$ esetén véges határértéke.

5.4.1. A harmonikus oszcillátor

A harmonikus oszcillátor egyszerű példa arra, hogyan lehet az adott Hamilton-operátorhoz tartozó blokkosított hatást meghatározni. Ebben az esetben a blokkosított hatásnak létezik a $t \to 0$ határértéke és a futó csatolási állandók ebben a határesetben megegyeznek a csupasz csatolási állandókkal.

A harmonikus oszcillátor Hamilton-operátora:

$$\hat{H} \;=\; \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m_0} + \frac{1}{2}m_0\omega_0^2\hat{\vec{x}}^{\,2}. \tag{5.316}$$

Az átmeneti amplitúdó Gauss-integrál, és így közvetlenül ki lehet számolni. A logaritmusa arányos a blokkosított hatással:

$$S(\vec{x},\vec{y};t) \;=\; \frac{1}{2}\left(\vec{x}^{\,2}+\vec{y}^{\,2}\right)m_0\omega_0 \mathrm{cotan}(\omega_0 t) - \frac{m_0\omega_0}{\sin(\omega_0 t)}\vec{x}\vec{y}, \tag{5.317}$$

ahol $\omega_0 = 2\pi/T$ és T az oszcillátor periódusideje.

Definiáljuk ezután az alábbi paraméterezéssel a futó tömeget, $m(t)$, és a futó körfrekvenciát, $\omega(t)$:

$$S(\vec{x},\vec{y};t) \;=\; \frac{m(t)}{2t}(\vec{x}-\vec{y})^2 - \frac{tm(t)\omega^2(t)}{2}\left(\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}\right)^2. \tag{5.318}$$

Ha összehasonlítjuk a blokkosított hatás (5.317) kifejezését a (5.318) paraméterezéssel, akkor leolvashatjuk, hogy:

$$m(t) = \frac{1}{2} m_0 \omega_0 t \frac{1 + \cos(\omega_0 t)}{\sin(\omega_0 t)}, \qquad \omega^2(t) = \frac{4}{t^2} \frac{1 - \cos(\omega_0 t)}{1 + \cos(\omega_0 t)}. \tag{5.319}$$

Egyrészt rögtön látjuk, hogy a futó csatolási állandók a $t \to 0$ határesetben megegyeznek a csupasz csatolási állandókkal. Ennek az a magyarázata, hogy nincsenek sebességfüggő kölcsönhatások.

Ezen kívül figyelemre méltó speciális eset, ha *(A)* $t = n'T$, ahol n' egész, és *(B)* $t = (n' + \frac{1}{2})T$. Az *(A)* esetben $\omega(n'T) = 0$ és $m(n'T) \to \infty$. Ekkor a visszatérítő erő, ill. a potenciál eltűnik, a kinetikus energia pedig végtelenhez tart. A propagátor, azaz az $\vec{y}$ pontból az $\vec{x}$ pontba való átmenet amplitúdója:

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y};' t) \equiv \left\langle \vec{x} \left| \exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \hat{H} t \right\} \right| \vec{y} \right\rangle \quad = \quad \sum_n \psi_n(\vec{x}) e^{-\mathrm{i}\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t} \psi_n^*(\vec{y}). \tag{5.320}$$

Az *(A)* esetben tehát

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}; n'T) \quad = \quad e^{-\mathrm{i}n'\pi} \sum_n \psi_n(\vec{x}) \psi_n^*(\vec{y}) \sim \delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{5.321}$$

Ha tehát a harmonikus oszcillátort pontosan a periódusidejével azonos időközönként figyeljük meg, akkor úgy látjuk, mintha a részecske mindig ugyanazon a helyen maradna, mintha a tömeg végtelen, a visszatérítő erő pedig zérus lenne. Ezt nevezzük periódikus önfókuszálásnak.

A *(B)* esetben, amikor a megfigyelések közti időtartam a félperiódus páratlan számú többszöröse, akkor $m\left((n' + \frac{1}{2})T\right) = 0$ és $\omega\left((n' + \frac{1}{2})T\right) \to \infty$, azaz a tömeg, ill. a kinetikus energia zérus és a visszatérítő erő ill. a potenciál végtelen. Ez összhangban van az átmeneti amplitúdó azon tulajdonságával, hogy az ilyen időtartamokhoz tartozó helyvektorokra $\vec{x} = -\vec{y}$:

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}; (n' + \frac{1}{2})T) \quad = \quad (-1)^{2n'+1} \sum_n \psi_n(\vec{x}) (-1)^n \psi_n^*(\vec{y}) \sim \delta(\vec{x} + \vec{y}). \tag{5.322}$$

5.5. Blokkosítás

A blokkosított hatást megadó renormálási csoport egyenletet tetszőleges t_1 és t_2 esetén az alábbi alakban írhatjuk:

$$\exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} S(\vec{x}, \vec{y}; t_1 + t_2) \right\} \quad = \quad \int d\vec{z} \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} S(\vec{x}, \vec{z}; t_1) \right\} \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} S(\vec{z}, \vec{y}; t_2) \right\}. \tag{5.323}$$

Parametrizáljuk a blokkosított hatást az alábbi módon:

$$S(\vec{x},\vec{y};t) \;=\; \frac{m}{2t}(\vec{x}-\vec{y})^2 - U(\vec{x},\vec{y};t), \tag{5.324}$$

ahol $U(\vec{x},\vec{y};t)$ az általánosított potenciál. Éljünk továbbá a $t_1 = t_2 = t$ választással, azaz növelje a blokkosítási lépés az időintervallumokat 2-szeresre: $t \to t' = 2t$.

1. **A szabad hatás ($U_* \equiv 0$) a renormálási transzformáció fixpontja:**

$$S_*(\vec{x},\vec{y};t) \;=\; \frac{m}{2t}(\vec{x}-\vec{y})^2. \tag{5.325}$$

Erről a pályaintegrál (Gauss-integrál) közvetlen kiértékelésével győződhetünk meg:

$$\begin{aligned}&\int d\vec{z}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{m}{2t}\left[(\vec{x}-\vec{z})^2+(\vec{z}-\vec{y})^2\right]\right\}\\ &\sim\;\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{m}{2t}\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{y})^2\right\}.\end{aligned} \tag{5.326}$$

2. **Renormálási transzformáció a fixpont közelében.** A renormálási csoport egyenletnek általánosabb, kölcsönhatást is tartalmazó megoldásai azok, amelyekben a blokkosított hatás potenciált is tartalmaz. Tekintsük a potenciált a továbbiakban perturbációnak, ami annak felel meg, hogy a fixpont közelében található megoldásokat vizsgáljuk..

