BEVEZETÉS A MECHANIKÁBA

Sailer Kornél

Egyetemi előadás

Elméleti Fizikai Tanszék
Debreceni Egyetem
Debrecen
2001.

Contents

BEVEZETÉS

Ez az előadás bevezeti a tisztelt hallgatót a mechanikába, s mint ilyen, az első része annak a három féléves előadássorozatnak, amely a fizikus-informatikus szak hallgatói számára az elméleti fizikai alapismereteket hívatott a mechanikából, az elektrodinamikából és a kvantummechanikából megadni. Ezen előadások közös jellemzője, hogy csak a legeslegfontosabb alapismeretekről esik bennük szó, amelyek a Természetről kialakított fizikai világképünk szempontjából elengedhetetlenek. Éppen ezért az előadások jegyzete mindazok számára hasznos olvasmány lehet, akik a mechanikáról rövid és tömör áttekintést szeretnének kapni.

A mechanikáról szóló jelen előadásokban célom részben az, hogy megmutassam, a mechanika törvényei néhány alapelvből leszármaztathatók, úgyhogy a mechanika körébe eső jelenségek ezen alapelvekből kiindulva egy egységes elméleti keretben megérthetők. Miután az egyféléves előadás nem elegendő arra, hogy szisztematikusan végigvegyük a mechanika tárgykörébe tartozó jelenségeket, másik célom az, hogy néhány olyan, egyszerű fizikai rendszer példáján mutassam be a mechanika törvényeinek működését, amelyek nemcsak önmagukban érdekesek, hanem amelyek alapvető fontosságúak a helyes fizikai szemlélet kialakításában, ill. amelyek az egész fizikában széles körben alkalmazást nyernek, mint bonyolultabb jelenségek modelljei. A példák ezért kevés kivétellel egy-részecskés fizikai rendszerek. Ebből az is következik, hogy az előadások nem térnek ki számos olyan fizikai rendszer és jelenség tárgyalására, amelyeket a legtöbb, mechanikáról szóló tankönyvben megtalálhat a hallgató. Így például szinte teljesen kimaradt a merevtestek és a közegek (gázok, folyadékok és rugalmas közegek) mechanikája. Egy további célkitűzésem, hogy az a kevés, amit elmondok, legyen jól használható alap azok számára, akik esetleg később kedvet kapnak rá, hogy a mechanikára vonatkozó ismereteiket más tankönyvekből kiegészítsék. Annak érdekében, hogy érzékeltessem a mechanika kapcsolódását a fizika egészéhez, törekedtem utalásokat elhelyezni arra, hogy hol és miben vannak a klasszikus mechanika korlátai, és hogy mennyiben lépik azokat túl jelenlegi fizikai ismereteink.

Számolva azzal, hogy a hallgatóság egy részének talán a rendelkezésre álló rövid időnél többre lenne szüksége a mechanika elméleti keretének összefüggéseiben való teljes megértéséhez és átlátásához, a legfontosabb fogalmakat, állításokat, törvényeket igyekeztem vastag betűvel jelölni az előadás jegyzetében. Hiszem, hogy az a hallgató is sok mindent megtanul, aki „csak" ezeket tanulja és érti meg, még akkor is, ha a hozzájuk vezető utat nem mindig látja világosan. A megismerés mindig többlépcsős és ritkán halad egyenes úton.

Kötelességem felhívni a tárgyban komolyabban elmélyedni kívánó hallgatóság figyelmét arra, hogy – ellentétben a szokásos tankönyvekkel – a jelen jegyzet szinte semmilyen számolási módszert nem ismertet a maga jogán. Ilyen tekintetben csupán annyi számolástechnikai dologról beszélek, amennyi elengedhetetlenül szükséges a néhány kiválasztott példa ismertetéséhez. A számolási módszerekről a maguk jogán soha. Ez az idő rövidsége miatt van. A tárgy iránti érdeklődést felkelteni, ébren tartani és szemléletet átadni talán sikerülhet ilyen rövid idő alatt, a mesterség fogásainak átadásához és elsajátításához több idő kell. A hallgatóság azonban legyen tudatában, hogy a fizika műveléséhez ugyanúgy szükség van módszerekre és a „mesterség fogásaira", mint a sebészorvosnak a szikére.

A KLASSZIKUS MECHANIKA

A klasszikus mechanika a makroszkopikus testek mozgásának leírásával, a mozgások okainak és törvényszerűségeinek feltárásával foglalkozik. Érvényességi körébe olyan mozgások tartoznak, amikor a testek sebessége lényegesen kisebb a fény terjedési sebességénél.

1 KINEMATIKA

A kinematika a mozgások fenomenologikus leírásával foglalkozik. Értelmezi azokat a fogalmakat, amelyek ehhez szükségesek. Nem vizsgálja a mozgások okait, törvényszerűségeit.

1.1 Az anyagi pont mozgása

A legegyszerűbb test az ún. anyagi pont, más szóval részecske. **Anyagi pontnak (részecskének) olyan testet nevezünk, amelynek méretei nagyon kicsinyek a mozgásával kapcsolatos más jellemző méretekhez, távolságokhoz képest. Az ilyen testet pontszerűnek, azaz kiterjedés nélkülinek tekintjük.** A mozgással kapcsolatos egyéb méretek lehetnek a mozgást kiváltó testek méretei, ill. az anyagi pont távolsága ezen testektől. Ebben a fejezetben az anyagi pont mozgásának leírásával foglalkozunk.

1.1.1 Vonatkoztatási rendszerek

A testek mozgását fizikai (mechanikai) történések, másszóval **események** egymásutánisága jelenti. A tapasztalat azt mutatja, hogy **a fizikai történések felbonthatók elemi eseményekre**, azaz elemi események sorozatának tekinthetők. **Az elemi események a pontszerű és pillanatszerű események.** Ezek jelölik ki fizikailag a geometriai tér pontjait és az időpillanatokat. Elemi eseménynek tekinthetjük például egy pontszerű fényforrás felvillanását, vagy adott térbeli pontban egy fényfelvillanás észlelését. **A pontszerű fényforrásból adott irányban kibocsátott fényjel „útja" jelöli ki fizikailag a térben azt az irányított félegyenest, amely a fényforrás tartózkodási helyéről indul ki és érintője a fény terjedési irányába mutat.** Azon két félegyenes egyesítése, amelyek érintői a fényforrás helyén ellentétes irányúak, meghatároz egy, a fényforrás tartózkodási pontján áthaladó egyenest. **A fizikus tehát azokat a görbéket nevezi egyenesnek, amelyek mentén a fény terjed.**

A testek mozgásának leírását pontrészecskék mozgásának leírására vezetjük vissza. Ehhez a testet gondolatban olyan kicsiny részekre daraboljuk fel, amelyek külön-külön pontszerű részecskéknek tekinthetők, és az egyes anyagdarabkák, ill. pontrészecskék mozgását írjuk le. Ennek a feldarabolásnak a fizikai hátterére később még visszatérünk.

A pontszerű részecskék mozgásának leírásához vonatkoztatási rendszert választunk. A vonatkoztatási rendszer egy vonatkoztatási test (pl. egy mérőrúd) és a hozzá képest nyugvó órák és mérőrudak összessége. Az órák az időtartamok mérésének eszközei, a mérőrudak a távolságmérés eszközei.

1. *Az időtartamok mérése.* Az egyhelyű eseményeket egyidejű események osztályaiba sorolhatjuk. Az egyidejűség ekvivalencia-reláció:

   (a) Ha az A esemény egyidejű a B eseménnyel, akkor B is egyidejű A-val.

   (b) Ha az A és a B esemény egyidejű és a B és a C esemény is egyidejű, akkor az A és a C esemény is egyidejű.

   Ezek szerint az (egyhelyű és) egyidejű események osztályai diszjunkt halmazok. A fizikai gondolkodásban sokszor szokás az (egyhelyű és) egyidejű események egy-egy osztályát egy speciális eseménnyel, az adott helyen történő fényfelvillanással, vagy fényjelnek az adott helyre történő beérkezésével reprezentálni.

   A különböző ekvivalencia osztályok rendezéséhez, ill. az általuk kijelölt időtartamok méréséhez órára van szükségünk. Az óra olyan, kísérletileg jól reprodukálható, a külső fizikai behatásokra nagyon széles határok között érzéketlen test, amely periodikusan ismétlődő, pontszerűnek és pillanatszerűnek tekinthető jelenséget („azonos mutatóállást") szolgáltat, és valamennyi ismert periodikus jelenséggel „együtt fut". Az etalonnak választott órán a periodikus jelenség, az azonos mutatóállás két, közvetlen egymás utáni bekövetkezése jelöli ki az egységnyi időtartamot. Itt két fontos feltevést teszünk, amellyel a fizika jelenlegi állása szerint semmilyen tapasztalat nincsen ellentmondásban:

   (a) Az egységnyi időtartam tetszőlegesen kicsi lehet. Ezen azt értjük, hogy adott, óraként szolgáló periodikus jelenséghez elvileg mindig találhatunk olyan másik, óraként használható periodikus jelenséget, hogy az utóbbin az „azonos mutatóállás" többször is megismétlődik az előző óra egy periodusa alatt.

   (b) Ha az óránk adott mutatóállásait elkezdjük ismétlődésük sorrendjében 0, 1, 2, 3, stb. nem negatív egész számokkal számlálni, akkor azt mondjuk, hogy a számok növekvő sorrendje egyúttal azt is jelenti, hogy a nagyobb számmal jelölt esemény később következett be, mint a kisebb számmal jelölt esemény. Sőt, mondhatjuk, hogy már korábban is elkezdhettük volna az azonos mutatóállások számlálását, s azokhoz „visszafelé haladva" most a -1, -2, stb. negatív egész számokat rendelhetjük. [1]

   A fenti feltevések alapján az óránk segítségével a nem egyidejű eseményeket időrendi sorrendbe rendeztük. (Matematikai értelemben rendezési relációt vezettünk be az egyidejű események diszjunkt osztályainak halmazán.) Ezek után leképezhetjük a nem egyidejű A, B, C, stb. eseményeket (az egyidejű események diszjunkt osztályainak halmazát) a valós számegyenesre,

$$A \mapsto t_A, \quad B \mapsto t_B, \quad C \mapsto t_C, \dots \tag{1.1.1}$$

[1] Fontos azt látni, hogy a periodikus jelenséget tökéletesen ismétlő óra nem teszi lehetővé annak eldöntését, hogy az azonos mutatóállások közül melyik a korábbi és melyik a későbbi. Az idő irányának kijelöléséhez további, nem a mechanika jelenségkörébe eső jelenségekre van szükség. Ilyen jelenség pl. a semleges kaonok gyenge kölcsönhatás révén történő bomlása, amely a megfigyelések szerint kitünteti az idő irányát. James W. Cronin (1931-) és Val Logsdon Fitch (1923-) megosztva kapták az 1980. évi fizikai Nobel-díjat azért a felfedezésükért, hogy a semleges K-mezonok bomlása során alapvető szimmetriák sérülnek meg.

megkövetelve, hogy a leképezés

(a) tartsa meg az időbeli rendezést, azaz t szigorúan monoton növekvő értéke azt jelentse, hogy $t_A < t_B$ esetén az A esemény előbb következett be, mint a B esemény; és hogy a leképezés

(b) lineáris legyen, azaz bármely A és B nem egyidejű esemény esetén, ha $t_B > t_A$, akkor a $t_B - t_A$ különbség legyen azonos az óra ezen két esemény közötti periodusainak számával. Ekkor a $\Delta t_{A,B} = t_B - t_A$ különbséget az A és B események által kijelölt időtartamnak nevezzük, és az időtartamok összeadódnak, azaz ha $t_A < t_B < t_C$, akkor $\Delta t_{A,C} = \Delta t_{A,B} + \Delta t_{B,C}$.

Az itt leírt módon a vonatkoztatási testhez képest tetszőleges helyen elhelyezett, nyugvó óra segítségével az adott helyen tudjuk mérni az időt, az adott helyen bekövetkező elemi események közötti időtartamokat. Ahhoz, hogy különböző helyeken végbemenő elemi események időbeliségéről is tudjunk kijelentéseket tenni, célszerű a különböző helyeken elhelyezett órák „futását" összehangolni, azaz az órákat szinkronizálni. **A szinkronizálás** fényjelek segítségével történik és a klasszikus mechanikában azon a feltevésen alapul, hogy a fényjel végtelen gyorsan terjed. Azt tesszük fel, hogy ha a tér adott pontjában fevillan egy fényjel, azt a tér egy másik pontjában nyugvó megfigyelő azonnal, időbeli késleltetés nélkül észleli. A klasszikus mechanikában tehát a fényjel felvillanása a tetszőleges P pontban és annak megérkezése egy tetszőleges másik Q pontba, egyidejű események. A tér különböző pontjaiban nyugvó órákat ezért úgy szinkronizálhatjuk, hogy amikor a P pontban nyugvó óra mutatóállása $t_P = 0$, akkor a P pontban levő megfigyelő fényjelet villant fel, s amikor ezt a más Q pontokban nyugvó megfigyelők észlelik, akkor az ott található órák mutatóit szintén nullára állítják. Ezzel a módszerrel az egész vonatkoztatási rendszerben egységes t **rendszeridőhöz** jutunk. Bármely két A és B (általában nem egyhelyű elemi esemény) között eltelt idő $t_B - t_A$, ha $t_B > t_A$.

2. *Távolságmérés.* A távolságot mérőrudakkal mérjük. Választunk egy kísérletileg nagyon jól reprodukálható, a külső fizikai behatásokra széles határok között érzéketlen rudat, ún. hosszúságetalont, amelynek egyik oldaléle egyenes. A hosszúságetalon mérőélének hossza képviseli definíció szerint az egységnyi távolságot. A mérőrudak ennek másolatai, vagy több egységnyi hosszúságú rúdnak a mérőél egyenesének meghosszabbításában egymás mellé történő illesztésével (és egymáshoz történő merev rögzítésével) készülnek. Az egység ismeretében készíthetünk olyan beosztást a mérőélen, amely a valós számegyenes pozitív félegyenesének (a nullát is beleértve) kölcsönösen egyértelmű, lineáris leképezése. Ezért a távolságok additívak. Ha B egy osztópont a mérőrúdon A és C között, akkor az ℓ_{AC} távolság az ℓ_{AB} és az ℓ_{BC} távolságok összege: $\ell_{AC} = \ell_{AB} + \ell_{BC}$.

   A tapasztalat szerint a térben

   (a) minden pontból minden irányban indítható félegyenes (fényjel);

   (b) bármely két térbeli pont pontosan egy egyenest határoz meg.

   Bármely test, bármely P pontjának a vonatkoztatási test bármely O pontjától mért távolsága az O és P pontokon átmenő egyeneshez illesztett, a vonatkoztatási testhez képest nyugvó mérőrúdon történő egyidejű leolvasással határozható meg. Megkeressük, hogy a mérőrúd mely O' ill. P' pontja esik egybe rendre az O ill. a P ponttal adott t pillanatban (a t rendszeridő adott értékével jellemzett pillanatban), és a mérőrúd e két pontjának távolságát nevezzük a két pont $\ell_{OP}(t)$ távolságának az adott t pillanatban.

Vonatkoztatási rendszer. **A vonatkoztatási rendszert tehát egymáshoz képest mereven rögzített mérőrudak és a hozzájuk képest nyugvó órák alkotják.**

Rendszer- és világidő. Fontos megjegyezni, hogy a szinkronizálás elvégzése után valamennyi óra ugyanazt az időt méri, ez tehát **rendszeridő** az adott vonatkoztatási rendszerben. A klasszikus mechanikában ennél még több is igaz. Amikor egy vonatkoztatási rendszer egy kiszemelt pontja éppen egybeesik a másik vonatkoztatási rendszer egy pontjával, akkor az egyik ill. a másik rendszerben nyugvó, ebben a közös pontban elhelyezkedő órákat össze lehet igazítani. Ezzel a két rendszer rendszeridejét is egy adott pillanatban összeigazítottuk. A klasszikus mechanikában feltesszük, hogy az azonos órák minden vonatkoztatási rendszerben azonos módon járnak, vagyis hogy az egyik rendszerben eltelt Δt időtartamnak, amelyet két egymás utáni elemi esemény jelöl ki, a másik rendszerben is ugyanekkora $\Delta t' = \Delta t$ időtartam felel meg. Ha ez így van, akkor az idő egységesen, minden vonatkoztatási rendszerben ugyanaz a t, azaz a klasszikus mechanikában létezik úgynevezett **világidő**. Azt, hogy két egymást követő esemény által kijelölt időtartam minden vonatkoztatási rendszerben ugyanaz, úgy is szoktuk mondani, hogy **az időtartam abszolút, azaz vonatkoztatási rendszertől független fogalom a klasszikus mechanikában.**

A tér geometriája euklideszi. A klasszikus mechanika által vizsgált jelenségek körében a tapasztalat azt igazolja a távolságmérés alapján, hogy **a tér euklideszi geometriájú.** A mérések nem mondanak ellent az euklideszi geometria axiómáinak. Teljesülnek, azaz mérésekkel igazolhatók az euklideszi geometria összefüggései, pl. Pitagorasz tétele, a koszinusz- és a szinusz-tétel, stb. [2]

Helyzetvektor. Az euklideszi tér a matematika (lineáris algebra) szerint egy pozitív definit belsőszorzattal ellátott lineáris vektortér. A vektorok a vonatkoztatási rendszer tetszőlegesen kiszemelt O vonatkoztatási pontjából, origójából a tér egyes P pontjaiba mutató $\mathbf{r}$ helyzetvektorok. A skaláris szorzat bármely két $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ helyzetvektorhoz egy valós számot rendel: $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \to \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ olyan módon, hogy teljesüljenek az alábbi tulajdonságok:

1. bármely két helyzetvektorra $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1$,

2. bármely helyzetvektor hosszának négyzetére $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}^2 \geq 0$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, azaz az „O pontból az O pontba mutató” vektor.

[2] Itt érdekességként jegyezzük meg, hogy egyáltalán nem magától értetődő, hogy euklideszi a tér geometriája, amelyben az elemi események jelölik ki a pontokat és a fényutak az egyeneseket. Annak matematikai lehetőségére, hogy másfajta, **nem euklideszi geometria** is lehetséges, Bolyai János magyar matematikus mutatott rá először. Egyúttal azt a kérdést is felvetette, hogy mi határozza meg, hogy milyen a tér geometriája. Azt a sejtést fogalmazta meg, hogy az anyag játszik ebben szerepet. Ugyanezt a sejtést később Mach is megfogalmazza mondván, hogy az anyag mozgása határozza meg, hogy egy vonatkoztatási rendszer inerciális-e, vagy sem. Végül Einstein találta meg **az általános relativitás elmélete** keretében a tér geometriája és az anyag mozgása közötti kapcsolatot. Ennek alapján ma már tudjuk, hogy valóban a mozgó anyag határozza meg a tér (sőt a tér és az idő együttes) geometriai tulajdonságait. A megrázó az, hogy **a kozmikus háttérsugárzás szögeloszlásának vizsgálatából ma már tapasztalatként tudjuk, hogy a Világegyetemben a tér globálisan euklideszi.** Ettől csak helyileg vannak eltérések ott, ahol nagyon sűrű az anyag.

Az $\mathbf{r}$ vektor hosszának szokásos jelölése $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r}^2}$. Két tetszőleges $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ helyzetvektor $\alpha \in [0, \pi]$ szögét a

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|} \tag{1.1.2}$$

összefüggés értelmezi (ld. 1. ábra), ha a vektorok egyike sem nullvektor, $|\mathbf{r}_1|$, $|\mathbf{r}_2| \neq 0$. Az $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ skalárszorzat akkor és csak akkor nulla, ha vagy a tényező vektoroknak legalább az egyike nullvektor, vagy ha a tényezővektorok merőlegesek egymásra.

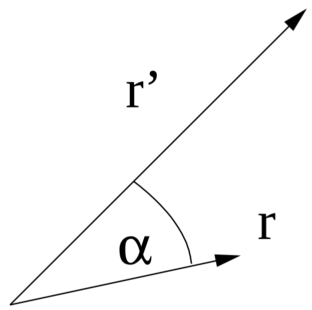

Figure 1: Vektorok szöge

Globális koordinátarendszer a térben. A tér pontjainak megfelelő helyzetvektorok lineáris vektorterében választhatunk ortonormált bázist: a vonatkoztatási pontban felveszünk három, páronként egymásra merőleges $\mathbf{E}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ egységvektort:

$$\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \delta_{i,j}, \tag{1.1.3}$$

ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker-delta:

$$\delta_{i,j} = 1, \text{ ha } i = j, \qquad \delta_{i,j} = 0, \text{ ha } i \neq j. \tag{1.1.4}$$

Tapasztalati tény, hogy a geometriai térben 3 független irányt, azaz a helyzetvektorok terében 3 lineárisan független, páronként egymásra merőleges egységvektort lehet felvenni. Ezért azt mondjuk, hogy **a geometriai tér három-dimenziós.** Ugyanilyen alapon elmondhatjuk, hogy **a világ időben egy-dimenziós.**

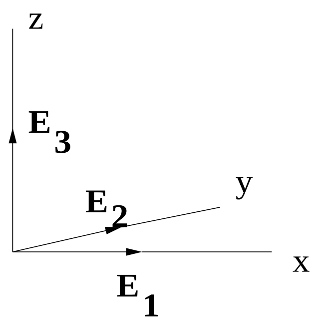

Figure 2: Globális Descartes-koordinátarendszer

Az O vonatkoztatási pontban felvett bázisvektorok irányába elindított fényjelek az O ponton átmenő egyeneseket jelölnek ki, amelyeket egy Descartes-féle koordinátarendszer tengelyeinek tekinthetünk (2. ábra). Ezekre a tengelyekre a helyzetvektoroknak a bázisvektorok irányába eső összetevői előjeles nagyságát mérjük fel:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \mathbf{E}_i = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3, \tag{1.1.5}$$

ahol tehát $\mathbf{r}$ a tér egy tetszőleges P pontjába mutató helyzetvektor, és ennek merőleges összetevői,

$$r_i = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{r}, \tag{1.1.6}$$

a P pont $(x = r_1, y = r_2, z = r_3)$ Descartes-féle koordinátái a globális Descartes-féle koordinátarendszerben. Két tetszőleges $\mathbf{r}_1$ és az $\mathbf{r}_2$ helyzetvektor skalárszorzata:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \sum_{i=1}^{3} (r_1)_i \mathbf{E}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} (r_2)_j \mathbf{E}_j = \sum_{i=1}^{3} (r_1)_i (r_2)_i = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{1.1.7}$$

Különbséget kell tenni az $\mathbf{r}$ helyzetvektor és a Descartes-komponenseiből alkotott

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \equiv \underline{r} \tag{1.1.8}$$

számhármas, ill. oszlopvektor között. Ez abból látszik, hogy az $\mathbf{E}_i$ bázissal kijelölt koordinátarendszerről áttérhetünk tetszőleges másik $\mathbf{E}'_i = \sum_{j=1}^{3} O_{i,j} \mathbf{E}_j$ bázissal kijelölt koordinátarendszerre, ahol $O_{i,j}$ a bázistranszformáció mátrixa. Mivel

$$\delta_{i,j} = \mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{E}'_j = \sum_{i',j'=1}^{3} O_{i,i'} \mathbf{E}_{i'} \cdot O_{j,j'} \mathbf{E}_{j'} = \sum_{i'=1}^{3} O_{i,i'} O_{j,i'} = (OO^{\mathrm{T}})_{i,j}, \tag{1.1.9}$$

a bázistranszformáció mátrixa az

$$\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{O}}^{\mathrm{T}} = \underline{\underline{O}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{O}} \tag{1.1.10}$$

tulajdonságú, 3×3-as valós elemű mátrix, ún. ortogonális mátrix. Közvetlenül az értelmezésből adódik, hogy az $\mathbf{E}'_i = \sum_{j=1}^{3} O_{i,j} \mathbf{E}_j$ bázistranszformáció mátrixának elemei:

$$\mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{E}_j = \sum_{k=1}^{3} O_{i,k} \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_j = O_{i,j}. \tag{1.1.11}$$

Bázistranszformáció során maga a helyzetvektor nem változik,

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{3} r'_i \mathbf{E}'_i, \tag{1.1.12}$$

de változik a bázis, a koordinátarendszer és vele együtt a vektornak a tengelyekre merőleges vetületei, vagyis a vektor koordinátakomponenseiből alkotott oszlopvektor transzformálódik:

$$r'_i = \mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{r} = \sum_{j=1}^{3} r_j \mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{E}_j = \sum_{j=1}^{3} O_{i,j} r_j, \tag{1.1.13}$$

avagy

$$\underline{r}' = \underline{\underline{O}}\,\underline{r}. \tag{1.1.14}$$

Az $\underline{r}$ oszlopvektor transzponáltján az

$$\underline{r}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \tag{1.1.15}$$

sorvektort értjük és tetszőleges $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ vektorok skalárszorzatának az alábbi sor-oszlop szorzás felel meg:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \underline{r}_1^{\mathrm{T}} \underline{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \underline{r}_2^{\mathrm{T}} \underline{r}_1 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1. \tag{1.1.16}$$

Mivel a vektorok a bázistranszformációk során változatlanok maradnak, $\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2$, ezért a skalárszorzat is változatlan marad, azaz

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \underline{r}_1^{\mathrm{T}} \underline{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \underline{r}_1'^{\,\mathrm{T}} \underline{r}_2' = x_1' x_2' + y_1' y_2' + z_1' z_2'. \tag{1.1.17}$$

Mit jelent geometriailag a bázistranszformáció? Könnyű belátni, hogy a bázistranszformáció, ami az egyik ortonormált bázisról egy másik ortonormált bázisra való áttérést ír le, annak felel meg, hogy az eredeti bázist ill. a bázisvektorok által kijelölt koordinátarendszert a térben elforgatjuk (és esetleg a tengelyeket tükrözzük az origóra). A helyzetvektor tehát olyan matematikai objektum, amelyik a koordinátarendszer elforgatása során változatlan marad, de a vektor Descartes-komponenseiből alkotott oszlopvektor ortogonális transzformációt szenved a koordinátarendszer elforgatásakor. Ha tértükrözést hajtunk végre, vagyis minden bázisvektort ellentétesre változtatunk, $\mathbf{E}_i' = -\mathbf{E}_i$, akkor ennek $O_{i,j} = -\delta_{i,j}$ ortogonális transzformáció és a helyzet-oszlopvektor

$$\underline{r} \mapsto \underline{r}' = -\underline{r} \tag{1.1.18}$$

transzformációja felel meg.

Az anyagi pont helyzetének megadása, ill. a tér egy P pontja helyzetének megadása tetszőleges vonatkoztatási ponthoz képest történhet. Ez azt jelenti, hogy az O vonatkoztatási pont helyett választhatunk egy tetszőleges másik O' vonatkoztatási pontot, amelynek O-hoz viszonyított helyzetvektora $\mathbf{b}$. Ekkor az eredeti K vonatkoztatási rendszerhez képest a $\mathbf{b}$ vektorral eltolt másik K' vonatkoztatási rendszert kapunk és K' nyugalomban van K-hoz képest. Az eltolt vonatkoztatási rendszerben az O' pontból kiinduló helyzetvektorok szintén lineáris vektorteret alkotnak. Legyen a P pont helyzetvektora a K rendszerben $\mathbf{r}$, a K' rendszerben pedig $\mathbf{r}'$. Ha kapcsolatot akarunk keresni ezen vektorok között, akkor azzal a matematikai problémával találjuk magunkat szemben, hogy két különböző vektortér, az O pontból kiinduló ill. az O' pontból kiinduló helyzetvektorok $\mathcal{R}$ ill. $\mathcal{R}'$ terének egy-egy vektorát kellene összehasonlítani. Erre egyetlen mód van. Kölcsönösen egyértelműen le kell képezni az $\mathcal{R}'$ vektorteret az $\mathcal{R}$ vektortérre és az $\mathbf{r}' \in \mathcal{R}'$ vektor képét kell összehasonlítani az $\mathbf{r}$ vektorral, mert két azonos vektortérből vett vektor összehasonlítható, pl. képezhető az összegük ill. a különbségük. A szokásos kölcsönösen egyértelmű leképezés a vektorok párhuzamos eltolása az O' pontból az O pontba. A párhuzamos eltolás azt jelenti, hogy vesszük azt a fénysugarat, amely O'-ből O-ba megy, ennek mentén úgy toljuk el az $\mathbf{r}'$ vektort, hogy hossza ne változzon és a fénysugár érintőjével bezárt szöge se változzon (és az érintővektor és az eltolt vektor síkja ne forduljon el az állócsillagokhoz képest). Legyen az $\mathbf{r}' \in \mathcal{R}'$ vektor párhuzamos eltoltja az $\mathbf{r}'_{O\leftarrow O'} \in \mathcal{R}$. Ekkor fennáll az

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{r}'_{O\leftarrow O'} \tag{1.1.19}$$

összefüggés. Amikor az nem zavaró, akkor a párhuzamos eltolást nem jelöljük, vagyis a vektor és párhuzamos eltoltja között nem teszünk különbséget és azt írjuk, hogy

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{r}'. \tag{1.1.20}$$

Távolság. Az K vonatkoztatási rendszerben nyugvó P_1 és P_2 pontok távolságát a következőképpen fejezhetjük ki a helyzetvektorok segítségével. Legyenek $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ a K vonatkoztatási rendszer O vonatkoztatási pontjából (origó) kiinduló, rendre a P_1 és a P_2 pontba mutató helyzetvektorok. Ekkor értelmezhetjük az

$$\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{1.1.21}$$

relatív helyzetvektort. Ez olyan, az O pontból kiinduló vektor, amelyet párhuzamosan eltolva a P_2 pontba, a P_2 pontból a P_1 pontba mutató vektort kapunk. **A P_1 és P_2 pont távolsága a két pont relatív helyzetvektorának a hossza:**

$$\Delta\ell_{1,2} = \sqrt{\mathbf{r}_{1,2}\cdot\mathbf{r}_{1,2}} = \sqrt{(\Delta x_{1,2})^2 + (\Delta y_{1,2})^2 + (\Delta z_{1,2})^2}. \tag{1.1.22}$$

Ezt az egyes helyzetvektorok koordinátakomponenseivel, azaz az egyes pontok Descartes-koordinátáival is kifejezhetjük:

$$\Delta\ell_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \tag{1.1.23}$$

Miután a skalárszorzat a bázis, azaz a koordinátarendszer elforgatásaival, tükrözéseivel és eltolásaival szemben változatlan marad, azért két pont távolsága is azonos bármely két, egymáshoz képest elforgatott, tükrözött vagy eltolt koordinátarendszerben.

A klasszikus mechanikában ennél több is igaz. Mivel be tudjuk vezetni a t világidőt, azért a következőket mondhatjuk. Legyen K' a K-hoz képest akárhogyan mozgó vonatkoztatási rendszer, legyen $\mathbf{b}(t)$ a K rendszer origójából a K' rendszer origójába mutató vektor. Jelölje a tetszőleges P_1 és P_2 térbeli pontok helyzetvektorát (amelyet pl. egy-egy anyagi pont tartózkodása jelöl ki) rendre $\mathbf{r}_1(t)$ és $\mathbf{r}_2(t)$, ill. $\mathbf{r}'_1(t)$ és $\mathbf{r}'_2(t)$ a K ill. a K' rendszerben. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\mathbf{r}_a(t) = \mathbf{b}(t) + \mathbf{r}'_a(t), \quad a = 1, 2 \tag{1.1.24}$$

úgyhogy a relatív helyzetvektor

$$\mathbf{r}_{1,2}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}'_1(t) - \mathbf{r}'_2(t) = \mathbf{r}'_{1,2}(t) \tag{1.1.25}$$

azonos a két vonatkoztatási rendszerben, aminek következtében annak a hossza, azaz a két pont távolsága is azonos a két tetszőleges vonatkoztatási rendszerben. Két elemi esemény távolsága minden vonatkoztatási rendszerben ugyanaz, vagyis **a klasszikus mechanikában a távolság is abszolút fogalom.**

Megjegyezzük, hogy a két pont helyzetének egyidejű leolvasása azáltal van a fenti gondolatmenetben biztosítva, hogy a relatív helyzetvektort két olyan helyzetvektor különbségeként értelmeztük, amelyeket világidő szerint azonos pillanatban vettünk, azaz mindkét vonatkoztatási rendszer rendszerideje szerint is azonos pillanatban.

Vektormennyiségek. Az anyagi pont mozgásának jellemzéséhez később a helyzetvektoron kívül más vektormennyiségekre is szükségünk lesz. Ezeket a vektormennyiségeket adott t időpillanatban abban a térbeli pontban kell értelmezni, ahol az anyagi pont éppen tartózkodik. Ezért általában szükségünk lesz a tér tetszőleges P pontjában értelmezett $\mathbf{v}(P)$ vektorokra. A tér tetszőleges P pontjában értelmezett $\mathbf{v}(P)$ vektor is felbontható a tér ezen P pontjában felvett $\mathbf{e}_1(P)$, $\mathbf{e}_2(P)$, $\mathbf{e}_3(P)$ ortonormált bázisvektorok szerint. Általánosságban pontról pontra haladva választhatunk más és más bázist, azaz lokális koordinátarendszereket (ld. az A. függeléket). Itt most feltesszük, hogy a tér minden pontjában, párhuzamos eltolás erejéig azonos bázist választunk, azaz hogy az $\mathbf{e}_i(P)$ bázisvektorok párhuzamos eltolással kaphatók meg rendre az $\mathbf{E}_i$ bázisvektorokból. Az egyszerűség kedvéért a párhuzamos eltolás tényét nem jelöljük. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\mathbf{v}(P) = v_x(P)\mathbf{e}_1(P) + v_y(P)\mathbf{e}_2(P) + v_z(P)\mathbf{e}_3(P) = \sum_{i=1}^{3} v_i(P)\mathbf{e}_i(P) = \sum_{i=1}^{3} v_i(P)\mathbf{E}_i, \tag{1.1.26}$$

ahol $v_1 = v_x$, $v_2 = v_y$, $v_3 = v_z$ jelölést vezettük be az utolsó egyenlőségekben.

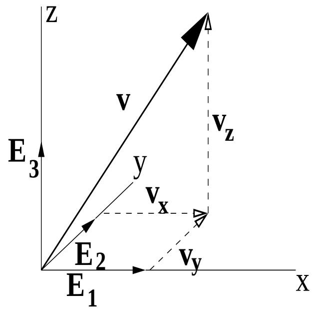

Figure 3: Vektor felbontása Descartes-komponensekre

Tetszőleges két, azonos pontban értelmezett $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor skaláris szorzata kifejezhető a tényezővektorok komponenseivel:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{E}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} b_j\mathbf{E}_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \mathbf{E}_i\cdot\mathbf{E}_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \delta_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= \underline{a}^{\mathrm{T}}\underline{b} = \underline{b}^{\mathrm{T}}\underline{a}. \end{aligned} \tag{1.1.27}$$

Összefoglalva: **A tér pontjait és az időpillanatokat az elemi események jelölik ki. A térben az egyeneseket a fényjelek terjedése jelöli ki. A tér három-dimenziós és euklideszi geometriájú. Az idő egy-dimenziós.**

Bármely két elemi esemény térbeli távolsága független a vonatkoztatási rendszertől, és bármely két elemi esemény között eltelt idő is független a vonatkoztatási rendszertől. A távolság és az időtartam a klasszikus mechanikában a vonatkoztatási rendszer megválasztásával szemben invariáns, abszolút fogalmak. A testek mechanikai mozgása térben és időben bekövetkező elemi történések sorozata. A klasszikus mechanika szerint a tér és az idő eleve adott színpad, amelyben a mozgások lefolynak. A testek mozgásának nincsen a tér és az idő geometriai tulajdonságaira semmiféle befolyása.

