Asztrofizika

LOVAS ISTVÁN
KLTE
TERVEZET

2000.

Tartalomjegyzék

1. Csillagászati alapfogalmak **5**
- 1.1. Távolsámérés . . . 6
- 1.2. Fényességmérés . . . 8
- 1.3. Hőmérsékletmérés . . . 10
- 1.4. Sebességmérés . . . 12

2. Asztrofizika **19**
- 2.1. A Hertzsprung-Russel diagram . . . 19
- 2.2. A Nap energiatermelése . . . 19
- 2.3. Csillagszerkezet . . . 23
- 2.4. A Nap-neutrinó rejtély . . . 27
- 2.5. Neutrinó oszcilláció . . . 28

3. A csillagfejlődés végállapotai **31**
- 3.1. Fehértörpe . . . 32
- 3.2. Neutroncsillag . . . 33
- 3.3. Feketelyuk . . . 34

4. Az Univerzum fejlődése **39**
- 4.1. Az univerzum felépítése . . . 39
- 4.2. A Friedman-féle Univerzum . . . 40
- 4.3. Az ősrobbanás . . . 42
- 4.4. Fázisátalakulások a korai Univerzumban . . . 43
- 4.5. Felfúvódó világegyetem . . . 45

5. Az elemi fermion családok száma **47**
- 5.1. A hélium és a hidrogén gyakoriságának aránya . . . 47
- 5.2. A Z^0 bozon energiaszélessége . . . 49

1. Fejezet

Csillagászati alapfogalmak

A társaságban én is ott valék
És valék szomszédja éppen Erzsikének
A társaságnak többi tagjai beszélgetének, énekelgetének
Én ábrándoztam, s szóltam Erzsikéhez
Ne válasszunk magunknak csillagot?
Az országúton végig a szekérrel
A négy ökör lassacskán ballagott.
(Petőfi Sándor)

A tudomány akkor született meg, amikor egy csillagjós nem a másnapi csata kimenetelét, hanem a csillagok másnapi állását jóslolta meg és a jóslat bevált.

Titus Livius "Ab urbe condita" c. müvének 44.-ik könyvében olvasható, hogy azt a római hadvezért, aki pontosan meg tudta mondani, hogy mikor lesz holdfogyatkozás, a katonák istenként tisztelték, az ellenség katonái pedig a holdfogyatkozás láttán jajveszékelni kezdtek és fejvesztetten menekültek. A csillagászat a legrégibb tudomány. Az ember ősidők óta kémleli az eget és egyre több jelenség okát ismeri fel. Például a Hold fázisváltozásai (az újhold, a félhold, a telihold), annak a következményei, hogy a Napról induló és a Holdról visszaverődő fény különböző mértékben jut el hozzánk, mert a Hold kering a Föld körül.

A Hold keringési ideje: 27.3 nap. A Hold hónap: 29.5 nap = két újhold közti idő, azért hosszabb mint a keringési idő, mert időközben a Föld is halad a pályáján. Holdfogyatkozáskor a Föld vet árnyékot a Holdra. Napfogyatkozáskor a Hold takarja el a Napot.

A legtermészetesebb kérdések, amik felmerülnek egy égitest kapcsán a következők:

- Milyen messze van?
- Milyen fényes?
- Milyen meleg?
- Milyen gyorsan mozog?

1.1. Távolsámérés

A Föld sugara

Eratoszthenesz (Kr.e. 276–195) hallotta, hogy Szüené-ben (Asszuán-ban) június 23–án délben a kútban látni a Nap tükörképét. Alexandriában ugyanekkor a függőlegessel $\alpha = 7°12'$ szöget zár be a napsugár. Feltételezve, hogy a Föld gömb alakú a

$$2\pi R = \frac{360}{\alpha}\overline{AS}$$

eredményre jutott, ahol $\overline{AS}$ Alexandria és Szüéne távolsága. Ennek az értékét tevehajcsároktól tudta meg: $\overline{AS} = 100\,\mathrm{stadium/nap}$ és 50 nap = 5000 stadium, ami kb. 40.000 km-nek adódott.

Eratoszthenész Alexandriában és Athénben tanult. Az alexandriai könyvtár igazgatója volt. 81 éves korába megvakult. Nem tudta folytatni a munkáját, öngyilkos nem akart lenni, ezért abbahagyta az evést.

A Hold távolsága

A holdfogyatkozás ideje: t_{hf}, a Hold keringési ideje: $T_H = 27.3\ nap$, a Föld árnyékának szélessége: 2 R_F. Ezekből az adatokból ki lehet számítani a Föld- Hold távolságát

$$\frac{2\pi R_{FH}}{T_H} = \frac{2R}{t_{hf}} \qquad \Longrightarrow \qquad R_{FH} = \frac{2R}{2\pi}\frac{T_H}{t_{hf}} = 384392\,\mathrm{km}\ .$$

Bay Zoltán (a Debreceni Református Kollégium hajdani diákja.) 1946-ban végezte el a "Radar Echo" kísérletet, amelynek során mérte a radar jel visszaérkezési idejét a Holdról. Felhasználva a fénysebesség ismert értékét, eredményként nagy pontossággal megkapta a Föld- Hold távolságot. A Hold sugara a Hold α_H látószöge segítségével kiszámítható: $\alpha_H R_{FH} = 2R_H$.

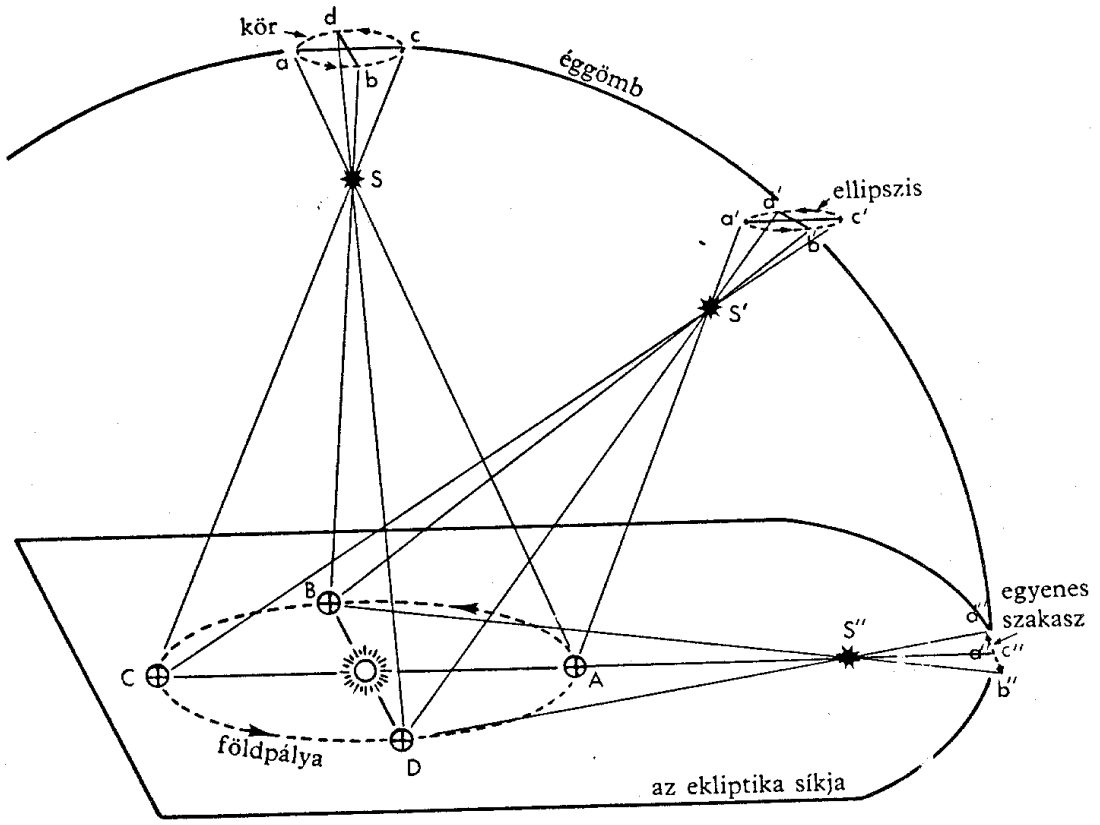
A Nap-Föld távolságot Arisztarchosz (Kr.e. 320–250) határozta meg. Azt használta ki, hogy félholdkor a Nap-Hold-Föld háromszögben a Holdnál levö szög éppen derékszög, a másik pedig megmérhető: $\beta = 9'$. Innen

$$R_{NF} = \frac{R_{FH}}{\beta} \sim 400 R_{FH} = 149.610^6\,\mathrm{km}.$$

A Nap átmérője a Nap látószögéből, α_N-ból kiszámítható: $\alpha_N R_{NF} = 2R_N = 1392530\,\mathrm{km}$.

A csillagok távolsága

Megmérjük a csillag látószögét most és egy félév múlva. R_{NF}–et ismerjük, így a Föld két pozíciója és a csillag alkotta háromszögből a csillag távolsága meghatározható.



1.1. ábra:

A p parallaxis a Csillag-Nap-Föld háromszögben a Napnál lévő szög, feltéve, hogy a csillag a földpálya síkjára merőleges irányban éppen a Nap fölött található. Ha $p = 1"$, akkor a csillag távolsága 31 billió km. Ez a parszek, (csillagászati egység) 1 parsec = 1 CSE = 3.26 fényév. A háromszögeléssel történő távolság meghatározás pontossági határa $\pm$ 0. 01 ívmásodperc, ezért a távoli csillagoknál ez az ú.n. háromszögelési módszer nem alkalmazható.

Távolságmérés változó csillagok segítségével

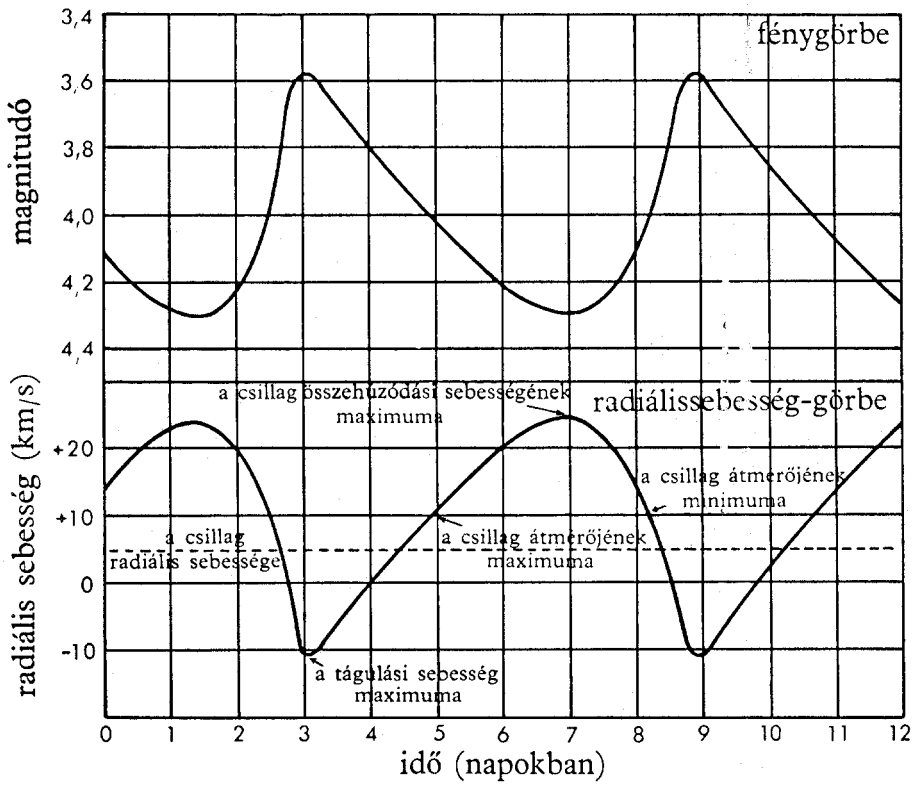
A valódi változó csillagok egy része periódikusan változik ezek a cepheidák, amelyek a δ–Cepheihez hasonlítanak.

A csillagképek egyes csillagait görög betűk különböztetik meg, mert az eget is a görög mitológiából népesítették be. (Cassiopeia etióp királyné, férje Cepheus, leányuk Andromeda, akit megtámad a Cet, amit egy levágott medúzafejjel Perseus a hős ölt meg stb.)

Henriette Leavitt (1912)–ben fedezte fel, hogy a cepheidáknál a luminozitás (a wattokban mért fényerősség) monoton függvénye a T_p periódus időnek:$L = L(T_p)$, ahol $1 < T_p < 50 \ \ nap$.

A cepheidák héliumot égető óriás csillagok. A csillag rezgéseket végez az egyensúly körül. A rezgéshez tartozó energia disszipálódik, de ezt a magreakciók

visszapótolják. A spektrum vonalak periodikusan tolódnak el, jelezve, hogy felfúvódás és összehúzódás követi egymást.



1.2. ábra: A változó csillagok luminozitása és a periodusideje közötti összefüggés.

Ha egy távoli cepheidának az r távolságát nem tudjuk megmérni háromszögeléssel, de meg tudjuk mérni a T_p periódus idejét, akkor az r távolságát meg tudjuk határozni az

$$\frac{L(T_p)}{4\pi r^2} = I$$

képlet alapján, ahol I a Földön mért fényintenzitás.

1.2. Fényességmérés

Szem

Előnyei: Érzékeny az intenzitásra. Majdnem mindenkinek van.Színérzékeny
Hátrányai: Szubjektív. Fáradékony. Keskeny spektrumtartományban érzékeny.