A kinetikus energiából adódó járulékokat átírhatjuk az alábbi alakba:

$$\frac{m}{2t}\left[(\vec{x}-\vec{z})^2+(\vec{z}-\vec{y})^2\right] \;=\; \frac{m}{t}\left(\vec{z}-\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}\right)^2+\frac{m}{4t}(\vec{x}-\vec{y})^2. \tag{5.327}$$

Ezért $t \to 0$ esetén, azaz az UV tartományban a pályaintegrált a $\vec{z} = \vec{R}$ helyen vett járulék fogja dominálni, ahol $\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})$.

Szorítkozzunk a továbbiakban az UV tartományra és fejtsük sorba a potenciált a $\vec{z} = \vec{R}$ hely körül. Jelölje $\vec{v} = \vec{z}-\vec{R}$ az új integrálási változót és közelítsük a $\vec{v}$ szerinti pályaintegrált Gauss-integrállal. Ehhez az integrandus exponensében azt írjuk, hogy:

$$\begin{aligned}&U(\vec{x},\vec{z};t)+U(\vec{z},\vec{y};t)\\ &=\;U_+ + v^i\partial_i U_+ + \frac{1}{2}v^i v^j\partial_i\partial_j U_+ + \ldots,\end{aligned} \tag{5.328}$$

ahol $U_\pm = U_1 \pm U_2$ és

$$U_1 = U\left(\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2},\vec{y};t\right), \qquad U_2 = U\left(\vec{x},\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2};t\right), \tag{5.329}$$

és a parciális deriválás U_1-ben az első, U_2-ben a második változó szerint történik. A Gauss-integrál

$$\begin{aligned}
&\int d\vec{v}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\frac{m}{t}v^2 - v^i\partial_i U_+ - \frac{1}{2}v^i v^j\partial_i\partial_j U_+\right]\right\} \\
&= \int d\vec{v}\exp\left[-\frac{i}{2}(vAv) + \mathrm{i}(Bv) + \mathrm{i}C\right] \\
&\sim \left(\text{ Det A}\right)^{-1/2}\exp\left\{\mathrm{i}C + \frac{\mathrm{i}}{2}(BA^{-1}B)\right\}, \qquad (5.330)
\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}
(\hbar A)_{jk} &= -\delta_{jk}\frac{2m}{t} + \partial_j\partial_k U_+, \\
\hbar B_j &= -\partial_j U_+, \\
\hbar C &= \frac{m}{4t}(\vec{x}-\vec{y})^2 - U_+, \\
\ln\left(\text{ Det A}\right)^{-1/2} &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln A \approx \frac{1}{4m}\partial^2 U_+.
\end{aligned} \qquad (5.331)$$

A fentieket felhasználva a renormálási transzformáció $t' = 2t$ és t kicsi (UV tartomány) az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{m}{2t}(\vec{x}-\vec{y})^2 - U(\vec{x},\vec{y};t) \\
&\to S' = \frac{m}{2t'}(\vec{x}-\vec{y})^2 - U'(\vec{x},\vec{y};t') + \mathcal{O}(t^2),
\end{aligned} \qquad (5.332)$$

ahol a blokkosított potenciál:

$$U' = U_+ - \frac{t'}{m}\left[\frac{\hbar}{8}\partial^2 U_+ - \frac{1}{8}(\partial U_+)^2 - \frac{t'}{16m}\partial_j U_+\cdot\partial_k U_+\cdot\partial^j\partial^k U_+\right]. \qquad (5.333)$$

Hasznos jelölés, ha bevezetjük az $\tilde{U}(\vec{R},\vec{r}) \equiv U(\vec{x},\vec{y})$ függvényt, amelynek a változói $\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})$, $\vec{r} = \vec{x}-\vec{y}$. Ekkor az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$\begin{aligned}
U_1 &= U\left(\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y}),\vec{y}\right) = \tilde{U}\left(\vec{R}-\frac{1}{4}\vec{r},\frac{1}{2}\vec{r}\right) \equiv \tilde{U}_1, \\
U_2 &= U\left(\vec{x},\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})\right) = \tilde{U}\left(\vec{R}+\frac{1}{4}\vec{r},\frac{1}{2}\vec{r}\right) \equiv \tilde{U}_2, \\
\partial U_1 &= 2\partial_x U_1 = (\partial_R + 2\partial_r)\,\tilde{U}_1, \\
\partial U_2 &= 2\partial_x U_2 = (\partial_R - 2\partial_r)\,\tilde{U}_2, \\
\partial^2 U_1 &= (\partial_R^2 + 4\partial_r^2 + 4\partial_R\partial_r)\tilde{U}_1, \\
\partial U_2 &= (\partial_R^2 + 4\partial_r^2 - 4\partial_R\partial_r)\tilde{U}_2, \\
\partial^2 U_+ &= (\partial_R^2 + 4\partial_r^2)\tilde{U}_+ + 4\partial_R\partial_r\tilde{U}_-. \qquad (5.334)
\end{aligned}$$

A fenti összefüggéseket felhasználva kapjuk a blokkosított potenciál alábbi alakját:

$$\begin{aligned}\tilde{U} \quad &\longrightarrow \quad \tilde{U}_+ + \frac{t'}{8m}(\partial_R \tilde{U}_+ + 2\partial_r \tilde{U}_-)^2 \\ &-\frac{\hbar t'}{8m}\left[(\partial_R^2 + 4\partial_r^2)\tilde{U}_+ + 4\partial_R\partial_r\tilde{U}_-\right] + \mathcal{O}(t^2). \qquad (5.335)\end{aligned}$$

5.6. A linearizált renormálási csoport transzformáció

Az előző fejezetben megkaptuk, hogy a $t \to t' = 2t$ blokkosítási lépes eredményeként a blokkosított potenciál transzformációja lineáris közelítésben:

$$\tilde{U}' \quad = \quad \tilde{U}_+ - \frac{t'\hbar}{8m}\partial^2 U_+, \qquad (5.336)$$

ahol $\partial^2 U_+ = (\partial_R^2 + 4\partial_r^2)\tilde{U}_+ + 4\partial_R\partial_r\tilde{U}_-$. Miután a szabad mozgás fixpont, ezen fixpont közelében feltehetően nem rossz közelítés a linearizált transzformáció.

1. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a t időskálán a blokkosított potenciál skalárpotenciált és vektorpotenciálhoz való csatolást tartalmaz:

   $$\tilde{U} \quad = \quad \tilde{U}_A + t\tilde{V}(\vec{R}), \qquad (5.337)$$

   ahol

   $$\tilde{U}_A(\vec{R},\vec{r}) \quad = \quad -\vec{r}\tilde{\vec{A}}(\vec{R}+\eta\vec{r}). \qquad (5.338)$$

   A blokkosítási lépés után az $\tilde{U}'$ potenciált újra

   $$\tilde{U}' \quad = \quad \tilde{U}_A' + t'\tilde{V}' + \mathcal{O}(t'^2) \qquad (5.339)$$

   alakba írjuk, és leolvassuk a vektorpotenciál és a skalárpotenciál transzformációját.

   A vektorpotenciál transzformációja:

   $$\tilde{A}(\vec{R}+\eta\vec{r}) \quad \to \quad \frac{1}{2}(\tilde{\vec{A}}_+ + \tilde{\vec{A}}_-), \qquad (5.340)$$

   ahol

   $$\begin{aligned}\tilde{\vec{A}}_+ \quad &= \quad \tilde{\vec{A}}\left(\vec{R} + \frac{2\eta-1}{4}\vec{r}\right), \\ \tilde{\vec{A}}_- \quad &= \quad \tilde{\vec{A}}\left(\vec{R} + \frac{2\eta+1}{4}\vec{r}\right). \qquad (5.341)\end{aligned}$$

Érdemes felfigyelni, hogy $\eta = 0$, ami a mértékinvarianciát biztosítja a t skálán, a $t' = 2t$ skálán már nem garantálja a mértékinvarianciát, mert a blokkosítás $\eta = 0$ esetén is generál nem középpontban vett vektorpotenciáltól származó járulékot. Ez $\vec{r}$ szerinti sorfejtés után magasabb rendű sebességfüggést jelent. (Az $\vec{r}$ különbségről mindig áttérhetünk az $\vec{r}/t' = \vec{v}$ sebességre.) A mértékinvarianciát úgy tudjuk biztosítani, hogy eldobjuk a blokkosított potenciálból azt a járulékot, ami abból adógik, hogy a blokkosított vektorpotenciált nem az osztópontok közötti középpontokban kell kiszámolni.

A skalárpotenciál egyhurokrendű megváltozása az időben és a sebességben magasabb rendű tagokat elhagyva:

$$\begin{aligned} \tilde{V}' &\approx \frac{1}{2}\tilde{V}_+ - \frac{\hbar}{8m}\partial^2 U_{A+} \\ &\approx \tilde{V}(\vec{R}) + \frac{\hbar}{2m}\eta\partial_R\tilde{\vec{A}}(\vec{R}) + \mathcal{O}(\vec{r}). \end{aligned} \tag{5.342}$$

Ezzel kapcsolatban azt kell látni, hogy a blokkosítás a skalárpotenciált is sebességfüggővé teszi. Az is látszik, hogy ha kezdetben nem középpontban vett vektorpotenciállal indulunk, akkor a skalárpotenciálhoz időtől független járulék adódik. Ez azt jelenti, hogy a skalárpotenciálnak, mint a t időskála függvényének $t \to 0$ esetén logaritmikus szingularitása van, ha $\eta \neq 0$. A skalárpotenciálnak nem létezik a $t \to 0$ limesze, bár a blokkosított hatásé létezik, mert $t \ln t \to 0$, ha $t \to 0$.

2. Vizsgáljunk most egy másik speciális esetet. Tegyük fel, hogy az induló blokkosított hatás a t skálán $t\tilde{V}$ alakú, ahol

$$\tilde{V} = t^{-2} g_{ds} \vec{r}^d \vec{R}^s \tag{5.343}$$

alakú, ahol $[g_{ds}]_T = T^0$, azaz a g_{ds} csatolási állandó idődimenziója nulla. A $\hbar^0$ fagráf rendben és $\vec{r}$-ben vezető rendben ennek a potenciálnak a transzformáltja egy blokkosítási lépés után:

$$\begin{aligned} \tilde{V}' &\approx \frac{1}{2}\tilde{V}_+ \approx g_{ds}(t'/2)^{-2}(\vec{r}/2)^d\vec{R}^s \\ &\approx g'_{ds}(t')^{-2}\vec{r}^d\vec{R}^s \end{aligned} \tag{5.344}$$

ahol a $t' = 2t$ időskálához tartozó csatolási állandó: $g'_{ds} = g_{ds}2^{2-d}$. Látjuk, hogy $d > 2$, $d = 2$ és $d = 0,1$ esetén rendre a megfelelő kölcsönhatás irreleváns, marginális, ill. releváns. A skalárpotenciál, a csatolás a vektorpotenciálhoz tehát releváns kölcsönhatások, a perturbatív osztályozásban ezek szuperrenormálható vertexeket jelentettek. A tömegtag marginális, ez a tag renormálható vertexet jelent a perturbatív tárgyalásban. Végül a sebesség magasabb hatványait jelentő kölcsönhatások irrelevánsak és a perturbatív tárgyalásban nem renormálható vertexeket jelentenek.

Látjuk, hogy a csatolási állandó skálázását az szabja meg, hogy mi az idődimenziója és nem az, hogy mi az energiadimenziója (ellentétben a magasabb dimenziós kvantumtérelméletekkel).

3. Megmutatjuk, hogy az előző példánkban szereplő potenciállal indulva, egy blokkosítási lépés egyhurok rendben UV divergenciát generálhat. A potenciál linearizált transzformációja az alábbi alakú, ha az egyhurokjárulékot is megőrizzük:

$$\tilde{V}' = \frac{1}{2}\tilde{V}_+ - \frac{\hbar}{8m}\partial^2 U_{A+} - \frac{t'\hbar}{8m}\partial^2 \tilde{V}_+. \tag{5.345}$$

Az utolsó, $\hbar$ rendű tag generálhat UV divergenciát.

Vegyük példának a $d = s = 2$ esetet:

$$t^{-2} g\vec{r}^{\,2}\vec{R}^2 \rightarrow (t')^{-2}\frac{1}{4}g\vec{r}\left(\vec{R}^2 + \frac{1}{16}\vec{r}^{\,2}\right) - \frac{\hbar}{8mt'}g\left(4\vec{R}^2 - \frac{1}{2}\vec{r}^{\,2}\right) \tag{5.346}$$

Ha bevezetjük a $G = gt^{d-2}$ csatolási állandót, amelyet a perturbatív analízis során használtunk, és amely most dimenziótlan, akkor a blokkosított hatás megfelelő tagjának transzformációja:

$$tG\vec{v}^{\,2}\vec{R}^2 \rightarrow t'\frac{1}{4}G\vec{v}^{\,2}\left(\vec{R}^2 + (t')^2\frac{\vec{r}^2}{16}\right) - \frac{\hbar}{8m}G\left(-\frac{1}{2}\vec{v}^{\,2}t' + 4\frac{\vec{R}^2}{t'}\right). \tag{5.347}$$

A jobb oldalon álló kifejezés utolsó tagja a $t' \rightarrow 0$ határesetben lineáris UV divergenciát eredményez a blokkosított hatásban.