1.1.2 Az anyagi pont

Tekintsünk egy K vonatkoztatási rendszert és abban válasszunk egy nyugvó O vonatkoztatási pontot, origót. Legyen továbbá t a K-ban nyugvó, szinkronizált órák által mért idő. A K rendszerben az anyagi pont helyzetét az O ponthoz viszonyítva, adott t pillanatban azzal az $\mathbf{r}(t)$ **helyzetvektorral** adjuk meg, amely vektor az O pontból az anyagi pont pillanatnyi tartózkodási helyének P_t pontjába mutat: $\mathbf{r}(t) = \vec{OP_t}$. Az anyagi pont mozgása során a K vonatkoztatási rendszerben folytonos görbét ír le, ez **az anyagi pont pályája** a K rendszerben. A pályagörbe az $\mathbf{r}(t)$ vektorok folytonos sorozatával adható meg, ahol a t idő valós változó.

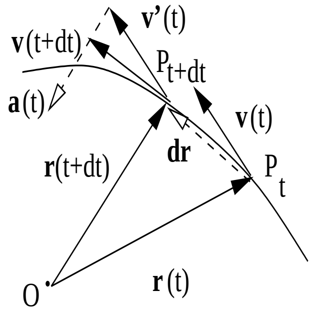

Figure 4: Anyagi pont pályája, helyzetvektora, sebessége, gyorsulása. A jelölések azonosak a szövegben használtakkal, $d\mathbf{r}$ a részecske infinitezimális elmozdulása, $\mathbf{v}'$ jelöli a $\mathbf{v}(t)$ vektor párhuzamos eltoltját a P_t pontból a P_{t+dt} pontba.

A klasszikus mechanikai mozgásról nemcsak azt szokás feltételezni, hogy a pálya folytonos, hanem azt is, hogy tetszőlegesen sokszor differenciálható. Ha Δt egy tetszőleges időtartam, akkor feltesszük, hogy minden t pillanatban létezik a

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \qquad (1.1.28)$$

határérték, a pálya idő szerinti első deriváltja, amit az anyagi pont t pillanathoz tartozó **sebességének** nevezünk. Ugyancsak feltesszük, hogy minden t pillanatban létezik az

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \qquad (1.1.29)$$

határérték, a sebesség idő szerinti első, ill. a pálya idő szerinti második deriváltja, amit **gyorsulásnak** nevezünk.

A véges Δt időtartamhoz tartozó $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$ vektort az anyagi pont Δt időtartam alatt bekövetkezett **elmozdulásának** nevezzük. Az elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás a pálya tetszőleges pontjában, lokálisan értelmezett vektorok, amelyeknek nagysága és iránya van. A kinematikai viszonyokat a 4. ábra szemlélteti.

A sebesség, definiciójából következően, párhuzamos a pályagörbe érintőjével a pálya minden pontjában. Jelölje $\mathbf{t}(P_t)$ a pályagörbének, az anyagi pont haladása irányába mutató érintő irányú egységvektorát a pálya tetszőleges P_t pontjában:

$$|\mathbf{t}(P_t)| = 1, \quad \mathbf{t}(P_t)\cdot\mathbf{t}(P_t) = 1, \quad \mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{t}(P_t). \tag{1.1.30}$$

A sebesség nagysága, $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{t}(P_t)$ segítségével számolható ki annak a görbeívnek a ds hossza, amelyet dt idő alatt az anyagi pont a pályája mentén megtesz:

$$ds = v(t)dt = \mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{t}(P_t)dt, \tag{1.1.31}$$

az ún. nevezett **elemi úthossz**. Az anyagi pont által véges Δt időtartam alatt megtett **út**:

$$\Delta s = \int_{P_t}^{P_{t+\Delta t}} ds = \int_t^{t+\Delta t} v(t')dt'. \tag{1.1.32}$$

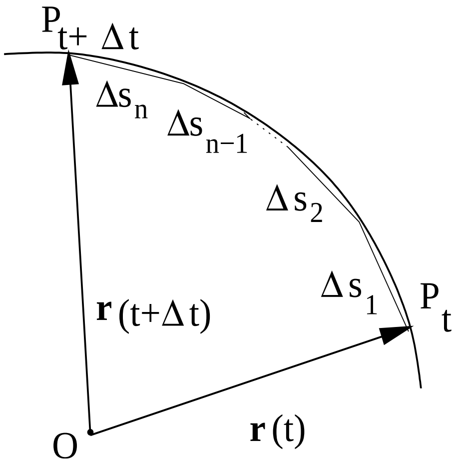

Figure 5: A pályagörbe ívhossza, azaz a megtett út közelítése törtvonal hosszával.

Az első egyenlőségben szereplő görbementi integrál integrálközelítő összeg határértékeként van értelmezve:

$$\int_{P_t}^{P_{t+\Delta t}} ds = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i, \tag{1.1.33}$$

ahol a pálya P_t és $P_{t+\Delta t}$ pontok közötti szakaszán n osztópontot vettünk fel és Δs_i a szomszédos osztópontok által kijelölt egyenes szakaszok hosszúságai. A határérték úgy értendő, hogy az osztópontok számával végtelenhez tartunk, $n \to \infty$ miközben a Δs_i szakaszok közül a legnagyobb is zérushoz tart. Az integrálközelítő összeg itt azt jelenti, hogy a görbe hosszát egy törtvonal hosszával közelítjük, majd ezt a törtvonalat egyre jobban „ráhúzzuk” az igazi görbére a határérték képzése során.

1.1.3 Egyenesvonalú egyenletes mozgás

Nyugalom. A sebességösszeadás szabálya. A K vonatkoztatási rendszerben **nyugvó anyagi pont** felfogható úgyis, mint a $\mathbf{v} = 0$ állandó sebességgel mozgó anyagi pont, amely természetesen így mindig ugyanabban a térbeli pontban marad. **A nyugalom azonban relatív.** Ha az anyagi pont nyugalomban van a K vonatkoztatási rendszerben, akkor általában nincs nyugalomban valamely másik K' vonatkoztatási rendszerben. Mozogjon pl. a K' rendszer a t pillanatban $\mathbf{V}$ sebességgel a K rendszerhez képest, amin azt értjük, hogy a K' rendszer minden pontja $\mathbf{V}$ sebességgel mozog a K vonatkoztatási rendszerből nézve. Ekkor az összes K'-ben nyugvó mérőrúd minden pontja is ezzel a sebességgel mozog K-ból nézve (6. ábra). Ha tehát $dt' = dt$ infinitezimális időtartam alatt az anyagi pont elmozdulása K'-ben $d\mathbf{r}' = \mathbf{v}'dt$, akkor K-ból nézve az elmozdulása $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}' + \mathbf{V}dt = (\mathbf{v}' + \mathbf{V})dt$.

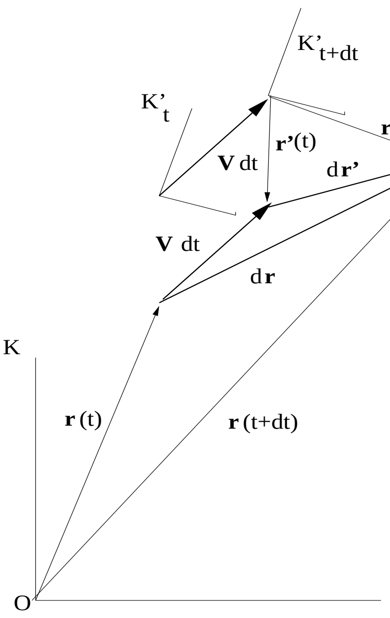

Figure 6: Infinitezimális elmozdulások egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerekben.

Másrészt ez az infinitezimális elmozdulás definiálja az anyagi pont sebességét K-ban: $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$. A K-ban észlelt elmozdulás két fenti alakját egyenlővé téve megkapjuk a **sebességösszeadás szabályát**:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \tag{1.1.34}$$

Ebből látszik, hogy a nyugalom viszonylagos. Ha az anyagi pont nyugalomban van K-ban, azaz $\mathbf{v}(t) \equiv 0$, akkor ugyanez az anyagi pont általában nincs nyugalomban a K-hoz képest tetszőleges $\mathbf{V}(t)$ sebességgel mozgó K' vonatkoztatási rendszerben, hanem abban $\mathbf{v}'(t) = -\mathbf{V}(t)$ sebességgel mozog.

Egyenesvonalú egyenletes mozgás. Ez az anyagi pont legegyszerűbb mozgása, amikor a gyorsulása azonosan zérus,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = 0. \tag{1.1.35}$$

Ekkor a részecske sebessége a t idő függvényében állandó:

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t')dt' = 0, \qquad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0, \tag{1.1.36}$$

ahol $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ a részecske kezdeti sebessége a tetszőlegesen választott t_0 pillanatban. A pálya egyenlete:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t')dt' = (t - t_0)\mathbf{v}_0, \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + (t - t_0)\mathbf{v}_0, \tag{1.1.37}$$

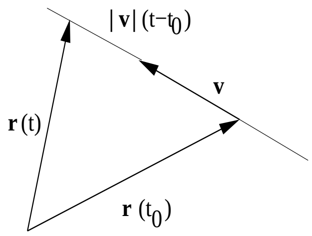

Figure 7: Az egyenesvonalú egyenletes mozgás kinematikai ábrája.

ahol $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ a részecske helyzetvektora a kezdeti t_0 időpillanatban. A pálya $\mathbf{v}_0$ irányú egyenes (7. ábra). A részecske által Δt idő alatt megtett út,

$$\Delta s = v_0 \int_{t}^{t+\Delta t} dt' = v_0 \Delta t \tag{1.1.38}$$

arányos az eltelt idővel. Az anyagi pont tehát egyenlő időközök alatt egyenlő utakat tesz meg az egyenesen, ezért mozgását **egyenesvonalú egyenletes mozgásnak** nevezzük.

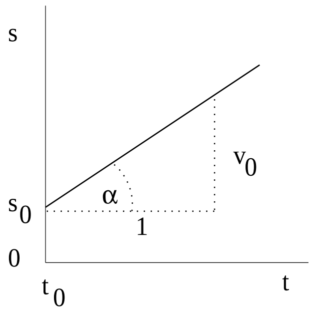

Figure 8: Az egyenesvonalú egyenletes mozgás út-idő grafikonja egyenes, amelynek iránytangense tg $\alpha = v_0$.

1.2 Speciális mozgások

Ebben a fejezetben az anyagi pont néhány speciális mozgásának leírásával foglalkozunk anélkül, hogy tisztáznánk, mi is ezen mozgások oka.

1.2.1 Egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

A fejezet elolvasása előtt tanulja meg az A.1, A.2 és A.3 függelékeket!

A részecske egyenletesen gyorsuló mozgást végez, ha a részecske gyorsulásvektora időben állandó:

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{a} \equiv \text{áll.} \tag{1.2.1}$$

Ezt a mozgásegyenletet idő szerint integrálva megkapjuk a részecske sebességét, mint az idő függvényét:

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}dt' = (t - t_0)\mathbf{a}, \qquad \mathbf{v}(t) = (t - t_0)\mathbf{a} + \mathbf{v}_0, \tag{1.2.2}$$

ahol $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ állandó vektor, az anyagi pont kezdősebessége a t_0 időpillanatban. A sebesség időfüggéséből látszik, hogy miért nevezzük a mozgást egyenletesen gyorsulónak: a sebesség egyenlő Δt időközök alatt azonos $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\Delta t$ vektorral változik meg. Mégegyszer integrálva idő szerint, megkapjuk az anyagi pont pályájának egyenletét:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}dt' = \frac{1}{2}(t - t_0)^2\mathbf{a} + (t - t_0)\mathbf{v}_0, \qquad \mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}(t - t_0)^2\mathbf{a} + (t - t_0)\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0, \tag{1.2.3}$$

ahol $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ újabb integrációs állandó, az anyagi pont helyzetvektora a kezdeti t_0 pillanatban.

A mozgást **egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgásnak** nevezzük, ha az anyagi pont $\mathbf{v_0}$ kezdősebessége párhuzamos az anyagi pont állandó $\mathbf{a}$ gyorsulásával. Ha a kezdősebesség és a gyorsulás szöget zárnak be, akkor a mozgást **ferde hajításnak** nevezzük. Itt most csak az egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgást tárgyaljuk, a ferde hajításról később lesz szó. Egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetén írhatjuk, hogy

$$\mathbf{a} = a\mathbf{t}, \qquad \mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} = v_{0t}\mathbf{t}, \tag{1.2.4}$$

ahol $\mathbf{t}$ a gyorsulás irányába mutató egységvektor. Ekkor az anyagi pont pályájának egyenlete

$$\mathbf{r}(t) = s_{t,t_0}\mathbf{t} + \mathbf{r}_0, \tag{1.2.5}$$

alakot ölt, ahol

$$s_{t,t_0} = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_{0t}(t - t_0) \tag{1.2.6}$$

az az út, amelyet az anyagi pont a t_0 pillanattól kezdve mért $t - t_0$ idő alatt megtett. A mozgás pályája az $\mathbf{r}_0$ helyzetvektorú ponton átmenő, $\mathbf{t}$ irányú egyenes.

Figyeljünk fel rá, hogy a pálya meghatározására szolgáló (1.2.1) mozgásegyenlet közönséges, másodrendű differenciálegyenlet. A pálya egyértelmű megadásához

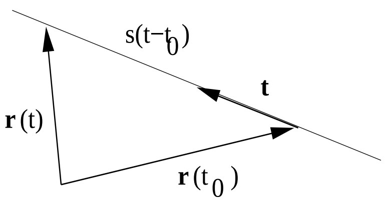

Figure 9: Az egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás pályája.

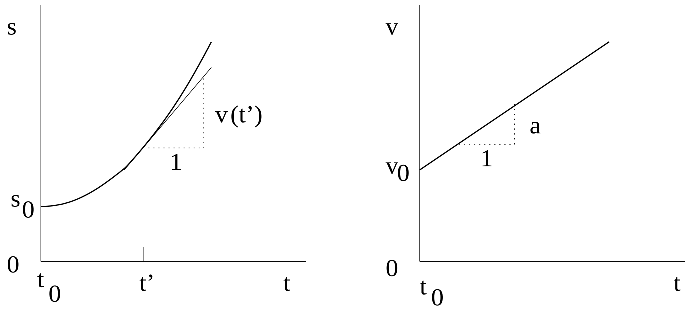

Figure 10: Az egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás út-idő grafikonja parabola. A parabola érintőjének iránytangense tg $\alpha = v(t)$ az adott pillanatban a sebesség. A sebesség-idő grafikon egyenes, amelynek meredeksége a gyorsulás.

ezért két kezdőfeltételre van szükség: a helyzetvektor és a sebesség (a helyzetvektor idő szerinti első deriváltjának) kezdeti $\mathbf{r}_0$ és $\mathbf{v}_0$ értékeire.

Természetesen az egyenletesen gyorsuló mozgás ($\mathbf{a}$ =áll.) Descartes-koordinátákban könnyűszerrel leírható. Jelölje az $i = (x, y, z)$ index rendre az $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_y$, ill. $\mathbf{E}_z$ bázisvektorokkal párhuzamos összetevőket. Ha a fenti egyenleteket skalárisan szorozzuk rendre az egyes bázisvektorokkal, akkor a vektorkomponensekre az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r_i}{dt} &= a_i(t) = \text{áll.}, \\ \frac{dr_i}{dt} &= v_i(t) = \int_{t_0}^{t} a_i(t')dt' = a_i(t - t_0) + v_{0i}, \\ r_i(t) &= \int_{t_0}^{t} v_i(t')dt' = \frac{1}{2}a_i(t - t_0)^2 + v_{0i}(t - t_0) + r_{0i}. \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Itt a tömörebb írásmód kedvéért az $r_1(t) = x(t)$, $r_2(t) = y(t)$, $r_3(t) = z(t)$ jelölést használtuk az anyagi pont Descartes-koordinátáinak megadására. A kapott egyenletek azt jelentik, hogy az egyenletesen gyorsuló mozgás vetülete a Descartes-koordinátarendszer bármelyik tengelyére egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás.

1.2.2 Körmozgás

A fejezet elolvasása előtt tanulja meg az A.4 függeléket!

Körmozgásról akkor beszélünk, ha az anyagi pont körpályán mozog. A mozgás leírásához válasszunk a kör síkjában egy polárkoordinátarendszert. Legyen az origó a kör középpontja. Ekkor a körmozgást az

$$r(t) = R = \text{áll.} \tag{1.2.8}$$

egyenlet jellemzi, ahol R a kör sugara. Az anyagi pont helyzetét a körön a φ polárszög egyértelműen meghatározza. A mozgás leírása tehát azt jelenti, hogy meg kell adni a polárszöget, mint az idő függvényét: $\varphi(t)$. A sebesség és a gyorsulás radiális és érintő irányú komponensei rendre,

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} = 0, \qquad v_\varphi = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega, \\ a_r &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = -R\omega^2, \qquad a_\varphi = r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt} = R\beta, \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

ahol bevezettük az anyagi pont ω szögsebességét és β szöggyorsulását:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{1.2.10}$$

Az anyagi pont sebessége a kör érintőjével párhuzamos, nagysága $R|\omega|$ (a szögsebesség lehet negatív is!). Az anyagi pont radiális gyorsulása, $a_r\mathbf{e}_r$ a kör középpontja felé mutat, mert $a_r < 0$. **A körmozgást végző test radiális gyorsulását centripetális gyorsulásnak nevezzük.** Ezenkívül az anyagi pontnak általában van érintő irányú gyorsulása is, $a_\varphi\mathbf{e}_\varphi$, amelynek nagysága a szöggyorsulás nagyságával arányos, $|a_\varphi| = R|\beta|$.

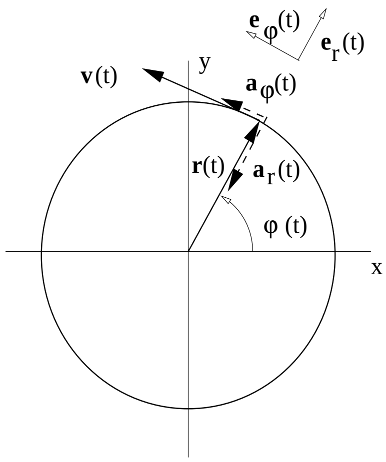

Figure 11: A körmozgás kinematikai ábrája.

Az egyenletes körmozgás. A körmozgás egyik speciális esete az egyenletes körmozgás. Ekkor a részecske szöggyorsulása zérus, $\beta = 0$. A

$$\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \tag{1.2.11}$$

egyenletet idő szerint integrálva megkapjuk a részecske szögsebességét,

$$\omega = \int_{t_0}^{t} \beta(t')dt' + \omega_0 = \omega_0 = \text{áll.} \tag{1.2.12}$$

ami időben állandónak adódik. Újabb idő szerinti integrálással kapjuk a részecske helyzetét meghatározó polárszög időfüggését:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \omega(t')dt' + \varphi_0 = \omega(t - t_0) + \varphi_0, \tag{1.2.13}$$

ahol $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ az anyagi pont kezdeti helyzetét adja meg a körön. Miután az egyenletes körmozgás során a szögsebesség állandó, az anyagi pontnak zérus az érintő irányú gyorsulása, $a_\varphi = R\beta = 0$. Ilyenkor is van azonban a kör középpontja felé mutató, $R\omega^2 = \frac{v_\varphi^2}{R}$ =áll. nagyságú centripetális gyorsulása.

Az egyenletesen gyorsuló körmozgás. Egy másik speciális körmozgás az egyenletesen gyorsuló körmozgás, amikor a részecske szöggyorsulása β =áll.$\neq 0$. Ekkor a részecske mozgásegyenlete

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \beta = \text{áll.}, \tag{1.2.14}$$

ahonnan integrálással

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \int_{t_0}^{t} \beta(t')dt' = \beta(t - t_0) + \omega_0, \\ \varphi(t) &= \int_{t_0}^{t} \omega(t')dt' = \frac{1}{2}\beta(t - t_0)^2 + \omega_0(t - t_0) + \varphi_0 \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

adódik, ahol $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ és $\omega_0 = \omega(t_0)$ integrálási állandók, rendre a polárszögnek és a szögsebességnek a kezdeti $t = t_0$ időpillanatban felvett értékei. Az egyenletesen gyorsuló körmozgást végző anyagi pontnak állandó, $R|\beta|$ nagyságú, érintő irányú gyorsulása van. A kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulásásának $R\omega^2$ nagysága azonban a szögsebességgel együtt időben változik.

1.2.3 Harmonikus rezgőmozgás

Az

$$x(t) = x_0 + A\cos(\omega t + \alpha), \qquad x_0, A, \omega, \alpha = \text{áll.} \tag{1.2.16}$$

alakú egyenlettel leírt mozgás periodikus, ún. lineáris (vagy egy-dimenziós) harmonikus rezgőmozgás[3]. Az anyagi pont az $x = x_0$ pont körül rezeg az x-tengely mentén, $q(t) \equiv x(t) - x_0$ az anyagi pont előjeles kitérése az $x = x_0$ helyzetből. A kitérés az idő koszinusz-függvénye. A maximális kitérés nagysága a rezgés A amplitúdója. A koszinusz-függvény argumentumát a rezgő anyagi pont fázisának nevezzük, $\varphi(t) = \omega t + \alpha$. A mozgás T periódusideje az az idő, ami az alatt telik el, hogy az anyagi pont közvetlenül egymás után azonos kitérésre tesz szert, vagyis az a legkisebb T idő, amelyre $q(t + T) = q(t)$ ill. $x(t + T) = x(t)$ teljesül:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}, \tag{1.2.17}$$

[3]Teljesen hasonló eredményt kapunk, ha a kitérést a fázis szinusz-függvényeként vesszük fel, hiszen ez csak $\frac{1}{2}\pi$ állandó fáziseltolódást jelent: $\sin\alpha = \cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi)$.

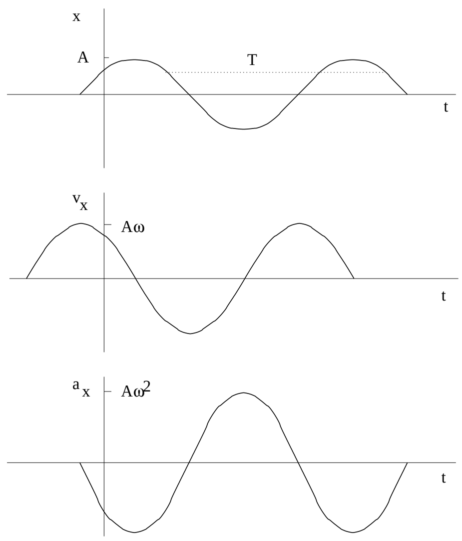

Figure 12: A harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő diagramjai (az (1.2.16) egyenletben $x_0 = 0$ választás esetén).

ahol ω-t körfrekvenciának, $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$-t frekvenciának nevezzük. A frekvencia, $\nu = \frac{1}{T}$ azon események száma az időegység alatt, amikor az anyagi pont ugyanazt a kitérést veszi fel. Az anyagi pont fázisa a kezdeti $t = 0$ pillanatban α. Idő szerinti deriválással kapjuk a lineáris harmonikus rezgést végző anyagi pont sebességét és gyorsulását mint az idő függvényét (ld. 12. ábra):

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha), \\ a_x(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x(t). \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

Utóbbi egyenlet a lineáris harmonikus rezgést végző anyagi pont mozgásegyenlete:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t). \tag{1.2.19}$$

A gyorsulás arányos a kitérés negatívjával, az arányossági tényező az $\omega^2 > 0$ pozitív állandó.

Vegyük észre, hogy a lineáris harmonikus rezgést végző anyagi pont az időméréshez szükséges óra egy lehetséges megvalósítása.

A harmonikus rezgőmozgáshoz legegyszerűbben úgy jutunk, hogy az egyenletes körmozgást merőlegesen vetítjük a kör síkjában felvett Descartes-koordinátarendszer valamelyik tengelyére. Helyezzük a Descartes-koordinátarendszer és a polárkoordinátarendszer origóját is a kör középpontjába. Fejezzük ki az egyenletes körmozgást végző anyagi pont $x(t), y(t)$ Descartes-koordinátáit az anyagi pont

$$r(t) = R, \qquad \varphi(t) = \omega t + \varphi_0 \tag{1.2.20}$$

polárkoordinátáival:

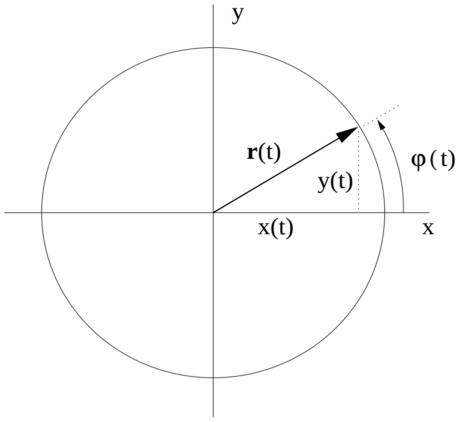

Figure 13: A körmozgás merőleges vetítése a Descartes-koordinátarendszer tengelyeire.

$$x(t) = R\cos(\omega t + \varphi_0), \quad y(t) = R\sin(\omega t + \varphi_0) = R\cos(\omega t + \varphi_0 - \frac{1}{2}\pi), \tag{1.2.21}$$

ahol φ_0 a $t = 0$ pillanatban a polárszög (ld. 13. ábra).

A harmonikus rezgőmozgás (1.2.19) differenciálegyenlete közönséges, másodrendű, homogén, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet. Ennek két független megoldása van, és az általános alakú megoldás a két független megoldás lineáris kombinációja tetszőleges együtthatókkal. A független megoldásokat úgy találhatjuk meg a legegyszerűbben, ha az $x(t)$ függvényt komplex értékűnek tekintjük. Mivel egy komplex szám lineáris kifejezése a valós és a képzetes részeinek, azért az (1.2.19) egyenlet komplex értékű függvényekre kapott megoldásai között ott vannak a megfelelő, valós értékű függvényre vonatkozó egyenlet megoldásai is. Könnyű észrevenni, hogy a komplex értékű függvények között a tiszta képzetes kitevőjű $e^{i\lambda t}$ exponenciális függvények a megoldások, ha

$$-\lambda^2 + \omega^2 = 0, \qquad \Rightarrow \lambda = \pm\omega \tag{1.2.22}$$

teljesül. Az első egyenletet az (1.2.19) egyenlet **karakterisztikus egyenletének** nevezzük. A két, független megoldást, $x_1(t) = e^{+i\omega t}$ és $x_2(t) = e^{-i\omega t}$ a karakterisztikus egyenlet gyökei segítségével tudjuk felírni. Az egyenlet általános megoldása

$$x(t) = C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \tag{1.2.23}$$

alakú. A valós megoldásokat a valós kezdőfeltételekkel választhatjuk ki: valamely adott t_0 pillanatban rögzítjük a kitérésnek és idő szerinti első deriváltjának valós (!) értékeit:

$$x(t_0) = x_0 = \text{ valós }, \quad \dot{x}(t_0) = v_{0x} = \text{ valós }. \tag{1.2.24}$$

Ekkor

$$x_0 = C_1 e^{i\omega t_0} + C_2 e^{-i\omega t_0}, \quad v_{0x} = i\omega[C_1 e^{i\omega t_0} - C_2 e^{-i\omega t_0}]. \tag{1.2.25}$$

Ez lineáris, inhomogén algebrai egyenletrendszer a C_1 és C_2 együtthatókra. Az egyenletrendszer determinánsa:

$$D = -i\omega e^{i\omega t_0} e^{-i\omega t_0} - i\omega e^{i\omega t_0} e^{-i\omega t_0} = -2i\omega, \tag{1.2.26}$$

úgyhogy a keresett együtthatók

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{-2i\omega}\begin{vmatrix} x_0 & e^{-i\omega t_0} \\ v_{0x} & -i\omega e^{-i\omega t_0} \end{vmatrix} = \frac{\omega x_0 - i v_{0x}}{2\omega} e^{-i\omega t_0}, \\ C_2 &= \frac{1}{-2i\omega}\begin{vmatrix} e^{i\omega t_0} & x_0 \\ i\omega e^{i\omega t_0} & v_{0x} \end{vmatrix} = \frac{\omega x_0 + i v_{0x}}{2\omega} e^{i\omega t_0}. \end{aligned} \tag{1.2.27}$$

Az adott kezdőfeltételeknek eleget tevő megoldás tehát:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{i\omega t_0} e^{i\omega(t-t_0)} + C_2 e^{-i\omega t_0} e^{-i\omega(t-t_0)} \\ &= \frac{\omega x_0 - i v_{0x}}{2\omega} e^{i\omega(t-t_0)} + \frac{\omega x_0 + i v_{0x}}{2\omega} e^{-i\omega(t-t_0)} \\ &= x_0 \cos\Big(\omega(t-t_0)\Big) + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin\Big(\omega(t-t_0)\Big). \end{aligned} \tag{1.2.28}$$

Látjuk, hogy ez csakugyan valós. Azonos átalakítással átírhatjuk az (1.2.16) alakra:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0[\cos(\omega t)\cos(\omega t_0) + \sin(\omega t)\sin(\omega t_0)] + \frac{v_{0x}}{\omega}[\sin(\omega t)\cos(\omega t_0) - \cos(\omega t)\sin(\omega t_0)] \\ &= \left(x_0\cos(\omega t_0) - \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t_0)\right)\cos(\omega t) + \left(x_0\sin(\omega t_0) + \frac{v_{0x}}{\omega}\cos(\omega t_0)\right)\sin(\omega t) \\ &= A\cos(\omega t + \alpha), \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

ahol

$$\begin{aligned} A\cos\alpha &= x_0\cos(\omega t_0) - \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t_0), \\ A\sin\alpha &= x_0\sin(\omega t_0) + \frac{v_{0x}}{\omega}\cos(\omega t_0) \end{aligned} \tag{1.2.30}$$

miatt

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(x_0\cos(\omega t_0) - \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t_0)\right)^2 + \left(x_0\sin(\omega t_0) + \frac{v_{0x}}{\omega}\cos(\omega t_0)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}}, \\ \mathrm{tg}\ \alpha &= \frac{x_0\sin(\omega t_0) + \frac{v_{0x}}{\omega}\cos(\omega t_0)}{x_0\cos(\omega t_0) - \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t_0)} = \frac{\mathrm{tg}\ (\omega t_0) + \frac{v_{0x}}{x_0\omega}}{1 - \frac{v_{0x}}{x_0\omega}\ \mathrm{tg}\ (\omega t_0)}. \end{aligned} \tag{1.2.31}$$

Lineáris harmonikus oszcillátor. Általában, ha bármilyen $\psi(t)$ fizikai mennyiség az (1.2.16) egyenlethez hasonló időbeli változást mutat,

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \tag{1.2.32}$$

ahol A, ω és α (valós) állandók, azaz ha a

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -\omega^2\psi(t) \tag{1.2.33}$$

alakú közönséges másodrendű differenciálegyenlet megoldása, akkor azt mondjuk, hogy az adott ψ mennyiség lineáris harmonikus rezgést végez. Azt is szoktuk mondani, hogy ekkor a ψ fizikai mennyiség egy lineáris harmonikus oszcillátort képvisel. Az ilyen lineáris harmonikus oszcillátor azonban elvont fogalom, amelyhez általában nem is kapcsolható mechanikai mozgás. **Lineáris harmonikus oszcillátor minden olyan $\psi(t)$ mennyiség, amelynek időfüggése analóg a lineáris harmonikus rezgést végző anyagi pont kitérésének időfüggésével.**

Különböző irányú rezgések összetevése. Különböző irányú harmonikus rezgőmozgásokat össze lehet tenni. Így síkbeli (két-dimenziós) ill. térbeli (háromdimenziós) rezgőmozgásokhoz jutunk. Vizsgáljuk pl. merőleges irányú rezgések síkbeli összetevését. Erről akkor beszélünk, ha az anyagi pont Descartes-koordinátái az

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_1^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_2^2 y \tag{1.2.34}$$

alakú mozgásegyenleteket elégítik ki, ahol ω_1, ω_2 állandók, rendre az x- ill. y-irányú harmonikus rezgések körfrekvenciái[4] . A kezdőfeltételektől függően különböző lehet a két egymásra merőleges rezgés A ill. B amplitudója és α_1 ill. α_2 fáziseltolódása. A két-dimenziós mechanikai harmonikus oszcillátor két független lineáris harmonikus oszcillátor rendszere, mert az $x(t)$ ($y(t)$) függvényre vonatkozó mozgásegyenletben nem szerepel az $y(t)$ ($x(t)$) függvény.

Az eredményül kapott pályagörbe általában bonyolult síkgörbe, az ún. Lissajous-görbék egyike. Egy egyszerű speciális eset az, amikor azonos frekvenciájú merőleges rezgéseket teszünk össze:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega. \tag{1.2.36}$$

Ha a kezdeti fázisokra az egyszerűség kedvéért az $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha - \frac{1}{2}\pi$ megszorítást tesszük, akkor

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha), \qquad y(t) = B\sin(\omega t + \alpha) \tag{1.2.37}$$

adódik. Innen, a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosságot felhasználva, az anyagi pont pályaegyenlete:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \tag{1.2.38}$$

azaz egy ellipszis egyenlete adódik, amelynek féltengelyei a koordinátatengelyekkel párhuzamosak és nagyságuk rendre A és B.

[4]Nyilvánvaló, hogy a térbeli általánosítás három, egymásra páronként merőleges irányú harmonikus rezgés összetételére úgy történik, hogy a z-irányú mozgásra a

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega_3^2 z \tag{1.2.35}$$

egyenlet fennállását követeljük meg valamilyen ω_3 körfrekvenciával.

1.3 Kiterjedt testek

A testeknek általában véges a térbeli kiterjedésük. Ha ettől eltekinthetünk, akkor pontszerű testről, azaz anyagi pontról beszélünk. **Ha a test véges méretét figyelembe vesszük, akkor kiterjedt testről beszélünk.**

A kiterjedt testeket osztályozhatjuk **merevtestekre** és **deformálható testekre**. **Egy kiterjedt testet merevtestnek nevezünk, ha bármely két pontjának távolsága a test mozgása során állandó marad.** A merevtest szemléletes tulajdonsága, hogy mozgása során megőrzi alakját, külső behatás esetén nem szenved alakváltozást, más szóval nem deformálódik. A természetben vannak olyan testek, amelyek bizonyos körülmények között jó közelítéssel merevtestnek tekinthetők, ilyenek általában a szilárd halmazállapotú testek.

Mindazokat a testeket, amelyek nem merevtestek, deformálható testeknek nevezzük. Szigorúan véve deformálható testnek kell tekinteni minden testet, hiszen egy szilárd halmazállapotú test esetében is csak elhanyagolás azt mondani, hogy bármely két részecskéjének távolsága mindig állandó. Természetesen ide kell sorolni a folyadékokat és a gázokat is.

A mechanika olyan testekkel foglalkozik, amelyek részecskékből (pl. atomokból, molekulákból) épülnek fel. A kiterjedt testek mozgásának leírása kétféle modell alapján lehetséges: a mikroszkopikus modelljük a **pontrészecskék rendszere,** a makroszkopikus modelljük a **folytonos anyageloszlású test, azaz a közeg.**

Érdekességként megemlítjük, hogy a Természetben létezik egy harmadik fajtája is a kiterjedt testeknek, a **fizikai mező.** Ez akkor is jelen lehet, ha nincsenek jelen részecskék, azaz a vákuumban is. Ilyen fizikai mező pl. az elektromágneses tér, amely a vákuumban is mindenütt jelen van.

1.3.1 A pontrendszer

Abból indulunk ki, hogy a kiterjedt testet részecskék (pl. atomok, molekulák) alkotják. Ezek a köztük levő távolságokhoz képest általában nagyon kicsiny méretűek, tehát jó közelítéssel pontszerűeknek, azaz anyagi pontoknak tekinthetők. A kiterjedt test tehát mikroszkopikus szerkezetét figyelembe véve anyagi pontok rendszerének tekinthető: **pontrendszernek**. A kiterjedt testek pontrendszerrel történő modellezése a kiterjedt testek mikroszkopikus szerkezetén alapul.