Fényképező lemez

Emulzióban diszpergált Ag Br szemcsék, amelyek megvilágítás hatására fotobomlást szenvednek. Előhívó oldattal az Ag Br szemcsék fel nem bomlott molekulái is felbon-

thatók. A maradék Ag Br- ot ki kell oldáni (ez a fixálás). A kivált ezüsttel arányos a feketedés, ami jól mérhetö.
Előnyei: Érzékeny. Időben integrál (a távcső tornyot forgatni kell). A relatív feketedésmérés nagyon pontos. Tárolható és évek múltán újra feldolgozható.
Hátrányai: Deformálódhat (előhíváskor és a tárolás során). Keskeny a spektrális érzékenysége.

Fotocella

Alkáli fémmel bevont felületről a fény fotoeffektussal elektronokat vált ki. Az elektronok árama jól mérhető.

Hőelem

Két különböző fém egyik összeforrasztási helyét a csillag fokuszált fényével melegítve, a másikat állandó hömésékleten tartva, a hőmérsékletkülönbséggel arányos áram detektálható.

Fotoelektronsokszorozó

(Bay Zoltán)

Evakuált csőben egy fotokatód után elektródák (dinódák) sorozata helyezkedik el. A becsapódó elektron energiája árán több elektron lökődik ki, mert ezek kis kilépési munkával jellemzett (Cs) fémből készülnek. Ezeket a szekunder elektronokat a következő dinóda magához vonza. Így minden fokozatban sokszorozódik az elektronok száma. Végül az anódkörben levő munkaellenálláson jól mérhető feszültségimpulzus jelenik meg.

Rádio távcső

A csillagok rádiósugárzást bocsájtanak ki. A spektrum vonalas komponense főleg a hidrogéntől származik, ami 21 cm-es hullámhosszon sugároz). A spektrum folytonos részét, főleg az elektronok szinkrotron sugárzása produkálja, ami az erős mágneses térben bekövetkező gyorsulás révén jön létre.

Parabola reflektor fókuszába helyezett dipól antenna, rádióvevőhöz csatlakoztatva alkalmas a rádiósugárzás észlelésére.

Spektrométer

A prizmás spektrométeren kívül gyakran használnak rácsos spektrométert. Az erősítés adott λ hullámhossznál egy bizonyos φ szögben következik be.

Töltés csatolású eszköz

Charged Coupled Device. (CCD)

Félvezető lapkán kialakított szabályos (négyzetes) mátrix. A megvilágító fénnyel arányos fotoeffektus révén minden pixel elektromosan feltöltődik. A képet tehát a töltéssűrűség ábrázolja. Bizonyos idő után léptetéssel egyenként "kiolvassuk" egy-egy sor pixeljeiben felgyűlt töltést. A kiolvasás minden sorból egyszerre történik. A kapott jelet digitalizáljuk és ellátjuk az x y koordináta kódjával. Ma már TV kameraként is használják.

1.3. Hőmérsékletmérés

A fény fizikai jellemzője az, hogy egyrészt hullámként, másrészt részecskeként viselkedik, hasonlóan minden más mikrorészecskéhez.

A fény, mint hullám

A fény elektromágneses sugárzás, ami hullám formájában terjed. A λ hullámhossz szerint megkülönböztetünk minőségileg eltérő tartományokat.

Az elektromágneses hullámot az elektromos és mágneses térerősség vektorokkal jellemzhetjük a következő módon:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \delta) \ , \qquad \vec{H} = \vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \delta)$$
$$\vec{k} \perp \vec{E}_0 \perp \vec{H}_0 \perp \vec{k} \ ,$$

ahol $\vec{E}_0$ az elektromos térerősség vektora, $\vec{H}_0$ a mágnes térerősség vektora, T a rezgési periódus idő, $\nu = 1/T$ a frekvencia, $\omega = 2\pi\nu$ a körfrekvencia, $\vec{k}$ a hullámszám vektor, $k = \omega$, λ a hullámhossz, $c = \lambda\nu = \lambda/T$ a fénysebesség. Az I intenzitás a térerősség négyzetével arányos $I \sim \vec{E}^2$
A fény interferenciára képes. Síkban poláros két nyaláb:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_{01}(\cos(\omega t - \vec{k}\vec{x} + \delta_1)) + \vec{E}_{02}(\cos(\omega t - \vec{k}\vec{x} + \delta_2)) \\
&= \vec{E}_{01}(\cos(\omega t - \vec{k}\vec{x})\cos\delta_1 - \sin(\omega t - \vec{k}\vec{x})\sin + \delta_1) \\
&+ \vec{E}_{02}(\cos(\omega t - \vec{k}\vec{x})\cos\delta_2 - \sin(\omega t - \vec{k}\vec{x})\sin\delta_2) \\
&= (\vec{E}_{01}\cos\delta_1 + \vec{E}_{02}\cos\delta_2)\cos(\omega t - \vec{k}\vec{x}) \\
&- (\vec{E}_{01}\sin\delta_1 + \vec{E}_{02}\sin\delta_2)\sin(\omega t - \vec{k}\vec{x}) \\
&= \vec{E}_0(\cos(\omega t - \vec{k}x)\cos\delta - \sin(\omega t - \vec{k}\vec{x})\sin\delta) \\
&= \vec{E}_0\cos(\omega t - \vec{k}x + \delta)
\end{aligned}$$

ahol

$$\vec{E}_{01}\cos\delta_1 + \vec{E}_{02}\cos\delta_2 = \vec{E}_0\cos\delta$$
$$\vec{E}_{01}\sin\delta_1 + \vec{E}_{02}\sin\delta_2 = \vec{E}_0\sin\delta$$

Az interferencia konstruktív, ha $\delta_1 = \delta_2$ akkor $\vec{E}_0 = \vec{E}_{01} + \vec{E}_{02}$. Ha $\delta_1 = \delta_2 + \pi$, akkor $\vec{E}_0 = \vec{E}_{01} - \vec{E}_{02}$, azaz az interferncia destruktív.

A fény, mint kvantált részecske

A fény kvantuma a foton.

$E = \hbar\omega = h\nu$	energia adag
$\vec{P} = \hbar\vec{k}$	impulzus adag
$S_{\vec{k}} = \pm 1\hbar$	impulzus-momentum adag
$S_{\vec{k}} = +\hbar$	jobbra cirkulárisan poláros
$S_{\vec{k}} = -\hbar$	balra cirkulárisan poláros

Ezt a fotoeffektus és a hőmérsékleti sugárzás spektruma bizonyítja.

Fotoeffektus

Lénárd Fülöp (1905) első magyar Nobel–díjas

I intenzitású, ν frekvenciájú fény esik egy fémlemezre. Mérjük a kilökött elektronok Ne számát és Ee energiáját.

Eredmény: $h\nu = E_e + A$

$N_e = cI$

Ezt Einstein magyarázta meg: a fény energiája hν adagokban érkezik. A fémben levö elektron egy ilyen energia adagot, azaz fotont nyel el. Az energia egy része az elektron kilépéséhez szükséges munkára fordítódik. A maradék E_e az elektron birtokában marad.

Hőmérsékleti sugárzás spektruma

Legyen a T hőmérsékletű test V térfogatú üregében jelenlevő elektromágneses sugárzás energiája E. Feltételezzük, hogy a test és az ürgebe zárt sugárzás termodinamikai egyensúlyban van. A sugárzás energiasűrűsége:

$$U(\nu, T) = \frac{1}{V}\frac{dE(\nu)}{d\nu}.$$

A tapasztalat szerint az $U(\nu, T)$ függvény az ábrán látható módon viselkedik. Ennek a függvénynek az alakjára 1900-ban M. Planck elméleti úton a következő képletet vezette le:

$$U(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{(e^{h\nu/kT} - 1)}.$$

Ez a Planck-törvény.

Az $U(\nu, T)$ energiasűrűséget Planck annak a feltevésnek az árán vezette le, hogy a fény E energiája $h\nu$ nagyságú energiaadagokból áll:

$$E = \sum_{\nu} n_\nu h\nu \quad , \qquad n_\nu = 0, 1, 2, ... \quad .$$

Amikor megpróbálta, hogy $h \to 0$ révén az energia folytonos legyen, akkor az

$$U(\nu, T) \to \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{1 + h\nu/hT - 1} = h \to 0 = \frac{8\pi}{c^3} kT = \frac{8\pi}{c^3} KT\nu^2$$

eredményt kapta. Ez ellentmond a tapasztalatnak.

A spektrumnak a nu_{max} frekvenciánál maximuma van:

$$\frac{dU}{d\nu} = 0 \qquad , \qquad \frac{h\nu_{\max}}{kT} = 2.822.$$

Ezen ú.n. Wien–féle eltolódási törvény szerint $\nu_{\max}$ arányos $T - vel$.

A teljes energia sűrűség: $U(T) = \int_0^\infty U(\nu T) d\nu = aT^4$

$$U(T) = aT^4 \qquad \frac{\text{energia}}{\text{térfogat}}$$

Ez a Stefan–Boltzmann törvény.

1.4. Sebességmérés

Fraunhoffer 1812-ben észrevette, hogy a nap szinképében fekete vonalak vannak. Azóta kitűnt, hogy ez azért van, mert az atomok színképe vonalas. A Nap légkörében levő gáz atomjai elnyelnek a folytonos spektrumból bizonyos frekvenciáú komponenseket.

Balmer vette észre, hogy a hidrogén spektrumában található frekvenciák értéke két egész szám segítségével a következő alakban fejezhető ki:

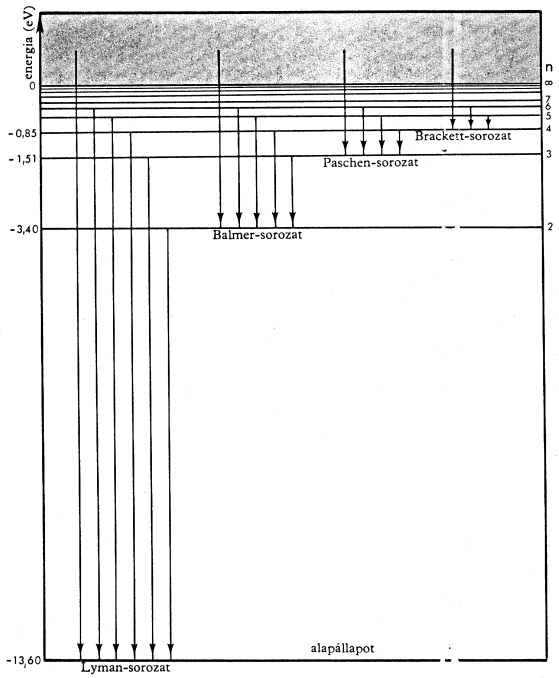
$$\nu_{nn'} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \quad ,$$

ahol $R = 109677.58\,\mathrm{cm}^{-1}$ a Rydberg állandó. Bohr ismerte fel, hogy az atomok vonalas szinképét az okozza, hogy az atomoknak a lehetséges eneriaállapotai diszkrétek. Ezek különbsége határozza meg a z emittált fény frekvenciáit:

$$E_n - E_{n'} = h\nu_{nn'} \quad .$$

A hidrogén ionizációs energiája:

$$E_{ion} = 13.54 \text{ eV} \sim 109678\,\mathrm{cm}^{-1}$$



1.3. ábra: A hidrogén atom energiaszintjei

Megfigyelték, hogy az atomok spektruma a Doppler–effektus miatt eltolódik, ha a fényforrás a megfigyelőhöz képest mozog:

$$\nu' = \nu \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \quad ,$$

ahol v a relativ sebesség c pedig a fénysebesség.

Vöröseltolódás következik be, ha a forrás távolodik, kékeltolódás, ha közeledik. A Doppler-effektus felhasználható a csillagok sebességének meghatározására, ha a csillag spektrumában megtalálhatóak az atomok szinképvonalai. Hubble megállapította, hogy a ködfoltok igazából a miénkhez hasonló galaxisok, amelyek távolodási sebességét a bennük látható néhány csillag azonos frekvenciaeltolódásából meg lehet határozni a Doppler effektus alapján.

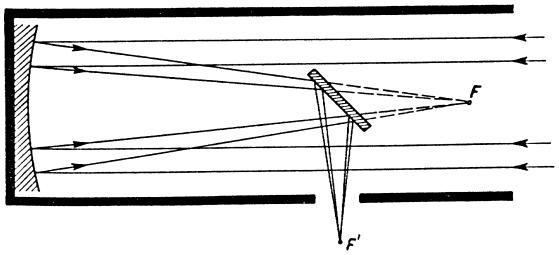
	táv fényév	sebesség km/s
Virgo	43000000	1200
Ursa maior	560000000	15000
Corona Borealis	728000000	21500
Bootes	1290000000	39300
Hydra	1960000000	61100

A távolságot a Cepheidák segítségével mérték.

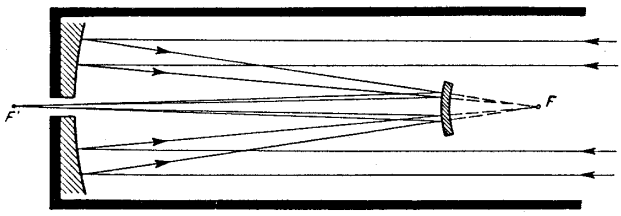
Távcsövek

Feloldó képesség $= 1.22\frac{\lambda}{d}$ (radián)

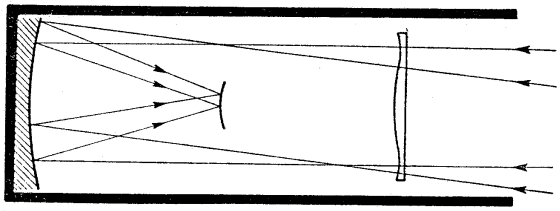
Tükrös távcsövek



1.4. ábra: Newton-féle távcső



1.5. ábra: Cassegrain-féle keskeny látószögű távcső. Kiválasztott objektumok megfigyelésére való.