5.7. Unitaritás

Ha egy zárt fizikai rendszer kvantummechanikáját vizsgáljuk, akkor abban az átmeneti amplitúdók mátrixának, az S mátrixnak unitérnek kell lennie. Az unitaritási feltétel a blokkosított potenciálra az alábbi alakban írható:

$$\int d\vec{z}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(\vec{x},\vec{z};t)\right\}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S^*(\vec{z},\vec{y};t)\right\} = \delta(\vec{x}-\vec{y}). \tag{5.348}$$

Az unitaritás megszorítást jelent a blokkosított hatás csatolási állandóira nézve.

Az alábbiakban az unitaritási feltételt kis időskálán, azaz $t \rightarrow 0$ esetén vizsgáljuk. Ez egyrészt technikai könnyebbség, mert ilyenkor a renormálási transzformáció nem lineáris tagjai nem lényegesek, és a perturbációszámítás keretein belül próbálkozhatunk az unitaritási feltétel következményeinek vizsgálatával. Másrészt a $t \rightarrow 0$

határesetben a releváns csatolási állandók zérushoz tartanak. Ezért az unitaritási feltételt a $t \to 0$ határesetben vizsgálva a marginális és az irreleváns csatolási állandókra kapunk megszorítást.

Az unitaritási feltételt

$$S(\vec{x},\vec{y};t) \;=\; \frac{m}{2t}(\vec{x}-\vec{y})^2 - U(\vec{x},\vec{y};t) - R \tag{5.349}$$

alakú blokkosított hatással próbáljuk kielégíteni, ahol U és R a trajektóriától független állandó. Az utóbbira, amely az átmeneti amplitúdó helyes normálását és globális fázisát biztosítja, szükség van ahhoz, hogy az unitaritási feltételt ki tudjuk elégíteni.

Az unitaritási feltétel a pályaintegrál elvégzése után az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned}
&\delta(\vec{x}-\vec{y})\\
&= \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\frac{m}{2\Delta t}(\vec{x}^2-\vec{y}^2)-(R-R^*)\right]\right\}\cdot\\
&\quad\cdot\int d\vec{z}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}m}{\hbar\Delta t}\vec{z}(\vec{y}-\vec{x})-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[U(\vec{x},\vec{z};\Delta t)-U(\vec{z},\vec{y};\Delta t)\right]\right\}\\
&= \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\frac{m}{2\Delta t}(\vec{x}^2-\vec{y}^2)-(R-R^*)-U(\vec{x},\mathrm{i}\alpha\partial_z;\Delta t)+U(\mathrm{i}\alpha\partial_z,\vec{y};\Delta t)\right]\right\}\cdot\\
&\quad\cdot(2\pi\alpha)^3\delta(\vec{z}-\vec{y}).\Big|_{\vec{z}=\vec{x}}
\end{aligned} \tag{5.350}$$

Itt a potenciált tartalmazó tagok exponenciális függvénye a Taylor-sorával van értelmezve a perturbációszámításban szokásos módon.

Példaként mutassuk meg, hogy a marginális

$$U \;=\; -\frac{\delta m}{2\Delta t}\vec{r}^{\,2} \tag{5.351}$$

tag kielégíti az unitaritási feltételt. Használjuk fel, hogy

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[U(\vec{x},\mathrm{i}\alpha\partial_z;\Delta t)-U(\mathrm{i}\alpha\partial_z,\vec{y};\Delta t)\right]\right\}\\
&\approx\; 1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[U(\vec{x},\mathrm{i}\alpha\partial_z;\Delta t)-U(\mathrm{i}\alpha\partial_z,\vec{y};\Delta t)\right]+\mathcal{O}((\delta m)^2)\\
&\approx\; 1+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\delta m}{2\Delta t}\left[\vec{x}^{\,2}-\vec{y}^{\,2}-2\mathrm{i}\alpha(\vec{x}-\vec{y})\partial_z^2\right]
\end{aligned} \tag{5.352}$$

A jobboldalon álló kifejezés a Dirac-deltára való hatásában ekvivalens az

$$1+\frac{\delta m}{m} \tag{5.353}$$

kifejezéssel. Ezért az unitaritási feltétel kielégül, ha a

$$\frac{2}{\hbar}\mathrm{Im}R \;=\; 3\ln\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}-\frac{\delta m}{m}+\mathcal{O}(\delta m)^2 \tag{5.354}$$

választással élünk. Az eredményből az is látszik, hogy az unitaritási feltétel helyfüggő δm esetén nem elégíthető ki perturbatív módon.

Hasonlóan lehet belátni, hogy az $U = gr^d$ típusú potenciál ($\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$) megsérti $d > 2$ esetén az unitaritási feltételt a perturbációszámítás keretein belül, akár helyfüggő, akár állandó g-t tételezünk fel.

Beláttuk tehát, hogy az unitaritási feltétel a perturbatív értelmezésben megtiltja, hogy polinomiális irreleváns tagok lépjenek fel és csak egyetlen marginális operátort enged meg, a kinetikus energiát helytől független tömeggel. A perturbációszámítás szintjén tehát az unitaritás biztosítja a kvantummechanika renormálhatóságát.

5.8. Létezik-e a Hamilton-operátor?

A fenti tárgyalásban a Schrödinger-egyenlet helyett a részecske dinamikáját a Huygens-elv szabja meg. A hullámfüggvényt mint átmeneti amplitúdót értelmezzük, és az átmeneti amplitúdó alapvető tulajdonsága, hogy eleget tesz a Huygens-elvnek:

$$\psi(\vec{x}; t + \Delta t) = \int d^3y \exp\left\{\mathrm{i}\frac{m}{2\hbar\Delta t}(\vec{x} - \vec{y})^2 - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}U(\vec{x}, \vec{y}; \Delta t) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}R\right\}\psi(\vec{y}, t). \tag{5.355}$$

Feltehető az a kérdés, hogy a Huygens-elvet $\Delta t \to 0$ időtartamra alkalmazva, az egyenértékű-e a Schrödinger-egyenlettel, avagy annál általánosabb. Másképpen, hogy a hullámfüggvényre vonatkozó (5.355) egyenletben szereplő $\Delta t \to 0$ infinitezimális időskálához tartozó blokkosított hatás egyenértékű-e egy alkalmasan választott Hamilton-operátorral.