Pontrendszer fizikai állapota. **Pontrendszernek nevezzük az $N \geq 1$ darab anyagi pontból álló rendszert.** Az $N = 1$ esetet, az anyagi pont esetét speciális pontrendszernek tekinthetjük, amely egyetlen anyagi pontból áll. A pontrendszer mozgásának leírásához meg kell adnunk minden egyes részecske $\mathbf{r}_a(t)$ ($a = 1, 2, \ldots, N$) helyzetvektorát, mint az idő függvényét valamilyen vonatkoztatási rendszerben. Természetesen értelmezhetjük valamennyi ($a = 1, 2, \ldots, N$) részecske sebességét,

$$\frac{d\mathbf{r}_a(t)}{dt} = \mathbf{v}_a(t), \tag{1.3.1}$$

és gyorsulását,

$$\frac{d^2\mathbf{r}_a(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}_a(t)}{dt} = \mathbf{a}_a(t). \tag{1.3.2}$$

Az N darab $\mathbf{r}_a(t)$ pályaegyenlet megadása Descartes-koordinátarendszerben $3N$ darab Descartes-koordináta megadását jelenti, mint az idő függvényét:

$$\mathbf{r}_a(t) : x_a(t), y_a(t), z_a(t), \qquad a = 1, 2, \ldots, N \tag{1.3.3}$$

Tehát $3N$ darab koordináta szükséges és elegendő ahhoz, hogy megadjuk N darab anyagi pont helyzetét a térben.

A tapasztalat igazolja a klasszikus mechanikának azt a feltevését, hogy a mechanikai rendszer mechanikai állapotának megadásához az N darab részecske N darab helyzetvektorát és N darab sebességvektorát elegendő megadni. A mechanikai állapot akkor van egyértelműen megadva valamely t időpillanatban, ha mindazok a fizikai mennyiségek ismertek, amelyekből a – később tárgyalásra kerülő – mozgásegyenletek segítségével meg lehet határozni a rendszer állapotát a későbbi $t + dt$ időpillanatban. A mechanikai állapot kimerítő jellemzéséhez elégséges fizikai mennyiségek értékei tehát a mozgásegyenletek kezdőfeltételei lesznek.

Az általános koordináták és az általános sebességek. A pontrendszer mozgásának kimerítő leírását az jelenti, ha a rendszerben található valamennyi anyagi pontnak megadjuk valamilyen tetszőlegesen választott koordinátarendszerben a koordinátáit, mint az idő függvényeit. A mechanikai mozgás egyértelmű leírásához azonban éppen úgy felhasználhatunk bármilyen más, a koordinátákkal kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban levő $3N$ darab geometriai adatot. Pl. megadhatunk olyan távolságot, amelyet az egyik részecskétől a másikig mérünk, vagy megadhatunk egy szöget, amelyet három részecske által meghatározott háromszögből veszünk, stb. A lényeg az, hogy $3N$ darab olyan független hosszúság- vagy szögadatot kell megadjunk, amelyek a részecskék helyzetét kimerítően jellemzik. Az N darab részecske helyzetének egyértelmű megadásához elegendő $3N$ darab tetszőleges, geometriailag független hosszúság- vagy szögadatot közös néven **a pontrendszer q_i $(i = 1, 2, \ldots, 3N)$ általános koordinátáinak nevezzük; az általános koordináták idő szerinti első deriváltjait pedig $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 3N)$ általános sebességeknek.** A mechanikai rendszer állapotának egyértelmű megadásához a $3N$ darab általános koordináta és a hozzájuk tartozó ugyanennyi darab általános sebesség megadaśa elegendő.

Kényszerek és szabadsági fokok.

Ha a pontrendszer részecskéinek helyzetét megadó $3N$ darab általános koordináta és $3N$ darab általános sebesség között a mozgás során f darab reláció, úgynevezett **kényszer** áll fenn, akkor a mechanikai állapot egyértelmű megadásához szükséges és elegendő általános koordináták és sebességek együttes száma $6N - f$. Ilyenkor a rendszer geometriai elhelyezkedésének egyértelmű megadásához szükséges és elegendő általános koordináták s száma lehet kisebb is mint $3N$. A pontrendszer geometriájának egyértelmű jellemzéséhez szükséges és elegendő általános koordináták s számát nevezzük **a rendszer szabadsági fokai számának.**

Ha pl. az anyagi pont f darab kényszernek van alávetve, (pl. a Föld felszínén kell mozogjon, stb.), **akkor 3 koordinátája mint az idő függvénye között f kényszerfeltételi egyenlet áll fenn.** Ilyenkor $3 - f$ darab független általános koordináta megadása szükséges és elegendő az anyagi pont helyzetének megadásához, tehát az anyagi pont szabadsági fokainak száma $s = 3 - f$. Nyilván $f = 3$ darab (független, azaz egymásból nem következő) kényszer fennállása esetén a részecskének nincsen egyetlen szabadsági foka sem. Az s szabadsági fokú anyagi pont mechanikai állapotának megadásához s darab független általános koordináta és a hozzájuk tartozó s darab általános sebesség szükséges és elegendő.

A továbbiakban nem fogunk részletesen foglalkozni a kényszerekkel. Érdemes azonban megemlíteni, hogy ezek a fizikában nagyon fontosak. A kényszerekkel terhes mechanikai rendszerek tanulmányozása vezet el az úgynevezett **mértékszimmetria** fogalmához. Az alapvető kölcsönhatások többsége, az elektromágneses, a gyenge és az erős kölcsönhatás pedig a Természetben meglevő mértékszimmetriák következményei.

1.3.2 Folytonos anyageloszlású testek

A folytonos anyageloszlású test modellje. A kiterjedt testet pontrendszerként kezelni általában technikailag lehet nehéz. Vegyük figyelembe ugyanis, hogy pl. valamely egyatomos anyag 1 molnyi mennyiségében $6 \cdot 10^{23}$ számú atom van jelen. Ennyi darab anyagi pont mozgását kell külön-külön leírni, ha a pontrendszer-modellel akarjuk leírni, hogy hogyan mozog a test 1 molnyi darabja. Célszerű tehát valamilyen ügyesebb modellt használni, hogy ne kelljen minden egyes részecske mozgását külön-külön vizsgálni. Úgy járunk el, hogy minden térbeli pont körül gondolatban kiszemelünk egy kicsiny, de makroszkopikus $\Delta V \sim \mathcal{O}(b^3)$ térfogatú anyagdarabkát. A térfogatdarabkákat úgy választjuk, hogy b lineáris kiterjedésük még mindig sokkal nagyobb legyen, mint a szomszédos atomok közötti átlagos d távolság, $b \gg d$. Így biztosítjuk, hogy a térfogatdarabok is makroszkopikus testek legyenek. Utána ezen kicsiny, de makroszkopikus anyagdarabkákhoz tartozó átlagos F fizikai mennyiségeket határozunk meg. Az átlagolás makroszkopikus Δt időtartamra történik, amely sokkal nagyobb mint az atomi mozgások jellegzetes időtartamai. Ilyen F fizikai mennyiségre példa a ΔV térfogatban található atomok átlagos ΔN száma vagy átlagos $\mathbf{v}$ sebessége. Ha a tér minden, $\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontja környezetében felvett ΔV térfogatdarabkában, minden t pillanatban meghatározzuk az F mennyiség értékét, akkor ennek segítségével a helytől és az időtől folytonosan függő $f(\mathbf{r}, t)$ fizikai mennyiségeket tudunk értelmezni egy alkalmas határértékképzési eljárás segítségével, amikor gondolatban az anyagdarabkák ΔV térfogatával (és a Δt átlagolási időtartammal) nullához tartunk. Az értelmezés részleteire vonatkozóan lásd a B függeléket! **Ha a kiterjedt testet a helytől és az időtől folytonosan függő fizikai mennyiségekkel írjuk le, amelyeket egyre finomított, makroszkopikus darabkákra bontással kapott mennyiségek sorozatának határértékeként értelmezünk, akkor a test olyan modelljét kapjuk, amelyben a test anyageloszlása folytonos.** Ez leginkább abból látható, hogy a térfogategységre eső átlagos részecskeszám a helytől és az időtől függő folytonos $n(\mathbf{r}, t)$ függvényhez tart,

$$\lim \frac{\Delta N}{\Delta V} = n(\mathbf{r}, t), \tag{1.3.4}$$

amelyet **részecskesűrűségnek** nevezünk. **A folytonos anyageloszlású testet szokás folytonos közegnek is nevezni.**

Térmennyiségek. A fizikában **térmennyiségnek vagy másszóval fizikai mezőnek nevezünk minden olyan fizikai mennyiséget, amely a tér minden pontjában, minden pillanatban jól meghatározott értékkel rendelkezik.** A folytonos anyageloszlású testeket, a közegeket tehát térmennyiségekkel, azaz fizikai mezőkkel jellemezzük. Néhány fontos példa a folytonos közeget jellemző térmennyiségekre:

1. A kitérés vektormező, $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ megadja, hogy mekkora a közeg azon részecskéinek az átlagos elmozdulása valamilyen referencia helyzethez (pl. egyensúlyi hely-

zethez) képest, amelyek az $\mathbf{r}$ helyen, a t pillanatban felvett kis, makroszkopikus térfogatelemben találhatók.

2. A sebesség vektormező, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ megadja, hogy a közeg azon részecskéinek mekkora az átlagos sebessége, amelyek az $\mathbf{r}$ helyen, a t pillanatban felvett kis, makroszkopikus térfogatelemben találhatók.

3. A részecskeszám sűrűsége, $n(\mathbf{r}, t)$ azzal a jelentéssel bír, hogy $n(\mathbf{r}, t)dV$ megadja az $\mathbf{r}$ helyet tartalmazó dV (kicsiny, makroszkopikus) térfogatelemben található részecskék átlagos számát a t pillanatban.

4. A tömegsűrűség, vagy egyszerűen csak sűrűség, $\rho(\mathbf{r}, t)$ azzal a jelentéssel bír, hogy $\rho(\mathbf{r}, t)dV$ megadja az $\mathbf{r}$ helyet tartalmazó dV (kicsiny, makroszkopikus) térfogatelemben található részecskék átlagos tömegét a t pillanatban. Ha a közeget azonos, m tehetetlen tömegű részecskék alkotják, akkor $\rho(\mathbf{r}, t) = mn(\mathbf{r}, t)$.

5. A térfogati erősűrűség, $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ azzal a jelentéssel bír, hogy $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)dV$ megadja az $\mathbf{r}$ helyet tartalmazó dV (kicsiny, makroszkopikus) térfogatelemben található részecskékre ható átlagos eredőerőt a t pillanatban.

(A tehetetlen tömeg és az erő dinamikai fogalmak, amelyeknek a pontos jelentésére a Dinamika fejezetben térünk vissza.)

A folytonos anyageloszlású test modelljének és a pontrészecske-modellnek az összehasonlítása. Áttértünk mikroszkopikus pontrendszer-modellről egy olyan modellre, amelyben nem érdekel bennünket, hogy a testet valóságosan alkotó részecskék hol vannak és hogyan mozognak. Helyette a testet térben és időben pontról pontra folytonosan változó fizikai mennyiségekkel, térmennyiségekkel írjuk le. Ezzel biztosan elveszítettünk bizonyos finom, mikroszkopikus részleteket a test szerkezetére vonatkozóan. Amit nyertünk vele, hogy a test mozgásának makroszkopikus leírása egyszerűbb. A mozgás mikroszkopikus, pontrendszerként történő leírásához nagyon nagy számú anyagi pont pályájának, a testet alkotó részecskék N számával azonos számú $\mathbf{r}_a(t)$ $(a = 1, 2, \ldots, N)$ függvénynek a megadása szükséges. A folytonos közeg mozgásának (makroszkopikus) jellemzéséhez csak néhány, helytől és időtől függő $f(\mathbf{r}, t)$ térmennyiséget kell megadnunk. Egyetlen ilyen függvény minden térbeli pontban történő megadása kontinuum sok adat. Jogosan kérdezhetjük, miért egyszerűbb ez a leírás mégis, mint a pontrendszer tárgyalása. A pontrendszer részecskéi pályájának meghatározásához általában nagyságrendben annyi darab (közönséges) differenciálegyenletből álló egyenletrendszert kell megoldani, ahány részecske van jelen. Folytonos anyageloszlású test mozgásának tárgyalása során csak néhány f térmennyiségre vonatkozó (parciális) differenciálegyenletből álló egyenletrendszert kell megoldanunk. Innen a nyereség.

Fizikai mező, mint test. Mint már említettük, fizikai mezők nem csak akkor vannak jelen a Természetben, ha testek, azaz részecskék vannak jelen, hanem akkor és ott is, ahol nincsenek jelen részecskék, nevezetesen a vákumban. Ilyenek pl. a gravitációs mező és az elektromágneses mező. A klasszikus mechanikában ezek mint külső potenciálmezők ill. erőterek jelennek meg és a Dinamikáról szóló részben fogunk beszélni róluk részletesebben.

1.3.3 Hullámok

Ebben a fejezetben a hullámjelenség leírásával foglalkozunk. Ez a kiterjedt testekben, vagy általában fizikai mezőkben jelentkező nagyon fontos jelenség, amely a Természetben nagyon sokféleképpen fordul elő. Folytonos közegben, vagy annak felszínén mechanikai hullámok terjedhetnek. A hang és az ultrahang mechanikai hullámok. Az elektromágnesség körében előforduló hullámjelenség, ún. elektromágneses hullám pl. a fény, a mikrohullám, a rádióhullám, az infravörös sugárzás, a Röntgen-sugárzás, a fékezési sugárzás, a Cserenkov-sugárzás, a gamma-sugárzás, stb. A rádió, a televízió, a telefon, a mobiltelefon, a fax, a számítógéphálózat segítségével történő információtovábbítás mind az elektromágneses hullámok segítségével történik. Közvetett bizonyítékunk van arra is, hogy a gravitációs mezőben gravitációs hullámok terjedhetnek.

A hullámjelenségeknek számos közös vonásuk van, amelyek függetlenek attól, hogy ténylegesen milyen hullámról beszélünk. Most a hullámjelenségek ezen általános érvényű, fenomenologikus jegyeit vizsgáljuk. A jelen fejezetben ezért nincsen szükségünk azon közeg vagy fizikai mező dinamikai tulajdonságainak ismeretére, amelyben a hullámjelenség fellép. Az általánosság kedvéért legyen adott egy fizikai mező, amelyet valamilyen $\psi(\mathbf{r}, t)$ térmennyiség jellemez. **Hullámról akkor beszélünk, ha a fizikai mezőben keltett zavar a térben tovaterjed.** A térmennyiséget, amelyben a zavar jelentkezik, szokás ilyenkor **hullámmennyiségnek** nevezni. Minden hullámjelenség két mechanizmussal kapcsolatos, a zavar, azaz a hullám keltésével és a zavar, azaz a hullám terjedésével. A hullámot keltő testet általában **hullámforrásnak, antennának** nevezzük és magát a jelenséget, hogy az antennáról hullámok válnak le és kezdenek el terjedni a térben, **sugárzásnak.** A hullám keltése és a sugárzás általában függ attól, hogy milyen hullámokat keltünk, ezért ezt most nem vizsgáljuk. Ebben a fejezetben vizsgálatunkat csak a hullámok terjedésére korlátozzuk.

A hullámterjedés. A zavar keltését a legegyszerűbben úgy képzelhetjük el, hogy pl. $t < t_0$ időpillanatokban a ψ térmennyiség értéke az egész térben azonosan nulla, majd a t_0 kezdeti időpillanatban a tér valamely véges tartományában (esetleg valamely pontjában) az hullámforrásként (antennaként) szolgáló test megváltoztatja a térmennyiség értékét $\psi(\mathbf{r}, t_0) \not\equiv 0$ nullától különböző értékre. Hullámterjedésről akkor beszélünk, ha az a „mintázat", amit a hullámmennyiség, mint a hely függvénye „kirajzol", a térben tovaterjed változatlan, vagy valamilyen szabályosság szerint változó módon. **A zavar, a mintázat hullámszerű tovaterjedésének alapvető sajátossága, hogy nem kapcsolatos részecskék tovaterjedésével.** Közegben terjedő hullámok úgy terjednek, hogy a közeg részecskéi számottevően nem mozdulnak el a helyükről. Vákumban jelenlevő fizikai mezőben nincsenek is részecskék, amelyek a hullám terjedése során elmozdulhatnának. Miről van tehát szó? Nagyjából arról, hogy a hullámmennyiség adódik át valamely térfogatelemről a szomszédos térfogatelemekre, majd azokról a következő szomszédokra, stb. Az átadás mechanizmusa megint attól is függ, hogy milyen közegben, ill. fizikai mezőben terjed a hullám. A közös annyi, hogy a közeg, vagy a vákum szomszédos térfogatelemei között kölcsönhatás van, ami a hullámmennyiség átadását, s így a hullám tovaterjedését lehetővé teszi.

Hullámformák. Vegyünk most sorra néhány jellegzetes hullámformát:

1. *Hullámcsomag.* Vegyük a hullámok egyik jellegzetes esetét, a **hullámcsomag terjedését**. Legyen adott a t_0 kezdeti pillanatban a ψ fizikai mennyiségnek a $\psi(\mathbf{r}, t_0) = f(\mathbf{r})$ térben lokalizált eloszlása. Az $f(\mathbf{r})$ függvény általában valamely pontban maximummal rendelkezik, és ennek a pontnak véges sugarú

környezetében nullától lényegesen különböző értékeket vesz fel, a maximum helyétől nagy távolságban pedig nullához tart. Egy lehetséges példa a Gauss-függvény alakú hullámcsomag: $f(\mathbf{r}) = f_0 e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{2\sigma^2}}$, amelynek a maximuma az $\mathbf{r}_0$ pontban van és a „szélessége” σ. A térben $\mathbf{c}$ =áll. sebességgel mozgó hullámcsomagot a ψ térmennyiség alábbi időfüggésével tudjuk leírni:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r} - \mathbf{c}(t - t_0)). \tag{1.3.5}$$

Ez azt fejezi ki, hogy a hullámcsomagot $\mathbf{c}(t-t_0)$ vektorral kell a térben eltolni. A zavar mintázata változatlan marad, csak állandó sebességgel odább halad a térben.

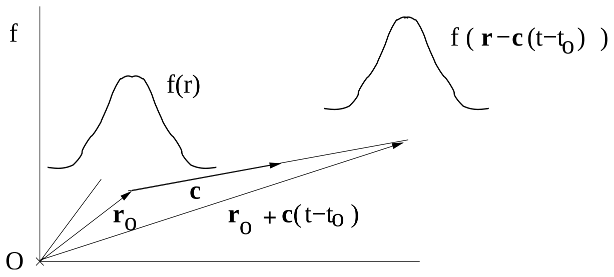

Figure 14: Hullámcsomag állandó sebességű mozgásának sematikus ábrája.

2. *Síkhullám.* Egy másik hullámforma a síkhullám. A síkhullám egyenlete:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - ct), \tag{1.3.6}$$

ahol $\mathbf{n}$ =áll egységvektor, $\mathbf{c} = c\mathbf{n}$ a síkhullám állandó terjedési sebessége, az ún. **fázissebesség.** A $\Phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - ct$ mennyiséget a hullám fázisának nevezzük. Azon pontok mértani helyét a térben, amelyekben a fázis rögzített, állandó értéket vesz fel, **fázisfelületnek** nevezzük. A fázisfelületek egyenlete:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - ct = \text{ áll.} \tag{1.3.7}$$

Ezek tehát a síkhullám esetében $\mathbf{n}$ normálisú síkok. Ezért nevezzük a síkhullámot síkhullámnak. A fázisfelületek $\mathbf{c} = c\mathbf{n}$ sebességgel mozognak. Ennek belátásához vezessük be a helyzetvektor $\mathbf{n}$ irányú vektorkomponensét, $\mathbf{r}_n = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$. Segítségével írhatjuk, hogy

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - c\mathbf{n}t = \mathbf{r}_n - \mathbf{c}t = \text{ áll. ,} \tag{1.3.8}$$

amit idő szerint differenciálva kapjuk, hogy a fázisfelületek sebessége, a **fázissebesség**:

$$\mathbf{v}_f = \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \mathbf{c}. \tag{1.3.9}$$

3. *Gömbhullám.* Egy másik példa hullámokra a **gömbhullám**:

$$\psi(r, t) = f(r \pm ct), \tag{1.3.10}$$

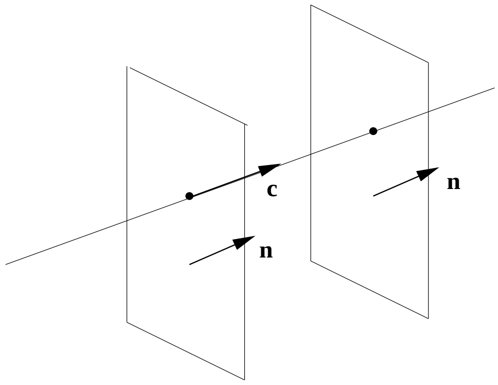

Figure 15: Síkhullám fázisfelületeinek sematikus ábrája.

ahol r egy gömbi polárkoordinátarendszerben a sugárirányú koordináta és $c > 0$ állandó. Azon pontok mértani helyének egyenlete, amelyekben a hullámmennyiség fázisa, $r \pm ct$ azonos értéket vesz fel,

$$r(t) = r_0 \mp ct \tag{1.3.11}$$

minden adott pillanatban egy gömbfelület egyenlete. A fázisfelületek gömbfelületek. A hullám (1.3.10) kifejezésében a minusz (plusz) előjel azt jelenti, hogy az idő múlásával a fázisfelületek egyre nagyobb (kisebb) sugarú gömbök, azaz az origóból kifutó (az origóba befutó) gömbhullámról van szó.

Lineáris és nem lineáris hullámjelenségek. Fontos megkülönböztetni a lineáris hullámjelenségeket a nem-lineáris hullámjelenségektől. A lényegi eltérés abban van, hogy mi történik, ha két hullám, $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ és $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ találkozik. Milyen lesz az eredő $\psi_e(\mathbf{r}, t)$ hullám, ami kialakul? **Lineáris hullámjelenségről beszélünk, ha érvényes a lineáris szuperpozíció elve: bármely két hullám összege (általánosabban lineáris kombinációja) is egy lehetséges hullám,**

$$\psi_e(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{r}, t) + \psi_2(\mathbf{r}, t). \tag{1.3.12}$$

Nem-lineáris hullámjelenségről beszélünk, ha a lineáris szuperpozíció elve nem érvényes. Ilyenkor két találkozó hullám eredője általában nem a két hullám összege,

$$\psi_e(\mathbf{r}, t) \neq \psi_1(\mathbf{r}, t) + \psi_2(\mathbf{r}, t). \tag{1.3.13}$$

Először víz felszínén észleltek nem-lineáris hullámokat. A furcsaságuk az, hogy sokkal messzebbre terjedhetnek változatlan alakkal, gyengítetlenül, mint a lineáris hullámok. Manapság az optika egy egész fejezete, a **nem-lineáris optika** foglalkozik a nem-lineáris hullámjelenségekkel és állítja azokat eredményesen a technika, többek között a fizikai úton történő információtovábbítás szolgálatába (pl. fényvezetők).

Hullámok intenzitása és interferenciája. A hullámokkal kapcsolatos egyik fontos mennyiség **a hullám intenzitása, ami a hullámmennyiség négyzetének valamilyen, az intenzitást mérő detektor által meghatározott τ időtartamra vett átlaga:**

$$I(x, t) = < \psi^2 > = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \psi^2(x, t')dt'. \tag{1.3.14}$$

Az intenzitás helyfüggését szokás hullámképnek nevezni. Ha a hullámkép független az időtől, akkor azt mondjuk, hogy a hullámok interferálnak, és ilyenkor a hullámképet interferenciaképnek nevezzük.

Hullámok elhajlása. Ha a hullám fázisfelületének útjába akadályt helyezünk, akkor azt tapasztaljuk, hogy a hullám behatol az akadály által „árnyékolt" tartományba is. Ezt a jelenséget nevezzük **elhajlásnak.**

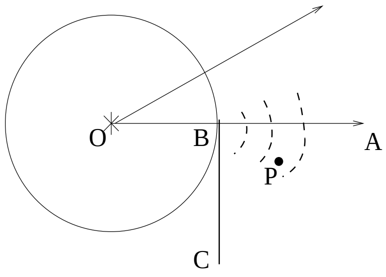

Figure 16: Hullám behatolása elhajlás révén az akadály árnyékterébe: Az O forrásból kiinduló gömbhullám elhajlás következtében behatol a BC akadály árnyékterébe (a BA és a BC félegyenesek által határolt síknegyedbe), az ott található P pontokban is zérustól különbözővé válik a hullámmennyiség értéke.

Periodikus hullámok. Alább részletesen a lineáris síkhullámokkal foglalkozunk. (Az elmondottak általánosíthatók gömbhullámokra is.) Válasszuk egyszerűség kedvéért a koordinátarendszerünk x-tengelyét a hullám terjedési irányában, ekkor a síkhullám alakja:

$$\psi(x, y, z, t) = f(x \pm ct), \tag{1.3.15}$$

ahol a negatív (pozitív) előjel jobbra (balra) haladó hullámnak felel meg. A továbbiakban elhagyjuk a hullámmennyiség argumentumából az y és z koordinátától való függés jelölését, hiszen nincsen ilyen függés. A hullámok egy fontos csoportját képezik a **periodikus hullámok**, amikor a hullámmennyiség a térben és az időben periodikusan változik. Ilyenkor létezik egy olyan legkisebb távolság, a λ **hullámhossz** és egy olyan legkisebb időtartam, a T **periódusidő,** amelyekre nézve a hullámot megadó függvény periodikus:

$$\psi(x, t) = \psi(x + \lambda, t) = \psi(x, t + T). \tag{1.3.16}$$

Felhasználva az (1.3.15) alakot, az adódik, hogy a periódusidő és a hullámhossz nem függetlenek:

$$\lambda = cT. \tag{1.3.17}$$

Bevezethetjük a periodikus hullám **frekvenciáját,** $\nu = 1/T$, ami azt méri, hogy időegységre hány periódus esik.

A matematikának van egy fontos állítása, ami azt mondja, hogy minden (kellően jó tulajdonságú) periodikus függvény, $f(u) = f(u + a)$ egyértelműen sorba fejthető szinusz- és koszinusz-függvények szerint, az ún. Fourier-sorba:

$$f(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos(k_n u) + b_n \sin(k_n u) \Big]. \tag{1.3.18}$$

A Fourier-sor tagjai a $k_n = n\frac{2\pi}{a}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ paraméterű szinusz- ill. koszinuszfüggvények, és az együtthatók:

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(u)\cos(k_n u)du, \qquad b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(u)\sin(k_n u)du. \tag{1.3.19}$$

A lineáris hullámokra érvényes a lineáris szuperpozíció elve. Ezért mondhatjuk, hogy a periodikus hullámot a Fourier-tétel segítségével koszinusz- és szinuszhullámok összegére bontjuk. Az $u \Rightarrow x \pm ct$ és $a \Rightarrow \lambda$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= f(x \pm ct) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos(k_n x \pm \omega_n t) + b_n \sin(k_n x \pm \omega_n t)\Big] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos[nk(x \pm ct)] + b_n\sin[nk(x \pm ct)]\Big] \end{aligned}\tag{1.3.20}$$

alakúnak adódik a periodikus síkhullám. Az összetevő **szinusz- és koszinuszhullámokat közös néven harmonikus hullámoknak nevezzük.** A Fourier-sor tagjai a $\omega_n = k_n c$ körfrekvenciájú, azaz $\nu_n = n\nu$ frekvenciájú, és $k_n = nk$ **hullámszámú,** azaz $\lambda_n = 2\pi/k_n = \lambda/n$ hullámhosszú harmonikus síkhullámok. Itt az **alapmódus** frekvenciája ν, hullámhossza λ $(\nu = c/\lambda)$, hullámszáma $k = 2\pi/\lambda$. A többi összetevő hullám frekvenciája az alapfrekvencia egész számú többszöröse, ezek az úgynevezett **felharmonikus frekvenciák.** Az egyes harmonikus hullámkomponensek amplitudóit meghatározó (1.3.19) képletekben szereplő $a = \lambda$ periódus az alapmódus hullámhossza, a hullám T periódusideje pedig az alapmódus periódusideje, $\nu T = 2\pi$.

Periodikus hullámok esetén az intenzitást a hullámmennyiség négyzetének egy periódusidőre vett időátlagaként szokás értelmezni:

$$I =< \psi^2 >= \frac{1}{T}\int_0^T \psi^2(x,t)dt. \tag{1.3.21}$$

Mivel periodikus hullámokra alkalmazható a Fourier-tétel, érvényes rájuk a Fourier-sorokra vonatkozó Parseval-féle egyenlőség is, amelynek következtében:

$$I = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2. \tag{1.3.22}$$

Ennek értelmében **a periodikus hullám intenzitása egyenlő az összetevő harmonikus hullámok intenzitásainak összegével.**

Komplex írásmód. A periodikus síkhullámok példáján megmutatjuk, hogy hogyan lehet a hullámmennyiséget komplex alakban felírni, ami sok esetben megkönnyíti a számolást. Ehhez fel fogjuk használni az egységnyi abszolútértékű komplex számok

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{1.3.23}$$

Euler-féle alakját, ahol $\alpha \in [0, 2\pi]$ a komplex szám valós fázisa. Legyen $\varphi_n = nk(x \pm ct)$. Ekkor azonos átalakítással kapjuk, hogy

$$\psi(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\varphi_n + b_n\sin\varphi_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} \Big(e^{i\varphi_n} + e^{-i\varphi_n} \Big) + \frac{b_n}{2i} \Big(e^{i\varphi_n} - e^{-i\varphi_n} \Big) \right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(c_n e^{i\varphi_n} + c_n^* e^{-i\varphi_n} \Big) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ink(x \pm ct)}, \qquad (1.3.24)
\end{aligned}
$$

ahol bevezettük a

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = c_n^*, \quad \text{ha} \quad n \geq 1, \\
c_0 &= \frac{a_0}{2} \qquad (1.3.25)
\end{aligned}
$$

jelöléseket. A hullám intenzitására ekkor

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \qquad (1.3.26)
\end{aligned}
$$

adódik.

Harmonikus hullámok. Tekintsünk egy általános alakú harmonikus hullámot:

$$
\psi(x,t) = A \sin(\pm k(x \pm ct) + \alpha) = A \sin(\omega t \pm kx + \alpha). \qquad (1.3.27)
$$

A **a hullám amplitudója,** $\omega = kc$ a **körfrekvenciája.** A szinusz-függvény $\omega t \pm kx + \alpha$ argumentumát **a hullám fázisának** nevezzük, α az állandó **fáziseltolódás.** További fontos összefüggések:

$$
v_f = c = \frac{\omega}{k}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (1.3.28)
$$

A k mennyiséget **hullámszámnak** nevezzük. Megjegyezzük, hogy $\alpha = -\pi/2$ választás esetén megkapjuk a fáziseltolódás nélküli koszinusz-hullámot. Az (1.3.27) egyenlet tehát valóban a harmonikus hullámok általános alakja.

Állóhullám. Vizsgáljuk meg két, azonos frekvenciájú, fáziseltolódás nélküli síkhullám szuperpozícióját, ha amplitudóik azonosak és fázissebességeik ellentétes irányúak:

$$
\psi_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t), \qquad \psi_2(x,t) = A \sin(kx + \omega t). \qquad (1.3.29)
$$

Ekkor az eredő hullám

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = A \Big[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) \Big] \\
&= 2A \sin(kx) \cos(\omega t), \qquad (1.3.30)
\end{aligned}
$$

amely térben is és időben is periodikus, de a helyfüggése és az időfüggése szeparált. A kapott hullám ún. állóhullám. **Állóhullámról akkor beszélünk, ha a térmennyiség a tér különböző pontjaiban azonos fázisban rezeg, csak a rezgések amplitudója függ a helytől. Az állóhullám tehát egy kollektív jelenség,**

mert a tér minden pontjában összehangoltan, azonos fázisban rezeg a térmennyiség.

Harmonikus hullámok interferenciája. Tegyük fel, hogy lineáris, harmonikus hullámok lineárisan szuperponálódnak. Ennek eredménye lehet **interferencia**. Az intenzitás értelmezéséhez szükséges átllagolási időtartamot válasszuk azonosnak a találkozó hullámok közül annak a periódusidejével, amelyiknek a legnagyobb a periódusideje. Időtől független hullámképet, azaz **interferenciaképet akkor és csak akkor kapunk, ha**

1. **a szuperponálódó hullámok frekvenciája megegyezik, és**

2. **a szuperponálódó hullámok időben állandó fáziskülönbséggel találkoznak.**

Ilyenkor a hullámkép időben állandó, a térben haladva erősítési és gyengítési helyek váltják egymást.

Párhuzamos nyalábok interferenciája. Az interferencia illusztrálására szuperponáljunk két azonos frekvenciájú, de δ =áll. fáziseltolódással rendelkező síkhullámot, amelyek fázissebessége azonos:

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= A_1\sin(\omega t-kx)+A_2\sin(\omega t-kx+\delta)=\mathrm{Re}\Big[A_1e^{i(\omega t-kx)}+A_2e^{i(\omega t-kx+\delta)}\Big]\\ &= A\mathrm{Re}\Big[e^{i(\omega t-kx+\epsilon)}\Big]=\frac{A}{2}\Big[e^{i(\omega t-kx+\epsilon)}+e^{-i(\omega t-kx+\epsilon)}\Big],\end{aligned} \tag{1.3.31}$$

ahol a helytől és időtől független tényezőt

$$A_1+A_2e^{i\delta}=Ae^{i\epsilon} \tag{1.3.32}$$

alakba írtuk át, ami azt jelenti, hogy

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta. \tag{1.3.33}$$

Felhasználtuk a komplex számok Euler-féle előállítását,

$$z=x+iy=|z|e^{i\varphi},\qquad |z|=\sqrt{x^2+y^2},\quad e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi, \tag{1.3.34}$$

ahol $i=+\sqrt{-1}$, ill. hogy

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\Big(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\Big),\qquad \sin\varphi=\frac{1}{2i}\Big(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\Big), \tag{1.3.35}$$

mivel

$$\Big(e^{i\varphi}\Big)^*=e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi. \tag{1.3.36}$$

Képezzük a hullámmennyiség négyzetét (valós szám négyzete egyenlő az abszolút értékének a négyzetével):

$$\psi^2=|\psi|^2=\frac{A^2}{4}\Big[2+e^{2i(\omega t-kx+\epsilon)}+e^{-2i(\omega t-kx+\epsilon)}\Big]. \tag{1.3.37}$$

Ezt kell a periódusidőre átlagolni, amikor az intenzitást számoljuk. Az átlagolást (integrálást) tagonként végezzük el. A periodikus tagok átlaga zérus, úgyhogy az eredmény:

$$I = \langle \psi^2 \rangle = \frac{A^2}{2} = \frac{1}{2}\Big(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta\Big). \tag{1.3.38}$$

Az intenzitás ebben a speciális esetben a helytől sem függ és értékét a találkozó hullámok δ =áll. fáziseltolódása döntően befolyásolja. Ha a hullámok fáziseltolódás nélkül ($\delta = 0$) találkoznak, akkor maximális erősítést kapunk. Ha a hullámok $\delta = \pi$ fáziseltolódással találkoznak, akkor maximális gyengítést észlelünk az interferencia eredményeképpen. Ha a hullámok amplitudói egyenlők, akkor a $\delta = \pi$ esetben teljes kioltást kapunk.

Kis szöget bezáró nyalábok interferenciája. Szuperponáljunk egymásra két, azonos frekvenciájú síkhullámot, amelyek terjedési irányai az (x, y) síkban fekszenek és az x-tengellyel rendre $\frac{1}{2}\epsilon$ ill. $-\frac{1}{2}\epsilon$ szöget zárnak be, és legyen az ϵ szög infinitezimális. Az egyes hullámok fázisai:

$$\omega t - k_x^{\pm}x - k_y^{\pm}y \pm \frac{1}{2}\alpha = \omega t - kx\cos\frac{1}{2}\epsilon \mp ky\sin\frac{1}{2}\epsilon \pm \frac{1}{2}\alpha \approx \omega t - kx \mp \frac{1}{2}\epsilon ky \pm \frac{1}{2}\alpha, \tag{1.3.39}$$

ahol α a két hullám közötti állandó fáziseltolódás.