1.6. ábra: Schmidt-féle távcső

A nagy látószögű piszkéstető-i távcsö átmérője: $\emptyset$= 90 cm. A korrekciós lemezé: $\emptyset$ = 60 cm

Kéttest probléma

Tycho de Brahe nagyon pontos megfigyelési adatait Kepler dolgozta fel. Csak akkor tudott helyes leírást kapni, ha ellipszis pályát tételezett fel. A Newton-féle

$$F = -G\frac{mM}{r^2}$$

gravitációs erőtörvényből levezethető, hogy a pálya kúpszelet.

Induljunk ki a Newton-féle II. törvényből:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Végezzük el a következő azonos átalakításokat:

$$\begin{aligned}
&m\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}\vec{F} \ ; \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2\right) = \dot{\vec{r}}\vec{F} \ , \\
&\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2\right)dt = \int \dot{\vec{r}}\vec{F}dt = \int \vec{F}d\vec{r} = -\int \frac{\partial V}{\partial \vec{r}}d\vec{r} \\
&\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2(t_2) - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2(t_1) = -(V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)) \ .
\end{aligned}$$

Végül azt kapjuk, hogy:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2(t_2) + V(\vec{r}_2) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2(t_1) + V(\vec{r}_1) = \text{konst}$$

Ez az energiamegmaradás törvénye.

Hasonlóképpen

$$\begin{aligned}
m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad \rightarrow \quad & m\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = \vec{r}\times\vec{F} \\
& m\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right) = 0
\end{aligned}$$

(minthogy $\vec{r}\times\vec{F} = 0$, ha centrális az erő.) Tehát

$$\vec{r}\times\vec{p} = \vec{L} = \text{állandó}$$

Ez az impulzusmomentum megmaradás törvénye.

Induljunk ki ezekből a már csak elsőrendű differenciál- egyenletekből. Bevezetjük az r, ϑ, φ polár koordinátákat. $\vec{L}$ legyen párhuzamos z–vel. Ekkor $\vartheta = \frac{\pi}{2} = \text{konst}$. Az energiát jelöljük mC-vel, az impulzusmomentumot mh-val. Az energiamegmaradást és az impulzusmegmaradást kifejező egyenletek:

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{GmM}{r} = mC$$

és

$$mr\dot{\varphi}r = mh \ .$$

Innen kapjuk, hogy

$$\dot{\varphi} = \frac{h}{r^2} \ ,$$
$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{h}{r^2} \ ,$$
$$\left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{h}{r^2} \right)^2 + r^2 \frac{h^2}{r^4} \right] - \frac{GM}{r} \right\} = C \ ,$$
$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{h^2}{r^4} + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = 2C \ ,$$
$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{2GM}{r} + 2C - \frac{h^2}{r^2} \right) \frac{r^4}{h^2} = \frac{2GMr^3}{h^2} + \frac{2Cr^4}{h^2} - r^2 \ ,$$
$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2GMr^3}{h^2} + \frac{2cr^4}{h^2} - r^2}} \ .$$

Vezessük be az U és α változókat:

$$U = \frac{GM}{h} - \frac{h}{r}$$
$$\alpha^2 = 2C + \frac{G^2M^2}{h^2} \ .$$

Integráljuk a $d\varphi/dr$ kifejezést:

$$\int d\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{(2GMr^3)/h^2 + 2Cr^4/h^2 - r^2}} = \int \frac{dU}{\sqrt{\alpha^2 - U^2}} \ .$$

Az eredmény:

$$\varphi + k = \arccos \frac{U}{\alpha} \ ,$$

ahol k egy integrációs állandó.

$$U = \alpha \cos(\varphi + k) = \frac{GM}{h} - h/r \ .$$

Innen megkapjuk r-t, mint φ függvényét:

$$r = \frac{h}{\frac{GM}{h} - \alpha \cos(\varphi + k)} \ .$$

Ha a $k = 0$ feltételt választjuk, akkor

$$r = \frac{h^2/GM}{1 - \frac{\alpha h}{GM} cos\varphi} \ .$$

Végül azt kapjuk, hogy

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

Ez egy kúpszelet!

$$\text{ltt} p = \frac{h^2}{GM} \qquad \text{és} \qquad \varepsilon = \frac{\alpha h}{GM} \ .$$

Kör:	$\varepsilon = 0.$
Ellipszis:	$\varepsilon < 1.$
Parabola:	$\varepsilon = 1.$
Hiperbola:	$\varepsilon > 1.$

Ha az égitestek száma több mint 2, (például 3), akkor ez az eljárás nem alkalmazható. Összesen 9 koordináta és 9 impulzus van, viszont a mozgásállandók száma csak 10. A Newton egyenletek nem alakíthatók elsőrendű differenciálegyenlet rendszerré, azaz integrál feladattá. Ilyenkor a perturbációszámítást lehet alkalmazni.

2. Fejezet

Asztrofizika

2.1. A Hertzsprung-Russel diagram

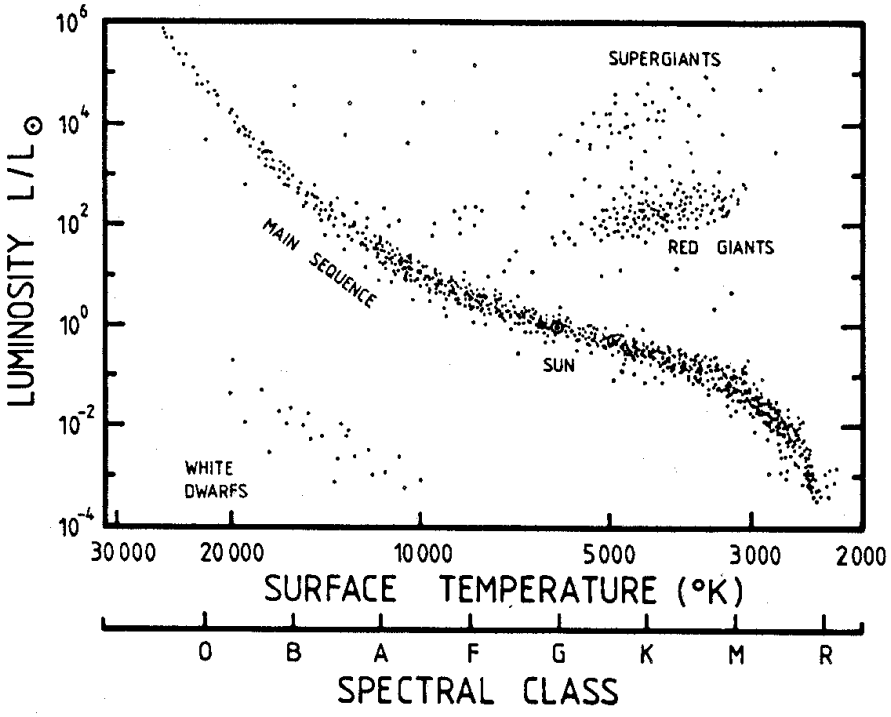
Csillagoknak nevezzük azokat az egybefüggő égitesteket, amelyek huzamosan képesek energiát termelni és kisugározni. Az energiatermelés magfúzió révén valósul meg, az energia kisugárzása pedig elsősorban fotonok és neutrinók, másodsorban elektronok, protonok, ionok és gravitációs hullámok kibocsájtása révén történik. Az elektromágneses kisugárzást a csillag L luminozitásával, azaz az időegységre jutó teljes energialeadással, valamint a T felületi hőmérséklettel jellemezhetjük. A hőmérsékleti sugárzásra vonatkozó Planck–törvény alapján a hőmérséklet jellemzi a csillag fényének spektrális eloszlását a teljes szinképben. Hertzsprung–Russel–diagramnak nevezzük azt az ábrát, amelyen a függőleges tengelyre a csillagok L luminozitásának logaritmusát, a balra irányitott vízszintes tengelyre, pedig a T hőmérsékletét mérjük fel. A csillagokat megszemélyesítő pontok ezen a diagrammon három tartományban sűrűsödnek. A legtöbb található a főágban. Kevesebb a vörös óriások és a fehér törpék tartományában. A csillagok életük során vándorolnak ezen a diagrammon, ami voltakép egy "pillanatfelvétel", a pontok sűrűsége arányos az adott luminozitással és felületi hőmérséklettel jellemzett állapotban való tartózkodás idejével. A Nap egy főágbeli csillag.

2.2. A Nap energiatermelése

A Nap energiatermelése sokáig jelentett megoldatlan problémát. Az világos volt, hogy a gravitációs összehúzódásból a Nap nem pótolhatja huzamosan a kisugárzott energiát. A harmincas évek során ismerték fel, hogy a Napban energiatermelő atommagreakciók zajlanak. A probléma tisztázása Hans Bethe nevéhez fűződik. A számos folyamat közül a két legfontosabb: a hidrogén lánc és a szén ciklus. Érdemes megjegyezni, hogy a "legtermészetesebbnek" látszó reakciók,azaz a

$$p + p \rightarrow {}^{2}He + \gamma$$

$$p + \alpha \rightarrow {}^{5}Li + \gamma$$



2.1. ábra: A Hertzsprung-Russel diagram

$$\alpha + \alpha \rightarrow {}^{8}Be + \gamma$$

reakciók nem valósulnak meg, mert a ${}^{2}He$, ${}^{5}Li$ és ${}^{8}Be$ "magoknak" nem létezik kötött állapot. Ha lenne az anyag egy pillanat alatt elégne.

Hidrogén lánc

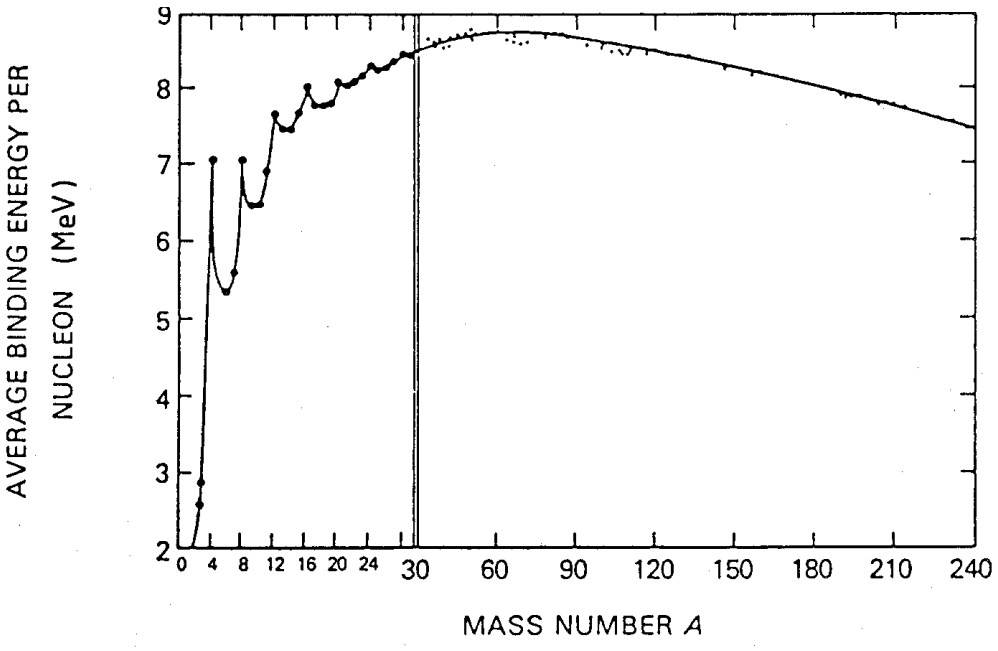
A Nap a közepe táján 34%-ban hidrogént és 64%-ban héliumot tartalmaz. Az ott uralkodó magas hőmérsékleten a következő magreakciók képesek végbemenni:

$$
\begin{aligned}
&{}_1^1p + {}_1^1p \rightarrow {}_1^2D + e^+ + \nu_e + 1.44\mathrm{MeV}\\
&{}_1^2D + {}_1^1p \rightarrow {}_2^3He + \gamma 5.49\mathrm{MeV}\\
&{}_2^3He + {}_2^4He \rightarrow {}_4^7Be + \gamma 1.59\mathrm{MeV}\\
&{}_4^7Be + e^- \rightarrow {}_3^7Li + \nu_e\\
&{}_2^3He + {}_2^3He \rightarrow {}_2^4 + {}_1^1p + {}_1^1p + 12.86\mathrm{MeV}\\
&{}_3^7Li + {}_1^1p \rightarrow {}_2^4He + {}_2^4He
\end{aligned}
$$

Végül is:

$$(e^-) + 4({}_1^1p) \rightarrow ({}_2^4He) + e^+ + 2\nu_e + 2\gamma$$

A hidrogén tehát héliummá ég el. Az energianyereség viszonylag nagy, de kicsi a valószinűség az első lépés miatt, ami egy gyengekölcsönhatási folyamattal indul, majd



2.2. ábra: Az egy nukleonra eső átlagos kötési energia az A tömegszámú atommagban. A fúzió egészen a vasig energianyereséggel jár.

egy neutron befogási aktussal folytatódik:

$$ {}_1^1p + {}_1^1 p \rightarrow {}_1^1 p + {}_0^1 n + e^+ + \nu_e \rightarrow {}_1^2 D + e^+ + \nu_e \ . $$

Ennek köszönhetjük a Nap hosszútávú, stabil működését.