Alább megmutatjuk, hogy **a Huygens-elv általánosabb érvényű, mint a Schrödinger-egyenlet**. A blokkosított hatásról ugyanis tetszőlegesen kicsiny, de véges Δt időskálán van értelme beszélni, elképzelhető azonban olyan kvantummechanikai rendszer, amelynek nincsen Hamilton-operátora. Ekkor - ,,durván szólva" - nem létezik a blokkosított hatásnak a $\Delta t \to 0$ határértéke.

Az alábbiakban, amikor a blokkosított potentiál ill. hatás alakjára valamilyen feltevéssel fogunk élni, mindig arra gondolunk, hogy az a kvantummechanikai modell, amelyet vizsgálunk, a valóságos rendszernek valamilyen effektív leírását adja. Ilyen effektív kvantummechanikát kapunk pl. ha figyelembe vesszük a mozgó ponttöltésre a saját elektromágneses terének a visszahatását. Egy másik példa effektív elméletre, amikor elektron mozog szilárdtestben és a fononokat nem vesszük explicit módon figyelembe.

5.8.1. Külső skalár- és vektorpotenciálban mozgó részecske

Tegyük fel, hogy a blokkosított potenciál alakja:

$$U(\vec{x},\vec{y};\Delta t) = \Delta t V\left(\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})\right) - (\vec{x}-\vec{y})\vec{A}\left(\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})+\eta(\vec{x}-\vec{y})\right). \quad (5.356)$$

Ebben az esetben a (5.355) egyenlet jobb oldalán az integrandusban szereplő fázis $\Delta t \to 0$ esetén az $\vec{y}=\vec{x}$ helyen válik stacionáriussá. Ezen hely körül fejtsük tehát sorba a blokkosított potenciált: helyettesítsük be az $\vec{y}=\vec{x}+\vec{v}$ felbontást és fejtsünk sorba $\vec{v}$ szerint a kvadratikus tagokkal bezárólag. Elemi számolás után azt kapjuk, hogy:

$$S(\vec{x},\vec{y};\Delta t) \approx -\frac{1}{2}v^j A_{jk} v^k + B_j v^j + C, \quad (5.357)$$

$$\psi(\vec{y};t) \approx \left(1+v^j\partial_j+\frac{1}{2}v^j v^k \partial_j\partial_k\right)\psi(\vec{x};t), \quad (5.358)$$

ahol

$$\begin{aligned}
A_{jk} &= -\frac{m}{\hbar\Delta t}\delta_{jk}+\frac{\Delta t}{2\hbar}\partial_j\partial_k V+\frac{1-2\eta}{2\hbar}(\partial_j A_k+\partial_k A_j),\\
B_j &= -\frac{1}{2\hbar}\Delta t\partial_j V(\vec{x})-\frac{1}{\hbar}A_j(\vec{x}),\\
C &= -\frac{1}{\hbar}R-\frac{1}{\hbar}\Delta t V(\vec{x}).
\end{aligned} \quad (5.359)$$

A sorfejtést behelyettesítve a (5.355) egyenlet jobb oldalába, Gauss-integrált kapunk, amelyet el tudunk végezni:

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{x};t+\Delta t) &= \left(1+\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta B_j}\partial_j-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta B_j\delta B_k}\partial_j\partial_k\right)\cdot\\
&\quad\cdot\int d^3v \exp\left\{-\mathrm{i}\frac{1}{2}v^j A_{jk}v^k+\mathrm{i}B_j v^j+\mathrm{i}C\right\}\psi(\vec{x};t)\\
&= (2\pi)^{3/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ln(\mathrm{i}A)+\frac{\mathrm{i}}{2}B^j(A^{-1})_{jk}B^k+\mathrm{i}C\right\}\cdot\\
&\quad\cdot\Big[1+B^j(A^{-1})_{jk}\partial^k-\frac{1}{2}\Big(\mathrm{i}(A^{-1})_{jk}\\
&\quad -B^m(A^{-1})_{mj}B^n(A^{-1})_{nk}\Big)\partial^j\partial^k\Big]\psi(\vec{x};t).
\end{aligned} \quad (5.360)$$

Az eredmény explicit alakjának meghatározásához szükségünk van az $A_{jk}=\alpha\delta_{jk}+\epsilon_{jk}$ alakú mátrix inverzére, amelyet $(A^{-1})_{jk}=\frac{1}{\alpha}\delta^{jk}+\beta^{jk}$ alakban keresünk. A potenciálokat gyenge perturbációnak tekintve, elhanyagoljuk a bennük lineárisnál magasabb rendű tagokat. Ekkor

$$(A^{-1})_{jk} = -\frac{\hbar\Delta t}{m}\delta_{jk}-\frac{\hbar^2(\Delta t)^2}{m^2}\left[\frac{\Delta t}{2\hbar}\partial_j\partial_k V+\frac{1-2\eta}{2\hbar}(\partial_j A_k+\partial_k A_j)\right] \quad (5.361)$$

adódik az inverzmátrixra. Ezt behelyettesítjük a Gauss-integrál végeredményébe:

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x};t+\Delta t) &= \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}R+\frac{3}{2}\ln\frac{2\pi\mathrm{i}\hbar\Delta t}{m}\right\}\cdot\left[1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Delta t V+\frac{\Delta t}{2m}(1-2\eta)\partial^j A_j\right.\\ &\left.+\frac{\Delta t}{m}A_k\partial^k+\frac{\mathrm{i}\hbar\Delta t}{2m}\partial^2-\frac{\mathrm{i}\Delta t}{2m\hbar}\vec{A}^{\,2}\right]\psi(\vec{x};t). \qquad (5.362)\end{aligned}$$

Ha az

$$R = \frac{3\hbar}{2\mathrm{i}}\ln\frac{2\pi\mathrm{i}\hbar\Delta t}{m} \qquad (5.363)$$

választással élünk, akkor átrendezés és $\Delta t\to 0$ határértékképzés után a Schrödinger-egyenletet kapjuk eredményül:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial^2+V+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\partial^j A_j+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}2A_j\partial^j+\frac{1}{2m}\vec{A}^{\,2}-\eta\frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\partial^j A_j\right]\psi. \qquad (5.364)$$