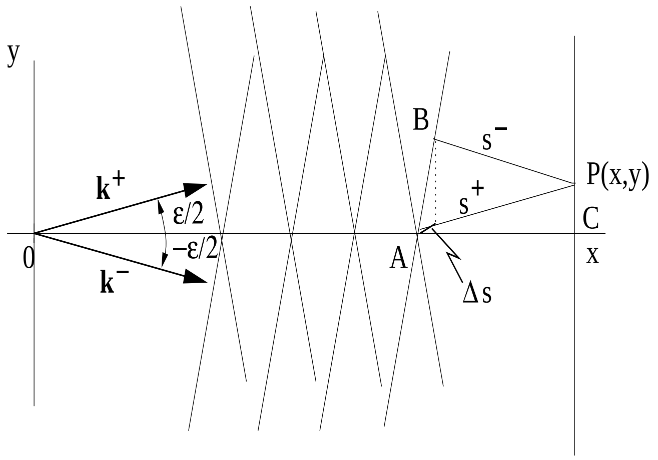

Figure 17: Interferenciacsíkok kialakulása. A $\mathbf{k}^{\pm}$ hullámvektorokra merőleges vonalak az állandó fázisú felületeket ábrázolják, ha a két hullám fázisa az origóban azonos. A P pontba beérkező hullámok útkülönbsége $\Delta s = s^+ - s^-$. Az ACP derékszögű háromszögből $y = s^+\sin(\frac{1}{2}\epsilon)$, az ABP derékszögű háromszögből $s^- = s^+\cos\epsilon$, úgyhogy az útkülönbség $\Delta s = s^+(1-\cos\epsilon) = 2s^+\sin^2(\frac{1}{2}\epsilon) = 2y\sin(\frac{1}{2}\epsilon) \approx \epsilon y$. Ha Δs a félhullámhossz páratlan számú többszöröse, akkor maximális gyengítést kapunk a P pontban, ha a félhullámhossz páros számú többszöröse, akkor maximális erősítést.

Legyen az egyszerűség kedvéért a hullámok amplitudója azonos. Ekkor az eredő hullám:

$$\begin{aligned}\psi(x,y,t) &= A\cos(\omega t - kx + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\epsilon ky) + A\cos(\omega t - kx - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\epsilon ky)\\ &= 2A\cos(\omega t - kx)\cos(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\epsilon ky)\end{aligned} \tag{1.3.40}$$

Képezzük a hullám intenzitását:

$$I(y) = \frac{1}{T}\int_0^T 4A^2\cos^2(\omega t - kx)\cos^2(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\epsilon ky)dt$$
$$= 2A^2\cos^2(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\epsilon ky). \tag{1.3.41}$$

Innen látjuk, hogy ha egy detektort mozgatunk az y tengely mentén, akkor felváltva fogunk erősítési és gyengítési helyeket észlelni. Ezek azok a nevezetes **interferenciacsíkok,** amelyeket interferométerekben meg szoktak figyelni. Pl. ha $\alpha = 0$, akkor a találkozó hullámok fáziskülönbsége az x-tengelytől y távolságra levő P pontban $\Delta\Phi = \epsilon ky$, útkülönbsége $\Delta s = \epsilon y$. Maximális erősítést ill. gyengítést akkor kapunk, ha $\Delta\Phi = 2n\pi$ ill. $(2n+1)\pi$, ahol n egész szám. Ezért a maximális erősítés ill. gyengítés feltétele, hogy az útkülönbség a félhullámhossz páros számú ill. páratlan számú többszöröse legyen.

2 DINAMIKA

A dinamika meghatározza a mozgás törvényeit, a mozgásegyenleteket és a mechanikai kölcsönhatások erőtörvényeit. A mozgásegyenleteket a legkisebb hatás elvéből származtatja le. Megfogalmazza a Galilei-féle relativitási elvet, amely kimondja, hogy a mechanika törvényei valamennyi inerciarendszerben egyetemesen érvényesek. Megmutatja, hogy a tér és az idő szimmetriái a szabad mozgást teljesen meghatározzák, a kölcsönhatások erőtörvényeinek alakját pedig megszorítják. A szimmetriák következményeiként megmaradási törvényeket fogalmaz meg.

2.1 A klasszikus mechanika elvei

A klasszikus mechanika alapját a legkisebb hatás elve és a Galilei-féle relativitási elv képezi. A legkisebb hatás elve szolgáltatja a mozgásegyenleteket. A Galilei-féle relativitási elv pedig kimondja, hogy valamennyi inerciarendszerben ugyanazok a mozgástörvények érvényesek, rámutat a tér és az idő szimmetriáinak szerepére a klasszikus mechanikai mozgások során.

2.1.1 A legkisebb hatás elve

A legkisebb hatás elve értelmében

1. **minden mechanikai rendszernek létezik az** L **Lagrange-függvénye, amely a rendszer** $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ **általános koordinátáinak és** $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s)$ **általános sebességeinek** (s a rendszer szabadsági fokainak száma), **valamint a** t **időnek a függvénye** $L(q, \dot{q}, t)$**, és ennek az idő szerinti integrálja rögzített kezdeti** t_k **és végső** t_v **időpontok között az** $S[q(t)]$ **hatás,**

$$S[q(t)] = \int_{t_k}^{t_v} L(q(t'), \dot{q}(t'), t')dt'; \qquad (2.1.1)$$

   és

2. **a hatásnak a ténylegesen megvalósuló fizikai mozgás** $q_{\text{val}}(t)$ **pályájára kiszámított értéke extremális,**

$$S[q_{\text{val}}(t)] = \text{ extremum} \qquad (2.1.2)$$

   az összes olyan elképzelt $q(t)$ **pályákra kiszámolt hatásértékek között, amelyeknek kezdő- és végpontjai rögzítettek és megegyeznek a valóságos mozgás pályájának kezdő és végpontjával:** $q(t_k) = q_k$**,** $q(t_v) = q_v$**.**

Részletezzük az elvben megfogalmazott állításokat. A legkisebb hatás elve egyrészt posztulálja a Lagrange-függvény, ill. az annak idő szerinti integrálásával értelmezett hatás létezését. Másrészt, kimondja, hogy a mozgás úgy, olyan pályán valósul meg adott kezdeti és végpont között, hogy a hatás értéke extremális legyen. Ebből világos, hogy a hatás, pontosabban a Lagrange-függvény tényleges (explicit) alakja határozza meg, hogy milyen lesz a mozgás. A Lagrange-függvény, ill. a hatás tartalmazza a rendszerre vonatkozó összes dinamikai információt. A legkisebb hatás elve azt mondja meg, hogyan kell a mozgásra vonatkozó információt a hatásból kiolvasni: meg kell keresni azt a $q_{\mathrm{val}}(t)$ pályát, amelyre a hatás extremális értéket vesz fel. Ugyanakkor az elv arról semmit nem mond, milyen a Lagrange-függvény explicit alakja.

A Lagrange-függvény változói az általános koordináták, $q \equiv (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ és a hozzájuk tartozó általános sebességek $\dot{q} \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s)$, valamint a Lagrange-függvény a t időtől is függhet explicit módon. Azzal, hogy az általános koordináták mellett csak azok idő szerinti első deriváltjait szerepeltetjük a Lagrange-függvényben, azt posztuláljuk, hogy a mechanikai rendszer állapotának egyértelmű megadásához az általános koordinátáknak és a hozzájuk tartozó általános sebességeknek a meghatározása szükséges és elegendő. Látni fogjuk, hogy ennek a következménye, hogy a mozgásegyenletek másodrendű differenciálegyenletek. Egy s szabadsági fokú rendszer esetén a Lagrange-függvény s darab általános koordinátától és azok idő szerinti első deriváltjaitól függ.

A hatás **lokális**: a Lagrange-függvény t pillanatban felvett értéke csak az általános koordinátáknak és az általános sebességeknek a t pillanatban felvett értékeitől függ és független attól, hogy azok milyen értékeket vettek fel a korábbi időpillanatokban.

A hatás a Lagrange-függvény idő szerinti integrálja. Matematikai értelemben az értéke, ami egy valós szám, attól függ, hogy milyen $q(t) \equiv (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t))$ függvényeket helyettesítünk be az integrandusba. A hatás tehát a $q(t) \equiv (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t))$ függvényekhez, az ún. elképzelt pályákhoz rendel valós számokat. **Az olyan leképezést, amely függvényekhez rendel valós számot a matematikában funkcionálnak nevezik. A hatás tehát funkcionál.**

A legkisebb hatás elvének alkalmazásakor a hatás szélsőértékét adó, ténylegesen megvalósuló pályát olyan elképzelt pályák között keressük, amelyeknek adott kezdeti és végső pillanathoz tartozó kezdő- és végpontjai le vannak rögzítve.

Adott mechanikai rendszer Lagrange-függvénye nincsen egyértelműen meghatározva. Ha $L(q, \dot{q}, t)$ a rendszer egy lehetséges Lagrange-függvénye, akkor minden olyan $L'(q, \dot{q}, t)$ Lagrange-függvény vele egyenértékű, amelyet L-ből egy tetszőleges $f(q, t)$ függvény idő szerinti teljes deriváltjának hozzáadásával kapunk:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q(t), t)}{dt}. \tag{2.1.3}$$

Ekkor ugyanis

$$S'[q(t)] = S[q(t)] + \int_{t_k}^{t_v} \frac{df(q(t), t)}{dt} dt = S[q(t)] + f(q(t_v), t_v) - f(q(t_k), t_k), \tag{2.1.4}$$

és mivel a mozgás tényleges pályájának keresése során a kezdőpont és a végpont le van rögzítve, az utolsó két tag jelenléte nem befolyásolja az extrémum helyét az elképzelt pályák „terében”, hanem csak az extrémum értékét változtatja meg egy additív állandóval. Innen az is látszik, hogy a hatás egy additív állandó erejéig van egyértelműen meghatározva.

2.1.2 A mozgásegyenletek

A legkisebb hatás elve alapján le tudjuk vezetni a pontrendszer mozgásegyenleteit. **Az s szabadsági fokú rendszer esetén a mozgásegyenletek száma azonos**

a szabadsági fokok számával, vagyis s, és azok alakja:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \tag{2.1.5}$$

Ezek az s szabadsági fokú rendszer Euler-Lagrange-egyenletei. Az Euler--Lagrange-egyenletek s darab csatolt, közönséges, másodrendű differenciálegyenletből álló differenciálegyenlet-rendszert alkotnak.

A levezetést most az $s = 1$ esetre végezzük el. Az eljárás lényege hasonló, mint amikor egy $f(x)$ függvény szélsőértékét keressük. Idézzük fel először ennek a módját. Megnézzük a függvény infinitezimális megváltozását egy tetszőleges x hely környezetében, ha x-et infinitezimálisan, tetszőleges h-val megváltoztatjuk:

$$\begin{aligned} \delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \approx f(x) + h\frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \ldots - f(x) \\ &= h\frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Ha $x = x_0$ szélsőértékhelyen vagyunk, akkor ez a különbség h-ban első rendben, tetszőleges h esetén eltűnik, azaz

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \tag{2.1.7}$$

ami a szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Az $\mathcal{O}(h^2)$ rendű tag pozitív vagy negatív előjele pedig azt mutatja meg, hogy a szélsőérték rendre minimum, vagy maximum. A szélsőérték szükséges feltételét jelentő (2.1.7) egyenletet megoldva kapjuk meg a szélsőérték x_0 helyét (ha létezik ennek az egyenletnek megoldása).

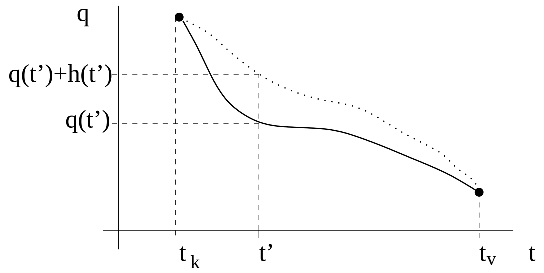

Figure 18: A mozgás egy elképzelt $q(t)$ pályája és egy hozzá képest infinitezimálisan különböző, elképzelt $q(t) + h(t)$ pálya, amelynek rendre azonos a kezdő- és a végpontja. Ha $q(t) \equiv q_{\text{val}}(t)$ a mozgás valódi pályája, akkor a hatás ezen a pályán minimális, azaz a többi, elképzelt $q_{\text{val}}(t) + h(t)$ pályán nagyobb értéket vesz fel, mint a valódi pályán.

Most ehhez hasonló logikával keressük meg a hatásfunkcionál szélsőértékét, ill. azt a $q_{\text{val}}(t)$ pályát, amelyre a hatás a szélsőértékét felveszi. Vegyünk ezért egy tetszőleges $q(t)$ függvényt, legyen a hatás ezen elképzelt pályán felvett értéke $S[q(t)]$. Változtassuk meg ezután a $q(t)$ pályát az infinitezimális értékeket felvevő, tetszőleges $h(t)$ függvénnyel, $q(t)+h(t)$, azaz számoljuk ki a hatás értékét erre a megváltoztatott pályára vonatkozóan: $S[q(t)+h(t)]$. Képezzük most a megváltoztatott és az eredeti pályán vett hatásértékek különbségét:

$$\delta S[q(t)] = S[q(t) + h(t)] - S[q(t)]$$

$$= S[q(t)] + \int_{t_k}^{t_v} \left[\left.\frac{\partial L}{\partial q}\right|_{q(t)} h(t) + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right|_{q(t)} \frac{dh(t)}{dt} + \mathcal{O}(h^2) \right] dt - S[q(t)]$$

$$= \int_{t_k}^{t_v} \left[\left.\frac{\partial L}{\partial q}\right|_{q(t)} h(t) + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right|_{q(t)} \frac{dh(t)}{dt} + \mathcal{O}(h^2) \right] dt. \qquad (2.1.8)$$

A legkisebb hatás elve értelmében eljárásunk során még azt kell figyelembe venni, hogy a $q(t)$ és a tetszőlegesen megváltoztatott $q(t)+h(t)$ pályák kezdő- ill. végpontjai megegyeznek, rögzítettek, azaz $h(t_k) = h(t_v) = 0$. Ha a $q(t) = q_{val}(t)$ pálya a hatás szélsőértékhelye, akkor ott a hatás intinitezimális megváltozása $\mathcal{O}(h)$ rendben tetszőleges infinitezimális $h(t)$ függvény esetén eltűnik, ez a szélsőérték szükséges feltétele:

$$\int_{t_k}^{t_v} \left[\left.\frac{\partial L}{\partial q}\right|_{q(t)} h(t) + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right|_{q(t)} \frac{dh(t)}{dt} \right]_{q_{\mathrm{val}}(t)} dt = 0, \qquad (2.1.9)$$

ahol $h(t)$ tetszőleges, infinitezimális értékű függvény. Ebből az egyenletből, azaz a szélsőérték szükséges feltételéből kell kiolvasnunk a mozgás tényleges $q_{\mathrm{val}}(t)$ pályáját. Ehhez még el kell távolítanunk az egyenletből a tetszőleges $h(t)$ függvényt. Hajtsunk ezért végre parciális integrálást a bal oldal második tagjában:

$$\int_{t_k}^{t_v} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]_{q_{\mathrm{val}}(t)} h(t) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h(t) \right]_{t_k}^{t_v}$$

$$= \int_{t_k}^{t_v} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]_{q_{\mathrm{val}}(t)} h(t) dt = 0, \qquad (2.1.10)$$

ahol a második egyenlőség felírásakor kihasználtuk, hogy $h(t_k) = h(t_v) = 0$. A matematika variációszámítás nevű fejezetének egyik nevezetes tétele értelmében az

$$\int_{t_k}^{t_v} f(t) h(t) dt \qquad (2.1.11)$$

alakú határozott integrál (kellően jó viselkedésű $f(t)$ függvényt feltételezve) akkor és csak akkor tűnhet el tetszőleges $h(t)$ függvény esetén, ha $f(t) = 0$ azonosan teljesül. Ezt a tételt felhasználva azt kapjuk, hogy a ténylegesen megvalósuló mozgás $q_{\mathrm{val}}(t)$ pályája a

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \qquad (2.1.12)$$

egyenlet megoldása. Ezt akartuk bebizonyítani.

Az s szabadsági fokú rendszer esetén a mozgásegyenletek levezetése hasonló gondolatmenettel történik.

2.1.3 A kezdőfeltételek

Az s szabadsági fokú pontrendszer Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletei s darab csatolt, közönséges, másodrendű differenciálegyenletet jelentenek. A keresett s darab függvény a $q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ s darab általános koordináta mint az idő függvénye.

A differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy ezen egyenletek egyértelmű megoldásához pontosan $2s$ darab kezdeti feltételre van szükség. Ezek az általános koordináták és az általános sebességek kezdőértékei valamely tetszőlegesen választott t_0 kezdeti pillanatban:

$$q_i(t_0) = q_{i0}, \quad \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0}, \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{2.1.13}$$

Minden kezdőfeltételhez pontosan egy megoldás tartozik. Ez biztosítja, hogy adott kezdőfeltétel esetén a megoldás egyértelmű. Mivel a fenti $2s$ darab kezdőfeltétel a mozgás teljes időbeli lefolyását meghatározza a mozgásegyenlet alapján, azért azt mondhatjuk, hogy adott pillanatban a pontrendszer fizikai állapotát ez a $2s$ adat szükséges és elegendő módon jellemzi. A pontrendszer állapotának megadásához pontosan ezt a $2s$ darab adatot kell meghatározni.

Miután a hatásban nem engedtük meg az általános koordináták elsőnél magasabb rendű deriváltjainak fellépését, azért lettek a mozgásegyenletek másodrendű differenciálegyenletek, és azért szükséges és elegendő az egyértelmű megoldáshoz a fenti $2s$ darab kezdőfeltétel a koordinátákra és első deriváltjaikra vonatkozóan. Így „építettük be" a Lagrange-függvénybe, ill. a hatásba, hogy pontosan ezekkel az adatokkal tudjuk a pontrendszer mechanikai állapotát meghatározni. Ha a hatásban az általános koordináták idő szerinti magasabb deriváltjai is szerepelnének, akkor mindez megváltozna.

Figyeljünk fel arra, hogy a mozgásegyenleteket a Lagrange-függvény parciális deriváltjainak segítségével tudtuk minden mechanikai rendszerre egyaránt érvényes, általános alakban felírni. Bármilyen konkrét pontrendszerre alkalmazzuk azonban ezeket az egyenleteket, akkor a Lagrange-függvény explicit alakját először meg kell adjuk. Ezután a parciális deriválások elvégezhetők és a kapott egyenletek a keresett általános koordinátáknak, mint az idő függvényeinek legfeljebb csak a második deriváltjait tartalmazzák. Pontosan a Lagrange-függvény, ill. a hatás explicit alakja az, aminek alapján tudjuk, hogy milyen konkrét fizikai rendszerről beszélünk. Matematikailag végtelen sokféle Lagrange-függvényt el lehet képzelni, hiszen adott számú általános koordinátából és sebességből végtelen sok matematikai kifejezést lehet alkotni. Ezek közül azonban csak néhány fog valóságos, a Természetben megvalósuló fizikai rendszernek megfelelni. Szokás ezért azt is mondani, hogy ha egy mechanikai rendszer fizikai modelljét keressük, akkor a neki megfelelő Lagrange-függvényt keressük.

2.1.4 Determinisztikus és kaotikus mozgás. A kezdőfeltételek pontossága

A pontrendszer mozgásegyenleteinek az tehát az egyik fontos vonása, hogy ha ismerjük a rendszer mechanikai állapotát valamely $t = t_0$ pillanatban, akkor ebből a mozgásegyenletek megoldása útján egyértelműen meg tudjuk határozni a rendszer állapotát bármely későbbi vagy korábbi pillanatban. Azt jelenti-e ez, hogy meg tudjuk a rendszer pillanatnyi állapotának ismeretében annak bármilyen későbbi állapotát korlátlan pontossággal előre mondani? Ha a kezdőfeltételeket korlátlan pontossággal ismernénk, akkor a differenciálegyenletek elmélete szerint igen.

A gyakorlatban ez mégsem mindig van így. A kezdőfeltételek mérések eredményei. Így azokat mindig véges pontossággal ismerjük. A kérdést helyesen tehát úgy kell feltenni, hogy meg tudjuk-e előre mondani a mozgás eredményeként, tetszőleges későbbi időpillanatban előálló mechanikai állapotot legalább olyan pontossággal, mint amilyen pontosan a kezdőfeltételeket ismerjük. Ha ez így van, akkor tetszőleges pontossággal tudjuk előre megmondani, hogy milyen lesz tetszőleges idő múlva a mechanikai rendszer állapota. **A klasszikus mechanikai rendszerek alapvetően kétfélék lehetnek: determinisztikusak és kaotikusak.**

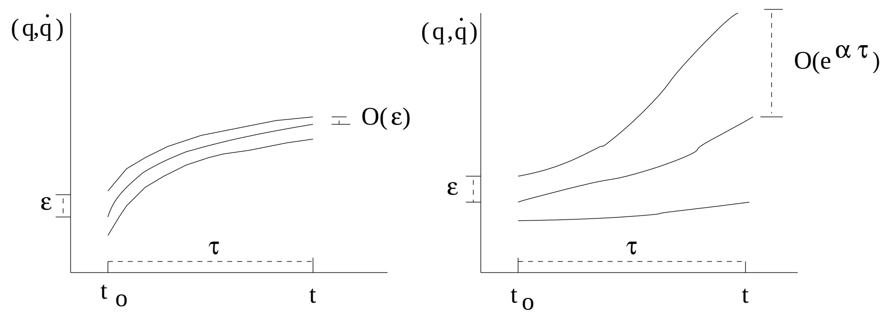

Figure 19: Determinisztikus mozgás (bal oldali ábra) és kaotikus mozgás (jobb oldali ábra) kicsit különböző kezdőfeltételekhez tartozó „pályáinak együttfutása", ill. „széttartása" a $(q, \dot{q})$-térben.

1. *Determinisztikus klasszikus mechanikai rendszer.* **Akkor mondjuk, hogy a mechanikai rendszer determinisztikus, ha a mozgásegyenletek kezdőfeltételeiben elkövetett hibával azonos nagyságrendű hibával tudjuk megadni a mozgás eredményét tetszőleges későbbi időpillanatban.** Legyen a kezdőfeltételek hibája $\mathcal{O}(\epsilon)$. Képzeljük el, hogy megoldjuk a mozgásegyenleteket különböző kezdőfeltételekkel, amelyek azonban csak $\mathcal{O}(\epsilon)$ rendben különböznek egymástól. A különböző kezdőfeltételekhez más-más megoldások tartoznak, úgyhogy a különböző megoldásoknak megfelelően tetszőleges $\tau = t - t_0$ idővel később más és más a mechanikai rendszer állapota. Ha a kezdőfeltételek $\mathcal{O}(\epsilon)$ rendű megváltoztatása a megoldást tetszőleges későbbi pillanatban is csak $\mathcal{O}(\epsilon)$ rendben változtatja meg, akkor determinisztikus rendszerről beszélünk. **A determinisztikus mozgást végző rendszer érzéketlen a kezdőfeltételek kicsiny megváltoztatására.** Szerencsére van néhány ilyen mozgás, pl. azok **a periodikus mozgások,** amelyek összehasonlításával a időmérés etalonjául szolgáló órát kiválasztjuk, vagy pl. minden, szigorúan lineáris erőtörvényű rugó végén rezgő részecske mozgása.

   Az elmondottakat úgy szemléltethetjük, hogy a mechanikai rendszer állapotát ábrázoló pontot minden pillanatban felrajzoljuk egy olyan $2s$-dimenziós $(q, \dot{q})$ Descartes-koordinátarendszerben, amelynek tengelyeire az általános koordinátákat és az általános sebességeket mérjük fel (ld. 19. ábra). A kezdőfeltételekre mutatott érzéketlenséget úgy is tekinthetjük, hogy a mozgás pályája (periodikus mozgás esetén) **stabil,** kis külső zavar időnkénti megjelenése nem jelent lényeges változást a mozgás periodikusan ismétlődő jellegében. Mi a legkisebb hatás elve és az Euler-Lagrange-egyenletek megoldásai kapcsán nem vetettük fel a stabilitás kérdését. A hatás minimumának csak a szükséges feltételét használtuk ki, amikor levezettük az Euler-Lagrange-egyenleteket. Nyilván az is kérdés lehet, hogy a hatás minimumńak elégséges feltétele vajon teljesül-e az Euler-Lagrange-egyenletek megoldásával kapott pályán minden időpillanatban. Determinisztikus mozgás akkor jelentkezik, ha a hatás minimumának elégséges feltétele is teljesül a mozgás során.

2. *Kaotikus klasszikus mechanikai rendszer.* A fizikai rendszerek másik típusa, amikor **a mozgás érzékeny az $\mathcal{O}(\epsilon)$ mértékben különböző kezdőfeltételekre,** s azokhoz jelentősen különböző megoldások tartoznak. Pl. a

19. (b) ábrán olyan viselkedést mutatunk, amikor a kezdőfeltételek $\mathcal{O}(\epsilon)$ pontatlansága véges $\tau = t - t_0$ idővel később $\mathcal{O}(e^{\alpha\tau})$ mértékben különböző „pályákat" eredményez, ahol $\alpha > 0$. Ilyenkor a kicsit különböző kezdeti feltételekhez tartozó „pályák" a $(q, \dot{q})$ „térben" az eltelt idővel exponenciális mértékben növekedve fognak különbözni. Teljesen nyilvánvaló, hogy ilyenkor nem lehet korlátlan időre tetszőleges pontossággal előrejelezni, hogy milyen lesz a mechanikai rendszer állapota valamely tetszőleges későbbi pillanatban. Az előrejelezhetőség $t \ll \frac{1}{\alpha}$ időtartamokra korlátozódik. Az ilyen fizikai rendszereket kaotikusnak nevezzük.

A kaotikus viselkedés lehet azzal kapcsolatos, hogy **a „pályának" vannak instabilitási pontjai.** Instabil helyzet pl. egy részecske egy függőlegesen lefelé nyíló forgási paraboloid csúcsán nehézségi erőtérben. Azt, hogy merre gurul le a részecske, egy nagyon kis perturbáció eldöntheti és a végeredmény véges idő múlva teljesen különböző lehet. Ha a mozgás olyan, hogy a „pálya" instabilitási pontok sorozatán halad át, akkor előrejelezhetetlen lesz a mozgás.

A kaotikus mozgásnak további vonását fedezzük fel, ha azt vizsgáljuk, van-e a mozgásnak ismétlődő jellege. Nevezetesen, ha bizonyos időközönként, sokszor egymásután megmérjük egy kaotikus mozgást végző részecske (szabadsági fok) helyét és sebességét és a megfelelő pontokat a $(q, \dot{q})$ síkon ábrázoljuk, akkor általában szabályosságot mutató ponthalmazt kapunk. **A kaotikus mozgásban van valami rend, valami szabályosság.**

Általában ez megkülönbözteti

(a) a periodikus determinisztikus mozgástól, és

(b) a **zajos** mozgástól.

Egy periodikus determinisztikus mozgás esetén, ha a fenti grafikonra a periódusidőnként mért adatokat rajzoljuk, akkor egyetlen pontot kapunk: a részecske egy periódusidő után mindig ugyanoda tér vissza, s mindig ugyanakkora sebességgel A **zajos** mozgásra példa egy részecske Brown-mozgása. Utóbbi esetben a pontok egyenletes sűrűséggel fogják kitölteni hosszú idő után a $(q, \dot{q})$ síknak a mozgás számára rendelkezésre álló tartományát. Nem mutat a grafikon semmiféle szabályosságot.

Az egy- és a két szabadsági fokú rendszer mindig determinisztikus. A kettőnél több szabadsági fokú rendszer mutathat kaotikus viselkedést, ha a mozgásegyenletek nem lineárisak. **A mozgásegyenleteket nem lineárisaknak nevezzük, ha a keresett általános koordinátáknak és azok deriváltjainak nem lineáris kifejezései lépnek fel bennük.** A Természetben előforduló mechanikai rendszerek szinte mindig nem lineáris mozgásegyenleteknek tesznek eleget. Ezért a kaotikus viselkedés a Természetben nagyon gyakori. A kaotikus viselkedés általában kevés szabadsági fokú rendszerekben lép fel. Bizonyos értelemben átmenetet képvisel a determinisztikus mozgás és a nagyon sok szabadsági fokú rendszerek **zajos** viselkedése között. Az utóbbiak átlagosan megintcsak előrejelezhetők, amivel a **statisztikus fizika** foglalkozik.

A félév során csak determinisztikus mozgással foglalkozunk. Ezek szigorúan véve inkább iskolapéldák, mint valóságos rendszerek. A valóságos rendszerek egy részét azonban lehet determinisztikus mozgással közelíteni valamilyen karakterisztikus időnél rövidebb idejű mozgásuk tekintetében. Pl. a Naprendszer sem determinisztikus, de az előre jósolhatóság karakterisztikus ideje sok-sok nagyságrenddel meghaladja az Ember történetének időskáláját, noha jóval kisebb mint a Naprendszer életkora. A kaotikus mozgás iránt érdeklődő Olvasót a [5] tankönyvre utaljuk.

2.1.5 Inerciarendszerek. Newton I. törvénye

A vonatkoztatási rendszerek végtelen sokféleképpen választhatók meg. Ha nem vagyunk körültekintőek, akkor bennük még a legegyszerűbb mechanikai rendszer, az anyagi pont mozgását és az azt meghatározó törvényeket is nagyon bonyolultnak láthatjuk. Vannak azonban olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyekben a mozgásokat meghatározó törvények viszonylag egyszerű alakúak. Ez az egyszerűség annak a következménye, hogy ezekben a rendszerekben sem a térben, sem az időben nincsen semmi kitüntetettség. **Az olyan vonatkoztatási rendszert, amelyből nézve a tér homogén és izotróp, az idő pedig homogén, inerciarendszernek nevezzük. Newton I. törvénye kimondja, hogy létezik inerciarendszer.**

A térnek és az időnek az inerciarendszer definíciójában említett tulajdonságait csak önmagára hagyott, szabad mechanikai rendszer segítségével lehet vizsgálni. Ha ugyanis a rendszer nem szabad, hanem kölcsönhat más testekkel, akkor mozgása már nem, vagy nem csak a tér és az idő tulajdonságait jellemzi. Vegyük sorra, hogy mit is jelentenek a tér és az idő fenti tulajdonságai.

1. *A tér homogén.* **A tér homogén, ha nincsen benne kitüntetett pont, minden pontja egyenértékű egy önmagára hagyott mechanikai rendszer, pl. anyagi pont mozgása szempontjából.** Ez pl. azt jelenti, hogy ha az inerciarendszerben bárhol helyezünk is el egy zérus kezdősebességű anyagi pontot, az egyformán nyugalomban marad. (Ennek ellentéte lenne, ha a tér bizonyos pontjaiban nyugalomban maradna, más pontjaiban meg nem. Ekkor nem lenne homogén a tér.)

2. *A tér izotróp.* **A tér izotróp, ha nincsen benne kitüntetett irány.** Egy önmagára hagyott mechanikai rendszer segítségével nem lehet a tér irányai között különbséget tenni. Pl. a tér adott pontjában zérus kezdősebességgel elhelyezett és önmagára hagyott anyagi pont nyugalomban marad és nem indul el valamilyen irányban, ami bizonyítaná, hogy van egy kitüntetett irány a térben. Másik példa, ha a tér tetszőleges pontjában nem zérus kezdősebességgel helyezünk el egy szabad anyagi pontot, akkor az megőrzi sebességét, mert ha nem így lenne, akkor a részecske kezdeti gyorsulása kijelölne egy irányt a térben, amit - kölcsönhatás hiányában - a tér kitüntetett irányának kellene tekintenünk.

3. *Az idő homogén.* **Az idő homogén, ha nincsen kitüntetett időpillanat.** Például a tér tetszőleges pontjában zérus kezdősebességgel elhelyezett szabad anyagi pont egyformán nyugalomban marad, bármelyik időpillanatban helyezzük is oda.

A fentiekből tehát következik, hogy **inerciarendszerben egy magára hagyott (pontszerű) test megtartja egyenesvonalú egyenletes mozgását, ill. nyugalmi állapotát.** Az utóbbi állítást tekinthetjük az inerciarendszer másik, kevésbé elvont definíciójának is.

Kérdés, hogy létezik-e inerciarendszer? A tapasztalat szerint ilyen rendszerek jó közelítéssel találhatók, pl. az állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszer. Ezt a tapasztalatot fogalmazza meg **Newton I. törvénye, amely kimondja, hogy létezik inerciarendszer.** Ha létezik egy darab K inerciarendszer, akkor végtelen sok inerciarendszer létezik: a sebességösszeadás szabálya szerint minden, a K-hoz képest állandó $\mathbf{V}$ sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben a magára hagyott anyagi pont állandó sebességgel fog mozogni, vagyis meg fogja őrizni egyenesvonalú egyenletes mozgását. **Tehát egy inerciarendszerhez képest állandó**

sebességgel mozgó valamennyi vonatkoztatási rendszer inerciarendszer. A következő fejezetben a **Galilei-féle relativitási elvvel** fogunk foglalkozni, amely kimondja, hogy **az inerciarendszerek egymással is egyenértékűek a mechanikai törvények szempontjából.**

2.1.6 A Galilei-féle relativitási elv

Arról már beszéltünk, hogy a mechanika törvényei az inerciarendszerekben a legegyszerűbbek. Láttuk azt is, hogy a szabad anyagi pont azonos módon mozog minden inerciarendszerben. Feltehetjük a kérdés, hogy azonosak-e általában is a mechanika törvényei minden inerciarendszerben? **A Galilei-féle relativitási elv kimondja, hogy a mechanika törvényei a különböző inerciarendszerekben azonosak.** Ez azt is jelenti, hogy az inerciarendszerek a mechanikai törvények szempontjából egyenértékűek. Mechanikai kísérletek segítségével nem lehet egyik inerciarendszert sem kitüntetni a többihez képest. Ez többek között azt is jelenti, hogy nincsen abszolút nyugalomban levő inerciarendszer.

A mechanika törvényei implicit alakban a hatásfunkcionálban foglaltatnak benne. A Galilei-féle relativitási elv ezért azt jelenti, hogy a hatásfunkcionál alakja minden inerciarendszerben azonos. Pontosabban, a mechanikai rendszer Lagrange-függvénye különböző inerciarendszerekben legfeljebb csak egy függvény idő szerinti teljes deriváltjában különbözhet. **Azt a matematikai transzformációt, amely megadja, hogy hogyan kell az időt és a helyzetvektorokat transzformálni, ha egy tetszőleges K inerciarendszerről áttérünk egy tetszőleges másik, a K-hoz képest $\mathbf{V}$ sebességgel mozgó K' inerciarendszerre, valódi Galilei-transzformációnak nevezzük. A Galilei-elv értelmében, az önmagára hagyott** (más testekkel kölcsön nem ható) **mechanikai rendszer hatásfunkcionálja invariáns a Galilei-transzformációkkal szemben. A szabad rendszer hatásfunkcionáljának a Galilei-transzformációk szimmetriái.**

Keressük meg a Galilei-transzformációk matematikai alakját. A továbbiakban egységesebb matematikai tárgyalást jelent, ha egy adott inerciarendszeren belül felvett különböző koordinátarendszereket is mint különböző inerciarendszereket fogjuk kezelni. Ezt is figyelembe véve, a K inerciarendszerből az alábbi transzformációkkal kaphatunk más K' inerciarendszert:

1. **Eltolás a térben.** Ha a K' rendszer a K-hoz képest nyugalomban van ($\mathbf{V} = 0$), a rendszeridők azonosak, $t = t'$, de a K' rendszert úgy kapjuk, hogy K minden pontját $\mathbf{b}$=áll. vektorral toljuk el. Ekkor tetszőleges P pont K-ban és K'-ben vett helyzetvektoraira

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b}. \tag{2.1.14}$$

   A térbeli eltolást a $\mathbf{b}$ vektor, azaz annak 3 darab b_x, b_y, b_z komponense, 3 valós paraméter határozza meg, amelyek értéke $b_i \in (-\infty, +\infty)$ tetszőleges lehet.