Szén ciklus

$$ {}_6^{12}C + {}_1^1 p \rightarrow {}_7^{13} N + \gamma $$
$$ {}_7^{13}N \overset{870'}{\rightarrow} {}_6^{13} C + e^+ + \nu_e $$
$$ {}_6^{13}C + {}_1^1 p \rightarrow {}_7^{14} N + \gamma $$
$$ {}_7^{14}N + {}_1^1 p \rightarrow {}_8^{15} O + \gamma $$
$$ {}_8^{15}O \overset{124''}{\longrightarrow} {}_7^{15} N + e^+ + \nu_e $$
$$ {}_7^{15}N + {}_1^1 p \rightarrow {}_6^{12} C + {}_2^4 He $$

Végül is:

$$ {}_6^{12}C + 4({}_1^1p) \rightarrow {}_6^{12}C + {}_2^4He + 2e^+ + 2\nu_e + 3\gamma $$

A hidrogén tehát héliummá ég el. Az energianyereség: 2.57 MeV. A szén csupán a katalizátor szerepét játssza, a folyamat ciklikusan ismétlődik. Az időegységre és a térfogategységre jutó reakciók száma, azaz az γ reakció ráta:

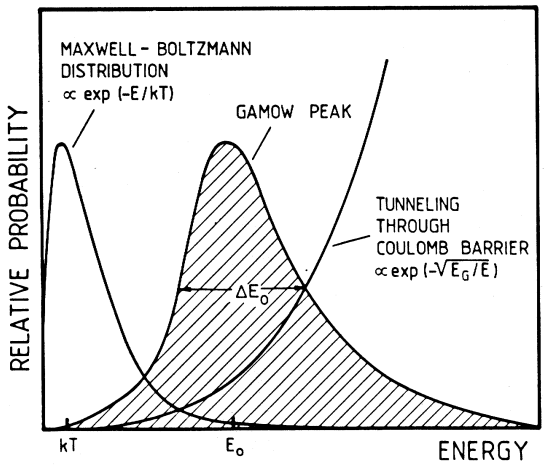
$$ r = n_1 n_2 < \sigma v > = n_1 n_2 \int \sigma(E) v f(E) dE $$

ahol $\sigma(E)$ a reakció hatáskeresztmetszete, ami a Coulomb taszítás miatt kis energiákon nagyon kicsi, n_1 és n_2 a két fajta fuzionáló mag sűrűsége. A magreakció csak a kvantummechanikai alagút jelenség révén tud végbemenni. Ez annál kisebb valószínűségű, mennél kisebb az E energia. Az alagút effektust úgy is értelmezhetjük, hogy a Heisenberg-féle $\Delta E \cdot \Delta t > h$ bizonytalansági reláció értelmében az áthaladáshoz szükséges rövid Δt idő alatt a részecske E energiája ΔE mértékben eltérhet E-töl. A részecske "rövidlejáratú hitelre" kapja az áthaladáshoz szükséges energiát.

A részecskék energia szerinti eloszlását az $f(E)$ Maxwell-Boltzmann féle eloszlás adja meg:

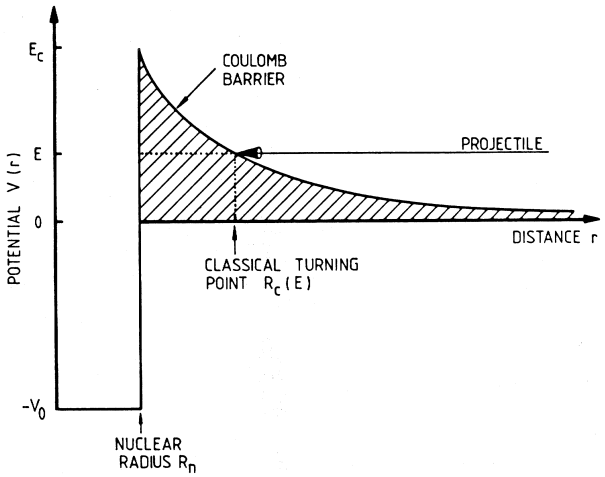
$$f(E) = \frac{E^{1/2}}{(kT)^{3/2}} e^{-E/kT} \quad .$$

Rögzített T hőmérsékleten ez az eloszlás a nagyobb energiák tartományában exponenciálisan csökken. A reakció rátát meghatározó integrálban szereplő tényezőket, illetve a szorzatot az ábrán tüntettük fel. Látható, hogy van egy olyan energiatartomány, ahol a szorzat értéke viszonylag nagy, ez a tartomány adja a fő járulékot a reakció rátához. Nagyobb energiákon kevés részecske fordul elő, kisebb energiákon, pedig kicsi az algúteffektus valószínűsége, tehát kicsi a hatáskeresztmetszet. Ha T növekszik, akkor ez a tartomány kiszélesedik, másrészt a szorzat értéke nagyobb lesz. Magasabb hőmérsékleten tehát az energiatermelés, azaz az égés intenzivebben zajlik. Termonukleáris reaktorként a Nap 10^{10} évig működhet. A Nap belsejének



2.3. ábra: A hatáskeresztmetszetet meghatározó alagút-effektus valószínűségének és a Maxwell-Boltzmann-eloszlásnak az energia-függése.

hőmérséklete $T = 14.4 \cdot 10^6\ ^\circ K$. Ezen a hőmérsékleten a proton átlagos kinetikus energiája $= (3/2)kT = 1.86 KeV$. Az emberi civilizáció fenntartásához szükséges energiaforrás hosszútávon ugyancsak a magfúzió. A számításba jövő reakciók a



2.4. ábra: A töltött részecskére ható V(r) potenciál r- függése.

következők:

$$\begin{aligned}
{}^{2}_{1}D + {}^{2}_{1}D &\rightarrow {}^{3}_{2}He + {}^{1}_{0}n + 3.25\mathrm{MeV} \\
{}^{2}_{1}D + {}^{3}_{1}T &\rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n + 14.2\mathrm{MeV} \\
{}^{6}_{3}Li + {}^{2}_{1}D &\rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He + 22.4\mathrm{MeV} \\
{}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}p &\rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He + 17.3\mathrm{MeV}
\end{aligned}$$

2.3. Csillagszerkezet

A Hertzsprung-Russel diagram főágához tartozó csillagok szerkezetét fogjuk tanulmányozni azzal a céllal, hogy megértsük a csillagok "működését", az energiatermelést, az energiatranszportot, valamint a fénykisugárzás és a neutrinokisugárzás közötti kapcsolatot. Feltételezzük, hogy a csillag termikus és hidrodinamikai egyensúlyban van. Feltételezzük továbbá, hogy a csillag gömbszimmetrikus, igy a fizikai mennyiségek csak az r radiális koordinátának a függvényei. A dr vastagságú gömbhéjban található infinitezimális tömegre ható gravitációs erő a következő alakba írható:

$$dF = -G\frac{M(r)\rho(r)4\pi r^2 dr}{r^2}$$

ahol G a gravitációs állandó, $\rho(r)$ a tömegsűrűség, $M(r)$ az r sugáron belül található tömeg. A nyomás differenciálja:

$$dP = \frac{dF}{4\pi r^2},$$

a nyomás deriváltja tehát

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G\frac{M(r)\rho(r)}{r^2}$$

A tömegeloszlásra vonatkozó

$$M(r) = \int_0^r 4\pi x^2 \rho(x) dx$$

egyenlet alapján felírhatjuk a tömegderiváltat meghatározó egyenletet:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r).$$

A csillagban szakadatlan energiatermelés folyik. A megtermelt energia kiáramlik a csillag felületére, amit azután a csillag a világegyetembe sugároz ki. Az $M(r)$ tömegű gömbben időegység alatt termelt energiát luminozitásnak nevezzük. Az L luminozitás megváltozása az r és $r + dr$ intervallumban:

$$dL = \mathcal{E} dM = \mathcal{E} 4\pi r^2 dr \rho(r).$$

Innen

$$\frac{dL}{dr} = \mathcal{E} 4\pi r^2 \rho(r),$$

ahol $\mathcal{E}$ az egységnyi tömegre eső, másodpercenkénti energiatermelés $[J/s/kg]$. A csillag $T(r)$ hőmérséklete az r sugár függvénye, értéke a középponban maximális, a felületen minimális. Az energiatranszport a csillag felülete felé annak a következménye, hogy az energia spontán a melegebb helyről a hidegebb felé áramlik. A T hőmérsékleten környezetével egyensúlyban lévő elektromágneses tér, az ú.n. feketetest-sugárzás energiasűrűsége:

$$aT^4(r),$$

ahol $a = 7.5710^{-15}$erg cm$^{-3}K^{-4}$ a Stefan-Boltzmann állandó. A gömbhéj felületéről merőlegesen kifelé áramló energia másodpercenként:

$$4\pi r^2 (c/3) a T^4(r + dr),$$

ahol c a fénysebesség. A beáramlás (r)- nél:

$$4\pi r^2 (c/3) a T^4(r),$$

A beáramló és a kiáramló energia különbsége elnyelődik a gömbhéjban. A gömbhéjban elnyelődött teljesítmény tehát:

$$16\pi (c/3) a r^2 T^3 \frac{dT}{dr} dr.$$

Az elnyelt teljesítmény a sugárzás szempontjából veszteség, a gáz szempontjából nyereség, és hozzájárul a gáz fűtéséhez. A gömbhéjban elnyelődő teljesítmény kifejezhető, a luminozitás segítségével is, ez ugyanis arányos egyrészt a felületegységre eső luminozitással, másrészt a gömbhéj dM tömegével:

$$\kappa(\frac{L(r)}{4\pi r^2}) dM.$$

Itt κ az energiaelnyelőképességet jellemző opacitás, amelynek dimenziója: $\frac{m^2}{kg}$. Az elnyelődött energia kétfajta kifejezését egyenlővé téve és rendezve, a hőmérséklet deriváltjára kapjuk, hogy

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3\kappa L(r)\rho(r)}{16ac\pi T^3(r)r^2}.$$

Itt meg kell említeni, hogy az energia nemcsak sugárzás révén terjed, hanem a részecskék áramlása, azaz konvekció által is. Ez azonban csak a csillag felülete közelében fontos, ezért most az egyszerűség kedvéért elhanyagoljuk. (Az energiatranszport harmadik fajtája, a következtetés mindenütt elhanyagolható.) Amint látjuk a csillagszerkezetet meghatározó alapvető mennyiségek a nyomás, a tömeg, a luminozitás és a hőmérséklet:

$$\begin{bmatrix} P(r) \\ M(r) \\ L(r) \\ T(r) \end{bmatrix}$$

Ezek meghatározására szolgál az a négy, csatolt differenciálegyenlet, amelyeket most vezettünk le. Ahhoz, hogy a feladat matematikai értelemben jól definiált legyen, meg kell adni a négy elsőrendű egyenlethez négy határfeltételt. Ezek a magától érthető határfeltételek:

$$L(r=0)=0, \qquad M(r=0)=0, \qquad T(r=R)=0, \qquad P(r=R)=0.$$

A fenti differenciálegyenlet rendszerben bizonyos együtthatók is szerepelnek, ezek a bemenő információk, azaz szükség van a

$$\rho = \rho(P,T,X,Y,Z)$$

sűrűség, az

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(P,T,X,Y,Z)$$

energiatermelés és a

$$\kappa = \kappa(P,T,X,Y,Z)$$

opacitás ismeretére. Itt X a hidrogén, Y a hélium, Z pedig a nehezebb elemek aránya:

$$X+Y+Z=1.$$

A Nap középpontjában: $X=0.34 \quad Y=0.64 \quad Z=0.02$ a felszínen $X=0.71$.

Vegyük most sorra ezeket a bemenő információkat!

1. Állapotegyenlet.

$$\rho = \rho(P, T, X, Y, Z)$$

Magas hőmérsékleten a csillagot alkotó anyag részecskéi közti kölcsönhatási energia elhanyagolható a kinetikus energia mellett, ezért az anyag ideális gáznak tekinthető. A teljes nyomáshoz a részecskék nyomásán kívül még hozzájárul a sugárnyomás is:

$$P = \frac{R}{\mu}\rho T + aT^4/3$$

Itt μ a gáz átlagos móltömege, ami a kémiai összetételtől függ. Innen ρ explicite megkapható. Ezt szokás állapotegyenletnek nevezni.

2. Ionizált gázban történő abszorbció.

A fény abszorbcióját jellemző

$$\kappa = \kappa(P, T, X, Y, Z)$$

opacitást atomfizikai és optikai jellegű laboratóriumi kísérletek segítségével lehet meghatározni. Itt jegyezzük meg, hogy ha az anyagnak nem lenne opacitása, akkor a sugárzás akadálytalanul távozna és az anyag nem tudna felmelegedni, ekkor az energiatermelő folyamatok nem tudnának beindulni, azaz a fűtőanyag nem tudna begyulladni, az égés nem következne be. A csillag nem "működne".

3. Az energiatermelés.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(P, T, X, Y, Z)$$

Ezt magfizikai jellegű laboratóriumi kísérletek segítségével lehet meghatározni, azon folyamatok tanulmányozása révén amelyeket az elözö fejezetben ismertettünk.

Az ábrán a megoldásként kiadódó $P(r), M(r), L(r), T(r)$ függvények r-függése látható. A megoldásoknak ki kell adnia eredményként a csillag megfigyelt adatait :

$$L(r = R) = L_s, \quad M(r = R) = M_s.$$

ahol R a csillag sugara. A Nap esetén

$$L_\odot = 4\ 10^{26} W, \quad M_\odot = 2\ 10^{30} kg, \quad R_\odot = 697000 km.$$

Ez a model (bizonyos finomitásokkal) képes a Nap megfigyelt tulajdonságait helyesen reprodukálni.