A külső skalár- és vektorpotenciálban mozgó részecskének van Hamilton-operátora. Ha figyelmesebben megvizsgáljuk az eredményt, akkor látjuk, hogy a Hamilton-operátor (valós η esetén) csak az $\eta=0$ esetben hermitikus:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}}-\hat{\vec{A}}\right)^2+V+\frac{\mathrm{i}\eta\hbar}{2m}\partial^j\hat{A}_j. \qquad (5.365)$$

5.8.2. Inhomogén tömegtag és a sebesség magasabb hatványaitól függő kölcsönhatás

Tegyük fel, hogy a blokkosított potenciál az alábbi alakú:

$$U(\vec{x},\vec{y};\Delta t) = (\vec{x}-\vec{y})^2\left[-\frac{\delta m\left(\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})\right)}{2\Delta t}+V_1\left(\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})\right)\right]+\Delta t\, V_2\left(\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})\right). \qquad (5.366)$$

A hullámfüggvényt a (5.355) egyenlet határozza meg. A jobb oldalon álló integrálban a fázis most is az $\vec{y}=\vec{x}$ helyen stacionárius, mint az előző példában. Ezért ugyanazzal a sorfejtéssel élünk mint ott. A Gauss-integrál kiszámítása után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x};t+\Delta t) &= \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}R+\frac{3}{2}\ln\frac{2\pi\mathrm{i}\hbar\Delta t}{m}-\frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{\delta m-2\Delta t\, V_1}{m}\right)\right\}\cdot\\ &\cdot\left[1+\frac{\mathrm{i}\hbar\Delta t}{2(m+\delta m)}\partial^2-\frac{\mathrm{i}\Delta t}{\hbar}V_2\right]\psi(\vec{x};t). \qquad (5.367)\end{aligned}$$

Természetesen az exponenciális fázisfaktorban a tömegkorrekciónak helytől függetlennek kell lennie ahhoz, hogy az R állandó, a zérusponti energia, alkalmas megválasztása révén átrendezés és $\Delta t \to 0$ határérték képzése után véges eredményt kaphassunk.. Állandó tömeg esetén az alábbi Hamilton-operátor adódik:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2(m+\delta m)}\partial^2 + V_2 + \frac{3i\hbar}{2(m+\delta m)}V_1. \tag{5.368}$$

Megjegyezzük, hogy ha a tömegkorrekciót perturbatív módon kezelnénk, akkor $\sim \delta m/\Delta t$ divergenciájú potenciált kapnánk. Az eredmény csak azért véges, mert a tömegkorrekcióban magasabb rendű járulékok is figyelembe vannak véve a fenti, nem perturbatív számolásban.

Az első tanulság tehát ebből a példából az, hogy nem létezik Hamilton-operátor, ha az explicit módon figyelembe nem vett szabadsági fokok helytől függő tömegkorrekciót eredményeznek.

A példa tovább általánosítható olyan sebességfüggő potenciálra, amelynek az alakja:

$$U(\vec{x},\vec{y};\Delta t) = (\Delta t)^{1-d}\vec{r}^{\,d}V_1\left(\frac{1}{2}\vec{R}\right). \tag{5.369}$$

Ez az inhomogén tömegtagnak az általánosítása tetszőleges $d > 2$ páros kitevőre. A fenti eljárással, és a V_1 potenciál szerint perturbációszámítást alkalmazva, formálisan az alábbi Hamilton-operátor adódik:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2(m+\delta m)}\partial^2 + V_2 + (d/2)!\left(\frac{3i\hbar}{m\Delta t}\right)^{d/2} V_1. \tag{5.370}$$

A Hamilton-operátor ilyenkor nem létezik, mert a fenti kifejezésnek nem létezik $\Delta t \to 0$ esetén véges határértéke.

Az elmondottakat úgy összegezhetjük, hogy mind a helyfüggő marginális tömegtag, mind a sebesség magasabb hatványaitól függő irreleváns potenciál olyan kvantummechanikát eredményez, amelyben nem létezik Hamilton-operátor. Ha a kvantummechanikai modell a valóság fundamentális leírása, akkor a modellnek eleget kell tennie az unitaritás követelményének. Ez pedig kizárja a helyfüggő marginális és az irreleváns sebességfüggő vertexeket. A fundamentális kvantummechanikai modellben tehát az unitaritás biztosítja, hogy létezzen a Hamilton-operátor és hogy a dinamikát a Schrödinger-egyenlet kormányozza. Egy effektív kvantummechanikai modellben az unitaritásnak nem kell teljesülnie. Például az a modell, amelyik leírja az elektron mozgását a szilárdtestben, nem kell hogy azokról a ,,nagyenergiás" folyamatokról is számot adjon, amelyek során pl. a szilárdtest rácsából ionokat ütünk ki. Effektív kvantummechanikai modellekben tehát lehetségesek olyan sebességfüggő kölcsönhatások, amelyeket nem lehet Hamilton-operátor segítségével megadni.

5.9. Összefoglalás

A kvantummechanikai átmeneti amplitúdót olyan pályaintegrál adja meg, amelyben az adott kezdő- és végpont közötti összes lehetséges pályákra kell integrálni. A pályaintegrálhoz lényeges járulékot adó pályák sehol sem differenciálhatóak. Ez biztosítja a Heisenberg-féle határozatlansági elv teljesülését. A határozatlansági elvnek az lehet a következménye. hogy a sebességfüggő kölcsönhatások szerepét az a megfigyelő felfokozva látja, aki egymást követő nagyon kis időközönként végez megfigyeléseket a rendszeren. Azt mondjuk, hogy a rövid időskálákon a sebességfüggő kölcsönhatások szerepe jelentőssé válhat.

A kvantummechanika megfogalmazható mint $0+1$-dimenziós kvantumtérelmélet. Ebben az idő az egyetlen ,,téridő" dimenzió, és a térmennyiség a részecske pályája mint az idő függvénye. Perturbációszámítás során a potenciálokat a pálya és a sebesség Taylor-sorának tekintjük. Ez definiálja a vertexeket. A vertexek renormálhatósága a hatványkitevők leszámolásán alapul. A vertex látszólagos idődimenziója mondja meg, hogy renormálható-e vagy sem.

A véges Δt időtartamhoz tartozó átmeneti amplitúdó logaritmusa definiálja a Δt skálához tartozó blokkosított hatást. Az átmeneti amplitúdóra vonatkozó Huygens-elv egyúttal a blokkosított hatásra vonatkozó renormálási csoport egyenlet, amely meghatározza, hogy hogyan ,,fut" a blokkosított hatás a Δt időskálával. A blokkosított hatás írja le tehát azt a fizikát, amit az a megfigyelő lát, aki Δt időközönként végez a rendszeren megfigyeléseket. A blokkosított hatás perturbatív kifejtésében szereplő csatolási állandók a futó csatolási állandók.