2. **Elforgatás a térben.** K és K' egymáshoz képest nyugalomban van, a rendszeridők azonosak, $t = t'$, és K'-t úgy kapjuk K-ból, hogy K-t a origójában felvett $\mathbf{n}$ egységvektor mint irány körül α szöggel elforgatjuk. Forgassuk el a koordinátarendszert az (origóban felvett) $\mathbf{n}$ irány körül infinitezimális $d\alpha$ szöggel. Ekkor tetszőleges P pont K-beli $\mathbf{r}$ helyzetvektorához K'-ben az

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{n}d\alpha \times \mathbf{r} \tag{2.1.15}$$

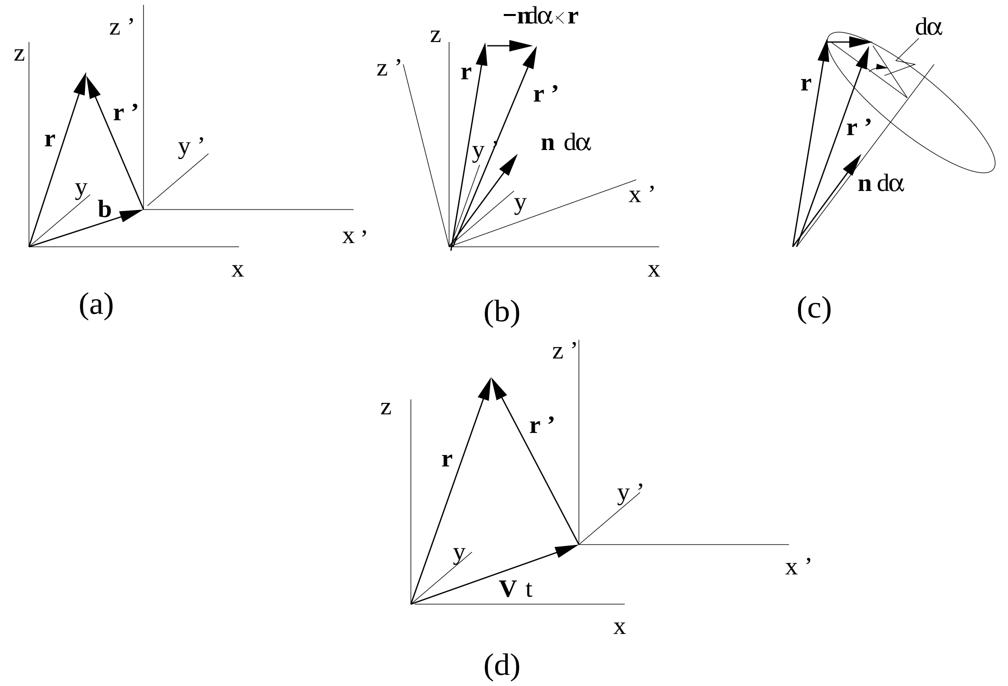

Figure 20: Galilei-transzformációk: eltolás (a), elforgatás (b,c) és valódi Galilei-transzformáció (d).

helyzetvektor tartozik. Az elforgatást 3 valós paraméter határozza meg, az $\mathbf{n}$ egységvektor irányát meghatározó $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ polár- és azimutszög és az elforgatás $\alpha \in [0, \pi]$ szöge.

Két tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektor vektoriális szorzatán olyan $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort értünk, amelynek Descartes-komponenseit

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x \tag{2.1.16}$$

utasítással kell meghatározni. A fenti relációkat tömören

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.1.17}$$

alakba írhatjuk, ha az $a_1 = a_x$, $a_2 = a_y$, $a_3 = a_z$, stb. jelöléseket és a Levi-Civita-féle ϵ_{ijk} szimbólumot használjuk:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{pmatrix} 1, & \text{ha} & (i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1, & \text{ha} & (i,j,k) = (3,2,1),(2,1,3),(1,3,2) \\ 0, & \text{egyébként} & \end{pmatrix}. \tag{2.1.18}$$

A vektori szorzat néhány tulajdonsága:

(a) A vektori szorzat eredménye a tényező vektorokra merőleges vektor: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$.

(b) A vektori szorzat eredménye olyan vektor, amely a tényező vektorokkal az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ sorrendben jobbsodrású rendszert alkot, és amelynek hossza egyenlő tényező vektorok hosszainak és az általuk bezárt α szög szinuszának a szorzatával:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha. \tag{2.1.19}$$

3. **Eltolás az időben.** A K és a K' vonatkoztatási rendszer csak abban különbözik, hogy a K'-beli rendszeridő nullapontja a K-beli rendszeridő nullapontjához képest τ=áll. értékkel el van tolva. Ekkor

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}, \qquad t' = t - \tau. \tag{2.1.20}$$

A eltolást az időben 1 darab valós paraméter, $\tau \in (-\infty, +\infty)$ határozza meg.

4. **Valódi Galilei-transzformáció.** A K és a K' rendszerekben azonos a rendszeridő, a $t = 0$ pillanatban origóik és Descartes-féle koordinátatengelyeik is egybeesnek, és K' a K-hoz képest $\mathbf{V}$ =áll. sebességgel mozog:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t, \qquad t' = t. \tag{2.1.21}$$

A valódi Galilei-transzformációt 3 darab valós paraméter, a K' rendszer K-hoz képesti $\mathbf{V}$ sebességének 3 Descartes-komponense határozza meg. Értékük a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban tetszőleges lehet.

Ezeket a transzformációkat közös néven **általános Galilei-transzformációknak** nevezzük. **A környező testekkel kölcsön nem ható rendszer hatásfunkcionálja invariáns az általános Galilei-transzformációkkal szemben.**

A fentieken túl a mechanikai törvények még további szimmetriákat is mutatnak. Ilyen további szimmetriatranszformációk:

1. **Tértükrözés.** Valamennyi koordinátatengely irányítását megfordítjuk:

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}. \tag{2.1.22}$$

2. **Időtükrözés.** Az idő irányát megfordítjuk: $t' = -t$.

Néhány további fontos megjegyzés a fenti szimmetriákkal kapcsolatban.

1. Az f fizikai mennyiséget **skalárnak** nevezzük, ha a térbeli forgatások és a tértükrözés során nem transzformálódik.

2. Az f fizikai mennyiséget **pszeudoskalárnak** nevezzük, ha térbeli forgatások során nem változik, de tértükrözés során előjelet vált.

3. Azokat a 3 Descartes-komponenssel rendelkező, irányított mennyiségeket, amelyek térbeli forgatások és a tértükrözés hatására ugyanúgy transzformálódnak, mint a helyzetvektor, **poláris vektoroknak** nevezzük.

4. Azokat a 3 Descartes-komponenssel rendelkező, irányított mennyiségeket, amelyek térbeli forgatások során ugyanúgy transzformálódnak mint a helyzetvektor, de tértükrözés során változatlanul maradnak, **axiális vektoroknak** nevezzük. Axiális vektor például két poláris vektor vektori szorzata.

5. Poláris vektorok skalárszorzata skalár. Poláris vektor és axiálvektor skalárszorzata pszeudoskalár. Axiálvektorok skalárszorzata skalár.

6. Az elmondottak alapján egy anyagi pont helyzetvektora, sebességvektora és gyorsulásvektora poláris vektorok. A helyzetvektor eltoláskor additívan változik meg, a sebesség és a gyorsulás eltoláskor változatlanok maradnak.

7. Az $\mathbf{r}$ helyzetvektor és az $\mathbf{a}$ gyorsulásvektor az időtükrözéssel szemben invariáns, ugyanakkor a sebességvektor időtükrözés során előjelet vált.

2.1.7 Szabad részecske Lagrange-függvénye

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a Galilei-invariancia követelménye a hatás explicit alakjára olyan erős megszorítást jelent, hogy meghatározza a legegyszerűbb mechanikai rendszerek, a szabad anyagi pont és a szabad részecskékből álló pontrendszer hatásfunkcionáljának inerciális vonatkoztatási rendszerben érvényes, explicit alakját.

1. *Szabad részecske.* Egy anyagi pont szabad mozgást végez, ha nem áll kölcsönhatásban semmiféle más testtel, azaz semmilyen más test nem befolyásolja az anyagi pont mozgásállapotát. Válasszunk inerciális vonatkoztatási rendszert a szabad anyagi pont (szabad részecske) leírására. Egyszerűség kedvéért válasszuk általános koordinátáknak a részecske $\mathbf{r}(t)$ helyzetvektorának $r_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ Descartes-koordinátáit valamely, tetszőlegesen választott Descartes-féle koordinátarendszerben. Akkor a megfelelő általános sebességek a $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t)$ sebességvektor megfelelő $v_i(t) = \frac{dr_i(t)}{dt}$ $(i = 1, 2, 3)$ Descartes-összetevői. A legkisebb hatás elve értelmében a Lagrange-függvény az r_i és $\dot{r}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ változók függvénye. Miután időbeli eltolással szemben a hatásnak invariánsnak kell lennie, ezért az L Lagrange-függvény az időtől explicit módon nem függhet. A hatás a térbeli eltolásokkal szemben invariáns, ezért a Lagrange-függvény nem függhet a részecske helyzetvektorától. Tehát a Lagrange-függvény csak a részecske sebességétől függ. A hatásnak a térbeli elforgatások során sem szabad megváltoznia, ezért a Lagrange-függvény nem függhet a sebesség irányától, csak annak a nagyságától, azaz $L = L(\mathbf{v}^2)$. Használjuk ki végül, hogy a hatásnak invariánsnak kell lennie a valódi Galilei-transzformációkkal szemben, azaz a Lagrange-függvény valódi Galilei-transzformáció során legfeljebb csak egy olyan additív taggal változhat meg, amely idő szerinti teljes derivált alakjában írható fel. Infinitezimális, valódi Galilei-transzformáció során a sebesség transzformációja

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \delta\mathbf{V} \tag{2.1.23}$$

ahol $\mathbf{v}$ ill. $\mathbf{v}'$ a részecske sebessége a K ill. a K' rendszerben, és $\delta\mathbf{V}$ a K' rendszer állandó, infinitezimális sebessége a K rendszerhez képest. Ezért

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}^2) &= L\Big((\mathbf{v}' + \delta\mathbf{V})^2\Big) = L\Big(\mathbf{v}'^{\,2} + 2\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{V} + \mathcal{O}((\delta\mathbf{V})^2)\Big) \\ &= L(\mathbf{v}'^{\,2}) + \frac{\partial L(\mathbf{v}'^{\,2})}{\partial \mathbf{v}'^{\,2}} 2\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{V} + \mathcal{O}((\delta\mathbf{V})^2) \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

egyenlőség áll fenn tetszőleges, infinitezimális, valódi Galilei-transzformáció esetén, ahol $\delta\mathbf{V}$ tetszőleges infinitezimális sebesség. Itt a második tag akkor és csak akkor ölti idő szerinti teljes derivált alakját, ha

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}^2}\frac{\partial L(\mathbf{v}^2)}{\partial\mathbf{v}^2}=0, \tag{2.1.25}$$

ami azt jelenti, hogy a Lagrange-függvény arányos a sebesség négyzetével. A szabad részecske hatásfunkcionáljának az explicit alakja tehát

$$L=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2, \tag{2.1.26}$$

ahol az m arányossági tényezőt **a részecske tehetetlen tömegének** nevezzük.

2. *Kölcsönhatásmentes pontrendszer.* A szabad részecskére vonatkozó hatás egyszerűen általánosítható olyan részecskerendszerre, amelyben a részecskék nem hatnak kölcsön sem egymással, sem külső testekkel, azaz valamennyien szabadok. Ilyenkor egyetlen, tetszőlegesen kiszemelt részecske mozgásegyenleteiben sem szerepelhetnek a többi részecskék koordinátái és sebességei. Mivel az Euler-Lagrange-egyenletek a Lagrange-függvényt lineárisan tartalmazzák, azért a különböző részecskékhez tartozó mozgásegyenletek szétcsatolódása csak úgy lehetséges, ha a Lagrange-függvényhez minden részecske saját szabad mozgásának megfelelő, additív járulékot ad:

$$S=\int_{t_k}^{t_k}L\,dt,\qquad L=\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{2}m_a\mathbf{v}_a^2, \tag{2.1.27}$$

ahol az egyes részecskék m_a tehetetlen tömege természetesen különböző lehet. Mivel az egyes részecskék Lagrange-függvényeit szabad közös állandóval szorozni, hiszen az úgyis kiesik a mozgásegyenletből, azért csak az m_a tehetetlen tömegek arányainak van közvetlen fizikai jelentése. Ha az összes Lagrange-függvényt ugyanazzal a számmal szorozzuk, az annak felel meg, hogy megváltoztatjuk a tehetetlen tömeg mértékegységét.

2.1.8 A kölcsönhatás

A Lagrange-függvény kölcsönhatási tagja. Ha egy test befolyásolja a másik mozgásállapotát, akkor ez a tapasztalat szerint megfordítva is igaz. Azt szoktuk mondani, hogy ilyenkor a két test kölcsönhatásban van egymással. A kölcsönhatás egyik fontos jellemzője a tapasztalat szerint, hogy minél távolabb van a két test egymástól, annál kevésbé tudják befolyásolni egymást. Elvileg, ha a két test végtelen távolra kerülne egymástól, akkor a kölcsönhatásuk is megszűnne. Ilyenkor az A test mozgásegyenletei nem tartalmazhatják a B test általános koordinátáit és sebességeit, és viszont a B test mozgásegyenletei sem tartalmazhatják az A test általános koordinátáit és impulzusait. A mozgásegyenletek ugyanakkor a Lagrange-függvényt lineárisan tartalmazzák. A változók szeparációja tehát csak úgy lehetséges, ha aszimptotikusan

$$L_{A\cup B}\to L_A+L_B \tag{2.1.28}$$

teljesül az A és B testekből álló $A\cup B$ rendszer Lagrange-függvényére, ahol L_A ill. L_B a szabad mozgást végző A ill. B rendszer Lagrange-függvénye. Ez tehát így addig igaz, amíg az A test bármelyik részecskéjének a B test bármelyik részecskéjétől mért távolsága végtelenhez tart. Ha az A és B rendszer véges távolságra kerülnek egymástól, akkor a Lagrange-függvényben figyelembe kell venni a kölcsönhatást. Erre az a lehetőség kínálkozik, hogy a szabad részrendszerek Lagrange-függvényeinek összegéhez hozzáadunk még egy L_{AB} tagot, amelyik természetesen egyaránt függ az A és a B test általános koordinátáitól és általános sebességeitől. Csak annyit tudunk róla, hogy $L_{AB} \to 0$, ha az A és a B test között a kölcsönhatás megszűnik.

Szigorú értelemben zárt rendszer Lagrange-függvénye. **Tegyük fel, hogy az N-részecskés A rendszer semmilyen más testtel nem áll kölcsönhatásban. Ekkor azt mondjuk, hogy az A rendszer (szigorú értelemben, vagy fizikailag) zárt.** A szokásos szóhasználat erre az, hogy **a fizikai rendszer zárt.** Később találkozni fogunk egy enyhébb megszorítást jelentő zártság, az úgynevezett **mechanikai zártság** fogalmával, amiről mindig úgy fogunk beszélni, hogy hozzátesszük a mechanikai jelzőt. A fentiek alapján a (szigorú értelemben) zárt, N részecskés rendszer Lagrange-függvényének általános alakja:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N; t) &= \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N; t) \\ &= T - V. \end{aligned} \tag{2.1.29}$$

A T és a V mennyiségeket a rendszer **kinetikus energiájának** ill. **általánosított potenciális energiájának** nevezzük. A (szigorú értelemben) zárt rendszer hatásfunkcionálja a térbeli eltolásokkal szemben invariáns. Ezért a V általánosított potenciális energia csak az $\mathbf{r}_{a,b} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ relatív helyzetvektorok révén függhet a helyzetvektoroktól. Az időbeli eltolással szembeni szimmetria miatt az általánosított potenciális energia a t időtől sem függhet explicit módon (szigorú értelemben) zárt rendszer esetén. Szigorú értelemben **zárt rendszer Lagrange-függvényének legáltalánosabb alakja** tehát:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N) = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 \\ - V(\mathbf{r}_{1,2}, \ldots, \mathbf{r}_{1,N}, \mathbf{r}_{2,3}, \ldots, \mathbf{r}_{2,N}, \ldots, \mathbf{r}_{N-1,N}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N). \end{aligned} \tag{2.1.30}$$

Ha V nem függ a részecskék sebességeitől, akkor V-t **potenciális energiának** nevezzük.

Párkölcsönhatás és több-test kölcsönhatások. A továbbiakban csak olyan esettel fogunk foglalkozni, amikor a kölcsönhatási tag független a sebességektől. Gondoljuk végig, hogy hogyan tevődik össze a részecskék közti kölcsönhatás. Vizsgáljuk ehhez először az $N = 2$ esetet. Nyilvánvalóan, ha a két részecske kölcsönhat, akkor a rendszer Lagrange-függvénye:

$$L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sum_{a=1}^{2} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - V(\mathbf{r}_{1,2}), \tag{2.1.31}$$

ahol a potenciális energia csak a két részecske relatív helyzetvektorától függ. A természetben számos példát ismerünk ilyen kölcsönhatásra:

1. *A gravitációs kölcsönhatás potenciális energiája:*

$$V = -\gamma \frac{m_{s1} m_{s2}}{r_{1,2}}, \tag{2.1.32}$$

ahol γ a gravitációs állandó, m_{s1}és m_{s2} a kölcsönható részecskék súlyos tömegei, $r_{1,2} = |\mathbf{r}_{1,2}|$ a kölcsönható részecskék távolsága. A gravitációs kölcsönhatás egy alapvető kölcsönhatás és a potenciális energiája a végtelenben konstanssá válik, amit most nullának választottunk. (Megtehettük, mert a Lagrange-függvény csak egy additív állandó erejéig van meghatározva.)

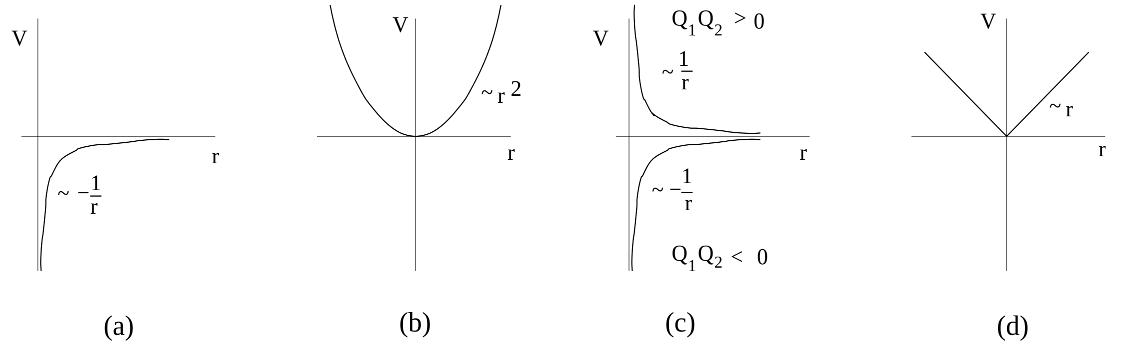

Figure 21: A gravitációs (a), a 3-dimenziós harmonikus oszcillátor- (b), a Coulomb- (c) és a bezáró (d) potenciál sematikus ábrája.

2. *A harmonikus oszcillátor potenciális energiája:*

$$V = \frac{1}{2} D r_{1,2}^2, \tag{2.1.33}$$

ami egy-dimenziós rendszer esetén

$$V = \frac{1}{2} D x^2 \tag{2.1.34}$$

alakot ölt, ha az egyik részecske az origóban van rögzítve és a másik kitérése x. A D állandó az ún. visszatérítő erő. A harmonikus oszcillátor potenciális energiája nem válik helytől független állandóvá nagy távolságokon. Ez azonban nem egy alapvető kölcsönhatás potenciális energiája, általában kis távolságokon modellezi a kölcsönhatást és nagy távolságokon nem érvényes.

3. *A Coulomb-kölcsönhatás potenciális energiája:*

$$V = k \frac{Q_1 Q_2}{r_{1,2}}, \tag{2.1.35}$$

ahol Q_1 és Q_2 a kölcsönható részecskék elektromos töltése, k univerzális állandó. Ez a kölcsönhatás két nyugvó, elektromosan töltött részecske között lép fel. A potenciális energia állandó értékhez tart a végtelen nagy távolságokon, amit választhatunk nullának. A Coulomb-kölcsönhatás is alapvető kölcsönhatás, az elektromágneses kölcsönhatás speciális esete.

4. *A bezáró kölcsönhatás potenciális energiája:*

$$V = \kappa r_{1,2}, \tag{2.1.36}$$

ahol κ univerzális állandó. Ez a kölcsönhatás nehéz kvarkok között lép fel, és a potenciális energia a végtelenben végtelen naggyá válik. A Természet azonban gondoskodik róla, hogy a potenciális energia ezen törvénye nagy távolságokon megint érvényét veszti azáltal, hogy kvarkokat nem lehet egymástól kb. 1 fm távolságnál sokkal nagyobb távolságra eltávolítani anélkül, hogy ne keletkezzenek újabb részecskék, amelyek a távolodó kvarkok terét leárnyékolnák.

Az 1 és 2 részecskék potenciális energiáját lássuk el a továbbiakban az $1,2$ alsó indeksszel. Vegyünk most egy harmadik részecskét a rendszerhez. A következő lehetőségek állnak fenn.

1. *Párkölcsönhatás.* A harmadik részecske megjelenése a rendszerben nem zavarja meg az 1 és 2 közötti kölcsönhatást: a $V_{1,2}(\mathbf{r}_{1,2})$ függvény alakja és járuléka a Lagrange-függvényhez változatlan marad. Ha bármely két részecske kölcsönhatása független attól, hogy jelen van-e a harmadik, akkor a Lagrange-függvény alakja:

$$L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \sum_{a=1}^{3} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - V(\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \mathbf{r}_{2,3}),$$
$$V(\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \mathbf{r}_{2,3}) = V_{1,2}(\mathbf{r}_{1,2}) + V_{1,3}(\mathbf{r}_{1,3}) + V_{2,3}(\mathbf{r}_{2,3}) \tag{2.1.37}$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a részecskék **párkölcsönhatásban** állnak egymással. A részecskék kölcsönhatásából származó potenciális energia az egyes részecske-párok kölcsönhatási potenciális energiáinak az összege.

2. 3-*test kölcsönhatás.* Tegyük most fel az előbbiek ellenkezőjét, hogy az 1 és 2 részecske kölcsönhatása pl. attól is függ, hogy a 3 részecske mit csinál. Ilyenkor azt mondjuk, hogy 3-test kölcsönhatások vannak a rendszerben, amelyet az $V_{1,2,3}(\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \mathbf{r}_{2,3})$ alakú potenciális-energia taggal lehet a Lagrange-függvényben figyelembe venni.

A 3-részecskés rendszer Lagrange-függvényének általános alakja tehát:

$$L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \sum_{a=1}^{3} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}^2 - V(\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \mathbf{r}_{2,3}),$$
$$V(\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \mathbf{r}_{2,3}) = \sum_{a=1,b>a}^{3} V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b}) + V_{1,2,3}(\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \mathbf{r}_{2,3}), \tag{2.1.38}$$

amely figyelembe veszi hogy vannak párkölcsönhatások és 3-részecskés kölcsönhatások is.

Ugyanezt most már könnyű N-részecskés rendszerre általánosítani:

$$L(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N) = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - V(\mathbf{r}_{1,2}, \ldots, \mathbf{r}_{1,N}, \mathbf{r}_{2,3}, \ldots, \mathbf{r}_{2,N}, \ldots, \mathbf{r}_{N-1,N}), \tag{2.1.39}$$

ahol a potenciális energia

$$
\begin{aligned}
& V(\mathbf{r}_{1,2}, \ldots, \mathbf{r}_{1,N}, \mathbf{r}_{2,3}, \ldots, \mathbf{r}_{2,N}, \ldots, \mathbf{r}_{N-1,N}) \\
&= \sum_{a=1,b>a}^{N} V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b}) + \sum_{a=1,b>a,c>b}^{N} V_{a,b,c}(\mathbf{r}_{a,b}, \mathbf{r}_{a,c}, \mathbf{r}_{b,c}) + \ldots
\end{aligned} \tag{2.1.40}
$$

Itt a jobb oldal első tagja a párkölcsönhatásokat, a második tagja a 3-test kölcsönhatásokat veszi figyelembe. A ... azért áll a kifejezés végén, mert elvileg elképzelhetők olyan rendszerek is, ahol 4-, 5-, stb. több-test kölcsönhatások is vannak. Egyszerű mechanikai rendszerekben a tapasztalat szerint párkölcsönhatás van. Pl. ilyen a szabadon eső kő esetén a kő és a Föld kölcsönhatása, ill. a kő részecskéinek a Föld részecskéivel való kölcsönhatása. De vannak olyan rendszerek, mint például az atomos gázok, ahol a több-test kölcsönhatások is jelentősek. Általában, ha a kölcsönhatást ténylegesen (vagy nagyon jó közelítéssel) pontszerűnek tekinthető részecskék között vizsgáljuk, akkor a tapasztalat azt mutatja, hogy párkölcsönhatással van dolgunk. A több-test kölcsönhatások akkor jelennek meg a fizikai leírásban, amikor a pontszerűnek tekintett részecskék a valóságban kiterjedtek. Hogy ne kelljen a kiterjedésüket explicit módon figyelembe venni, ezért azt az árat fizetjük, hogy több-test kölcsönhatásokat kell figyelembe vennünk.

Nyílt rendszerek. **Az A mechanikai rendszer nyílt, ha kölcsönhatásban áll más, külső testekkel.** Ha az A rendszer nyílt, akkor tulajdonképpen nincsen Lagrange-függvénye. Ilyenkor A mozgásának leírásához vennünk kell egy olyan nagy U rendszert, ami az alábbi feltételeknek tesz eleget:

1. az A test része az U rendszernek, $A \subset U$,
2. az U rendszer tartalmazza mindazokat a testeket, amelyek az A rendszerrel kölcsönhatnak,
3. és U elég nagy ahhoz, hogy az A test mozgása szempontjából elhanyagolható legyen az U rendszer további más testekkel való kölcsönhatása, azaz az U rendszer jó közelítéssel (fizikailag) zártnak legyen tekinthető.

Az $U = A \cup B$ rendszerbe A-n kívül belevett B testeket szokás **az A rendszer fizikai környezetének** nevezni. Ilyenkor az $U = A \cup B$ rendszerre, ami (fizikailag) zárt, írhatunk fel a (2.1.30) egyenlettel adotthoz hasonló alakú Lagrange-függvényt. Ez természetesen a korábban megbeszélt $L_{A\cup B} = L_A + L_B + L_{A,B}$ szerkezetű lesz, ahol L_A ill. L_B lenne az A ill. a B rendszer Lagrange-függvénye, ha nem működne az $L_{A,B}$ kölcsönhatás A és B között. Mivel van ilyen kölcsönhatás, az $L_{A,B}$ tag tartalmazza A és B koordinátáit és sebességeit egyaránt.

Mechanikai rendszer külső térben. Van egy speciális eset, amikor mégis beszélhetünk a nyílt A rendszer Lagrange-függvényéről. Ez az, amikor az A rendszer külső térben mozog. **Akkor mondjuk, hogy az A rendszer külső térben mozog, ha az A rendszer mozgása során csak elhanyagolható mértékben változtatja meg annak a B testnek (azoknak a testeknek) a mozgását, amellyel (amelyekkel) kölcsönhat.** Ilyenkor úgy lehet venni, hogy a külső B test(ek) részecskéinek $\mathbf{r}_B(t)$ helyvektorai az időnek adott függvényei. Ezeket az adott függvényeket behelyettesítve az $L_{A\cup B}$ Lagrange-függvénybe,

$$
L_{A\cup B} = L_A(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A) + L_{A,B}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B(t), \dot{\mathbf{r}}_A, \dot{\mathbf{r}}_B(t)) + L_B(\mathbf{r}_B, \dot{\mathbf{r}}_B) \equiv L'_A(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A, t) \tag{2.1.41}
$$

alakú Lagrange-függvényhez jutunk, amely már csak a vizsgált A rendszer részecskéinek $\mathbf{r}_A$ helyzetvektoraitól és $\dot{\mathbf{r}}_A$ sebességeitől és az időtől függhet. Miután nem zárt rendszerről van szó, elveszett az $\mathbf{r}_B(t)$ külső tér jelenléte miatt a hatás térbeli és időbeli eltolási szimmetriája. Az A rendszer szempontjából most már a tér különböző pontjai és a különböző időpillanatok nem egyenértékűek. Különösen az az eset bír jelentőséggel, amikor a kölcsönhatás általánosított potenciális energiája

$$-L_{A,B} = V_{A,B} = \sum_{a=1}^{N} e_a \phi(\mathbf{r}_a, t) \tag{2.1.42}$$

alakú, ahol e_a az A rendszer egyes részecskéire jellemző tulajdonság (súlyos tömeg, elektromos töltés, stb.) és a $\phi(\mathbf{r}, t)$ térmennyiséget, mint a hely és az idő függvényét pedig teljes egészében a külső B test határozza meg. Ekkor azt mondjuk, hogy **a B test külső teret hoz létre, amelynek $\phi(\mathbf{r}, t)$ a potenciálja.** A potenciálról tehát akkor beszélhetünk, ha a potenciális energia felbontható egy, csak a külső térbe helyezett test által meghatározott mennyiség és egy másik, csak a külső teret keltő test által meghatározott térmennyiség szorzatára. Ekkor az utóbbi térmennyiség a külső tér, vagy **fizikai mező** potenciálja. **A potenciál a tér adott pontjában, adott pillanatban az oda helyezett nyugvó, egységnyi e_a tulajdonsággal (tömeggel, töltéssel, stb.) rendelkező, pontszerű próbatest potenciális energiája.** A próbatest szóhasználat arra utal, hogy olyan testről van szó, amelynek a B testre, azaz a potenciálra való visszahatása elhanyagolható. Ha az A test külső potenciáltérben mozog, akkor elfelejtkezhetünk az A test mozgásának vizsgálata során arról, hogy mi is a B test, ami a potenciál értékét a tér minden pontjában, minden pillanatban meghatározza. Azt szoktuk mondani, hogy a B test egy fizikai mezőt, másszóval teret (potenciálteret, erőteret) kelt. A fizikai mezőt jellemző potenciál olyan térmennyiség, amelynek létezéséhez nem kell feltételezzük folytonos anyageloszlású test jelenlétét a tér pontjaiban. **A fizikai mező fogalmának bevezetése lehetővé teszi, hogy a kölcsönhatást ne távolbahatásként értelmezzük.** A fizikai mező közvetíti az A és a B test kölcsönhatását: az A és a B test úgy hatnak kölcsön, hogy B fizikai mezőt, potenciálteret kelt és ez hat az A testre, az A test a fizikai mezőben potenciális energiával rendelkezik. Egy részecske potenciális energiája a fizikai mezőben adott helyen és időpillanatban a potenciálnak csak az ezen a helyen és ebben az időpillanatban felvett értékétől függ. Ez fejezi ki, hogy **a fizikai mező lokálisan (közelhatás révén) hat kölcsön a beléje helyezett részecskével.**

Külső potenciáltérben mozgó, N-részecskés rendszer Lagrange-függvényének általános alakja:

$$L = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - \sum_{a=1,b>a}^{N} V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b}) - \sum_{a}^{N} e_a \phi(\mathbf{r}_a, t). \tag{2.1.43}$$

A jobb oldalon az első tag a rendszer részecskéinek kinetikus energiája, a második tag a rendszer részecskéi közötti párkölcsönhatásokból származó potenciális energia mínusz egyszerese, a harmadik tag pedig azon potenciális energiák összegének mínusz egyszerese, amivel az egyes részecskék a külső $\phi(\mathbf{r}, t)$ potenciáltérben rendelkeznek.

A Természetben külső térben mozgó rendszerekre is ismerünk számos példát. Néhány közülük:

1. *Részecske a Föld nehézségi terében:*

$$V = m_s g z, \qquad \phi = g z, \tag{2.1.44}$$

ahol z a részecskének a Föld felszínétől mért távolsága, m_s a részecske súlyos tömege (a tapasztalat szerint azonos nagyságú a tehetetlen tömegével), g az ún. nehézségi gyorsulás. A potenciális energia nulla szintjét a $z = 0$ szinten (a Föld felszínén) választottuk. Ez megint egy alapvető kölcsönhatás kis távolságtartományban történő közelítése ($|z| \ll R$, ahol R a Föld sugara), ezért nem csodálkozunk rajta, hogy nem tart konstans értékhez végtelen nagy z értékek esetén, hiszen azokra nem is érvényes.

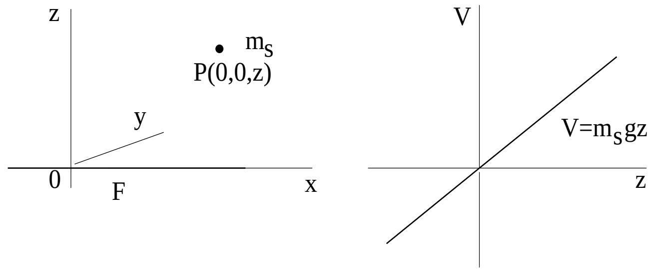

Figure 22: Részecske potenciális energiája nehézségi erőtérben, mint a Föld (F) felszínétől mért z előjeles távolság függvénye.

2. *Részecske gravitációs mezőben:*

$$V = -\gamma \frac{M_s m_s}{r}, \qquad \phi = -\gamma \frac{M_s}{r} \tag{2.1.45}$$

ahol M_s a gravitációs külső teret létesítő anyagi pont (a B test, pl. Nap) súlyos tömege, m_s a vizsgált anyagi pont (az A test, pl. a Föld) súlyos tömege, r a vizsgált anyagi pontnak a külső teret létesítő anyagi ponttól mért távolsága. A gravitációs kölcsönhatás potenciális energiáját a kölcsönható részecskék távolságának függvényében már korábban ábrázoltuk (ld. 21. (a) ábra). Itt jegyezzük meg azt, hogy egy kölcsönhatás potenciális energiája aszerint jelenik meg belső potenciális energiaként vagy részecske külső térben felvett potenciális energiájaként, hogy mindkét kölcsönható partner benne van-e a vizsgált fizikai rendszerben, vagy csak az egyikük és hogy az utóbbi esetben tekinthető-e a külső partner mozgása adottnak (elhanyagolható-e a belső partner visszahatása a külsőre). A kölcsönhatás azonban attól természetesen nem függ, hogy a benne résztvevő részecskéket melyik (rész)rendszerhez soroljuk. Ezért valamennyi, a 21. ábrán feltüntetett kölcsönhatás megjelenhet, mint külső térrel való kölcsönhatás is.

2.2 Megmaradási törvények

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a tér és az idő szimmetriáinak köszönhetően megmaradó mennyiségeket tudunk értelmezni, amelyek zárt rendszerekben a mozgás során állandóak maradnak.

A megmaradó mennyiségek a mozgás ún. integráljai. Ez az elnevezés onnan származik, hogy ezek az általános koordinátáknak és az általános sebességeknek a kifejezései, amelyekben nem fordulnak elő az általános koordináták második (vagy magasabb rendű) idő szerinti deriváltjai. Ezért az általános koordináták idő szerinti második deriváltjait is tartalmazó, a mechanikai rendszer szabadsági fokainak s számával megegyező számú mozgásegyenlet, azaz s darab közönséges, másodrendű, csatolt differenciálegyenlet helyett elegendő azok közül $s - I$ egyenletet venni az I darab kifejezés megmaradó értékét rögzítő I darab elsőrendű differenciálegyenlettel együtt. Ez a mechanikai feladat megoldását jelentősen leegyszerűsítheti.

Az alábbiakban csak olyan megmaradó mennyiségekkel foglalkozunk, amelyek a tér és az idő szimmetriáival kapcsolatosak. Ezek a 3 független, térbeli eltolás, a 3 független, térbeli elforgatás, az időbeli eltolás és a 3 független valódi Galilei-transzformáció. Meg fogjuk mutatni, hogy ennek megfelelően a mozgásnak 10 integrálja van: az impulzus 3 komponense, az impulzusmomentum 3 komponense, az energia és a rendszer tömegközéppontja sebességének a 3 komponense.