2.4. A Nap-neutrinó rejtély

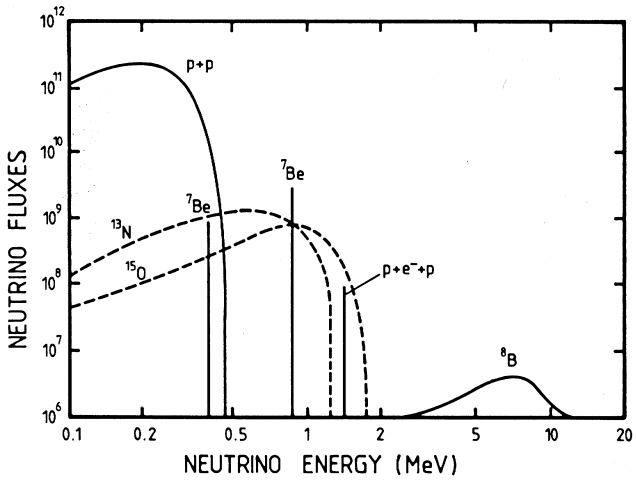
Az energiatermelő folyamatok során előfordulnak bizonyos betabomlási jelenségek, amelyek neutrinó kibocsátással járnak. A modell segítségével meg lehet határozni a Földre érkező neutrinók számát. Davis 1956-ban számolt be először azokról a kísérletekről, amelyek célja a Nap-neutrinók számának a mérése volt. A $^{37}Cl + \nu_e \rightarrow ^{37} A + e^-$ reakcióban keletkező argon atommagok rádióaktivak, amelyeket össze lehet gyűjteni és át lehet áramoltani egy proporcionális számlálón. (Az argon nemes gáz, ezért nem kötődik meg.) A kísérletek eredményeként azt találták, hogy háromszor kevesebb neutrínó érkezik a Fölre, mint amennyi a napmodell számításokból adódik. A neutrinó szabadúthossza a Nap anyagában $l = 1.2 \quad 10^{12}$ km, a Napban tehát nem abszorbeálódhatott. Hová tűnnek a neutrinók? Ez a híres "Nap Neutrinó Rejtély". Ha nem a fényre, hanem a neutrinóra lenne érzékeny a szemünk, akkor azt kérdezhetnénk: Hová lett a Nap az égről? Három magyarázati lehetőség kínálkozik:

1. A csillagmodell javításra szorul.

2. A neutrinók spontán átalakulása miatt nem detektálhatók. 1964-ben ugyanis felfedezték, hogy a $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ bomlásból származó neutrinó nem azonos az addig ismert, bétabomlásból származó neutrinóval. Ezért meg kell különbözteni őket egymástól. Jelenleg három fajtát ismerünk: ν_e, ν_μ és ν_τ. Elképzelhető, hogy a neutrinók idővel egymásba keverednek. A ν_e ν_μ-vé konvertálódhat és ekkor detektálni a ν_μ-t.

3. A Nap anyaga a neutrinókat keveri. A Nap anyagán való áthaladás során a ν_e ν_μ-vé konvertálódhat.

Ez a kérdéskör jelenleg a kutatás élvonalához tartozik.



2.5. ábra: A neutrinók energiaszerinti eloszlása

2.5. Neutrinó oszcilláció

Vizsgáljuk meg, hogy mi módon lehetséges a ν_e átalakulása ν_μ-vé! Neutrinó oszcilláció jöhet létre, ha a neutrinó keletkezése pillanatában flavor sajátállapotban van, ami azonban nem energiasajátállapot. A t=0 pillanatban a flavor sajátállapotok kifejthetők energiasajátállapotok szerint:

$$\psi_e >= +\psi_1 > cos\theta + \psi 2 > sin\theta \ ,$$
$$\psi_\mu >= -\psi_1 > sin\theta + \psi_2 > cos\theta \ .$$

Itt $< \psi_i|\psi_j >= \delta_{ij}$ A t időpillanatban:

$$\psi_e(t) >= +\psi_1 > cos\theta e^{-iE_1 t} + \psi_2 > sin\theta e^{-iE_2 t} \ ,$$
$$\psi_\mu(t) >= -\psi_1 > sin\theta e^{-iE_1 t} + \psi_2 > cos\theta e^{-iE_2 t} \ .$$

ahol $E_j = \sqrt{p^2 + m_j^2}$.
Annak a valószínűsége, hogy a t időben az elektron neutrinó elektron neutrinó állapotban maradjon:

$$P_{\nu_e \to \nu_e} = | < \nu_e|\nu_e(t) > |^2 = |cos^2\theta + sin^2\theta e^{-i(E_2 - E_1)t}|^2$$

Itt kihasználtuk, hogy mind a flavor, mind az energia sajátállapotok ortonormáltak. Amint látható oszcilláció csak akkor fog előfordulni, ha $E_2 - E_1 = \sqrt{p^2 + m_2^2} - \sqrt{p^2 + m_1^2} \neq$, azaz, ha a két tömeg különböző, tehát valamelyik közülük nem nulla. Egyelőre nincs bizonyíték sem az oszcilláció mellett, sem ellene! Újabban azonban Komikonde-i detektorral azt tapasztalták, hogy a kozmikus sugárzás hatására keletkező pionok bomlásából származó azon ν_μ intenzitása, amelyek az "ég" felől érkeznek nagyobb, mint a "föld" felől érkezők;.

Sudbury-ben egy olyan neutrinó detektort építenek, ami voltakép egy nehézvíztároló. Kanadában az atomenergiát természetes urán plusz nehézvíz kombinációra tervezett CANDU reaktorokkal termelik. Így nincs szükség az Urán 235 dúsítására, ami bizonyos függetlenséget biztosít az USA-tól. (A nehézvíz előállítása ugyanis lényegesen egyszerűbb feladat, mint az urán dúsítás.) A nehézvíz biztonságos tárolásának meg, hogy a nehézvíz neutrinó detektorként használható. 1000 tonna nehézvízet, (D_2O) acryl tartályban, egy 2070 m mély, elhagyott bányában tárolnak. A tartályt 4 m vastagon H_2O veszi körül, benne 1955 darab, 50 cm átmérőjű fotoelektronsokszorozó. Ezek Cserenkov-sugárzás észlelésére alkalmasak. Egy 7 MeV-es elektron átlagban 1140 észlelhető fotont kelt. A detektorral az alábbi folyamatok észlelhetők:

$\nu_e + d \to p + p + e^-$ (töltött áram ($\nu_e + n \to p + e^-$)),
$\tilde{\nu}_e + d \to n + n + e^+$ (töltött áram ($\tilde{\nu}_e + p \to n + e^+$)),
$\nu_x + d \to p + n + \nu_x$ (semleges áram (rugalmatlan szórás)),
$\nu_x + e \to \nu_x + e$ (semleges áram (rugalmas szórás)).

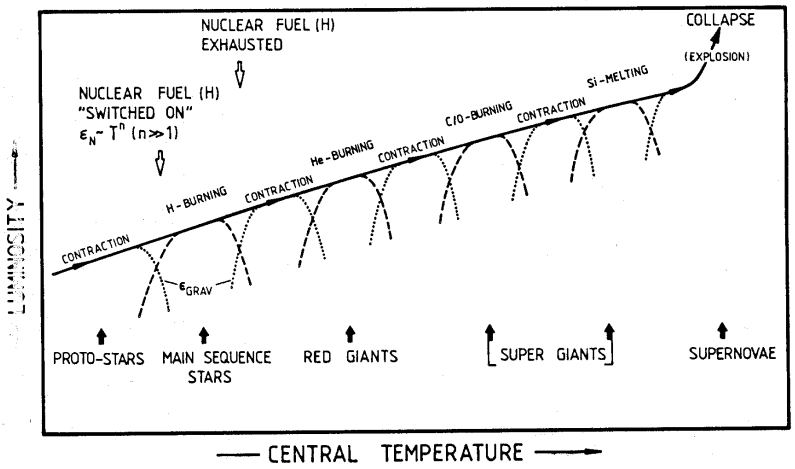
A két utóbbi reakció független a neutrinó oszcillációtól, mert ν_x lehet akár ν_e, akár ν_μ. Így ez a detektor alkalmas annak eldöntésére, hogy létezik-e neutrinó oszcilláció. Ha igen, akkor valamelyik neutrinó tömege nem zérus. Ebben az esetben

viszont lehet, hogy az Univerzum tömegének egy jelentős részét, a "sötét anyagot" a neutrinók adják.

3. Fejezet

A csillagfejlődés végállapotai

A primer csillagok anyagi összetétele születésük idején nagyjából azonos: főleg hidrogént ($\approx 75\%$) és héliumot ($\approx 25\%$) tartalmaznak. A primer csillagok ugyanis abból a gázból alakulnak ki a gravitációs vonzás hatására, amely az ősrobbanást követő rövid időszakaszban képződött. A másodlagos csillagok — mint például a Nap — születésekor vasnál nehezebb elemeket is tartalmaznak, de rendkívül csekély mennyiségben.



3.1. ábra: Nagy tömegű csillag fejlődése

A másodlagos csillagok olyan "használt" anyagból jönnek létre, amely már egyszer átment a csillagfejlődés egyes fázisain és szupernova robbanás során szóródott szét a világűrben.

A csillagok sorsát elsősorban a tömegük határozza meg. Ha egy égi objektum tömege nagyon kicsi, akkor az összehúzódás során felszabaduló gravitációs energia is kicsi, és ezért a hőmérséklet nem tud olyan értéket elérni, hogy magreakciók beindulhassanak. Ekkor nem is alakul ki csillag, az anyag kihül és barna törpe lesz.

3.1. Fehértörpe

Ha a csillag tömege akkora, hogy a gravitációs összehúzódás során bekövetkező felmelegedés elegendő a hidrogén fúzió beindulásához, akkor előbb-utóbb a hidrogén készlet elfogy és ennek következtében az energiakisugárzás és vele a kifelé irányuló sugárnyomás is lecsökken. Ekkor gravitációs összehúzódás következik be, aminek eredményeként a csillag belső magja felmelegszik. Ha a tömeg nem elég nagy, akkor a hőmérséklet nem éri el a a hélium begyuladásához szükséges kritikus értéket és az összehúzódás folytatódik. Vizsgáljuk ezt az állapotot, amikor már $\mathcal{E} = 0$. Ennek következményei:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; \frac{dL}{dr} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; L = \text{konst} \\ L = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; \frac{dT}{dr} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; T = \text{konst} \\ L = 0 \;\; , \qquad & T = 0 \;\; . \end{aligned}$$

A kihűlt csillag esetén az előzőekben feltételezett

$$P = \frac{R}{\mu}\rho T + aT^4/3$$

állapotegyenlet többé nem érvényes. Ez csak nagy hőmérsékleten alkalmazható, amikor a hőmozgás energiája mellett a kölcsönhatási energia elhanyagolható és az anyag ideális gázként viselkedik. A gravitáció hatására az anyag egyre kisebb térfogatra nyomódik össze és a felszabaduló gravitációs energiát szétsugározza. Ekkor előbb-utóbb az anyag elfajul, azaz bekövetkezik az a helyzet, hogy a térfogat csak úgy csökkenhet tovább, ha az elektronok impulzustérfogata növekszik. Ezt a következőképpen érthetjük meg. A V térfogatban és a $4\pi/3p_F^3$ impulzustérfogatban elhelyezkedő elektonok számára csak véges sok kvantumállapot létezik. A $4\pi/3p_F^3V$ fázistérfogatban annyi különböző kvantumállapot létezik, ahányszor a h^3 térfogatú cella elfér benne. Az elektronokra vonatkozó Pauli-elv értelmében maximálisan kétszer ennyi elektron számára van "hely". Az elfajult elektrongáz sűrűsége tehát:

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3}.$$

Amint látjuk, ha növekszik a ρ sűrűség, akkor a p_F Fermi–impulzus is kénytelen növekedni. Az ábrán az elektronok impulzus szerinti eloszlása látható.

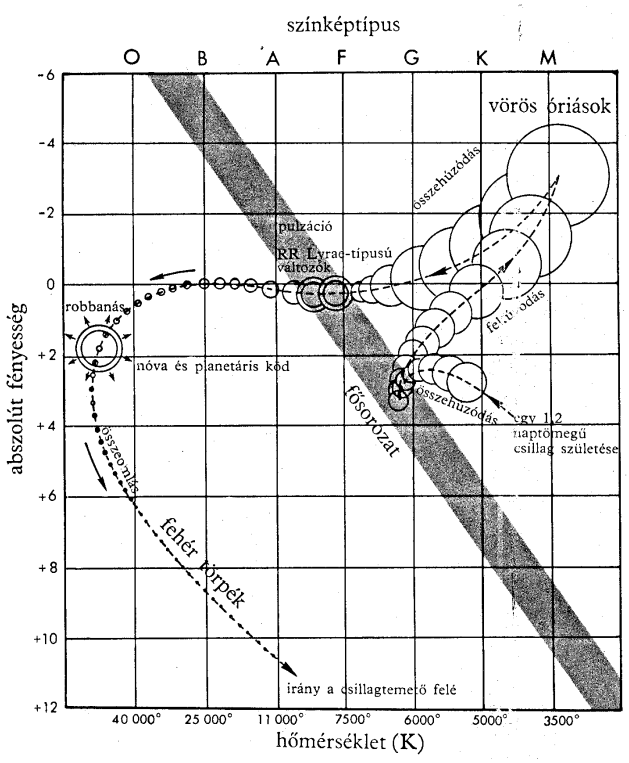
A nyomás definiciójából következik, hogy az elektron-gáz P nyomása az elektron impulzus négyzetének átlagértékével arányos:

$$P \sim \langle p_x^2 \rangle.$$

Ha tehát az elfajult elektrongáz Fermi-impulzusa növekszik, akkor az elektronimpulzus négyzetének várhatóértéke is, következéskép az elektrongáz P nyomása is

növekszik. Ha a csillag tömege nem túl nagy, akkor az elektronoknak ez a "Fermi nyomása" egyensúlyt tud tartani a gravitációs nyomással. Ez az állapot a fehér törpe állapot. Ez csak az $M \leq 1.4 M_{\odot}$ tömegű csillagoknál valósulhat meg. Ez a Chandrasekhar limit.