A renormálási csoport egyenletnek a szabad mozgást megadó blokkosított hatás UV fixpontja. A fixpont közelében a blokkosított hatás potenciálokat tartalmaz, amelyekben a renormálási csoport egyenlet a fixpont közelében linearizálható. A fixpont körüli viselkedés alapján megállapítható, hogy a szuperrenormálható, renormálható és nem renormálható vertexek rendre releváns, marginális és irreleváns kölcsönhatások.

Az unitaritási feltétel, amelynek egy teljes (fundamentális) kvantummechanikai leírásban teljesednie kell, kizárja a helytől függő marginális és az irreleváns sebességfüggő vertexeket. Ezáltal biztosítja azt is, hogy létezik a rendszer Hamilton-operátora és hogy a dinamikát a Schrödinger-egyenlet írja le. Ha a kvantummechanikai modell valamely rendszer effektív leírását adja, akkor abban az unitaritás nem teljesül és akkor lehetségesek olyan kölcsönhatások, mint a helytől függő tömegtag, vagy a sebesség második hatványánál nagyobbat tartalmazó kölcsönhatási tag, amelyek jelenléte miatt nem létezik Hamilton-operátor. Ekkor a rendszert a blokkosított hatás, a dinamikát pedig a renormálási csoport egyenlet írja le.

6. Utószó

Ebben a jegyzetben megismerkedtünk a renormálási csoport módszerének a kvantumelméletben történő alkalmazásával. A renormálási csoport az elméletben az állítható felbontóképességű mikroszkóp szerepét tölti be. Segítségével azt vizsgáljuk, hogy hogyan viselkedik a fizikai rendszer különböző felbontásokban. A rendszert általában szórási folyamatokban figyeljük meg. A felbontást, azaz azt, hogy a rendszert milyen térbeli és időbeli felbontással tudjuk vizsgálni, a szórási folyamatban átadott impulzus ill. energia definiálja. A szaknyelv a felbontás helyett azt a kifejezést használja, hogy a rendszert különböző méret- ill. energiaskálákon vizsgáljuk.

A renormálás alapgondolata a kvantumelméletben a következő. Megadjuk a vizsgált rendszer mikroszkopikus modelljét a Λ ultraibolya levágásnál felvett hatás alakjával. Ez írja le azt a fizikát, amelyet az a megfigyelő lát, aki megfigyeléseit olyan szórási folyamatok révén végzi, amelyekben az impulzusátadás ill. az energiaátadás Λ nagyságrendjébe esik. Ezek $\Delta x \sim 1/\Lambda$ nagyságrendbe eső térbeli részletek felbontását teszik lehetővé, ill. $\Delta t \sim 1/\Lambda$ időközönkénti megfigyeléseknek felelnek meg.

Definiáljuk a renormálási transzformációt, amely

1. eltávolítja a rendszerből a nagyfrekvenciás fluktuációkat,
2. de változatlanul hagyja a rendszer partíciós függvényét,
3. és megőrzi a rendszer dimenzióját és szimmetriáit is.

A renormálási transzformáció tehát előállítja az eredeti S_Λ hatásból azt az S_k hatást, amelyben a térmennyiségnek csak a $|q| < k$ frekvenciájú fluktuációi szerepelnek explicit módon. A nagyfrekvenciás módusok sincsenek elhanyagolva, hanem közvetve jutnak kifejeződésre az S_k hatásnak az S_Λ hatástól eltérő alakjában és csatolási állandóik eltérő értékében. A renormálás a Λ skálán definiált elméletből előállítja a k skálán érvényes fizikát leíró effektív elméletet.

A renormálás rendkívül előnyös kivitelezése, amikor a nagyfrekvenciás módusokat a Λ levágástól indulva, infinitezimális lépésekben távolítjuk el. Ekkor mindig az előző lépésekben már meghatározott S_k hatás a kiindulási pont. A soron következő infinitezimális lépésben kiintegráljuk azokat a módusokat, amlyeknek az impulzusa a $k - \Delta k < |p| < k$ egyenlőtlenséggel meghatározott infinitezimális vastagságú gömbhéjba esik. Így nyerjük az $S_{k-\Delta k}$ hatást. Annak az előnye, hogy a renormálást infinitezimális lépésekben hajtjuk végre, az, hogy folytonosan tudjuk változtatni azt a k skálát, amelyen a rendszert vizsgáljuk. Így szolgáltatja a renormálási csoport a „mikroszkópot”, amelynek felbontóképességét folytonosan rontjuk el. Magára az effektív elméletek sorozatát definiáló S_k hatásra pedig egzakt differenciálegyenletet tudunk levezetni, a Wegner-Houghton-egyenletet.

Célszerű eljárás az S_k hatást végtelen sok kölcsönhatási tag összegeként keresni. Ekkor a renormálás csak a csatolási állandók értékét változtatja. A csatolási állandóknak a k skálaparamétertől való függésére csatolt, közönséges differenciálegyenleteket lehet levezetni, amelyek általában nem lineárisak. A csatolási állandók segítségével definiált paramétertér minden pontja egy lehetséges hatás, amit a rendszer dimenziója, szimmetriái megengednek. A Λ ultraibolya skálán végzett mérések alapján kell azt eldönteni, hogy hol vannak a paramétertérben azok a pontok, amelyek adott fizikai rendszer ,,mikroszkopikus" leírását adják. A Wegner-Houghton-egyenlet meghatározza, hogy hogyan futnak a renormálási csoport trajektóriák a paramétertérben, azaz, hogy adott S_Λ hatáshoz milyen effektív elméletek láncolata tartozik.

Legalább két dolog érdekelhet bennünket. Az egyik, hogy adott dimenziójú és szimmetriájú rendszernek milyen fázisai vannak. A másik, hogy adott nagyenergiás elmélettel leírt rendszer milyen alacsonyenergiás viselkedést mutat.