2.2.1 Az impulzus megmaradásának törvénye

Impulzusnak azt a fizikai mennyiséget nevezzük, amelyik a fizikai rendszer térbeli eltolásokkal szembeni szimmetriája következtében marad meg. Szigorú értelemben zárt mechanikai rendszer inerciális vonatkoztatási rendszerben térbeli eltolási szimmetriával rendelkezik a tér homogenitása miatt. Ezért (szigorú értelemben) **zárt mechanikai rendszerben az impulzus megmarad. Ez az impulzus megmaradásának törvénye zárt rendszer esetén.** Egy fizikai rendszer akkor is rendelkezhet térbeli eltolási szimmetriával, ha nem zárt. A szigorú értelemben vett zártság tehát elégséges, de nem szükséges feltétele az impulzus megmaradásának. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a rendszer mechanikai zártsága is elegendő feltétele annak, hogy a rendszer a térbeli eltolásokkal szemben invariáns maradjon, azaz hogy az impulzusa megmaradjon.

A térben 3 független irányban, pl. a Descartes-féle koordinátarendszer három koordinátatengelyének irányában lehet eltolást végezni. Az eltolásokat ennek megfelelően 3 független paraméterrel lehet megadni, a 3 független irányban végzett eltolás mértékével, amelyek az eltolást jellemző $\mathbf{b}$ polárvektor 3 komponenét képezik. Ha a fizikai rendszer az egyes, független irányokban végzett eltolásokkal szemben invariáns, akkor ezekhez a szimmetriákhoz rendre egy-egy megmaradó mennyiség tartozik, amelyek egy polárvektornak, az impulzusvektornak a 3 független irányba mutató komponensei. A fenti állítások bizonyítása során alább megtaláljuk az impulzus explicit kifejezését és látni fogjuk, hogy az polárvektort határoz meg.

Vizsgáljuk meg, hogyan változik meg formálisan a hatásnak a mozgás valóságos pályájára kiszámolt értéke, ha a térben felvett Descartes-koordinátarendszerünket önmagával párhuzamosan eltoljuk a tetszőlegesen választott, infinitezimális, konstans $\delta\mathbf{b}$ vektorral. Ekkor az egyes részecskék helyzetvektorainak transzformációja:

$$\mathbf{r}_a(t) \to \mathbf{r}_a(t) + \delta\mathbf{b}, \quad (a = 1, 2, \ldots, N), \tag{2.2.1}$$

a sebességek pedig nem változnak:

$$\dot{\mathbf{r}}_a(t) \to \dot{\mathbf{r}}_a(t) + \dot{\delta\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{r}}_a(t), \qquad (a = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.2.2}$$

A hatás megváltozása:

$$\begin{aligned}
\delta S|_{val} &= \int_{t_k}^{t_v} L(\mathbf{r}_a(t) + \delta\mathbf{b}, \dot{\mathbf{r}}_a; t)dt - \int_{t_k}^{t_v} L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)dt \\
&= \int_{t_k}^{t_v} \left[L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t) + \sum_{b=1}^{N} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \mathbf{r}_b} \cdot \delta\mathbf{b} + \mathcal{O}((\delta b)^2) - L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t) \right] dt \\
&= \delta\mathbf{b} \cdot \int_{t_k}^{t_v} \sum_{b=1}^{N} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \mathbf{r}_b} dt.
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Itt használtuk a

$$\text{grad } f(\mathbf{r}) \equiv \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \right) \tag{2.2.4}$$

jelölést egy **vektorokon értelmezett, tetszőleges, skalárértékű** $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$ **függvény gradiensére.**

Ha az $\mathbf{r}_a(t)$ függvények helyére behelyettesítjük a valóságos mozgásnak megfelelő, vagyis a mozgásegyenleteket kielégítő pályákat, akkor az eltolási szimmetria következtében tetszőleges infinitezimális $\delta\mathbf{b}$ vektor esetén zérust kell kapnunk:

$$0 = \delta S|_{val} = \delta\mathbf{b} \cdot \int_{t_k}^{t_v} \sum_{b=1}^{N} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \mathbf{r}_b} dt = \delta\mathbf{b} \cdot \int_{t_k}^{t_v} \sum_{b=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} \right] dt, \tag{2.2.5}$$

ahol a második egyenletet az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletek felhasználásával kaptuk. A kapott egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn tetszőleges $\delta\mathbf{b}$ vektor esetén, ha

$$0 = \int_{t_k}^{t_v} \sum_{b=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} \right] dt = \left[\sum_{b=1}^{N} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} \right]_{t_k}^{t_v}, \tag{2.2.6}$$

vagyis ha a

$$\mathbf{P} = \sum_{b=1}^{N} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} \tag{2.2.7}$$

vektormennyiség a mozgás során állandó:

$$\mathbf{P}(t_v) = \mathbf{P}(t_k), \tag{2.2.8}$$

azaz megmarad.

A $\mathbf{P}$ vektormennyiséget nevezzük a pontrendszer teljes impulzusának. Látjuk, hogy a pontrendszer impulzusa additívan tevődik össze az egyes részecskék

$$\mathbf{p}_b = \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} \tag{2.2.9}$$

impulzusvektoraiból:

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a. \tag{2.2.10}$$

Az impulzusvektort a Lagrange-függvényből, egy skalárértékű függvényből a sebesség, azaz egy polárvektor szerinti gradiensképzéssel kapjuk, ezért az impulzus polárvektor.

Szabad részecske esetén a Lagrange-függvény

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2, \tag{2.2.11}$$

és az impulzus kifejezése:

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{v}. \tag{2.2.12}$$

Egy szabad anyagi pont impulzusa tehát arányos a sebességével, az arányossági tényező a részecske tehetetlen tömege. Éppen így kap mélyebb fizikai jelentést a részecske tehetetlen tömege, amelyet a szabad részecske Lagrange-függvényében szereplő arányossági tényezőként vezettünk be. Nevezetesen, a részecske sebességét a részecske tehetetlen tömegével kell szorozni, hogy megmaradó mennyiséget kapjunk, a szabad részecske impulzusát.

Ha a részecske csak olyan kölcsönhatásban vesz részt, amelynek V potenciális energiája független a sebességektől, akkor az impulzusának kifejezése továbbra is ugyanaz, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ marad, mint a szabad részecskéé. Ilyenkor ugyanis a Lagrange-függvény sebesség szerinti gradienséhez továbbra is csak a kinetikus energia-tag ad járulékot. Sebességfüggő kölcsönhatás esetén a részecske impulzusának kifejezése megváltozik.

Megjegyezzük, hogy olyan speciális rendszer is létezik, amelyik nem zárt, de a tér valamelyik irányában (irányaiban) vett eltolással (eltolásokkal) szemben invariáns. Ekkor az impulzusnak a megfelelő irányú komponensére (komponenseire) áll csak fenn megmaradási törvény.

2.2.2 Az impulzusmomentum megmaradásának törvénye

Az impulzusmomentum az a fizikai mennyiség, ami a mechanikai rendszer térbeli forgatásokkal szemben mutatott szimmetriájának következtében marad meg. A (szigorú értelemben) zárt mechanikai rendszer inerciális vonatkoztatási rendszerben invariáns a térbeli elforgatásokkal szemben amiatt, hogy a tér inerciarendszerből nézve izotróp. Ezért a **zárt mechanikai rendszer impulzusmomentuma megmarad. Ez az impulzusmomentum megmaradásának zárt rendszerre vonatkozó törvénye.** A mechanikai rendszer szigorú értelemben vett zártsága elégséges, de nem szükséges feltétele annak, hogy a rendszer az elforgatásokkal szemben invariáns legyen, azaz hogy az impulzusmomentuma megmaradjon. Később látni fogjuk, hogy az ún. mechanikai zártság feltételeinek teljesülése is elégséges ahhoz, hogy a mechanikai rendszer impulzusmomentuma megmaradjon.

Alább belátjuk a következő állításokat. Az impulzusmomentum axiálvektor. Ennek mindhárom komponense megmaradó, ha a rendszer invariáns a térbeli elforgatásokkal szemben. A térben 3 független forgatás létezik, a tér 3 független iránya körüli elforgatások. Egy általános elforgatást tehát 3 független paraméterrel lehet megadni, pl. az egyes, független térbeli irányok körüli elforgatások szögeivel. Ha a mechanikai rendszer az egyes független irányok körüli elforgatásokkal szemben invariáns, akkor rendre megmaradnak az impulzusmomentumnak ezen független irányokba mutató komponensei. A fenti állítások bizonyítása során megtaláljuk az impulzusmomentum explicit kifejezését és abból látni fogjuk, hogy az impulzusmomentum axiálvektor.

A bizonyítást egyszerűbb elvégezni, ha kihasználjuk, hogy egy általános elforgatást nemcsak úgy jellemezhetünk, hogy megadjuk annak a 3 független irány körüli elforgatásnak a mértékét, amelyek egymás utáni (meghatározott sorrendű) végrehajtásával az adott elforgatást meg lehet kapni, hanem úgy is, hogy megadjuk, az adott általános elforgatás milyen irány körüli, mekkora szögű elforgatásnak felel meg. Az irányt egy $\mathbf{n}$ egységvektor határozza meg (2 független valós paraméter), az elforgatás mértékét pedig egy szög (további 1 valós paraméter). A paraméterek száma most is 3. Megmutatható, hogy az általános elforgatás mindkét megadása egyenértékű.

Határozzuk meg formálisan, hogy mennyivel változik meg a hatásnak a mozgás valóságos pályájára számolt értéke, ha a koordinátarendszerünket $\mathbf{n}$ rögzített irány körül tetszőleges, infinitezimális ϵ szöggel elforgatjuk, ahol $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$. Ekkor a helyzetvektorok és a sebességvektorok transzformációja:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_a &\to \mathbf{r}_a + \delta\mathbf{r}_a, \qquad \delta\mathbf{r}_a = \epsilon\mathbf{n}\times\mathbf{r}_a, \\
\dot{\mathbf{r}}_a &\to \dot{\mathbf{r}}_a + \delta\mathbf{v}_a, \qquad \delta\mathbf{v}_a = \frac{d\delta\mathbf{r}_a}{dt} = \epsilon\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{r}}_a.
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

A hatás megváltozása:

$$\begin{aligned}
\delta S|_{val} &= \int_{t_k}^{t_v} L(\mathbf{r}_a+\delta\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a+\delta\mathbf{v}_a; t)dt - \int_{t_k}^{t_v} L(\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a; t)dt \\
&= \int_{t_k}^{t_v} \sum_{b=1}^{N} \left[\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \mathbf{r}_b}\cdot\delta\mathbf{r}_b + \frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\cdot\frac{d}{dt}\delta\mathbf{r}_b\right]dt \\
&= \int_{t_k}^{t_v} \sum_{b=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \mathbf{r}_b} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\right)\cdot\delta\mathbf{r}_b + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\cdot\delta\mathbf{r}_b\right)\right]dt \\
&= \sum_{b=1}^{N} \int_{t_k}^{t_v} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\cdot\delta\mathbf{r}_b\right)dt \\
&= \left[\sum_{b=1}^{N} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\cdot\delta\mathbf{r}_b\right]_{t_k}^{t_v} \\
&= \left[\sum_{b=1}^{N} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\cdot(\epsilon\mathbf{n}\times\mathbf{r}_b)\right]_{t_k}^{t_v} \\
&= \epsilon\mathbf{n}\sum_{b=1}^{N}\left[\mathbf{r}_b\times\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\right]_{t_k}^{t_v}.
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

A harmadik egyenlőség felírásakor kihasználtuk, hogy a mozgás igazi pályájára fennállnak az Euler-Lagrange-egyenletek. Az utolsó egyenlőséget a vegyesszorzatra vonatkozó azonosság,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) \tag{2.2.15}$$

segítségével kaptuk meg. Ha a mechanikai rendszer térbeli elforgatási szimmetriával rendelkezik, akkor a hatás fenti, formális megváltozása zérus kell legyen,

$$0 = \delta S|_{val} = \epsilon \mathbf{n} \sum_{b=1}^{N} \left[\mathbf{r}_b \times \frac{\partial L(\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} \right]_{t_k}^{t_v}, \tag{2.2.16}$$

tetszőleges $\mathbf{n}$ egységvektor és ϵ infinitezimális elforgatási szög esetén. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha az

$$\mathbf{L} = \sum_{b=1}^{N} \mathbf{r}_b \times \frac{\partial L(\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} = \sum_{b=1}^{N} \mathbf{r}_b \times \mathbf{p}_b \tag{2.2.17}$$

mennyiség idő szerinti első deriváltja nulla, vagyis ez a mennyiség megmarad a mozgás során:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \qquad \mathbf{L}(t_v) = \mathbf{L}(t_k). \tag{2.2.18}$$

Az $\mathbf{L}$ mennyiséget nevezzük a rendszer teljes impulzusmomentumának. A mechanikai rendszer teljes $\mathbf{L}$ impulzusmomentuma az egyes részecskék $\mathbf{l}_a$ impulzusmomentumaiból additiv módon tevődik össze:

$$\mathbf{L} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{l}_a. \tag{2.2.19}$$

Egy részecske impulzusmomentuma, $\mathbf{l}_a = \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$ két polárvektor vektori szorzata, ezért axiálvektor. Az impulzusmomentum tehát axiálvektor: térbeli forgatások során ugyanúgy transzformálódik mint a vektorok, de tértükrözés során nem vált előjelet.

Az $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ impulzusmomentum a részecske pályamozgásából származik, ezért pályaimpulzusmomentumnak nevezzük. Valóban, az impulzusmomentum abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a részecske éppen nyugalomban van, zérus. A klasszikus mechanikában csak ilyen impulzusmomentum fordul elő. A tapasztalat szerint a Természetben a szerkezet nélküli részecskék, pl. az elektronok, a kvarkok, a fotonok, stb. rendelkeznek ,,saját" impulzusmomentummal is, amely nem a részecskék pályamozgásából, és nem is az őket alkotó részecskék pályamozgásából adódik. Ez a **spin.** A spin olyan impulzusmomentum, amelynek az értéke abban a vonatkoztatási rendszerben sem nulla, amelyben a részecske éppen nyugalomban van. A klasszikus mechanika a spin létezésére nem tud magyarázatot adni.

Előfordul olyan fizikai rendszer, amelyik csak egy (vagy két) meghatározott irány körüli elforgatással szemben invariáns. Ekkor csak az impulzusmomentum megfelelő irányú komponensére (komponenseire) áll fenn megmaradási törvény.

2.2.3 Az energia megmaradásának törvénye

Az energia az a fizikai mennyiség, ami a fizikai rendszer időbeli eltolási szimmetriájának következtében marad meg. Szigorú értelemben zárt mechanikai rendszer inerciális vonatkoztatási rendszerben invariáns az időbeli eltolással szemben az idő homogenitása miatt. Ezért **a zárt rendszer energiája megmarad. Ez az energia megmaradásának zárt rendszerre vonatkozó törvénye.** A mechanikai rendszer akkor is rendelkezhet időbeli eltolási szimmetriával, ha nem zárt, pl. mechanikai rendszer időtől független külső potenciáltérben. A rendszer energiája ekkor is megmarad az időbeli eltolásokkal szembeni szimmetria következtében.

Az időbeli eltolást egyetlen valós paraméter határozza meg, s ennek megfelelően az energia egy-komponensű mennyiség, skalár.

Ha a rendszer az időbeli eltolással szemben invariáns, akkor a Lagrange-függvény nem függ explicit módon a t időtől. Tegyük fel, hogy az időmérés kezdetét tetszőleges ϵ, infinitezimális időtartammal eltoljuk: $t \to t' = t - \epsilon$. Ez az általános koordináta ill. az általános sebesség alábbi transzformációját jelenti:

$$q(t) \longrightarrow q'(t') = q(t) = q(t' + \epsilon), \tag{2.2.20}$$

ill.

$$\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt} \longrightarrow \frac{dq'(t')}{dt'} = \dot{q}'(t') = \frac{dq(t'+\epsilon)}{dt'} = \dot{q}(t'+\epsilon), \tag{2.2.21}$$

úgyhogy a Lagrange-függvény transzformációja:

$$L(q(t),\dot{q}(t)) \longrightarrow L'(q'(t'),\dot{q}'(t')) = L(q'(t'),\dot{q}'(t')) = L(q(t'+\epsilon),\dot{q}(t'+\epsilon)). \tag{2.2.22}$$

Ekkor a hatás megváltozása:

$$\begin{aligned}
\delta S_{\text{val}} &= \int_{t_k-\epsilon}^{t_v-\epsilon} L(q(t'+\epsilon),\dot{q}(t'+\epsilon))dt' - \int_{t_k}^{t_v} L(q(t),\dot{q}(t))dt \\
&= -\epsilon\, L|_{t_k}^{t_v} + \int_{t_k}^{t_v} \sum_{i=1}^{s} \Big[\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i \epsilon + \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i \epsilon\Big] dt \\
&= \int_{t_k}^{t_v} \sum_{i=1}^{s} \Big[\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i - \dot{q}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_i} \\
&\quad + \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i\Big)\Big] \epsilon dt - \epsilon\, L|_{t_k}^{t_v}.
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Az utolsó egyenlőséget parciális integrálással kaptuk. Az integrandus első két tagja az Euler-Lagrange-egyenletek értelmében kiejti egymást. Ekkor, az időbeli eltolási szimmetria következtében

$$0 = \delta S_{\text{val}} = \epsilon \Big[\sum_{i=1}^{s} p_i \cdot \dot{q}_i - L\Big]_{t_k}^{t_v} \tag{2.2.24}$$

egyenlőségnek kell tetszőleges ϵ esetén fennállnia, ahol

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.2.25}$$

a már korábban bevezetett általános impulzusokat jelöli. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha a

$$H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q}), \qquad \Big(p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) \tag{2.2.26}$$

mennyiség, az ún. **Hamilton-függvény** értéke a mozgás során állandó marad. Ha általános koordinátáknak az egyes részecskék Descartes-koordinátáit választjuk, akkor

$$H = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a - L \tag{2.2.27}$$

alakban kapjuk a mozgásállandót.

A H mennyiséget **Hamilton-függvénynek** nevezzük. **A Hamilton-függvénynek a valódi mozgás pályáján felvett értékét nevezzük a rendszer energiájának:** $E = H_{\text{val}}$. A

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.2.28}$$

mennyiséget **általános impulzusnak**, vagy másképpen a q_i **általános koordinátához kanonikusan konjugált impulzusnak** nevezzük.

Ha tehát a rendszer az időbeli eltolásokkal szemben invariáns, akkor a rendszer energiája megmarad.

Kinetikus és potenciális energia. A fizikailag zárt rendszerre értelmeztük a H Hamilton-függvényt, amelynek a valóságos mozgás pályáján felvett értéke a zárt rendszer megmaradó energiáját adja. Felhasználva a Lagrange-függvény

$$L = T - V, \quad T = \sum_{a=1}^{N} t_a = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 \tag{2.2.29}$$

alakját, kapjuk, hogy az energia

$$E = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{v}_a - L = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 + V = T + V \tag{2.2.30}$$

alakban írható, azaz **a rendszer E energiája a rendszer T kinetikus energiájának és V általánosított potenciális energiájának összege.** A sebességtől független kölcsönhatások esetén V a potenciális energia. Itt

$$t_a = \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 \tag{2.2.31}$$

lenne az a részecske energiája, ha nem állna kölcsönhatásban más részecskékkel. A szabad a részecske azért rendelkezik a t_a energiával, mert mozog, mert nem nulla a $\mathbf{v}_a$ sebessége. Ezért nevezzük a t_a energiát **mozgási, vagy kinetikus energiának**. A rendszer teljes T kinetikus energiája az egyes részecskék kinetikus energiáiból additív móden tevődik össze:

$$T = \sum_{a=1}^{N} t_a = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2. \tag{2.2.32}$$

Ez lenne az N részecskés rendszer energiája, ha a részecskék nem hatnának kölcsön egymással. A kölcsönhatás módosítja a rendszer teljes energiáját. **Az energia kölcsönhatásból származó tagját nevezzük általánosított potenciális energiának (sebességfüggetlen esetben potenciális energiának).**

2.2.4 A tömegközéppont megmaradásának törvénye

A tömegközéppont megmaradásának törvénye több állítást mond ki:

1. **Minden fizikai rendszerhez található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben a rendszer teljes impulzusa nulla.**
2. **Ez a vonatkoztatási rendszer felfogható úgy, mint a fizikai rendszer egy elképzelt pontjához, az ún. tömegközéppontjához mint vonatkoztatási ponthoz képest rögzített, az inerciarendszerekhez képest haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszer.**
3. **Szabad (magára hagyott) fizikai rendszer tömegközéppontja inerciarendszerben megőrzi nyugalmi állapotát vagy egyenesvonalú egyenletes mozgását. Szabad fizikai rendszer tömegközépponti rendszere tehát maga is inerciarendszer.**

A fenti állításokat a következőképpen láthatjuk be. Tekintsük egy részecskerendszer teljes $\mathbf{P}$ impulzusát valamilyen K inerciarendszerben adott t pillanatban. Tegyük fel, hogy a K' rendszer ugyanebben a t pillanatban a K-hoz képest $\mathbf{V}(t)$ sebességgel haladó mozgást végez. Ekkor a teljes impulzus az alábbi alakban írható a részecskék K rendszerben mért $\mathbf{v}_a$ és a K' rendszerben mért $\mathbf{v}'_a$ sebességeinek segítségével:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}_a(t) = \sum_{a=1}^{N} m_a[\mathbf{v}'_a(t) + \mathbf{V}(t)] = \mathbf{P}'(t) + M\mathbf{V}(t), \tag{2.2.33}$$

ahol $\mathbf{P}'(t)$ a fizikai rendszer teljes impulzusa a K' rendszerben a t időpillanatban és bevezettük a fizikai rendszer teljes

$$M = \sum_{a=1}^{N} m_a \tag{2.2.34}$$

tehetetlen tömegét, ami additív módon tevődik össze az egyes részecskék tehetetlen tömegéből. A fenti összefüggésből látható, hogy mindig létezik olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben a fizikai rendszer teljes impulzusa zérus, azaz $\mathbf{P}'(t) = 0$. Ennek a K' rendszernek a K-hoz képesti sebességére azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{P}(t)}{M}. \tag{2.2.35}$$

Ez ugyanolyan alakú összefüggés, mint az egyetlen pontrészecske impulzusa, sebessége és tehetetlen tömege közötti összefüggés. Ezért ezt a összefüggést úgy lehet felfogni, mint egy olyan, elképzelt anyagi pont sebességét, amelynek impulzusa a rendszer teljes impulzusa, tömege pedig a rendszer részecskéi tömegeinek az összege. Ezért nevezzük M-et a rendszer teljes tömegének. Kérdés, meg tudjuk-e határozni, hol kell a térben elhelyezni ezt az elképzelt pontot? A válasz igenlő. Ha részletesen kiírjuk a teljes impulzus kifejezését, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}_a(t)}{\sum_{a=1}^{N} m_a}, \tag{2.2.36}$$

ez a részecskék sebességeinek tehetetlen tömegükkel súlyozott középértéke. Ha figyelembe vesszük azt is, hogy az egyes részecskék sebességei a megfelelő helyzetvektorok idő szerinti első differenciálhányadosai, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\sum_{a=1}^{N} m_a \frac{d}{dt}\mathbf{r}_a}{\sum_{a=1}^{N} m_a} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}_a(t)}{\sum_{a=1}^{N} m_a}\Big). \tag{2.2.37}$$

Bevezethetjük tehát az

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}_a(t)}{\sum_{a=1}^{N} m_a} \tag{2.2.38}$$

helyzetvektort, az ún. **tömegközéppont (TKP) helyzetvektorát.** A fentieket ezután úgy értelmezhetjük, hogy minden fizikai rendszernek létezik a tömegközéppontja, amellyel adott pillanatban éppen együtt mozgó inerciarendszerben a fizikai rendszer teljes impulzusa nulla.

Tekintve, hogy szabad fizikai rendszer esetén inerciarendszerben érvényes az impulzusmegmaradás, ezért a szabad fizikai rendszer tömegközéppontjával adott pillanatban együttmozgó inerciarendszerben a teljes impulzus nemcsak ebben a pillanatban nulla, hanem minden más időpillanatban is. Ez azt jelenti, hogy szabad fizikai rendszer tömegközéppontja állandó sebességgel mozog. Ezzel valamennyi, a fejezet elején megfogalmazott állítást beláttuk.

Tömegközépponti vonatkoztatási rendszer. Tegyük fel, hogy valamely K inerciális vonatkoztatási rendszerből nézve vizsgáljuk az A test mozgását. **Az A rendszer tömegközéppontjával együtt mozgó, az inerciarendszerekhez képest nem forgó K' vonatkoztatási rendszert, amelynek minden pontja a TKP-tal egyező sebességgel mozog, tömegközépponti vonatkoztatási rendszernek nevezzük.** Megkülönböztetésül a K inerciarendszert, amelyből megfigyeléseinket végezzük, és amelyet egy másik testhez (a szobához, a Földhöz, stb.) rögzítünk szokás **laboratóriumi vonatkoztatási rendszernek** nevezni. A fejezet elején mondottak alapján kijelenthetjük, hogy **a tömegközépponti rendszer az a vonatkoztatási rendszer, amelyben a fizikai rendszer teljes impulzusa nulla.**

Impulzusmomentum labor- és TKP-i rendszerben. Tegyük fel, hogy a K inerciarendszer a laboratóriumi rendszer és a K' tömegközépponti rendszer. Keressük meg a kapcsolatot az A rendszernek K laboratóriumi rendszerben mért impulzusmomentuma és az A rendszernek a K' TKP-i vonatkoztatási rendszerben mért impulzusmomentuma között! Ehhez felhasználjuk, hogy

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{R}, \qquad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}. \tag{2.2.39}$$

Az A mechanikai rendszer teljes impulzusmomentuma:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}_a \times m_a \mathbf{v}_a = \sum_{a=1}^{N} (\mathbf{r}'_a + \mathbf{R}) \times m_a(\mathbf{v}'_a + \mathbf{V}) \\ &= \sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}'_a \times m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{R} \times \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}'_a + \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}'_a \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times M\mathbf{V} \\ &= \mathbf{L}' + \mathbf{R} \times M\mathbf{V}, \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

ahol felhasználtuk, hogy a tömegközépponti rendszerben a tömegközéppont helyzetvektora nullvektor, $\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}'_a = 0$ és hogy a tömegközépponti rendszerben a tömegközéppont sebessége zérus, $\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}'_a = 0$. Az eredmény fizikailag könnyen érthető: az A test laborrendszerben mért $\mathbf{L}$ impulzusmomentuma egyenlő az A test tömegközépponti rendszerben mért $\mathbf{L}'$ impulzusmomentumának és az A test tömegközéppontja $\mathbf{R} \times M\mathbf{V}$ pályaimpulzusmomentumának a vektori összegével.

Zárt rendszer energiája laborrendszerben és a TKP-i rendszerben. Nézzük most egy (szigorú értelemben) zárt A fizikai rendszernek a K laborrendszerben mért energiája és a K' TKP-i rendszerben mért energiája kapcsolatát. Miután a rendszer szigorú értelemben zárt, azért a TKP-jának sebessége állandó, úgyhogy a TKP-i rendszer is inerciarendszer. Legyen V^{b} az A mechanikai rendszernek a részecskéi kölcsönhatásából származó (belső) potenciális energiája. Ez a kölcsönhatásból származó energia K-ban és K'-ben is azonos, mert a Galilei-féle relativitási elv értelmében az erőtörvények a K és a K' inerciarendszerekben azonosak. Az A rendszer energiája tehát:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 + V^{\mathrm{b}} = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \left(\mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \right)^2 + V^{\mathrm{b}} \\ &= \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a (\mathbf{v}'_a)^2 + \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}'_a \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + V^{\mathrm{b}'} \\ &= E' + \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2. \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

A laborrendszerben tehát a (szigorú értelemben) zárt A test E energiája megegyezik a TKP-i rendszerben mért E' energiájának és a tömegközéppontja $\frac{1}{2} M \mathbf{V}^2$ kinetikus energiájának az összegével.

2.3 Newton törvényei. Mérlegegyenletek nyílt mechanikai rendszerben

Ebben a fejezetben nyílt rendszerekkel foglalkozunk, amelyeknek a teljes impulzusa, impulzusmomentuma és energiája általában nem marad meg. Ezen mennyiségek időbeli változására vonatkozó mérlegegyenleteket vezetünk le. Egyúttal megmutatjuk, hogy a legkisebb hatás elve alapján megfogalmazott mechanikában visszakapjuk Newton törvényeit.

2.3.1 Newton törvényei

Newton II. törvénye. Az Euler-Lagrange-egyenleteket,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(q,\dot{q};t)}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \tag{2.3.1}$$

írjuk a kanonikusan konjugált impulzusok segítségével

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L(q,\dot{q};t)}{\partial q_i} \tag{2.3.2}$$

alakba. Ez **Newton II. törvényének legáltalánosabb alakja.** Azt mondja, hogy az impulzus idő szerinti első deriváltja a részecskék általános koordinátáinak és sebességeinek adott függvénye:

$$\frac{\partial L(q,\dot{q};t)}{\partial q_i} \equiv F_i(q,\dot{q};t). \tag{2.3.3}$$

Az

$$F_i = \frac{dp_i}{dt} \tag{2.3.4}$$

mennyiséget **általános erőnek,** az $F_i(q,\dot{q};t)$ függvénykapcsolatot **erőtörvénynek** nevezzük. Descartes-koordinátákat használva, Newton II. törvényének szokásos alakját kapjuk:

$$\mathbf{F}_a \equiv \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \frac{\partial L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{2.3.5}$$

ahol $\mathbf{F}_a$ az a részecskére ható erő. Az erő fenti definíciója szerint azt mondjuk, hogy **az a részecskére $\mathbf{F}_a = \frac{d\mathbf{p}_a}{dt}$ erő hat, ha a részecske impulzusa dt infinitezimális idő alatt $d\mathbf{p}_a$ infinitezimális változást szenved, azaz ha az a részecske dt idő alatt a környezetétől (a tőle különböző részecskék összességétől) $d\mathbf{p}_a$ impulzust kap. Az erő tehát impulzusátadás eredménye. Az $\mathbf{F}_a(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) \equiv \frac{\partial L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)}{\partial \mathbf{r}_a}$ erőtörvény azt mondja meg, hogy a többi (a-tól különböző) rendszeren belüli és kívüli részecske ill. test milyen törvényszerűség szerint hozza létre dt idő alatt az a részecske impulzusának $d\mathbf{p}_a$ megváltozását.**

Belső és külső erő. Tegyük fel, hogy a Lagrange-függvény a vizsgált A rendszert és annak B környezetét írja le, ahol B elég nagyra van választva ahhoz, hogy A

mozgása szempontjából az $A \cup B$ teljes rendszert zártnak lehessen tekinteni. Ekkor az $L_{A\cup B} = L_A + L_B + L_{A,B}$ Lagrange-függvény alapján az a részecskére ható erő

$$\mathbf{F}_a = \frac{\partial L_{A\cup B}}{\partial \mathbf{r}_a} = \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} \tag{2.3.6}$$

alakba írható, ahol

$$\mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} = \frac{\partial L_A}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{2.3.7}$$

az a részecskére az A rendszer többi részecskéi által kifejtett **belső erő**,

$$\mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} = \frac{\partial L_{A,B}}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{2.3.8}$$

pedig az a részecskére a B környezet részecskéi által kifejtett **külső erő.** Newton II. törvényének alakja tehát a vizsgált A rendszer bármely $a = 1, 2, \ldots, N$ részecskéjére:

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.9}$$

Ha a vizsgált A rendszerben csak sebességfüggetlen párkölcsönhatások vannak, akkor a (szigorú értelemben) zárt A rendszer Lagrange-függvénye

$$L_A = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - \sum_{a=1}^{N} \sum_{b>a}^{N} V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b}), \qquad \mathbf{r}_{a,b} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b \tag{2.3.10}$$

és az $a \in A$ részecskére ható erő

$$\mathbf{F}_a \;=\; -\sum_{b=1}^{N} \frac{\partial V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a} = \sum_{b=1}^{N} \mathbf{F}_{b\to a}, \tag{2.3.11}$$

az egyes $b \neq a$, $b \in A$ részecskék által az a részecskére kifejtett

$$\mathbf{F}_{b\to a} = -\frac{\partial V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{2.3.12}$$

erők összege.

Erőtér. Potenciál. Térerősség. Abban a speciális esetben, ha a környezet külső teret hoz létre, amelyben az A rendszer részecskéi mozognak, és a külső térben mozgó rendszer potenciális energiája $-L_{A,B} = \sum_{a=1}^{N} e_a \phi(\mathbf{r}_a)$ alakú, ami független a részecskék sebességétől, akkor az a részecskére ható külső erő:

$$\mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} = -e_a \frac{\partial \phi(\mathbf{r}_a)}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{2.3.13}$$

A külső térben az egységnyi tömegű, töltésű, stb. (e_a tulajdonságú) próbatestre ható erőt a fizikai mező térerősségének nevezzük. A külső potenciáltér térerőssége a potenciál negatív gradiense:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \tag{2.3.14}$$

Néhány példa a Természetben előforduló erőterekre:

1. *A Föld nehézségi erőtere:*

$$\phi = gz, \qquad E_x = E_y = 0, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -g, \tag{2.3.15}$$

ahol x, y a vízszintes síkban, z a függőleges irányban (felfelé) felvett Descartes-koordináták (ld. 22. ábra), g az ún. nehézségi gyorsulás. Tehát az m_s súlyos tömegű részecskére ható $\mathbf{F} = m_s \mathbf{E}$ erő komponensei:

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -m_s g. \tag{2.3.16}$$

Ez az erőtér **homogén**, a térerősség a geometriai tér minden pontjában azonos (nagyság és irány szerint, ld. 23. ábra).

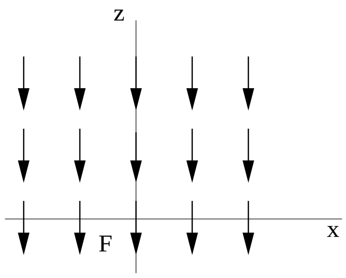

Figure 23: A Föld nehézségi erőterének szemléltetése.