A fehér törpe sugara $R \sim 8000\, km$, egy kevéssel nagyobb csak, mint a Föld. Az elektronok nagy mozgási energiával rendelkeznek, de azt nem tudják kisugározni a Pauli-elv miatt, miként az atomok elektronjai sem ugorhatnak a mélyebb energiájú állapotokba, mivel azok már be vannak töltve. A fehér törpe tehát olyan, mint egy nagy atom, amelyet elsősorban, nem az atommagok és az elektronok között ható Coulomb–vonzás, hanem a gravitáció tart össze.



3.2. ábra: A Nap időbeli fejlődése

3.2. Neutroncsillag

Ha a tömeg meghaladja a Chandrasekhar limitet, akkor az elfajult elektron-gáz Fermi nyomása nem képes megállítani a gravitációs nyomás okozta összehúzódást. Az elektronok Fermi impulzusával együtt növekszik az energiájuk is és bekövetkezik az az állapot, amikor az

$$(E_e + m_p c^2 = m_n c^2)$$

egyenlet teljesül. Ekkor beindul a

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e$$

reakció. A neutrinók megszöknek, a neutronok száma pedig növekszik az elektronok és protonok rovására. Az összehúzódás folytatódik, a neutronok száma növekszik. Végül gyakorlatilag az összes proton átalakul neutronná, kivéve egy vékony felületi réteget.

A neutronok fermionok, rájuk is érvényes a Pauli-elv. Ezért a neutronsűrűség növekedtével előbb-utóbb minden neutronállapot betöltődik egy $p_F^{neutron}$ neutron Fermi- impulzusig. Az elfajult neutrongáz sűrűsége:

$$\rho^{neutron} = 2\frac{8\pi (p_F^{neutron})^3}{3h^3}$$

Az elfajult neutrongáz Fermi-impulzusából származó nyomás - ha a tömeg nem túl nagy - egyensúlyt tarthat a gravitációval. Ez az állapot a neutroncsillag állapot, amelyet Landau a neutron felfedezésének hírére nyomban megjósolt 1932-ben. A neutroncsillag leírására a klasszikus csillagmodell keretei között levezetett egyenlet már nem érvényes. Az általános relativitáselméletből levezetett egyenleteket kell használni:

$$\frac{dP}{dr} = -G_N\frac{M(r)\rho(r)}{r^2}\left[1+\frac{P(r)}{\rho(r)}\right]\left[1+\frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)}\right]\left[1-\frac{2G_N M(r)}{r}\right]^{-1}$$
$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2$$

A neutron csillag tulajdonképen egy óriási atommag, (10^{53} neutron) amelyet a gravitáció tart össze.

3.3. Feketelyuk

Ha a tömeg nagyobb mint $10\,M_\odot$, akkor a hidrogén kiégése után, sorra beindulnak a többi magreakciók is,pl

$$\begin{aligned}
{}^4_2He +{}^4_2 He +{}^4_2 He &\rightarrow {}^{12}_6C + \gamma + 7.65\mathrm{MeV}\\
{}^{12}_6C +{}^4 He &\rightarrow {}^{16}_8O + \gamma \ ,\\
{}^{16}_8O +{}^4_2 He &\rightarrow {}^{20}_{10}Ne + \gamma \ ,\\
{}^{20}_{10}Ne +{}^4_2 He &\rightarrow {}^{24}_{12}Mg + \gamma \ .
\end{aligned}$$

Elegendően magas hőmérsékleten beindul a nagyobb töltést hordozó magok összeolvadása is.

$$\begin{aligned}
{}^{12}_6C +{}^{12}_6 C &\rightarrow {}^{24}Mg + \gamma \ ,\\
{}^{16}_8O +{}^{16}_8 O &\rightarrow {}^{32}_{12}S + \gamma \ ,
\end{aligned}$$

A ${}^{56}Fe$ a legstabilabb mag, amely ismételt fúziós reakciók révén jön létre:

$$13{}^4_2He + 4{}^1_0n \rightarrow {}^{56}_{26}\,Fe(\equiv 26p + 30n).$$

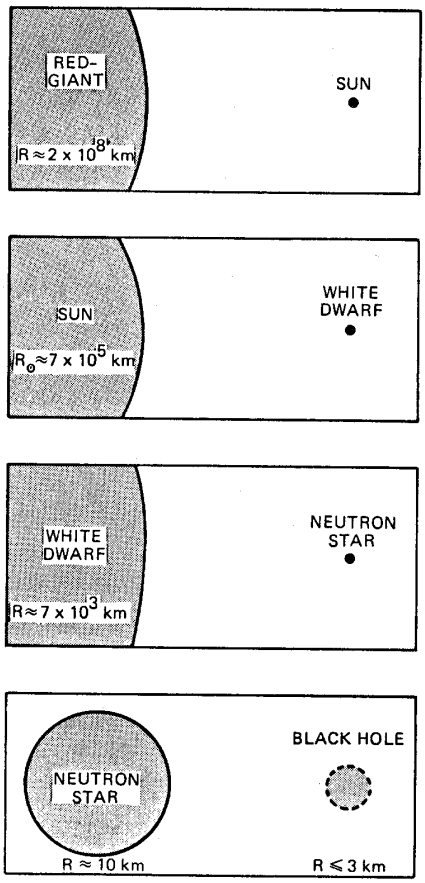
Ez a sorozatos átalakulás minaddig tarthat, amíg csak a csillagmag anyaga át nem alakul a legstabilabb anyaggá, azaz vassá. Amikor ez befejeződött, nagy valószínűséggel szupernóva robbanás következik be. A belső részből vagy neutron csillag lesz, vagy ha a tömeg túl nagy akkor az összehúzódás olyan nagy mértékű, hogy a csillag sugara kisebb lesz, mint a tömegének megfelelő Schwartzschild-sugár és ekkor a neutroncsillag állapot nem is tud kialakulni, hanem egy fekete lyuk képződik.

Laplace már a XVIII. sz. végén felismerte, hogy az R sugarú M tömegű égitest felületéről induló test csak akkor juthat el a "végtelenbe", ha az induló sebessége v eleget tesz az

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{R}$$

egyenletnek. Ebből következik, hogy ha M elég nagy, akkor a v kezdősebességnek kell lennie a c fénysebességnél.

Az alábbi ábrán a fehértörpe és a neutroncsillag tömegét ábrázoltuk naptömeg egységekben, mint a sűrűség függvényét. A stabil konfigurációt a vastagon kihuzott vonal mutatja.



3.3. ábra: Méretarányok.

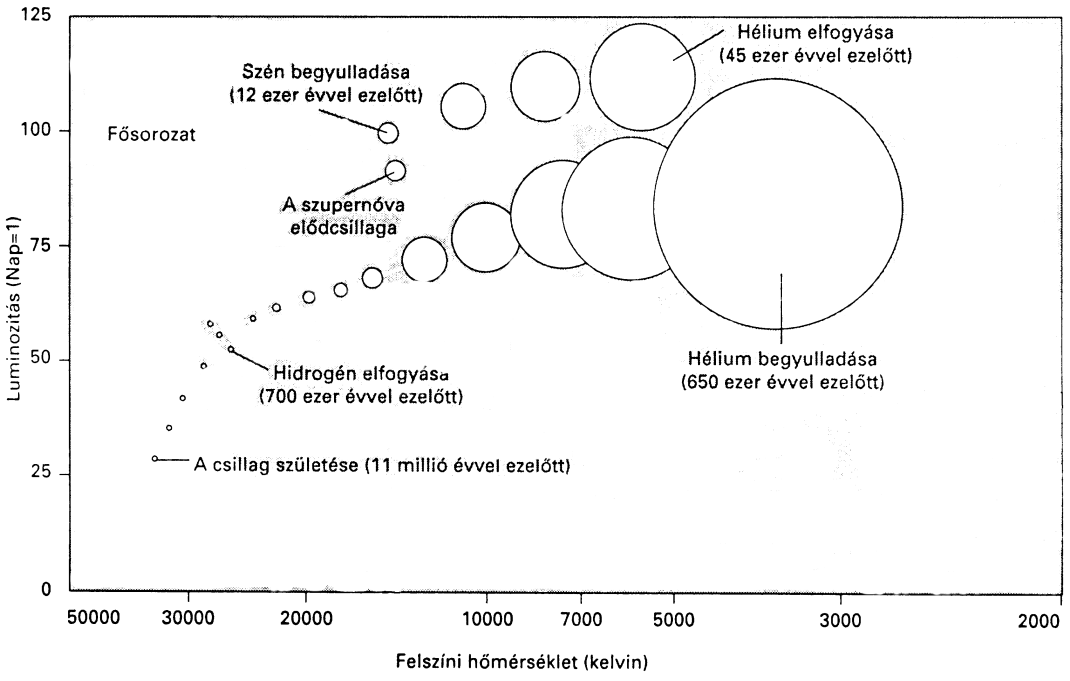
A különböző objektumok egymáshoz való viszonyának érzékeltetésére az alábbi

táblázatban az M tömeget, az R_{Sch} Schwartzschild–sugarat és az R sugarat tüntettük fel.

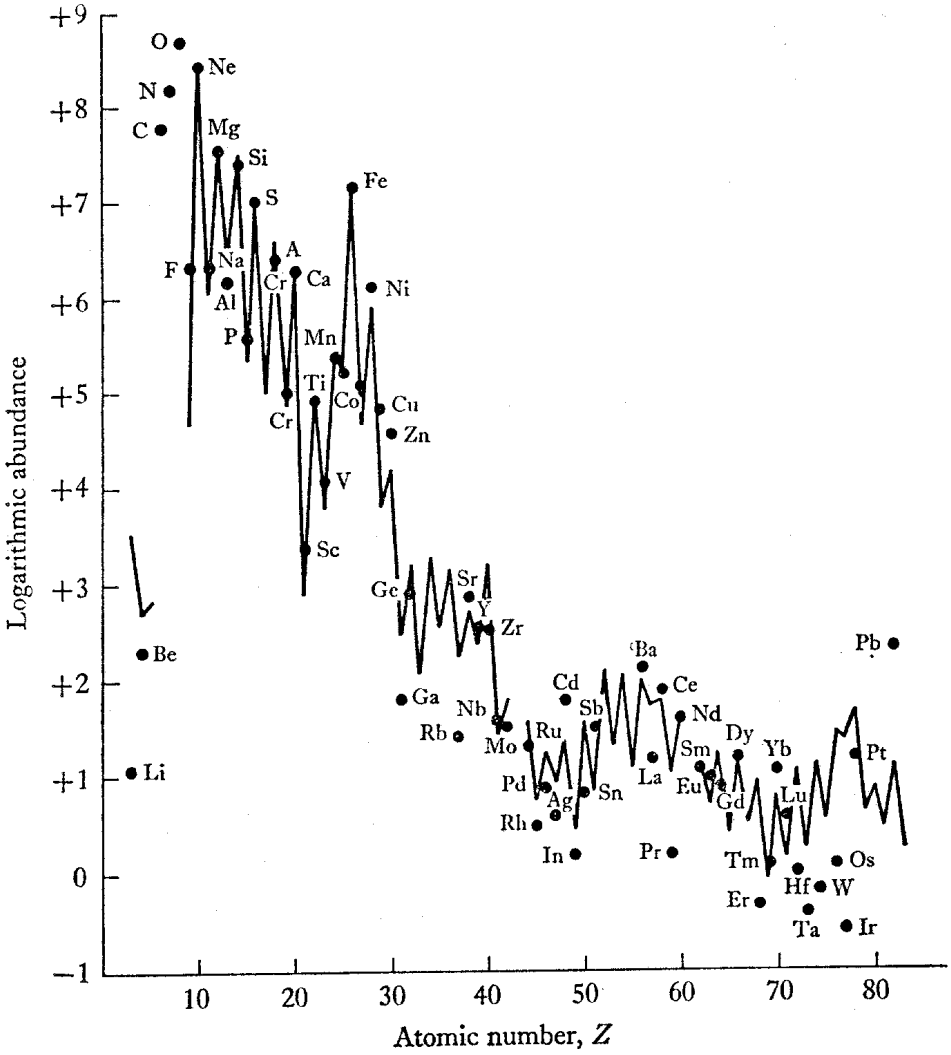
I. Táblázat

Égitest	$M/M_\odot$	R_{Sch}	$R[km]$
Föld	3×10^{-6}	$9mm$	6.63×10^3
Nap	1	$3km$	6.97×10^5
Fehér törpe	1	$3km$	
Neutron csillag	1.5		
Fekete lyuk	> 2		
Vörös óriás	< 20		
Galaxis	10^{11}	$0.03ly$	$1.5 \times 10^5 ly$
Univerzum	10^{22}	$3 \times 10^9 ly$	$2 \times 10^{23} ly$

(1fényév$= 1ly \approx 0.946 \times 10^{16}m$).