A renormálási transzformációk fixpontjai a statisztikus fizikában folytonos fázisátalakulási pontban lévő, kritikus rendszert, ill. zérus vagy végtelen hőmérsékletű egyensúlyi fázist írnak le. Hasonlóképpen a kvantumtérelméletben a fixpontok megkeresésével tudjuk eldönteni, hogy egy rendszer, csatolási állandóinak értékétől függően, milyen fázisban van. Általában azt a kérdést is így tudjuk megválaszolni, hogy a rendszernek milyen fázisai vannak. A fixpontok aszerint osztályozhatók, hogy a fixpont környezetében linearizált renormálási transzformációnak milyen sajátértékei vannak. A sajátértékek a rendszer k skálaparaméterének hatványfüggvényei. A sajátvektorokat skálázó operátoroknak nevezzük. Ezek rendre relevánsak, marginálisak, ill. irrelevánsak aszerint, hogy a csatolási állandójuk nő, változatlan marad, ill. csökken, ha csökken a k skálaparaméter. Az a fixpont, amelynek csak releváns skálázó operátorai vannak, UV fixpont. Ez megfelel egy igazi nagyenergiás effektív elméletnek, mert a renormálási trajektóriák mind kifelé szaladnak ebből a fixpontból. Az a fixpont, amely csak irreleváns operátorokat tartalmaz, az elmélet IR fixpontja, mert ebbe minden renormálási csoport trajektória beleszalad. Ez a fixpont leírja az elmélet extrém alacsonyenergiás viselkedését. A statisztikus fizikai analógia alapján tudjuk, hogy különös jelentőséggel bír az úgynevezett stabil fixpont, amelynek pontosan egy releváns paramétere van. Az irreleváns irányok a paramétertérben meghatározzák a kritikus felületet. Mindazok az elméletek, amelyeket a kritikus felület pontjai definiálnak, azonos kritikus viselkedést mutatnak. A kritikus felület közeléből indított trajektóriák mind belesimulnak abba a trajektóriába, amely a releváns irányban szalad ki a fixpontból. Mindez azt jelenti, hogy a stabil fixponttal rendelkező elméletek univerzális alacsonyenergiás viselkedést mutathatnak.

Az univerzalitás azonban nem biztos, hogy akkor is fennáll, ha az elméletnek több fixpontja van. Ekkor megeshet, hogy elindítunk renormálási csoport trajektóriákat az UV skálán a stabil fixpont közeléből, de az azok közötti kis eltérés a fixpont linearitási tartományának határán elegendő ahhoz, hogy az IR skálán a trajektóriák lényegesen eltérjenek. Ez akkor következhet be, ha a másik fixpont környezetében mások a releváns és az irreleváns kölcsönhatások. Erre példát jelent a kondenzátumok megjelenése alacsony energián.

A renormálási csoport megváltoztatja az alapvető kölcsönhatásokról kialakult szemléletünket is. Vizsgálhatunk egyes kölcsönhatásokat önmagukban, elfelejtkezve arról, hogy nagyobb energiaskálán más kölcsönhatások is fontos szerepet játszanak. Ez megfelel a tapasztalatnak. Ilyen módon beszélhetünk kvantumelektrodinamikáról, kvantumszíndinamikáról, a Standard Modellről, nagy egyesített elméletekről (*Grand Unified Theory*) és azok szuperszimmetrikus változatairól (*SUSY GUT*). Ezeknek a független elméleteknek egy kellően bő paramétertérben fixpontok felelnek meg. Egy-egy ilyen fixpont közelében a hatás lényegében csak azokat a kölcsönhatásokat tartalmazza, amelyek az adott elméletben az UV skálán jelen vannak. Valójában azonban a fundamentális elméletekre, pl. a kvantumelektrodinamikára, inkább úgy kell tekintenünk, mint a teljesebb fizikai valóságot leíró effektív elméletnek olyan közelítő modelljére, amely adott energiaskálán jól működik. Az elektronok például résztvesznek a gyenge kölcsönhatásban is. Ez a $W^{\pm}$ és Z^0 vektorbozonok tömegénél sok nagyságrenddel kisebb energiákon nem nagyon fontos. Mégis, ha az elektrogyenge kölcsönhatás elméletében kiintegráljuk a vektorbozonokat, akkor ezáltal olyan effektív kvantumelektrodinamikát kapunk, amelyben nemcsak a szokásos, minimál csatolásból származó eeA vertex jelenik meg, hanem további kölcsönhatások is. Ezek irreleváns kölcsönhatások a vektorbozonok tömegéhez képest alacsony energián. Hasonlóan a nagyegyesített elméletből effektív elméletként kapnánk egy effektív Standard Modellt, amelyben a nagyobb GUT energiaskálán releváns kölcsönhatások irreleváns kölcsönhatásokat generálnak. Feltehetően a fundamentális kölcsönhatások renormálható elméletei a valóságnak bizonyos energiaskálán érvényes közelítései. Az effektív elméletek a realisztikusabb elméletek, amelyek irreleváns kölcsönhatások alakjában hordozzák egy alacsonyabb energiaskálán annak a következményeit, hogy nagyobb energiaskálán más releváns kölcsönhatások is vannak.

A fizikai vákuumban minden kölcsönhatás jelen van. A valóságos paramétertérben tehát sok fixpont van. Ezek környezetében általában mások a releváns kölcsönhatások. Ilyenkor nem biztos, hogy érvényes az univerzalitás. Valamely skálán érvényes, csak kicsiny irreleváns kölcsönhatási tagokban különböző effektív elméletek minőségileg teljesen különböző alacsonyenergiás fizikát adhatnak. Ez azt jelenti, hogy a kölcsönhatások megértéséhez nem szabad csak a renormálható elméletekre korlátozni a figyelmünket. Azt is vizsgálnunk kell, hogy a nem renormálható elméleteknek milyen osztályai vannak. Hogyan lehet az alacsonyenergiás tapasztalattal való összevetés útján azokat kiválasztani, amelyek a fizikai valóságnak helyes leírását adják.

Irodalom

[1] Gulácsi Zs., *Fázisátalakulások I.* (Kossuth Egyetem, Debrecen, 1997), előkészületben

[2] E. Ising, Z. Phys. **31** (1925) 253.

[3] N.D. Mermin, H. Wagner, Phys. Rev. Lett.**17** (1966) 1133

[4] P.C. Hohenberg, Phys. Rev. **158** (1967) 383.

[5] N.D. Mermin, Phys. Rev. **176** (1968) 250.

[6] R.J. Creswick, H.A. Farach, C.P. Poole, Jr., *Introduction to Renormalization Group Methods in Physics* (John Wiley & Sons, New York, 1992)

[7] Sailer K., *Szimmetriák és sérülésük a kvantumtérelméletben* (KLTE, Debrecen, 1994)

[8] F.J. Wegner, A. Houghton, Phys. Rev. **A8** (1973) 401.

[9] A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, Nucl. Phys. **B270** (1986) 687.

[10] J. Polónyi, *Renormalization Group in Quantum Mechanics*, hep-th/9409004