2. *Gravitációs mező:*

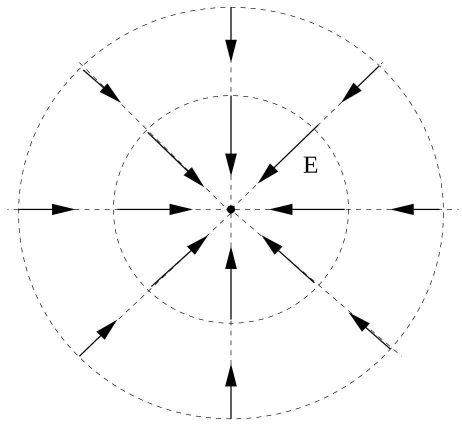

Figure 24: Anyagi pont gravitációs erőterének szemléltetése.

$$\phi = -\gamma \frac{M_s}{r}, \qquad E_\theta = E_\varphi = 0, \quad E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\gamma \frac{M_s}{r^2}, \tag{2.3.17}$$

ahol M_s a gravitációs külső teret létesítő anyagi pont (pl. a Nap) súlyos tömege, γ a Newton-féle gravitációs állandó, r, θ, ϕ gömbi polárkoordináták, a koordinátarendszer origóját a teret létesítő anyagi pont helyén választottuk. Az erőteret a 24. ábra szemlélteti. Az m_s súlyos tömegű részecskére ható erő

$$\mathbf{F} = m_s\mathbf{E} = -\frac{m_s M_s}{r^2}\mathbf{e}_r, \tag{2.3.18}$$

és ennek komponensei a gömbi polárkoordinátarendszerben:

$$F_\theta = F_\varphi = 0, \quad F_r = -\gamma\frac{m_s M_s}{r^2}. \tag{2.3.19}$$

Pontszerű objektum gravitációs erőtere **inhomogén**, a térerősség helyről helyre más. Ennél többet is állíthatunk: a pontszerű objektum gravitációs tere **centrálszimmetrikus:** a térerősség sugárirányban, a teret létesítő anyagi pont (jelen esetben az origó) felé mutat és nagysága csak az anyagi ponttól mért távolságtól függ, annak négyzetével fordítottan arányos

Gömbi polárkoordinátákban egy tetszőleges $\phi(\mathbf{r})$ skalármező gradiensének, $\text{grad}\,\phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}$, komponenseit az alábbi szabály szerint kell meghatározni:

$$\begin{aligned}&\text{grad}_{\,r} = \mathbf{e}_r\cdot\ \text{grad}\,\phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \qquad \text{grad}_{\,\theta} = \mathbf{e}_\theta\cdot\ \text{grad}\,\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta},\\ &\text{grad}_{\,\varphi} = \mathbf{e}_\varphi\cdot\ \text{grad}\,\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}.\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

3. *Ponttöltés elektrosztatikus tere:*

$$\phi = k\frac{Q}{r}, \qquad E_\theta = E_\varphi = 0, \quad E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = k\frac{Q}{r^2} \tag{2.3.21}$$

ahol Q az elektrosztatikus mezőt keltő, nyugvó ponttöltés, k univerzális állandó, a gömbi polárkoordinátarendszer origóját a teret keltő ponttöltés helyén választottuk és r, θ, φ gömbi polárkoordináták. A q nyugvó próbatöltésre ható Coulomb-erő tehát:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{qQ}{r^2}\mathbf{e}_r, \tag{2.3.22}$$

amelynek komponensei:

$$F_\theta = F_\varphi = 0, \quad F_r = k\frac{qQ}{r^2}. \tag{2.3.23}$$

A ponttöltés elektrosztatikus erőtere centrálszimmetrikus. Aszerint, hogy a teret keltő Q töltés pozitív vagy negatív, a térerősség sugárirányban kifelé mutat az origóból, ill. befelé mutat az origóba és nagysága fordítottan arányos a Q töltéstől mért r távolság négyzetével.

4. *Harmonikus oszcillátor potenciál:*

$$\phi = \frac{1}{2}\omega^2 r^2, \qquad E_\theta = E_\varphi = 0, \quad E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\omega^2 r, \tag{2.3.24}$$

ahol ω a mező paramétere (a harmonikus oszcillátor potenciálba helyezett m tehetetlen tömegű részecske esetén a visszatérítő erő $D = m\omega^2$), a gömbi polárkoordinátarendszer origóját a mező középpontjában választottuk. A harmonikus oszcillátor potenciálban mozgó, m tehetetlen tömegű részecskére tehát

$$\mathbf{F} = m\mathbf{E} = -m\omega^2 r\mathbf{e}_r == -m\omega^2\mathbf{r} = -D\mathbf{r} \tag{2.3.25}$$

erő, az ún. kvázielasztikus erő hat, amelynek komponensei:

$$F_\theta = F_\varphi = 0, \quad F_r = -m\omega^2 r = -Dr. \tag{2.3.26}$$

A kvázielasztikus erőtér centrálszimmetrikus. A térerősség a mező centruma felé mutat és nagysága egyenesen arányos az attól mért r távolsággal.

Egy-dimenziós esetben:

$$\phi = \frac{1}{2}\omega^2 x^2, \qquad E_x = -\omega^2 x, \tag{2.3.27}$$

és az m tehetetlen tömegű részecskére ebben a térben ható erő:

$$F_x = mE_x = -m\omega^2 x = -Dx. \tag{2.3.28}$$

Rendezett és rendezetlen külső erő. **Ha a külső erők külső tértől származnak, vagy a környező részecskék valamilyen más kollektív viselkedése következtében lépnek fel, akkor rendezett külső erőről beszélünk.** A rendezett erő erőtörvényében (ill. a megfelelő általánosított potenciális energia kifejezésében) már nem szerepelnek a külső erőt kifejtő test egyes részecskéinek helyzetvektorai és sebességvektorai, mert azoknak valamilyen kollektív mozgása hozza létre az egyes részecskék rendezetlen mozgásától már független külső erőt (vagy teret). Ezzel ellentétben, **ha a külső erők nem rendezettek, akkor rendezetlen külső erőkről beszélünk.** Ilyenkor csak annyit mondhatunk, hogy a környezet minden egyes részecskéje kifejt valamilyen erőt a vizsgált rendszer minden egyes részecskéjére, és ezen erők erőtörvényében természetesen a külső környezet részecskéinek helyzetvektorai explicit módon szerepelnek.

Az erőhatások függetlensége. Az a feltevésünk, hogy párkölcsönhatásokat tételeztünk fel, amelyeket meghatározó $V_{a,b}$ törvények nem függenek attól, hogy más részecskék vannak-e jelen és milyen a mozgásállapotuk, biztosítja, hogy az a részecskére ható belső erő kiszámolásakor úgy kell eljárni, hogy az egyes részecskék által kifejtett $\mathbf{F}_{b\to a}$ erőket a többi részecskétől független $V_{a,b}$ törvényből kell származtatni. Ez azt jelenti, hogy ezen erők ugyanekkorák lennének akkor is, ha a többi részecske nem is lenne jelen. Az eredő $\mathbf{F}_a^{\mathrm{b}}$ erőt az egyes párkölcsönhatások erőtörvényeiből független módon származtatott $\mathbf{F}_{b\to a}$ erők független, azaz egyszerű vektori összegzésével lehet megkapni. Ez **az erőhatások függetlenségének elve, Newton IV. törvénye.**

A hatás-ellenhatás törvénye. Könnyen beláthatjuk, hogy ha az A rendszerben a belső erők párkölcsönhatásból származnak, akkor az a részecske által a b részecskére kifejtett $\mathbf{F}_{a\to b}$ erő azonos nagyságú és ellentétes irányú a b részecske által az a részecskére kifejtett $\mathbf{F}_{b\to a}$ erővel:

$$\mathbf{F}_{a\to b} = -\mathbf{F}_{b\to a}. \tag{2.3.29}$$

Ez Newton III. törvénye, az ún. hatás-ellenhatás törvénye.

Tegyük fel ugyanis, hogy csak ez a két részecske van jelen és zárt rendszert alkotnak. Akkor csak ez a két erő hat, és a rendszer teljes impulzusa $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b$ állandó, mert a rendszer zárt. Ekkor tetszőleges infinitezimális dt idő alatt az egyik részecske impulzusának megváltozása egyenlő a másik impulzusa megváltozásának minusz egyszeresével: $d\mathbf{p}_a = -d\mathbf{p}_b$. Ez viszont az egyes részecskékre ható erők definíciója alapján azt jelenti, hogy

$$\mathbf{F}_{b\to a} = \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_b}{dt} = -\mathbf{F}_{a\to b}. \tag{2.3.30}$$

Az erőhatások függetlenségének következtében ezen a reláción nem változtat az, hogy további részecskéket veszünk be a rendszerbe, vagy hogy a rendszer más rendszerek részecskéivel is kölcsönhat.

2.3.2 Impulzustétel. A tömegközéppont mozgásegyenlete

Newton II. törvénye pontrendszerre. Vegyük megint azt az esetet, amikor az A nyílt rendszer a B környezettel kölcsönhat. Írjuk az A rendszer részecskéire vonatkozó Euler-Lagrange-féle mozgásegyenleteket

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} \tag{2.3.31}$$

alakba és adjuk ezeket össze az összes $a \in A$ részecskére:

$$\sum_{a=1}^{N} \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.32}$$

A jobb oldal első tagja a hatás-ellenhatás törvénye értelmében eltűnik:

$$\sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} = \sum_{a=1}^{N} \sum_{b>a}^{N} (\mathbf{F}_{b\to a} + \mathbf{F}_{a\to b}) = 0. \tag{2.3.33}$$

Az egyes részecskékre ható külső erők vektori összegét jelöljük $\mathbf{F}$-fel:

$$\mathbf{F} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.34}$$

Az egyenlet bal oldalát kifejezzük a rendszer teljes

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a \tag{2.3.35}$$

impulzusával. Ekkor az A rendszer teljes impulzusának időbeli változására ugyanolyan alakú mozgásegyenletet kapunk, mint az egyes részecskék mozgásegyenlete:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{2.3.36}$$

Ez az impulzustétel: a rendszer teljes impulzusának idő szerinti első deriváltja egyenlő a rendszerre ható külső erők vektori eredőjével. (A külső erők vektori összegének képzésekor teljesen mindegy, hogy az összegben szereplő egyes külső erők a rendszer melyik részecskéjére hatnak, azaz hogy hol van a támadási pontjuk.)

Impulzusmérleg. A kapott (2.3.36) egyenlet egyúttal **az impulzus mérlegegyenlete.** Azt mondja, hogy az A nyílt rendszer impulzusa azért és csakis azért változhat meg, mert a rendszerre más testek kívülről erőt gyakorolnak. Az A nyílt rendszerre érvényes egyenlet:

$$\frac{d\mathbf{P}_A}{dt} = \mathbf{F}_{B\to A}. \tag{2.3.37}$$

Természetesen ugyanilyen alakú egyenlet érvényes a B környezetre is:

$$\frac{d\mathbf{P}_B}{dt} = \mathbf{F}_{A\to B}. \tag{2.3.38}$$

Vegyük figyelembe, hogy a B test által A-ra kifejtett $\mathbf{F}_{B\to A}$ erőt úgy kell kiszámolni, hogy összeadjuk vektorilag a B test b részecskéi által az A test a részecskéire gyakorolt valamennyi erőt:

$$\mathbf{F}_{B\to A} = \sum_{b\in B}\sum_{a\in A}\mathbf{F}_{b\to a}, \tag{2.3.39}$$

és hasonlóan:

$$\mathbf{F}_{A\to B} = \sum_{a\in A}\sum_{b\in B}\mathbf{F}_{a\to b}. \tag{2.3.40}$$

A hatás-ellenhatás törvénye értelmében viszont:

$$\mathbf{F}_{A\to B} = \sum_{a\in A}\sum_{b\in B}\mathbf{F}_{a\to b} = -\sum_{b\in B}\sum_{a\in A}\mathbf{F}_{b\to a} = -\mathbf{F}_{B\to A}. \tag{2.3.41}$$

Ez azt jelenti, hogy a B test (környezet) által az A testnek (nyílt rendszernek) Δt idő alatt átadott impulzus pontosan annak az impulzusnak az ellentettje, amelyet az A nyílt rendszer ad át Δt idő alatt a B testnek (környezetnek):

$$\Delta\mathbf{P}_A = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{d\mathbf{P}_A}{dt}dt = -\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{d\mathbf{P}_B}{dt}dt = -\Delta\mathbf{P}_B. \tag{2.3.42}$$

Az impulzusátadás erőhatás révén történik. Másképpen fogalmazva: (szigorú értelemben) **zárt rendszer egyik részének tetszőleges Δt idő alatt bekövetkező impulzusváltozása egyenlő nagyságú és ellentétes irányú a zárt rendszer másik részének ugyanezen idő alatt bekövetkező impulzusváltozásával.**

Zártság és mechanikai zártság. A nyílt A rendszerre alkalmazott (2.3.36) egyenlet alapján látjuk, hogy a rendszer teljes $\mathbf{P}_A$ impulzusa megmarad, ha a rendszerre ható külső erők eredője zérus. Ez azonban nem feltétlenül jelenti, hogy az A rendszer szigorú értelemben zárt. Elegendő pl. az is, hogy a rendszerre ne hasson rendezett külső erő, és a rendszerre ható rendezetlen erők eredője pedig zérus legyen. (Ekkor még működhetnek egyenként zérustól különböző külső erők, amelyek pl. termikus vagy részecske-kicserélő kölcsönhatást eredményeznek.) **Mechanikai rendszer impulzusa tehát megmarad, ha a rendszerre ható külső erők vektori eredője nulla. Ezért** be szokás vezetni a rendszer mechanikai

zártságának a fogalmát, amelynek egyik feltétele, hogy a rendszerre ható külső erők eredője nulla legyen. Az impulzusmegmaradás törvénye nemcsak szigorú értelemben zárt, hanem mechanikai értelemben zárt rendszerben is érvényes: ha a mechanikai rendszerre ható erők vektori eredője nulla, akkor a rendszer impulzusa megmarad. A mechanikai zártság további feltételével a következő fejezetben foglalkozunk. Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy a mechanikai zártság követelménye kevésbé szigorú, mint a szigorú értelemben vett zártságé, amikoris - többek között - megköveteljük, hogy a rendszer egyetlen részecskéjére se hasson külső erő.

A TKP mozgásegyenlete. Ha a rendszerre ható külső erők eredője nem nulla, akkor **Newton II. törvényének a pontrendszerre mint egyetlen objektumra történő alkalmazását kifejező (2.3.36) egyenlet éppen a rendszer tömegközéppontjának a mozgásegyenlete:**

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} \equiv \frac{d}{dt}(M\mathbf{V}) \equiv M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}. \tag{2.3.43}$$

Ennek értelmében a tömegközéppont gyorsulása arányos a rendszerre ható külső erők vektori eredőjével. Az arányossági tényező a rendszer teljes M tehetetlen tömegének reciproka.

2.3.3 Impulzusmomentum-tétel. Forgatónyomaték

Az impulzusmomentumra vonatkozó mérlegegyenlet. Egy rendszer teljes impulzusmomentumának időbeli változására vonatkozóan is meg tudunk fogalmazni egy hasonló tételt, mint a teljes impulzusának változására. Induljunk ki ismét az A nyílt rendszer részecskéire vonatkozó Euler-Lagrange-féle egyenletek

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}}, \qquad a \in A \tag{2.3.44}$$

alakjából. Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát vektorilag az $\mathbf{r}_a$ helyzetvektorral:

$$\mathbf{r}_a \times \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a) - \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \times \mathbf{p}_a = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.45}$$

A második egyenlet második tagja eltűnik, mert $-m_a\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_a = 0$ alakra hozható. Beírhatjuk továbbá az első tagba az egyes részecskék origóra vonatkoztatott $\mathbf{l}_a = \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$ impulzusmomentumát. Értelmezzük továbbá az a részecskére ható $\mathbf{F}_a$ erőnek az origóra vonatkoztatott forgatónyomatékát az

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a \tag{2.3.46}$$

vektori szorzattal. Ekkor az egyenletünk az alábbi alakot ölti,

$$\frac{d\mathbf{l}_a}{dt} = \mathbf{M}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{M}_a^{\mathrm{k}} \tag{2.3.47}$$

ahol

$$\mathbf{M}_a^{\mathrm{b}} = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} = \sum_{b=1}^{N} \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{b\to a} = \sum_{b=1}^{N} \mathbf{M}_{b\to a} \tag{2.3.48}$$

az a részecskére ható belső erők forgatónyomatékainak vektori összege, és

$$\mathbf{M}_a^{\mathrm{k}} = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} \tag{2.3.49}$$

az a részecskére ható külső erő forgatónyomatéka.

A (2.3.47) egyenlet azt mondja, hogy egy részecske pályaimpulzusmomentumának idő szerinti első deriváltja egyenlő a részecskére ható erők forgatónyomatékainak vektori összegével. (Vigyázat! Ha az egyenletet alkalmazzuk, akkor a bal oldalon szereplő pályaimpulzusmomentumot és a jobb oldalon szereplő forgatónyomatékokat egyaránt ugyanarra a pontra (a tetszőlegesen választott origóra) kell vonatkoztatni.)

Adjuk most össze az A nyílt rendszer egyes a részecskéire felírt (2.3.47) egyenleteket:

$$\frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N}\mathbf{l}_a \equiv \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{a=1}^{N}\mathbf{M}_a^{\mathrm{b}} + \sum_{a=1}^{N}\mathbf{M}_a^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.50}$$

Ez az impulzusmomentum-tétel. Azt fejezi ki, hogy az A test teljes impulzusmomentumának idő szerinti első deriváltja egyenlő a belső erők forgatónyomatékainak és a külső erők forgatónyomatékainak összegével.

Az impulzusmomentum-tétel is átfogalmazható az impulzusmomentum mérlegegyenletévé. Legyen $U = A \cup B$ olyan rendszer, amelyre ható belső és külső forgatónyomatékok eredője zérus. Ekkor tetszőleges Δt idő alatt az A és a B részrendszer impulzusmomentumának megváltozása, azaz rendre $\Delta\mathbf{L}_A$ és $\Delta\mathbf{L}_B$,

$$\Delta\mathbf{L}_B = -\Delta\mathbf{L}_A \tag{2.3.51}$$

hiszen a teljes $U = A \cup B$ rendszer impulzusmomentuma az impulzusmomentum-tétel értelmében állandó. Az impulzusmomentum átadása A és B között az A által B-re kifejtett $\mathbf{M}_{A\to B}(t)$ ill. a B által A-ra kifejtett $\mathbf{M}_{B\to A}(t) = -\mathbf{M}_{A\to B}(t)$ forgatónyomatékok révén valósul meg:

$$\Delta\mathbf{L}_A = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt\mathbf{M}_{B\to A}(t) = -\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt\mathbf{M}_{A\to B}(t) = -\Delta\mathbf{L}_B. \tag{2.3.52}$$

Belső erők forgatónyomatéka. Centrális erők. Általában a belső erők forgatónyomatékainak összege nem nulla. Az összeg minden részecske pártól származóan

$$\mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{b\to a} + \mathbf{r}_b \times \mathbf{F}_{a\to b} = (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{F}_{b\to a} \tag{2.3.53}$$

alakú járulékot tartalmaz. Ezek akkor és csak akkor tűnnek el azonosan, **ha bármely két részecske között ható erő párhuzamos a két részecske relatív helyzetvektorával. Az ilyen erőt centrális erőnek nevezzük.** A 25. ábra szemléltet két részecskét, amelyek centrális erővel hatnak kölcsön.

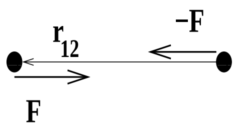

Figure 25: Két részecske centrális erővel hat kölcsön.

Emlékezzünk vissza, hogy párkölcsönhatás esetén

$$\mathbf{F}_{b\to a} = -\frac{\partial V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a}, \tag{2.3.54}$$

ami akkor ad a relatív helyzetvektorral párhuzamos erőt, ha a megfelelő $V_{a,b}$ potenciális energia csak a részecskék relatív helyzetvektorának nagyságától, azaz csak az $r_{a,b} = |\mathbf{r}_{a,b}| = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$ távolságtól függ, ekkor ugyanis:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{b\to a} &= -\frac{\partial V_{a,b}(r_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a} = -\frac{\partial V_{a,b}(r_{a,b})}{\partial r_{a,b}}\frac{\partial\sqrt{\mathbf{r}_{a,b}^2}}{\partial \mathbf{r}_{a,b}} \\ &= -\frac{\partial V_{a,b}(r_{a,b})}{\partial r_{a,b}}\frac{2\mathbf{r}_{a,b}}{2\sqrt{\mathbf{r}_{a,b}^2}} = -\frac{\partial V_{a,b}(r_{a,b})}{\partial r_{a,b}}\frac{\mathbf{r}_{a,b}}{r_{a,b}}.\end{aligned} \tag{2.3.55}$$

Centrális erő potenciális energiája tehát csak a két kölcsönható részecske távolságától függ és független a részecskék relatív helyzetvektorának irányától.

Nem centrális erőkre példa, amikor két részecske úgy hat kölcsön, hogy erőpárt alkot az egyik által a másikra kifejtett $\mathbf{F}$ és a másik által az egyikre kifejtett $-\mathbf{F}$ erő, azaz amikor ezek az erők merőlegesek a két részecske relatív helyzetvektorára. Ilyen rendszer megvalósítható pl. úgy, hogy két kicsiny mágnestűt (mágneses dipólust) egymásra merőlegesen rögzítünk egy elhanyagolható tömegű, r hosszúságú rúd két végére (ld. 26. ábra). Ennek a rendszernek a belső forgatónyomatéke nem nulla, sőt állandó, ezért az impulzusmomentumtétel értelmében időben lineárisan növekvő impulzusmomentumra kellene szert tennie. Másrészt azt gondolnánk, erre a rendszerre semmilyen külső erő nem hat, azaz szigorú értelemben zárt, akkor viszont az impulzusmomentumának meg kellene maradnia. Hol van a tévedésünk? Ott, hogy ez a rendszer nem szigorú értelemben zárt fizikai rendszer. Ahogy a rúd az erőpár hatására forogni kezd, a mágneses dipólusok létrehoznak egy elektromágneses teret, amely olyan erőt ill. forgatónyomatékot fog kifejteni a rendszerre, hogy az impulzusmomentuma és ezáltal a forgásból származó kinetikus energiája ne tudjon korlátlanul nőni. A dipólusokból alkotott rendszer nem zárt, hanem kölcsönhat egy másik testtel, az elektromágneses mezővel. Az elektrodinamika keretében meg lehet mutatni, hogy akkor kapunk zárt rendszert, ha abba az elektromágneses mezőt is belevesszük. A dipólusokból és az elektromégneses mezőből álló zárt rendszer teljes impulzusmomentuma (és energiája is) természetesen megmarad. A jelenség részletes magyarázata azonban kívül esik a klasszikus mechanika keretein.

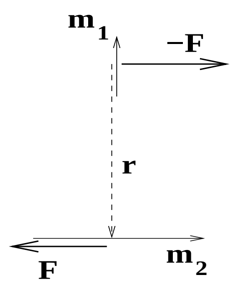

Figure 26: Az ábra szerinti elrendezésben a mágneses dipólusokból álló rendszerben a belső erők erőpárt alkotnak, forgatónyomatékuk nem nulla.

Ha a rendszerben csak centrális erők hatnak, akkor a rendszerben a belső erők forgatónyomatékainak az összege nulla. Ekkor a rendszerre vonatkozó impulzusmomentum-tétel,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \tag{2.3.56}$$

azt mondja ki, hogy a rendszer teljes impulzsumomentumának idő szerinti első deriváltja egyenlő a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak $\mathbf{M} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{M}_a^{\mathrm{k}}$ összegével. A test impulzusmomentuma tehát annak következtében változik meg, hogy a külső erők forgatónyomatékainak összege nem nulla. Ha a külső erők forgatónyomatékainak összege nulla, akkor a rendszer teljes impulzusmomentuma állandó. (Feltéve, hogy a rendszerben centrális erők hatnak.) Ezért a mechanikai zártság másik feltételének azt nevezzük, ha a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak összege nulla.

Mechanikai zártság. **A pontrendszert akkor nevezzük mechanikai értelemben zártnak, ha a pontrendszerre ható külső erők és azok forgatónyomatékainak vektori összege egyaránt nulla. Mechanikailag zárt rendszernek az impulzusa és (centrális belső erők esetén) az impulzusmomentuma is állandó.**

Mechanikai egyensúly. **Ha egy mechanikai rendszer teljes impulzusa és teljes impulzusmomentuma nulla valamely inerciarendszerben és a rendszer mechanikai értelemben zárt, akkor azt mondjuk, hogy a rendszer mechanikai egyensúlyban van ebben az inerciarendszerben.** A mechanikai egyensúlyban levő rendszer tehát mint egész nem végez haladó mozgást és nem forog az adott inerciarendszerben.

Az impulzusmomentum és a forgatónyomaték vonatkoztatási pontja. A fentiekben láttuk, hogy adott inerciarendszerben az impulzusmomentum-tétel úgy érvényes, hogy mind az impulzusmomentumot, mind a forgatónyomatékot az origóra vonatkoztatjuk. Az origó, az inerciális vonatkoztatási rendszerhez rögzített koordinátarendszer kezdőpontja tetszőleges, az adott inerciarendszerben nyugvó pont lehet. Láttuk azt is, hogy centrális erők forgatónyomatéka nulla, függetlenül attól, hogy hol választjuk a vonatkoztatási pontot (az origót) az adott inerciarendszerben. Más esetben a forgatónyomaték változik, ha az O vonatkoztatási pontról áttérünk egy tetszőleges másik O' vonatkoztatási pontra. Legyen O' helyzetvektora $\mathbf{R}$, akkor

$$\mathbf{M} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{M}_a = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a = \sum_{a=1}^{N} (\mathbf{r}'_a + \mathbf{R}) \times \mathbf{F}_a = \mathbf{M}' + \mathbf{R} \times \mathbf{F} \tag{2.3.57}$$

összefüggést kapunk az O pontra vonatkoztatott $\mathbf{M}$ és a hozzá képest $\mathbf{R}$ vektorral eltolt O' pontra vonatkoztatott $\mathbf{M}'$ forgatónyomaték között, ahol a jobb oldal második tagja a rendszerre ható $\mathbf{F}$ eredő erőnek az eredeti O pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka, ha támadási pontját O'-be képzeljük. **Ha a rendszerre ható külső erők eredője nulla, akkor azok forgatónyomatékainak eredője az inerciarendszer tetszőleges pontjára vonatkoztatva ugyanakkora. A rendszerben ható belső erők forgatónyomatéka az inerciarendszerben nyugvó tetszőleges pontra vonatkoztatva ugyanakkora.** Az utóbbi állítás azért igaz, mert a hatás-ellenhatás törvénye miatt a belső erők eredője mindig nulla.

A rendszer O és O' pontokra vonatkoztatott $\mathbf{L}$ ill. $\mathbf{L}'$ impulzusmomentumai között

$$\mathbf{L} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = \sum_{a=1}^{N} (\mathbf{r}'_a + \mathbf{R}) \times \mathbf{p}_a = \mathbf{L}' + \mathbf{R} \times \mathbf{P} \tag{2.3.58}$$

összefüggés áll fenn, ahol a jobb oldal második tagja a rendszer teljes **P** impulzusának az eredeti O pontra vonatkoztatott nyomatéka, ha az impulzusvektor támadási pontját az O' pontba képzeljük. Az impulzus-tétel és az impulzusmomentum-tétel az O origójú inerciális koordinátarendszerben

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F},$$
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \tag{2.3.59}$$

amit a (2.3.57) egyenlettel együtt felhasználva, és a (2.3.58) egyenlet mindkét oldalát idő szerint deriválva kapjuk, hogy

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathbf{R}\times\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}'}{dt} + \mathbf{R}\times\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}'}{dt} + \mathbf{R}\times\mathbf{F},$$
$$\mathbf{M}' = \frac{d\mathbf{L}'}{dt}. \tag{2.3.60}$$

Így közvetlenül is látjuk, hogy az O-hoz képest eltolt tetszőleges másik, az inerciarendszerben nyugvó O' pontra is érvényes marad az impulzusmomentum-tétel.

2.3.4 Az erő munkája. Munkatétel

Munka. Teljesítmény. **Az a részecskére ható $\mathbf{F}_a$ erő által az a részecskén végzett $d'W_a$ elemi munkán az $\mathbf{F}_a$ erő és az a részecske infinitezimális $d\mathbf{r}_a$ elmozdulásának a skaláris szorzatát értjük:**

$$d'W_a = \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{r}_a. \tag{2.3.61}$$

Az elemi munka infinitezimális mennyiség, hiszen a részecskének az infinitezimális elmozdulásával kapcsolatos. Ugyanakkor általában nem létezik a helyzetvektornak olyan függvénye, amelynek infinitezimális megváltozásaként lehetne az elemi munkát felfogni. Ezért szerepel a vessző az elemi munka $d'W$ jelölésében. Ha a részecske $d\mathbf{r}_a$ elmozdulása dt idő alatt következett be, akkor

$$d'W_a = \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{r}_a = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}_a dt \tag{2.3.62}$$

alakban írható az elemi munka. **Az időegység alatt végzett munka**, azaz pontosabban az

$$\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}_a \tag{2.3.63}$$

mennyiség, **a részecskére ható erő és a részecske sebességének skaláris szorzata az erő teljesítménye**.

Munkatétel. Vegyük észre, hogy az a testre ható eredő $\mathbf{F}_a$ erő teljesítménye azonos módon átírható az alábbi alakba:

$$\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} \cdot \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}m_a\mathbf{v}_a^2\Big) \tag{2.3.64}$$

Ebből következik, hogy **az a részecskére ható $\mathbf{F}_a$ (eredő) erőnek dt idő alatt az a részecskén végzett elemi munkája, $d'W_a$ egyenlő az a részecske kinetikus energiájának megváltozásával:**

$$d'W_a = d\Big(\frac{1}{2}m_a\mathbf{v}_a^2\Big) \equiv dt_a. \tag{2.3.65}$$

Ez az egyetlen részecskére vonatkozó munkatétel.

A munkatételt könnyen általánosíthatjuk N részecskéből álló pontrendszerre. Írjuk fel az A nyílt rendszer valamennyi részecskéjére a munkatételt és adjuk össze ezeket az egyenleteket:

$$dT \equiv \sum_{a=1}^{N} dt_a = \sum_{a=1}^{N} d'W_a = d'W \tag{2.3.66}$$

ahol dT a rendszer teljes kinetikus energiájának megváltozása, $d'W$ pedig részletesen kiírva,

$$\begin{aligned} d'W &= \sum_{a=1}^{N} d'W_a = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}_a dt \\ &= \sum_{a=1}^{N} (\mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}}) \cdot \mathbf{v}_a dt = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} \cdot \mathbf{v}_a dt + \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{v}_a dt \\ &= d'W^{\mathrm{b}} + d'W^{\mathrm{k}}, \end{aligned} \tag{2.3.67}$$

azaz a rendszerben ható belső erők $d'W^{\mathrm{b}} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} \cdot \mathbf{v}_a dt$ munkájának és a rendszerre ható külső erők $d'W^{\mathrm{k}} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{v}_a dt$ munkájának az összege.

Általában a belső erők munkája nem zérus. Ez azt jelenti, hogy egy fizikailag zárt rendszer teljes kinetikus energiája változhat a belső erők munkája révén. Ha a részecskerendszer egy merevtest, amelyben bármely két részecske távolsága állandó, és a részecskék között ható erők párkölcsönhatásból származnak és centrálisak, akkor a belső erők munkája zérus.

Az utóbbi állítást beláthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a belső erők munkájához bármely részecske-pár

$$\mathbf{F}_{b\to a} \cdot \mathbf{v}_a dt + \mathbf{F}_{a\to b} \cdot \mathbf{v}_b dt = \mathbf{F}_{b\to a} \cdot (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) dt = \mathbf{F}_{b\to a} \cdot d\mathbf{r}_{a,b} \tag{2.3.68}$$

járulékot ad. Ha az $r_{a,b}$ távolság állandó, akkor a relatív helyzetvektor $d\mathbf{r}_{a,b}$ megváltozásának merőlegesnek kell lennie az $\mathbf{r}_{a,b}$ relatív helyzetvektorra. Centrális erők esetén azonban $\mathbf{F}_{b\to a}$ párhuzamos a relatív helyzetvektorral, s így a relatív helyzetvektor megváltozása merőleges az erőre, azaz bármely részecskepár zérus járulékot ad a belső erők munkájához.

2.3.5 Konzervatív erők

Konzervatív erő munkája. **Az a részecskére ható F erőt konzervatív erőnek nevezzük, ha sztatikus (azaz időtől független) külső potenciáltér hozza létre:**

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_a)}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{2.3.69}$$

A konzervatív külső erő a potenciális energia negatív gradiense. **A sztatikus potenciálból származtatható erőteret konzervat´ iv erőtérnek nevezzük. A konzervatív erőtér (fizikai mező) által a részecskére kifejtett F erőnek a részecskén dt idő alatt végzett elemi munkája,**

$$d'W_a = \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{r}_a = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_a)}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot d\mathbf{r}_a = -dV(\mathbf{r}_a), \tag{2.3.70}$$

egyenlő a részecske potenciális energiája megváltozásának minusz egyszeresével.

Konzervatív erő munkája független az úttól. Tegyük fel, hogy egyetlen anyagi pont mozog konzervatív erőtérben. A külső tér által a részecskére kifejtett erő $\mathbf{F} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$, s ennek elemi munkája:

$$d'W = -dV(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \tag{2.3.71}$$

ha a részecske $d\mathbf{r}$ elmozdulást szenved. A külső potenciáltérnek, azaz a konzervatív erőnek a részecskén végzett elemi munkája a potenciális energia mínusz egyszeresének teljes differenciálja:

$$\begin{aligned} d'W &= -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= -\Big[\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} dz\Big] \\ &= -[V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x,y,z)] = -dV(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{2.3.72}$$

Fontos: a külső tér munkája szempontjából mindegy, hogy a részecske $d\mathbf{r}$ elmozdulását a külső tér által kifejtett erő mellett milyen további erők okozzák.

Számoljuk ki a konzervatív fizikai mező által a részecskére kifejtett erő munkáját, amíg a részecske a P pontból tetszőleges pálya mentén a Q pontba jut:

$$W^{\text{f.m.}}_{P\to Q} = -\int_P^Q \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = -[V(\mathbf{r}_Q) - V(\mathbf{r}_P)]. \tag{2.3.73}$$

Az eredményből az alábbiakat állapíthatjuk meg:

1. Csak a részecske különböző térbeli pontokban felvett potenciális energiái közötti különbségeknek van fizikai jelentése, hiszen az erő is és a munkavégzés is a potenciális energia különböző térbeli pontokban vett értékeinek különbségétől függ csak. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy csak a potenciálkülönbségeknek van fizikai jelentésük.

2. A kapott összefüggést tekinthetjük a potenciális energia mérési utasításának. Írjuk ehhez át az egyenletet az alábbi alakba:

$$V(\mathbf{r}_P) - V(\mathbf{r}_Q) = W^{\text{f.m.}}_{P\to Q} \tag{2.3.74}$$

A részecske (Q ponthoz viszonyított) potenciális energiája a fizikai mező tetszőleges P pontjában egyenlő azzal a munkával, amit a tér végez a részecskén, amíg a részecskét a P pontból elvisszük a Q vonatkoztatási pontba. Ezt az állítást ,,meg is lehet fordítani”: A részecske (Q ponthoz viszonyított) potenciális energiája a tér tetszőleges P pontjában egyenlő azzal a munkával, amit a részecskén kell végeznünk, hogy kvázisztatikusan elvigyük a Q vonatkoztatási pontból a P pontba. Az utóbbi állításban azért kell kvázisztatikus mozgatásról beszélni, hogy az általunk kifejtett erő éppen egyenlő és ellentétes irányú legyen a tér által kifejtett erővel.

3. Látjuk, hogy ez a munkavégzés csak attól függ, hogy mennyi a részecske potenciális energiája a kezdeti P és a végső Q pontban. A konzervatív erő munkája tehát nem függ attól, hogy a részecske milyen pályagörbe mentén jutott a P pontból a Q pontba. **Konzervatív erő munkája független a mozgás pályájától.**

4. **A konzervatív fizikai mező munkája nulla, miközben a részecske egy tetszőleges zárt görbén végighalad.** Nyilvánvalóan, ha a zárt görbe a P pontból indul és abban is végződik, akkor a konzervatív fizikai mező a részecskén $-[V(P)-V(P)] = 0$ munkát végez, miközben a részecske végighalad a zárt görbe mentén.

Erőtér konzervativitásának feltétele. A konzervatív fizikai mezőt nem csak egy próbatest potenciális enrgiájával (ill. a sztatikus potenciállal) lehet jellemezni, mint a hely függvényével, hanem azzal az erőtérrel (szatatikus térerősség-mezővel) is, amelyet a potenciális energia (potenciál) negatív gradienseként kapunk. A matematikában van egy tétel, amely kimondja, hogy

- egy tetszőleges $-\phi(\mathbf{r})$ skalármező $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}$ gradiensének rotációja mindig zérus,
$$\mathrm{rot}\,\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} = 0 \tag{2.3.75}$$
- és, hogy ha egy tetszőleges $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektormező rotációja zérus,
$$\mathrm{rot}_i\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial r_j} = 0, \qquad (i = 1,2,3), \tag{2.3.76}$$
akkor mindig létezik olyan $-\phi(\mathbf{r})$ skalármező, amelynek gradienseként az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektormező előállítható.