3.4. ábra: Az 1987-es szupernova robbanás előtti fejlődése



3.5. ábra: Az elemek gyakorisága a Tejút-rendszerben

4. Fejezet

Az Univerzum fejlődése

4.1. Az univerzum felépítése

Az Univerzumra vonatkozó ismereteink az 1920-as években indultak rohamos fejlődésnek. Hubble és mások felfedezték, hogy a spirál ködök nem a Tejút részei, hanem ahhoz hasonló távoli galaxisok. Hubble felismerte, hogy ezek az extragalaxisok távolodnak tőlünk és a távolodás sebessége arányos a távolságukkal. Ezeket a felfedezéseket a Frauenhoffer-féle feketevonalak és a változó csillagokra vonatkozó Leavitt-féle összefüggés felismerése tette lehetővé. Fraunhoffer 1812-ben észrevette, hogy a Nap spektrumában sötét vonalak vannak. Ez azzal magyarázható, hogy a Nap légkörében előforduló elemek atomjai elnyelik a diszkrét kvantumállapotaiknak megfelelő frekvenciájú összetevőket a Nap folytonos spektrumából. Ezzel lehetővé vált a kémiai elemek azonosítása a csillagokban.

Az asztrofizika voltakép Fraunhoffer ezen felfedezésével kezdődött. Egy évszázaddal később, 1912-ben Henrietta Leavitt felfedezte, hogy a Cepheida-tipusú változó csillagok L luminozitása és T periódusideje között lineáris kapcsolat áll fenn, amint az az alábbi ábrán látható.

A periódikus luminozitásváltozással együtt a diszkrét spektrumvonalak periódikus eltolódása is megfigyelhető. Ezt úgy lehet magyarázni, hogy a luminozitásváltozás periódikus összehúzódás és tágulás eredményeként áll elő és ekközben a Doppler effektus miatt, a diszkrét spektrumvonalak hullámhossza periódikusan változik. A periódikus összehúzódás a héliumégető vörösóriásoknál a nagyhőmérsékletű mag instabilitása miatt következik be. Mennél nagyobb a csillag, annál nagyobb a tehetetlensége és ezzel együtt az instabilitás miatt fellépő periodikus összehúzódás periodus ideje. Hubble azonos típusú változó csillagokat szemelt ki az egyes spirál ködökben és összehasonlította a látszó fényességüket, az abszolút fényességükkel. Erre a célra igen alkalmasnak bizonyultak a a Cepheida-típusú változó csillagok, amelyeknél a fényváltozási periódus és az abszolút luminozitás (a csillag által kibocsátott teljes sugárzási teljesítmény) között lineáris összefüggés áll fenn, amit Leavitt felfedezéséből tudunk. Ebből meg lehetett határozni a ködök távolságát. Kitűnt, hogy a ködök változó csillagai nagyjából azonos távolságra vannak, a ködök tehát nem egyebek, mint távoli galaxisok. Jelenlegi becslések szerint mintegy 10^{11} ilyen extragalaxis

létezik az Univerzumban.

Hubble 1929-ben felfedezte, hogy a távoli galaxisok csillagainak vonalas spektrumában vöröseltolódás észlelhető és az eltolódás mértéke arányos a galaxis távolságával. A vöröseltolódás magyarázatára a Doppler–effektust elfogadva, arra a következtetésre jutott, hogy a galaxisok annál nagyobb sebességgel távolodnak tőlünk mennél távolabb vannak:

$$v = H_0 r,$$

$$H_0 \approx (0.50 - 0.85) \times 10^{-10}/\text{év}$$

Ha nem tételezzük fel, hogy a Föld a Világegyetem közepe, akkor azt kell tudomásul vennünk, hogy minden galaxis minden galaxistól távolodik.

Az Univerzumra vonatkozó másik igen fontos megfigyelés az, hogy -noha a galaxisok és a galaxishalmazok nagyon ritkán töltik ki a teret és noha a sűrűségük eléggé változó - az átlagos sűrűségük minden helyen és minden irányban ugyanaz. Az Univerzumban az anyag eloszlása homogén és izotrop. A legújabb megfigyelések szerint az Univerzum a szappanhabra emlékeztet, nagy, üres zárványok találhatók benne. A galaxisok a buborékok felszínén helyezkednek el.

Az Univerzum elméleti leírása szempontjából fontos az Olbers-paradoxon felismerése (H. W. M. Olbers 1820). Eszerint, ha a Világegyetemben jelenlévő világító égitestek átlagos sűrűsége n és átlagos luminozitása $L\,[J/s]$, akkor a Földön észlelhető csillagfény intenzitása:

$$I = \int_0^R \frac{L}{4\pi r^2} n 4\pi r^2 dr = Ln \int_0^R dr$$

Ez végtelen, ha az Univerzum R sugara végtelen. Az égbolt éjszaka nem lehet sötét, sőt éjjel-nappal végtelen fényes kell hogy legyen. Ezt a következtetést az sem változtatja meg, hogy a távoli csillagok fénye abszorbeálódhat menetközben, ugyanis egyensúlyban ugyanennyi a reemisszió. Az Univerzum tehát nem lehet végtelen, ha egyensúlyban van.

4.2. A Friedman-féle Univerzum

Az Univerzumra vonatkozó elképzeléseink kialakulásában mérföldkövet jelentett a szentpétervári Friedman munkája. Az Einstein-féle általánosrelativitáselmélet

$$G_{ik} = \kappa T_{ik}$$

alakú egyenleteit Friedman 1922-ben, megoldotta, azzal a feltevéssel, hogy a jobb oldalon álló T_{ik} energia-impulzus tenzor értéke mindenütt konstans, azaz az anyag homogén és izotrop. Megoldásként azt kapta, hogy az Univerzum nem lehet sztatikus. A metrika:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - \mathbf{k}r^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right]$$

alakú, ahol $k = -1, 0, +1$. Ezt a metrikát behelyettesitve az Einstein–egyenletbe Friedman az $R(t)$ skálafaktorra a következő egyenleteket származtatta le (lásd a Relativitáselmélet c. fejezetet):

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho R^2 - k$$
$$\ddot{R} = -R\left[\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p)\right]$$

Ezekhez még hozzávéve a $p = p(\rho)$ állapotegyenletet, zárt egyenletrendszert kapunk az $R(t)$ skálafaktor, a $\rho(t)$ energiasűrűség és a $p(t)$ nyomás időfüggésének a meghatározására. A korai Univerzumban igen magas hőmérséklet uralkodott. A részecskék nyugalmi energiája elhanyagolható volt a hőmozgásból származó kinetikus energia mellett. Másképpen fogalmazva az anyag részecskéi a fotonokhoz, azaz sugárzási kvantumokhoz hasonlatosan viselkedtek, amelyekre a

$$p = \frac{1}{3}\rho$$

alakú állapotegyenlet érvényes. Ez volt a sugárzás által dominált korszak. A ρ energiasűrűség (hosszúság)$^{-4}$ dimenziójú, mert az energia (hosszúság)$^{-1}$, a térfogat pedig (hoszszúság) $^{+3}$ dimenziójú, ezért az energiasűrűség időfüggése R^{-4}-nel volt arányos. Jelenleg az Univerzum már nagyon hideg, az anyag nyugalmi tömege mellett a kinetikus energia elhanyagolható. A nyomást jó közelítéssel zérusnak tekinthetjük:

$$p = 0.$$

A ρ energiasűrűség természetesen most is (hosszúság) $^{-4}$ dimenziójú, de a nyugalmi energia nem változik a tágulás során, ezért az energiasűrűség időfüggése R^{-3}-nal arányos. Ez az anyag (vagy nyugalmi tömeg) által dominált korszak. A két korszak között természetesen volt egy sima átmenet. A második Friedman–egyenlet alapján világos, hogy $R(t)$ gyorsulása negatív mindaddig, amig $(\rho + 3p)$ pozitív, ez pedig minden eddig ismert anyagfajtára fennáll. A tágulás tehát annál jobban lassul, mennél nagyobb az energiasűrűség és a nyomás. Ez azt jelenti, hogy az anyag gravitációs vonzása lassítja a tágulást. A későbbiek kedvéért itt említjük meg, hogy ha volna olyan anyag, amelyre $(\rho + 3p)$ negatív, akkor az ilyen anyag a tágulást nem fékezné, hanem gyorsítaná. Az alábbi ábrán az R(t) skálafaktor időfüggése látható, (normális anyag esetén) a $\rho < \rho_c,\ \rho = \rho_c,\ \rho > \rho_c$ sűrűség értékek mellett. Itt ρ_c a kritikus sűrűség: $\rho_c =$

A Friedmann-egyenlet megoldásának lényege tehát az, hogy az Univerzumban két tetszőleges pont r távolsága az időben változik:

$$r(t) = R(t)r.$$

E két tetszőleges pont távolodási sebessége:

$$v = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{dR(t)}{dt}r.$$

A Friedman-egyenletek megoldásaként kiadódó $R(t)$ skálafaktor a tágulás korszakában az időnek monoton növekvő függvénye, a derivált pozitiv konstansnak tekinthető:

$$\frac{dR(t)}{dt} = H_0.$$

Innen következik, hogy

$$v = H_0 r,$$

ami teljes összhangban áll a Hubble-törvény által megfogalmazott megfigyelési adatokkal: az Univerzum tágul.

4.3. Az ősrobbanás

Hubble felfedezése, valamint a gravitációs egyenletek Friedman-féle megoldása G. Gamowot 1948-ban arra a feltevésre vezette, hogy az Univerzum története egy ősrobbanással (Big Bang) kezdődött és a tágulás azóta is folytatódik. Felismerte, hogy az Univerzum tágulása során be kellett, hogy következzen, egy olyan állapot, amikor a hőmérséklet a hidrogén ionizációs energiája alá csökkent. Ekkor a pozitív ionok és az elektronok semleges atomokká egyesültek. Ettől kezdve az elektromágneses sugárzás "szabaddá" vált, azaz az elektromosan töltött részecskékkel való kölcsönhatás megszűnt és helyét egy sokkal gyengébb vette át: az elektromosan semleges atomokkal való kölcsönhatás. A szabaddá váló fotonok frekvenciaszerinti eloszlását az akkor uralkodó hőmérséklet határozta meg. Ez a Planck-törvényt követő sugárzás az Univerzum további fejlődése során már csak igen kis mértékben torzult a semleges atomokkal való kölcsönhatás következtében. Az ősrobbanás modellből tehát arra a következtetésre jutott, hogy léteznie kell egy mérhető kozmikus háttérsugárzásnak, amely frekvenciaeloszlása a Planck-törvényt követi. Az Univerzum eneriájának jelentős részét a fotonok hordozzák, számuk durván 10^9-szerese a nukleonokénak. Ahogy a galaxisok távolsága nő, ugyanúgy növekszik a fény hullámhossza is, azaz hullámhosszuk ma igen nagy, a mikrohullámú illetve az infravörös tartományba esik. A. Penzias és R. W. Wilson 1964-ben a holmendel-i rádiótávcső segítségével felfedezték ezt az izotróp sugárzást, amelynek a frekvenciaeloszlása egy $2.68°K$ hőmérsékletű feketetest sugárzásának felel meg. Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy az ősrobbanás során nem egy anyagdarab robbant fel egy előre kifeszített Térben, hanem a tér tágul az anyaggal együtt. Az anyag hozza létre a teret: az $R(t)$ skálafaktor növekszik az időben. A táguló tér hátán úszó anyag darabjai a galaxisok. A tágulást, két dimenzióban, egy léggömb felfújásával lehet érzékeltetni. Az Univerzum véges, de határtalan. Igy az Olbers-paradoxon is megoldódik. A korai Univerzumban, amikor még igen magas volt a hőmérséklet a sugárzási jelleg dominált, azaz a nyugalmi energia elhanyagolható volt a kinetikus energia mellett. Az energiasűrűséget a Stefan–Boltzmann képlet általánosításával lehet kifejezni:

$$\rho_{sug} = \frac{\pi^2 h^2}{30} N(T) T^4,$$

ahol $N(T)$ a sugárzási részecskék szabadsági fokainak számát adja meg, ami függ a hőmérséklettől, mert az határozza meg, hogy milyen részecskék tudnak keletkezni a termikus mozgás rovására:

$$N(T) = \sum g_B + \frac{7}{8} \sum g_F,$$

ahol g_B a bosonok, g_F pedig a fermionok szabadsági fokszáma az adott hőmérsékleten. Ez a szám érzékenyen függ attól, hogy hány fajta fundamentális fermion család létezik.

Időben és térben visszafelé haladva eljutunk a Planck-hossznak megfelelő sugárig, amit a

$$\text{Schwartzschild-sugár} = \text{Compton hullámhossz}$$

$$\frac{2G_N M}{c^2} = \frac{\hbar}{Mc}$$

egyenlőséggel lehet definiálni. Ennél a távolságnál a kvantumos hatások és a gravitációs hatások egyformán fontosakká válnak.

Planck-tömeg	$M_{Pl} = \left(\frac{\hbar c}{G_N}\right)^{1/2} = 2.18 \times 10^{-8}\, kg$
Planck-energia	$M_{Pl}c^2 = 1.22 \times 10^{19}\, GeV$
Planck-hőmérséklet	$T_{Pl} = \frac{M_{Pl}c^2}{k} = 1.4 \times 10^{22}\, ^\circ K$
Planck-idő	$t_{Pl} = \frac{\hbar}{M_{Pl}c^2} = \left(\frac{\hbar G_N}{c^5}\right)^{1/2} = 5.3 \times 10^{-44}\, s$
Planck-hossz	$l_{Pl} = t_{Pl}c = \left(\frac{\hbar G_N}{c^3}\right)^{1/2} = 3.3 \times 10^{-35}\, m$

A Planck-időnél korábbi időkre a fizika csak akkor lesz képes valamit is mondani, ha megszületik a kvantumgravitáció elmélete, azaz megtörténik a kvantumelmélet és az általános relativitáselmélet összekapcsolása. Amikor egy fizikai rendszer Schwartzschild-sugara megegyezik a Compton–hullámhosszával, akkor ezen két elmélet egyidejű alkalmazására lenne szükség, ami ma még nem lehetséges.

4.4. Fázisátalakulások a korai Univerzumban

Az Univerzum tágulása során az energia koncentráció állandóan csökken, következésképp a hőmérséklet is. Az időskálát a monoton kapcsolat miatt a hőmérséklet skálával helyettesíthetjük. Így az Univerzum története nem egyéb, mint az anyag fejlődéstörténete monoton csökkenő hőmérséklet esetén. Egyszerűbb, ha ezt a fejlődést a fordított sorrendben járjuk végig, elindulva a jelenlegi állapotból fokozatosan haladva időben vissza az ősrobbanás felé. A hőmérséklet változása fázisátalakulásokkal jár. A legfontosabb lépéseket a 4.1. táblázat foglalja össze.

Idő (sec)	10^{-43}	10^{-35}	10^{-12}	10^{-6}	3 min	10^5 év	$15 \cdot 10^9$ év
Hőmérs. (GeV)	10^{19}	10^{14}	10^3	10^0	10^{-2}	10^{-9}	10^{-12}
Méret	10^{-31}	10^{-26}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-10}	10^{-3}	1
Át-alakulás	Kvantum gravitáció	GUT	Elektro-gyenge	Kvark bezárás	Atommag képződés	Atom képződés	Most
Szim-metria	?	$SU(5)$	$SU_c(3) \times SU(2) \times U(1)$	$SU_c(3) \times U(1)$	$U(1)$		
Alkat-részek	?	Fermionok Mérték bozonok Higgs skalárok	Leptonok Kvarkok Gluonok Közbenső bozonok Higgs skalárok	Neutrinó Elektron Kvarkok Gluon Gyenge bozonok Foton	Neutrinó Elektron Barionok Mezonok Foton	Neutrinó Elektron Mag Foton	Neutrinó Atom Foton Galaxisok Csillagok Bolygók Molekulák

4.1. táblázat: A korai Univerzum fázisátalakulásainak legfontosabb lépései

4.5. Felfúvódó világegyetem

Az Univerzum tágulása során kezdetben a sugárzás dominált, később az anyag. Ez annyit jelent, hogy kezdetben, a nagy hőmérséklet miatt, a kinetikus energia mellett a részecskék nyugalmi tömege elhanyagolható volt, tehát a részecskék sugárzásként viselkedtek. Később már, amikor a hőmérséklet lecsökkent, a nyugalmi energia dominál.

Az Univerzum fejlődését maghatározó Friedman egyenletek megoldhatósága megköveteli, hogy megadjuk a kezdőfeltételeket. Ez elvben lehetséges, a gyakorlatban azonban bizonyos "aggodalommal" adjuk meg ezeket, mert túlzottan "mesterséges"-nek tűnnek.

A kezdőfeltételekkel kapcsolatos problémák a következők:

- A horizont probléma.

  A korai Univerzumnak voltak olyan különböző tartományai, amelyek nem "látták" egymást, ezek tehát nem lehettek kauzális kapcsolatban. Akkor miért homogén és izotróp a jelenlegi világ? Válasz: a kezdőfeltételek miatt!

- A simaság problémája.

  A COBE szonda mérései szerint az Univerzumban a háttér sugárzás eloszlása igen-igen egyenletes. A jelenleg észlelhető inhomogenitások a gravitáció hatására növekedtek fel. Kezdetben ezek az inhomogenitások kisebbek voltak. Jóval kisebbek, mint amit egy termikus egyensúlyban lévő gáz esetén várnánk! Honnan származik ez a szokatlanul, nagyfokú simaság? Válasz: a kezdőfeltételekből!

- Az életkor problémája.

  Ha $k = 0$, akkor $\Omega = \varrho/\varrho_c = 1$ és ennyi is marad. Ha viszont $k \neq 0$, akkor kezdetben $|\Omega - 1| \sim 10^{-53}$ kellett, hogy legyen máskülönben rövid idő alatt vagy szétszállt vagy összeroppant volna az Univerzum. Honnan ez a nagy pontosság? Válasz: a kezdeti feltételekből!

A kezdeti feltételekkel kapcsolatos problémák elkerülhetők, ha feltételezzük, hogy a korai korszak egy részében a tágulás időben exponenciálisan történt: az Univerzum felfúvódott. Induljunk ki a Friedman-egyenletekből:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho R^2 - k$$
$$\ddot{R} = -R\left[\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p)\right]$$

Ha feltesszük, hogy $k = 0$ azaz a tér görbülete zérus és az energiasűrűség megegyezik a kritikus értékkel, valamint feltesszük, hogy

$$\varrho = -p = \text{konstans}\ ,$$

Akkor

$$(\varrho + 3p) = \varrho - 3\varrho = -2\varrho\,,$$

következésképp az első egyenlet az

$$\dot{R}^2 = H^2 R^2$$

alakot ölti, ahol

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\varrho,$$

azaz

$$\dot{R} = HR.$$

A második egyenlet

$$\ddot{R} = H^2 R \qquad \text{alakú.}$$

Mindkettőt kielégíti az

$$R(t) = R_0 e^{Ht} \qquad \text{alakú megoldás}$$

A tágulás exponenciális! Ez az infláció. Hogy ez megvalósulhasson, ahhoz az kell, hogy olyan intenzív vonzóerő működjön az anyagban, ami a fent megkövetelt negatív nyomást képes szolgáltatni. A részecskefizikában feltételezik, hogy az alapvető fermionokon (a leptonokon és a kvarkokon), valamint a vektor bozonokon (azaz a fotonon, a gluonokon,és a gyenge bozonokon) kívűl léteznek bizonyos skalár terek is. Ezek kvantumai a Higgs-féle bozonok. A Nagy Egyesített Elméletben (GUT) is feltételezik ilyen skalár terek létét. Ezek elvben képesek olyan erős vonzást létrehozni, hogy a nyomás negatív lehet. Ezen skalár terek ilyen jellegű hatása csak véges hőmérséklettartományban érvényesül. Ez azt jelenti, hogy a korai Univerzumban csak véges ideig volt olyan szituáció, amikor ez a hatás érvényesült. Ez alatt fúvodott fel az Univerzum. Ezek szerint a jelenlegi Univerzum olyan kis méretű tartományból alakult ki, amelyben a részek kauzális kapcsolatban lehettek, ezért sima , homogén és izotróp kezdeti eloszlást feltételezni nem természetellenes. Az inflációs Univerzum modell összhangban van azzal a részecskefizikai elgondolással, hogy a skalár terek negatív nyomást eredményező hatása addig tartott, amig a GUT-nak megfelelő [SU(5)(?)] szimmetria spontán sérűlése be nem következett és a szimmetria le nem csökkent a standard modell szimmetriájának a szintjére, azaz SU(3) $\otimes$ SU(2) $\otimes$ U(1)–re.

5. Fejezet

Az elemi fermion családok száma

Alapvető fontosságú az a kérdés, hogy hányfajta elemi fermion család létezik. Erre a kérdésre két független megfigyelés alapján válaszolhatunk. Az egyik megfigyelt mennyiség az Univerzumban található hidrogén és hélium gyakoriságának aránya, a másik a Z^0 boson energiaszélessége. Mindkét adat azt a feltevést támasztja alá, hogy az elemi fermion-családok száma három.

5.1. A hélium és a hidrogén gyakoriságának aránya

Feltételezzük, hogy az Univerzum anyageloszlása homogén és izotrop. A ρ energiasűrűség és a p nyomás csak az idő függvénye. Ezt az időfüggést elsősorban az $R(t)$ skálafaktor növekedése határozza meg.

Kezdetben, amíg magas a hőmérséklet, azaz az alkotórészek kinetikus energiája nagy, addig a nyugalmi tömeg elhanyagolható. Következésképp az energia-impulzus tenzorban a p nyomás dominál. Belátható, hogy az $R(t)$ skálafaktor növekedésével az energia sűrűség

$$\rho \sim \frac{1}{R^4}$$

módjára csökken. Ez a sugárzás dominált korszak. Amikor a hőmérséklet már eléggé lecsökkent a kinetikus energia helyett egyre fontosabb szerepet játszik a nyugalmi energia és a p nyomás szerepe is elhalványul. Ekkor az energiasűrűség

$$\rho \sim \frac{1}{R^3}$$

módjára csökken. Ez az anyag dominált korszak. A kettő között természetesen folytonos az átmenet. Az anyag dominált korszakban az energiasűrűség időbeli változását a térfogat (R^3) változása határozza meg. A sugárzás dominált korszakban ehhez még hozzájárul a sugárzás hullámhosszának a növekedése is. (Ebből szarmazik a 4-es a hatványkitevőben.) Az anyag dominált korszakban következett be az az átalakulás, amelynek során a szabad neutronokból és protonokból kialakultak a könnyű atommagok. A protonok és a neutronok számának arányát adott

hőmérsékleten a Boltzmann-eloszlás határozza meg:

$$\frac{N_n}{N_p} = \frac{e^{-E_n/kT}}{e^{-E_p/kT}} = e^{-[E_n - E_p]/kT}$$

Az $E_n - E_p$ különbséget, rögzített kinetikus energia esetén, a neutron és a proton tömeg különbsége $\Delta E = \Delta m = 1.293\ MeV$ határozza meg. Ebből következik, hogy amíg a hőmérséklet $T = 10^{12}K$,(azaz $T = 100MeV$) felett van, addig a neutronok és, protonok száma megegyezik: $\frac{N_n}{N_p} \approx e^{-0.01} \approx 1$. Ezt az biztosítja, hogy a jelenlevő, igen nagy számú és energiájú lepton szaporán ütközik a nukleonokkal:

$$\nu_e + n \Leftrightarrow e^- + p$$
$$\tilde{\nu}_e + p \Leftrightarrow e^+ + n$$

Ahogy a hőmérséklet csökken úgy tolódik el ez az egyensúly. Mire az Univerzum $10^{10}K$-ra hűl már csak 38% neutront (és 62% protont) tartalmaz. Amikor a hőmérséklet $T = 10^9K$ alá csökken a fenti leptonos folyamatok már többé nem tudják fenntartani a neutron-proton egyensúlyt. Ettől kezdve a neutronok csak bomlanak:

$$n \to p + e + \tilde{\nu}_e \quad , \tau = 887s.$$

Számuk exponenciálisan csökken. Ha nem történik semmi, akkor a neutronok teljesen eltünnek. De történik! Megindul ugyanis a könnyű magok képződése:

$$\begin{aligned} n + p &\to d + \gamma \\ n + d &\to {}^3H + \gamma \\ p + d &\to {}^3He + \gamma \\ d + d &\to {}^3He + n \\ {}^3He + n &\to {}^4He + \gamma \\ {}^3H + p &\to {}^4He + \gamma \end{aligned}$$

A $T = 10^9K$ alatt az atommagok már stabilak, így a neutron 'elbújik' a ^2H, ^3He és ^4He atommagokban. A neutronok ebben a formában maradtak meg mind a mai napig. Az égitestek és a csillagközi anyag spektroszkópiai vizsgálata során megállapítást nyert, hogy közvetlenül az ősrobbanás után keletkezett primér ^4He aránya a ^1H-hez: 26/74.

A neutron proton arány tehát 13/87.

A neutron τ_n átlagos élettartamának ismerete:

$$\tau_n = 887.0 \pm 0.2\ s$$

lehetővé teszi, hogy kiszámítsuk a $\Delta t = t' - t$ időszakasz hosszát:

$$\frac{N_n(t')}{N_p(t')} = \frac{N_n(t)}{N_p(t)} e^{\Delta t/\tau_n}$$

Innen

$$\Delta t = \tau_n \ln \frac{87}{13} = 1686.15s$$

Ez alatt a 28.1 perc alatt a Világegyetem tovább tágult, a hőmérséklet tovább csökkent. Kérdés, hogy ezen Δt idő alatt tényleg lecsökkent-e a hőmérséklet a proton-neutron egyensúlyhoz szükséges $T \approx 100\ MeV$-ről a deuteron stabilitását biztosító $T' \approx 1\ MeV$-re? Ez attól is függ, hogy hány fajta könnyű részecske vesz részt a tágulást meghatározó nyomás kialakitásában.

A pontos elemzés arra vezetett, hogy a tágulás során bekövetkező ΔT hőmérséklet csökkenés csak akkor lehetett $\Delta T = 100\ MeV$ nagyságú, ha a fotonok és elektronok mellett három fajta neutrinó, nevezetesen a ν_e, ν_μ és a ν_τ járult hozzá a nyomás kialakításához.

Ebből tehát az következik, hogy az elemi fermion családok száma **három**, összhangban a Z^0-bozon szélességének méréséből adódó eredménnyel.

5.2. A Z^0 bozon energiaszélessége

A nagyenergiás elektron–pozitron ütközés során lezajló folyamatot a következő Feynman-gráffal szemléltethetjük:

A közbenső állapotban jelenlevő bozont általában a fotonnal szoktuk azonosítani. Ha azonban az energia elég nagy, akkor a Z^0 gyenge bozonnak is jelentős járuléka lehet. Sőt, ha a tömegközépponti energia megegyezik a gyenge bozon tömegével, akkor rezonancia lép fel, amint azt az alábbi ábra mutatja. A rezonancia görbe szélessége attól függ, hogy hány fajta lehetőség adódik a bomlás számára. A bomlás valószínűségét a végállapotban előforduló fermionok száma határozza meg. Az ábrán feltüntettük azon számítások eredményeit, amelyeket azzal a feltevéssel végeztek el, hogy két, három, illetve négy fundamentális fermion család létezik. Amint látható a mért adatok azt a feltevést erősitik meg, hogy a fundamentális fermion családok száma három. Ez összhangban van az asztrofizikai megfigyelésekből levont következtetéssel.