Tetszőleges $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ **vektormező rotációján** olyan rot $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ **vektormezőt értünk,** amelynek Descartes-komponensei:

$$\mathrm{rot}_i\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\times\mathbf{E}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial r_j}, \qquad i = 1,2,3. \tag{2.3.77}$$

A tételt a konzervatív fizikai mező potenciáljára és erőterére alkalmazva mondhatjuk, hogy **annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ erőtér konzervatív legyen, az hogy az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektormező rotációja azonosan eltűnjön, azaz rot $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ legyen az egész térben. Az erőtér által a részecskén végzett munka ekkor és csak ekkor független az úttól.**

Részecske energiájának megmaradása konzervatív erőtérben. Vizsgáljuk egy részecske mozgását külső potenciáltérben! Mit őriz meg, mit konzervál a konzervatív erő? A részecske Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(\mathbf{r}). \tag{2.3.78}$$

Mivel a részecskére csak a konzervatív $\mathbf{F} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$ erő hat, más erő nem, ezért ezen erő $d'W$ elemi munkája egyúttal a részecske kinetikus energiájának dT megváltozásával is egyenlő a munkatétel értelmében. Következésképpen:

$$d'W = dT = -dV, \tag{2.3.79}$$

azaz

$$0 = dT + dV = d(T + V) = dE. \tag{2.3.80}$$

Tehát **konzervatív erőtérben mozgó részecske energiája (kinetikus és potenciális energiájának az összege) állandó marad a mozgás során. Ez az energiamegmaradás törvénye konzervatív erőtérben mozgó részecskére.** A konzervatív erő tehát az energiát őrzi meg. Az energiamegmaradás törvényének ezen alakjához közvetlenül is eljuthatunk, hiszen a (2.3.78) Lagrange-függvény sztatikus potenciál esetén az időbeli eltolással szemben invariáns, ezért a tényleges mozgás során a $H = T + V$ Hamilton-függvény értéke, azaz az energia nem változik.

Konzervatív belső erők munkája. Tegyük fel, hogy az a (ill. a b) részecske által a b (ill. az a) részecskére kifejtett erő potenciális energiából származtatható, amely csak a két részecske $\mathbf{r}_{a,b} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ relatív helyzetvektorától függ. Ekkor a Lagrange-függvény kölcsönhatási tagjához az a, b részecskepár járuléka $-V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b})$ alakú. Egyszerűség kedvéért valamennyi részecskepár között ugyanolyan kölcsönhatást, azaz erőtörvényt fogunk feltételezni. Ezért elhagyjuk az $V_{a,b}$ potenciális energia a, b alsó indexét. **Megállapodás szerint azt fogjuk mondani, hogy $V(\mathbf{r}_{a,b})$ az a potenciális energia, amivel az a (ill. a b) részecske rendelkezik a b (az a) részecske jelenlétében.** Azt is fogjuk mondani, hogy az a (ill. a b) részecske potenciálteret kelt, amelyben a b (ill. az a) részecskének potenciális energiája van. **A potenciális energiából származtatható erőt konzervatív erőnek nevezzük.** Láttuk, hogy a b részecske által az a részecskére kifejtett erő erőtörvényét a $V(\mathbf{r}_{a,b})$ potenciális energia meghatározza:

$$\mathbf{F}_{b\to a} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_{a,b}} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{2.3.81}$$

Az a részecskére ható erő tehát a potenciális energiának az a részecske helyzetvektora szerinti negatív gradiense.

Számoljuk ki a b részecske által az a részecskére kifejtett $\mathbf{F}_{b\to a}$ erőnek az a részecskén végzett elemi munkáját:

$$d'W_{b\to a} = \mathbf{F}_{b\to a} \cdot d\mathbf{r}_a = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot d\mathbf{r}_a. \tag{2.3.82}$$

Hasonlóan, a a részecske által a b részecskén végzett elemi munka ugyanazon dt idő alatt

$$d'W_{a\to b} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_b} \cdot d\mathbf{r}_b = \frac{\partial V(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot d\mathbf{r}_b. \tag{2.3.83}$$

Az (a, b) két-részecskés rendszerben a konzervatív belső erők elemi munkája tehát:

$$d'W_{b\to a} + d'W_{a\to b} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_{a,b}} \cdot d\mathbf{r}_{a,b}, \tag{2.3.84}$$

azaz egyenlő a részecskepár potenciális energiája megváltozásának negatívjával.

Az egyes részecskepárokra vonatkozó ilyen típusú egyenleteket összeadva azt kapjuk, hogy konzervatív belső erők munkája egyenlő a részecske rendszer belső kölcsönhatásokból származó V^{b} potenciális energiája megváltozásának mínusz egyszeresével: $d'W^{\mathrm{b}} = -dV^{\mathrm{b}}$. Ha nincsenek külső erők jelen, akkor tehát

$$dT = d'W^{\mathrm{b}} = -dV^{\mathrm{b}}, \qquad dT + dV^{\mathrm{b}} = 0, \tag{2.3.85}$$

azaz **a konzervatív, zárt rendszer energiája (kinetikus energiájának és belső kölcsönhatásokból származó potenciális energiájának összege) állandó.** Ez nem más, mint speciális esete az energiamegmaradás (szigorú értelemben) zárt rendszerre vonatkozó törvényének. Utóbbi akkor is igaz, ha a belső erők nem konzervatívak.

2.3.6 Konzervatív erőtérben mozgó konzervatív rendszer energiájának megmaradása

Tegyük fel, hogy olyan N részecskés rendszert vizsgálunk, amely csak konzervatív külső erőknek van alávetve, és amelyben a belső erők is konzervatívak. Ekkor a rendszer teljes energiája

$$\begin{aligned} E &= \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{v}_a - L(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{v}_1, \ldots) = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{v}_a - \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 + V^{\mathrm{b}} + V^{\mathrm{k}} \\ &= \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 + V^{\mathrm{b}} + V^{\mathrm{k}} = T + V^{\mathrm{b}} + V^{\mathrm{k}}, \end{aligned} \tag{2.3.86}$$

ahol a rendszer potenciális energiája a részecskéi közötti kölcsönhatásból származó

$$V^{\mathrm{b}} = \sum_{a=1}^{N} \sum_{b>a}^{N} V_{a,b} \tag{2.3.87}$$

potenciális energia és a részecskéinek a külső térrel való kölcsönhatásából származó

$$V^{\mathrm{k}} = \sum_{a=1}^{N} V_a \tag{2.3.88}$$

potenciális energiának az összege. A rendszer teljes energiája megmarad, mert a Lagrange-függvény nem függ az időtől explicit módon, s így a hatás invariáns az időbeli eltolással szemben. Tehát a rendszer energiájának tetszőleges dt idő alatt bekövetkező megváltozása zérus:

$$0 = dE = dT + dV^{\mathrm{b}} + dV^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.89}$$

Tehát konzervatív külső térben mozgó rendszer kinetikus és teljes potenciális energiájának összege állandó a mozgás során. Ez az energia megmaradásának a külső potenciáltérben mozgó rendszerre érvényes törvénye.

2.3.7 Nyílt rendszer energiamérlege. Az első főtétel

Tegyük fel, hogy az A test kölcsönhat a B környezetével, de a külső erők és a külső forgatónyomatékok összege egyaránt zérus. Ekkor az A rendszer K tömegközépponti rendszere inerciarendszer. Tegyük fel továbbá, hogy a belső erők az A rendszerben konzervatívak és centrálisak, és hogy az A rendszernek a tömegközéppontra vonatkoztatott impulzusmomentuma nulla (az A rendszer, mint egész, nem forog).

Írjuk fel az A rendszerre a munkatételt a K tömegközépponti rendszerben. A munkatétel értelmében az A test kinetikus energiájának dt idő alatt bekövetkezett megváltozása egyenlő a rendszerben ható belső erők munkájának és a rendszerre ható külső erők munkájának az összegével:

$$dT = d'W^{\mathrm{b}} + d'W^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.90}$$

A konzervatív, centrális belső erők munkája:

$$d'W^{\mathrm{b}} = -d\Big(\sum_{a=1}^{N}\sum_{b>a}^{N} V(r_{a,b})\Big). \tag{2.3.91}$$

Ekkor értelmezhetjük a K inerciális tömegközépponti rendszerben (a nem forgó) A rendszer U_A **,,belső energiáját"**, mint kinetikus és belső, kölcsönhatási potenciális energiájának az összegét:

$$U_A = T + \sum_{a=1}^{N}\sum_{b>a}^{N} V(r_{a,b}). \tag{2.3.92}$$

A munkatétel így az alábbi alakba írható:

$$dU_A = dT + d\Big(\sum_{a=1}^{N}\sum_{b>a}^{N} V(r_{a,b})\Big) = dT - d'W^{\mathrm{b}} = d'W^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.93}$$

Azaz az A nyílt rendszer ,,belső" energiájának megváltozása egyenlő a külső erőknek az A rendszeren végzett munkájával. Ha nincsenek jelen rendezett külső erők, akkor a külső erők munkája rendezetlen munkavégzés, $d'W^{\mathrm{k}} = d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezetlen}}$. **A rendezetlen külső erők munkavégzését hőközlésnek nevezzük, és a rendezetlen külső erőknek a rendszeren végzett pozitív ill. negatív munkáját a környezet által a rendszerrel közölt hőnek, ill. a rendszer által a környezetnek leadott hőnek nevezzük. A szokásos jelölés**

$$d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezetlen}} = d'Q, \tag{2.3.94}$$

ahol $d'Q$ a környezet által a rendszernek átadott (előjeles) hő (hőmennyiség). Azt a környezetet, amely csak rendezetlen munkavégzés révén tud energiát átadni a nyílt rendszernek, hőtartálynak nevezzük. A hőközléssel járó folyamatok törvényszerűségeinek vizsgálatával a statisztikus fizika ill. a termodinamika foglalkozik. A munkatétel fenti alakja azt állítja, hogy a hőtartályba helyezett rendszer belső energiájának megváltozása egyenlő (a hőtartály által) a rendszerrel közölt hővel, ha nincsenek jelen rendezett külső erők. Ha rendezett külső erők is vannak jelen, akkor azok munkáját is figyelembe kell venni a munkatételben, azaz a külső erők munkája a hőközlés és a rendezett külső erők $d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezett}}$ munkájának összege,

$$d'W^{\mathrm{k}} = d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezetlen}} + d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezett}} = d'Q + d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezett}}. \tag{2.3.95}$$

A nyílt rendszerre vonatkozó munkatétel így az alábbi alakot ölti,

$$dU_A = d'Q + d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezett}}. \tag{2.3.96}$$

Az A rendszer belső energiájának megváltozása egyenlő a rendszerrel közölt hőnek és a rendezett külső erőknek a rendszeren végzett munkája összegével. Ez a nyílt rendszerek dinamikai folyamataira érvényes első főtétel, ami egy nyugvó ($\mathbf{P} = 0$) és nem forgó ($\mathbf{L} = 0$) nyílt rendszer energiamérlegének legáltalánosabb alakban megfogalmazott egyenlete.

2.4 A Hamilton-egyenletek

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a mechanikai rendszerek mozgásegyenletei ekvivalens módon megfogalmazhatók mind a Lagrange-függvény, mind a Hamilton-függvény alapján. Párhuzamot vonunk a kétféle leírásmód között és röviden elmondjuk, hogyan lehet a klasszikus mechanikát úgy általánosítani, hogy megkapjuk a kvantummechanikát.

2.4.1 Legendre-transzformáció

A bevezetett Hamilton-függvény és a Lagrange-függvény szoros matematikai kapcsolatban állnak egymással. **A Hamilton-függvény**

$$H(q,p;t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q};t) \tag{2.4.1}$$

definíciója és az általános impulzus

$$p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.4.2}$$

definíciója együtt a matematikában a Legendre-transzformáció elnevezésre hallgat, amennyiben a Lagrange-függvény az általános sebességeknek konvex függvénye, azaz

$$\sum_{i,j=1}^{s} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} d\dot{q}_i d\dot{q}_j > 0 \tag{2.4.3}$$

pozitív definit kvadratikus forma az általános sebességek tetszőleges $d\dot{q}_i$ növekményei esetén. (Utóbbi azt jelenti, hogy a $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ $s \times s$-es mátrix valamennyi s darab sajátértéke, azaz az összes tehetetlen tömeg jellegű paraméter pozitív.)

Az általános sebességekben konvex $L(q,\dot{q};t)$ Lagrange-függvényből Legendre-transzformációval kapott $H(q,p;t)$ Hamilton-függvény csak az általános koordináták és a megfelelő általános impulzusok (és az idő) függvénye,

$$H = H(q,p;t), \tag{2.4.4}$$

és az általános sebességek kifejezhetők a

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p;t)}{\partial p_i} \tag{2.4.5}$$

alakban.

Ha a Lagrange-függvény az általános sebességeknek nem konvex függvénye, azaz ha a $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ $s \times s$-es mátrixnak vannak zérus vagy negatív sajátértékei, akkor a Lagrange-függvényt elfajultnak nevezzük. Az ilyen eset külön megfontolást igényel.

A bizonyítást végezzük el $s = 1$ szabadsági fokú rendszerre. Ha feltesszük, hogy a Lagrange-függvény az általános sebességnek konvex függvénye, azaz

$$\frac{\partial^2 L(q,\dot{q};t)}{\partial^2 \dot{q}} = \frac{\partial p(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}} > 0, \tag{2.4.6}$$

akkor az általános impulzust definiáló

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \equiv p(q, \dot{q}; t) \tag{2.4.7}$$

egyenlet invertálható az általános sebességre, azaz létezik a

$$\dot{q} \equiv f(q, p; t) \tag{2.4.8}$$

függvény, amit behelyettesítve H definíciójába, látjuk, hogy a Hamilton-függvény kifejezhető csak a q és p változókkal: $H \equiv H(q, p; t)$.

A Hamilton-függvénynek az általános koordinátákkal és a nekik megfelelő általános impulzusokkal kifejezett alakját a Hamilton-függvény kanonikus alakjának nevezzük. Az egyes általános koordinátákhoz tartozó általános impulzusokat pedig az adott általános koordinátához kanonikusan konjugált impulzusnak nevezzük.

A bizonyításból még az van hátra, hogy megmutassuk, az általános sebesség a Hamilton-függvény p szerinti parciális deriváltja.

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\Big(pf(q,p;t) - L(q, f(q,p;t))\Big) = \dot{q} + p\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p} \tag{2.4.9}$$

Itt a két utolsó tag a kanonikusan konjugált impulzus definíciója értelmében kiejti egymást, és megkapjuk a keresett

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \tag{2.4.10}$$

összefüggést.

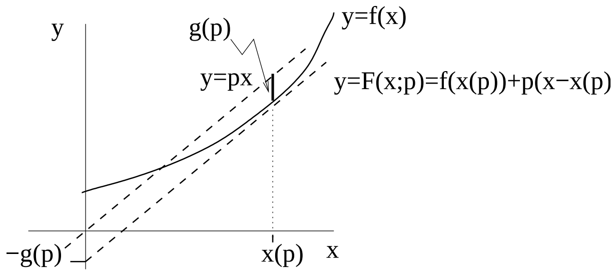

Figure 27: Az $f(x)$ konvex függvény $g(p)$ Legendre-transzformáltja: az $y = xp$ egyenesen és az $f(x)$ függvény p meredekségű érintőjén, az $x(p)$ abszcisszájú pontok ordinátakülönbsége.

Egy egy-változós függvény Legendre-transzformáltját a 27. ábra szemlélteti. Legyen $f(x)$ konvex függvény, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$. Ekkor a függvény deriváltja $p(x) = \frac{df(x)}{dx}$ az x változónak szigorúan monoton növekvő függvénye. A Legendre-transzformálthoz úgy jutunk, hogy rögzített p értékhez vesszük az $f(x)$ függvény grafikonjának p meredekségű érintőjét, amely a függvénygörbét valamely $x(p)$ pontban érinti:

$$F(x;p) = f(x(p)) + p(x - x(p)). \tag{2.4.11}$$

Meghatározzuk ennek az érintőnek az $x = 0$ ordináta-tengellyel vett metszetét:

$$F(0;p) = f(x(p)) - px(p), \tag{2.4.12}$$

ahol

$$p = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x(p)}. \tag{2.4.13}$$

Látjuk, ha a függvény grafikonjának pontjain szigorúan monoton növekvő x értékek szerint haladva végig futunk, akkor p értékein is végigfutunk szigorúan monoton sorrendben és a megfelelő érintő tengelymetszete megadja az $f(x)$ függvény $g(p) = xp - f(x)$ Legendre-transzformáltjának mínusz egyszeresét. A 27. ábra azt is mutatja, hogy a Legendre-transzformált előjelesen kiegészíti az $x(p)$ pontban vett $f(x(p))$ függvényértéket px-re, hiszen definíció szerint $g(p) + f(x) = px$. Az ábra azt is jól szemlélteti, hogy rögzített p (ill. érintő) esetén az $-F(x;p) = px - f(x)$ különbségnek (ami az adott érintő és vele párhuzamos px szelő $x(p)$ abszcisszájú pontjainak előjeles távolsága) maximuma van.

Be lehet bizonyítani, hogy a $g(p)$ függvény Legendre-transzformáltja az eredeti $f(x)$ függvény.

2.4.2 A Hamilton-féle mozgásegyenletek

Mivel a nem elfajult rendszer Lagrange-függvénye és Hamilton-függvénye kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban vannak, azért egy adott rendszer Hamilton-függvényében pontosan annyi, az adott rendszerre vonatkozó dinamikai információ van, mint ezen rendszer Lagrange-függvényében. Ez azt kell jelentse, hogy a Hamilton-függvényből kiindulva meg kell kapjuk a rendszer mozgásegyenleteinek másik, de az Euler-Lagrange-egyenletekkel egyenértékű alakját. Valóban így is van. Alább megmutatjuk, hogy **a nem elfajult mechanikai rendszer Hamilton-féle mozgásegyenletei,**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \tag{2.4.14}$$

egyenértékűek a mechanikai rendszer Euler-Lagrange-féle mozgásegyenleteivel. A mechanikai rendszer mozgásának a Lagrange-függvényre alapozott, az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletekkel történő leírása, és a Hamilton-függvényre alapozott, a Hamilton-féle mozgásegyenletekkel történő leírása két, egymással egyenértékű lehetőség. A Hamilton-egyenleteken alapuló tárgyalás előnye, hogy közönséges, elsőrendű differenciálegyenletekből álló csatolt egyenletrendszert kell megoldani, ami általában numerikusan egyszerűbb, mint a közönséges, másodrendű csatolt differenciálegyenletek rendszerének megoldása. A hátrány az, hogy az egyenletek száma megkétszereződik. Az s darab közönséges, másodrendű differenciálegyenletből álló Euler-Lagrange-féle egyenletrendszer $2s$ darab, közönséges, elsőrendű csatolt differenciálegyenletből álló Hamilton-féle egyenletrendszerrel ekvivalens.

Képezzük az i-edik általános impulzus idő szerinti első deriváltját és használjuk fel az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenleteket:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_i} \\
&= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_j}\frac{\partial p_j(q,\dot{q})}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial p_j(q,\dot{q})}{\partial q_i}\dot{q}_j \\
&= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}.
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Fontos: ügyeljünk arra, hogy a parciális deriválásokat mindig úgy kell elvégezni valamelyik változó szerint, hogy *a függvény argumentumában szereplő* többi változó maradjon rögzített értéken! A (2.4.5) és (2.4.15) egyenletek rendszere együttesen alkotja a mechanikai rendszer úgynevezett Hamilton-féle mozgásegyenleteit. Látjuk, hogy ezek az egyenletek egyértelműen következnek az Euler-Lagrange-egyenletekből.

Fordítva, induljunk ki most a Hamilton-egyenletekből és mutassuk meg, hogy következnek belőlük az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletek. Először megmutatjuk, hogy ha a Lagrange-függvény konvex az általános sebességekben, akkor a Hamilton-függvény konvex az általános impulzusokban. Ehhez elegendő belátni, hogy a második deriváltak mátrixai egymás inverzei:

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 L(q,\dot q;t)}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} \frac{\partial^2 H(q,p;t)}{\partial p_j \partial p_k} = \delta_{i,k}. \tag{2.4.16}$$

Képezzük az alábbi, triviális deriváltat:

$$\begin{aligned}\delta_{i,k} = \frac{\partial p_i}{\partial p_k} &= \frac{\partial}{\partial p_k} \left.\frac{\partial L(q,\dot q;t)}{\partial \dot q_i}\right|_{\dot q = \dot q(q,p;t)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial \dot q_j} \frac{\partial L(q,\dot q;t)}{\partial \dot q_i} \frac{\partial \dot q_j}{\partial p_k} \\ &= \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 L(q,\dot q;t)}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial H(q,p;t)}{\partial p_j}. \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Ez éppen a keresett reláció. Ha mármost adott a Hamilton-függvény és az impulzusváltozókban konvex, akkor az általános sebességeket definiáló (2.4.5) egyenletek kölcsönösen egyértelműen feloldhatók az általános impulzusokra, mint az általános sebességek függvényeire: $p_i = p_i(q,\dot q;t)$. Utóbbit behelyettesítve a Lagrange-függvényt meghatározó $L = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot q_j - H$ kifejezés jobb oldalába, megkapjuk a Lagrange-függvényt mint a $q, \dot q$ változók függvényét. Közvetett deriválással meggyőződhetünk róla, hogy a végrehajtott inverz Legendre-transzformáció, amelyet a (2.4.1) és (2.4.5) egyenletek határoznak meg, maga után vonja a (2.4.2) egyenletek fennállását:

$$\frac{\partial L(q,\dot q;t)}{\partial \dot q_i} = p_i - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial H(q,p;t)}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \dot q_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial p_j}{\partial \dot q_i} \dot q_j = p_i. \tag{2.4.18}$$

Ezután számoljuk ki H segítségével az alábbi deriváltat:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot q;t)}{\partial \dot q_i} = \dot p_i = -\frac{\partial H(q,p;t)}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i}\Big(L(q,\dot q(q,p;t);t) - \sum_{j=1}^{s} p_j \dot q_j(q,p;t)\Big) \\ &= \frac{\partial L(q,\dot q;t)}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L(q,\dot q;t)}{\partial \dot q_j} \frac{\partial \dot q_j(q,p;t)}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{s} p_j \frac{\partial \dot q_j(q,p;t)}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial L(q,\dot q;t)}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Tehát a Hamilton-egyenletekből kiindulva megkaptuk az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenleteket.

Érdemes párhuzamot vonni a kétféle, de egymással ekvivalens leírásmód között.

Lagrange-függvény	**Hamilton-függvény**
$L(q,\dot q;t)$ $p_i = \frac{\partial L(q,\dot q;t)}{\partial \dot q_i}$ $L(q,\dot q;t) = \sum_i p_i(q,\dot q;t)\dot q_i - H(q,p(q,\dot q;t);t)$	$H(q,p;t)$ $\dot q_i = \frac{\partial H(q,p;t)}{\partial p_i}$ $H(q,p;t) = \sum_i p_i\dot q_i(q,p;t) - L(q,\dot q(q,p;t);t)$
Euler-Lagrange-egyenletek $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ s darab közönséges, másodrendű diff.egy.	Hamilton-egyenletek $\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ $2s$ darab közönséges, elsőrendű diff.egy.
Mechanikai állapot $\equiv$ kezdőfeltétel $2s$ adat $(q_1,\ldots,q_s,\dot q_1,\ldots \dot q_s)$ $t=t_0$-ban	Mechanikai állapot $\equiv$ kezdőfeltétel $2s$ adat $(q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s)$ $t=t_0$-ban

Fázistér. Fázistrajektória. A Hamilton-egyenletek megoldása adott kezdőfeltételek esetén egyértelmű: $q_i(t), p_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Adott pillanatban a megoldás ábrázolható a $2s$ dimenziós állapottér pontjaként. Képzeljünk el egy $2s$ dimenziós derékszögű koordinátarendszert, amelynek tengelyeire az egyes általános koordináták és impulzusok értékeit mérjük fel. Az így kapott ponthalmaz **a mechanikai rendszer fázistere. A fázistérben a mechanikai rendszer minden egyes állapotának egy pont felel meg.** A rendszer állapottere lehet szűkebb mint a fázistér, mert esetleg a koordináták és az impulzusok nem vehetnek fel $-\infty$ és ∞ között minden értéket. A mozgásegyenletek adott kezdőfeltétele tehát egy pont a fázistérben, ami egyúttal a lehetséges állapotok halmazának is pontja. A mozgásegyenletek megoldása pedig megadja, hogy a fizikai rendszer állapotát ábrázoló pont hogyan mozog a fázistérben, ahogy az idő múlik és a rendszer állapota változik. A megoldást ábrázoló görbét nevezzük **fázistrajektóriának.**

2.4.3 Irány: a kvantummechanika

Kérdezhetnénk, hogy mi értelme volt egész fáradozásunknak, ha a mechanikai mozgás kapott Hamilton-i leírása egyenértékű a Lagrange-függvényen alapuló leírással. Az egyik haszon technikai jellegű. Numerikusan egyszerűbb elsőfokú közönséges differenciálegyenletek rendszerét megoldani, mint az ekvivalens másodfokú differenciálegyenletek rendszerét.

Van azonban egy további nagy nyereség a fizika szempontjából. A Hamilton-egyenletek, pontosabban azoknak egy kicsit ügyesebb alakba történő átírása, a mozgásnak olyan tárgyalását adják, amely alkalmas az általánosításra. Nevezetesen, ezeket az egyenleteket lehetett - nem kis intuicióval - úgy általánosítani, hogy a mikrovilág részecskéinek mozgását is leíró fizikai elméletet nyerjünk: a kvantummechanikát. Az út a kvantummechanikához a Hamilton-i egyenletek Poisson-zárójelek segítségével történő átírásán, majd a Poisson-zárójeleknek kommutátorokként, azaz operátor-relációkként való értelmezésén át vezetett.

A Hamilton-egyenletek segítségével tetszőleges $f(q,p)$ fizikai mennyiség időbeli változása

$$\frac{df(q(t),p(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\Big[\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\Big] = \sum_{i=1}^{s}\Big[\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\Big]. \tag{2.4.20}$$

alakba írható. Vezessük be tetszőleges $f(q,p)$ és $g(q,p)$ fizikai mennyiségek **Poisson-zárójelét** az alábbi definícióval:

$$\{f,g\}_P = \sum_{i=1}^{s}\Big[\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\Big]. \tag{2.4.21}$$

Ekkor triviálisan a legegyszerűbb Poisson-zárójelek:

$$\{q_i,q_j\}_P = \{p_i,p_j\}_P = 0, \qquad \{q_i,p_j\}_P = \delta_{i,j}. \tag{2.4.22}$$

A fizikai mennyiségekre vonatkozó mozgásegyenletek pedig mind:

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\}_P. \tag{2.4.23}$$

alakot öltenek (ha f nem függ explicit módon is az időtől). Ez mutatja, hogy a dinamikát teljes egészében a Hamilton-függvény határozza meg. A fenti mozgásegyenletek között maguk a Hamilton-egyenletek is ott vannak:

$$\dot{q}_i = \{q_i,H\}_P = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = \{p_i,H\}_P = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{2.4.24}$$

Az f (időtől explicit módon nem függő) fizikai mennyiség akkor és csak akkor mozgásállandó, ha rá $\{f,H\}_P = 0$, azaz ha a Hamilton-függvénnyel képezett Poisson-zárójele eltűnik. A mechanika ilyen megfogalmazásának számos további szépsége van. Az talán a legfontosabb, hogy a mozgásegyenletek alakja nem kötődik az általános koordináták és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusok valamilyen speciális megválasztásához. Végtelen sok olyan ún. kanonikus transzformáció létezik, amellyel a régi koordinátákból és impulzusokból olyan újakra lehet áttérni, amelyekben a mozgásegyenletek alakja változatlan marad.

A **kvantummechanika** irányában történő általánosítást Heisenberg tette meg. Feltette, hogy

1. a fizikai mennyiségeknek, így maguknak a koordinátáknak és az impulzusoknak is operátorokat kell megfeleltetni, amelyek a rendszer állapotainak terén hatnak,

2. ezek az operátorok úgy vannak értelmezve, hogy a megfelelő Poisson-zárójeleket kommutátorokra kell cserélni,

$$\{\ldots,\ldots\}_P \to \frac{1}{i\hbar}[\ldots,\ldots] \tag{2.4.25}$$

és a Descartes-féle koordináták és impulzuskomponensek operátorai között

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \qquad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{i,j} \tag{2.4.26}$$

relációkat kell kiróni. Itt $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ahol h a Planck-állandó, és tetszőleges $\hat{f}$ és $\hat{g}$ operátorok kommutátorát az

$$[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f} \tag{2.4.27}$$

összefüggés definiálja.

Ekkor a Hamilton-függvényből is az állapotok terén ható operátor, Hamilton-operátor lesz: $\hat{H} = H(\hat{q}, \hat{p})$. A mozgásegyenletek pedig tetszőleges fizikai mennyiség operátorára a

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{f}, \hat{H}] \tag{2.4.28}$$

operátor-egyenlet alakját öltik. A fizikai mennyiségek lehetséges értékeit a hozzájuk tartozó operátorok sajátértékei jelentik.

Az elmélet kifejlesztése és a tapasztalattal való összevetése révén bebizonyosodott, hogy az így kapott kvantummechanika a mikrorészecskék (elektronok, atomok, molekulák, stb.) helyes elmélete. Sőt, azt is sikerült megmutatni, hogy a kvantummechanika speciális esetként tartalmazza a klasszikus mechanikát.

2.5 Speciális mechanikai rendszerek

Alább néhány speciális mechanikai rendszer mozgását vizsgáljuk meg. A teljesség igénye nélkül igyekeztünk olyan példákat kiválasztani, amelyek

1. vagy fontos természeti jelenséget mutatnak be, mint pl. a szabadesés, a bolygómozgás, a hanghullámok stb.,
2. vagy olyan idealizált rendszert ismertetnek, amely bonyolult jelenségek egyszerű mechanikai modelljeként gyakran használatos a fizikában, mint pl. a lineáris harmonikus oszcillátor,
3. vagy a fizikai jelenségek gyakori vizsgálati módszerét jelentik, mint pl. a szórásjelenségek.

A *-gal jelölt fejezetek kiegészítő jellegűek, első olvasatban átugorhatja őket a tisztelt Olvasó.

2.5.1 Szabad mozgás

Ebben a fejezetben a részecskék szabad mozgásáról beszélünk inerciarendszerben. Ez a mozgás egyenenesvonalú egyenletes és jelentőségét az adja, hogy segítségével lehet az inerciarendszereket a nem inerciális vonatkoztatási rendszerektől megkülönböztetni. A véges térfogatban szabadon mozgó és egymással nem, csak az edény falával kölcsönható részecskék rendszere modellként szolgál a fizikában a gázok leírására. Ez az ideális gázmodell a mikrorészecskék kvantumfizikai tulajdonságainak megfelelően módosítva számos más fizikai rendszer modelljeként is szolgál.

A. Szabad mozgás a térben

Inerciarendszerben egy részecske szabad mozgása egyenesvonalú egyenletes mozgás, az inerciarendszer definíciójából következően. Ezt természetesen többféleképpen is megkaphatjuk: akár az Euler-Lagrange-egyenletekből, akár a Hamilton-egyenletekből, akár a megmaradási törvényekből kiindulva.

Szabad mozgás Euler-Lagrange-egyenletei. Az inerciarendszerben szabad mozgást végző, m tehetetlen tömegű részecske Lagrange-függvénye

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{2.5.1}$$

ahol általános koordinátáknak a részecske tartózkodási helyének (x, y, z) Descartes-koordinátáit választottuk. Ekkor

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \\ &\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

úgyhogy a részecske Euler-Lagrange-egyenletei:

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = 0, \qquad m\ddot{z} = 0, \tag{2.5.3}$$

amelyek természetesen megegyeznek Newton II. törvényének Descartes-koordinátákban felírt alakjával. A kezdőfeltételek a $t = t_0$ kezdeti időpillanatban a Descartes-koordinátáknak és a részecske sebessége Descartes-komponenseinek a megadott értékei:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \quad v_x(t_0) = v_{0x}, \quad v_y(t_0) = v_{0y}, \quad v_z(t_0) = v_{0z}. \tag{2.5.4}$$

Integráljuk idő szerint a (2.5.3) egyenleteket t_0 és tetszőleges t integrálási határok között, ekkor

$$\dot{x}(t) = v_x(t_0) = v_{0x}, \quad \dot{y}(t) = v_y(t_0) = v_{0y}, \quad \dot{z}(t) = v_z(t_0) = v_{0z} \tag{2.5.5}$$

adódik a sebességekre. Ismételten integrálva ezeket az egyenleteket az idő szerint a t_0 és t határok között, olyan egyenesvonalú egyenletes mozgás egyenleteit kapjuk,

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0), \quad y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0), \quad z(t) = z_0 + v_{0z}(t - t_0), \tag{2.5.6}$$

amelynek egyenese átmegy az (x_0, y_0, z_0) ponton és amelynek sebessége mindvégig azonos a kezdeti $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ sebességgel.

Ugyanezeket a lépéseket vektorjelölésben, a vektoregyenletek alakját megőrizve is elvégezhetjük:

$$\begin{aligned}
&L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^{\,2}, \\
&\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0, \\
&m\ddot{\mathbf{r}} = 0, \\
&\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0, \\
&\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0).
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Részecske szabad mozgásának a Hamilton-egyenletei. A részecske (x, y, z) Descartes-koordinátáihoz kanonikusan konjugált impulzusok rendre

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \tag{2.5.8}$$

s ezek a részecske

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}}. \tag{2.5.9}$$

impulzusvektorának Descartes-komponensei. A Hamilton-függvény definíció szerint:

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^{\,2}. \tag{2.5.10}$$

Ennek kanonikus (azaz az impulzussal kifejezett) alakját úgy kapjuk meg, hogy az impulzusra vonatkozó (2.5.9) egyenletet feloldjuk a részecske sebességére,

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \tag{2.5.11}$$

és ezt behelyettesítjük:

$$H(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \tag{2.5.12}$$

A Hamilton-egyenletek rendre:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{r},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{r}} = 0, \qquad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H(\mathbf{r},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \tag{2.5.13}$$

és a hozzájuk tartozó kezdeti feltételek,

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \qquad \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0 \equiv m\mathbf{v}_0 \tag{2.5.14}$$

adott értékei. Idő szerint integrálva a Hamilton-egyenleteket, az alábbi megoldást kapjuk:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0) \equiv m\mathbf{v}_0, \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^{t} dt' \frac{\mathbf{p}(t')}{m} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{p}_0}{m}(t - t_0). \tag{2.5.15}$$

Ezek pontosan azonosak az Euler-Lagrange-egyenletekből kapott megoldással, ha figyelembe vesszük, hogy $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Az egyenletek közül az első a szabad részecske impulzusának megmaradását fejezi ki, míg a második egyenlet az egyenesvonalú egyenletes mozgás pályaegyenlete.

A kapott megoldás alapján könnyű meggyőződni róla, hogy a szabad részecske energiája megmarad. Helyettesítsük be a megoldást a Hamilton-függvény változóinak helyébe, ekkor az energiára az

$$E = H(\mathbf{r}(t),\mathbf{p}(t)) = \frac{\mathbf{p}^2(t_0)}{2m} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 \equiv E_0 = \text{ áll.} \tag{2.5.16}$$

értéket kapjuk.

Szabad részecske mozgása a megmaradási törvények alapján. A szabad részecske Lagrange-függvénye a térbeli elforgatásokkal szemben invariáns, ezért a szabad részecskének az inerciális koordinátarendszer origójára vonatkoztatott pályaimpulzusmomentuma megmarad:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 \times m\mathbf{v}_0 = \mathbf{l}_0 = \text{ áll.} \tag{2.5.17}$$

A részecske origóra vonatkoztatott pályaimpulzusmomentuma nulla, ha az $\mathbf{r}_0$ és $\mathbf{p}_0$ vektorok közül legalább az egyik nulla, vagy ha ezek a vektorok párhuzamosak, és egyébként a pályaimpulzusmomentum nem nulla, hanem a kezdeti helyzetvektor és impulzusvektor által kifeszített síkra merőleges vektor. Mivel a részecske helyzetvektora és impulzusvektora a mozgás során mindig merőleges az állandó $\mathbf{l}_0$ pályaimpulzusmomentumvektorra, ezért a mozgás síkmozgás, ha $\mathbf{l}_0 \neq 0$.

Szabad részecske Lagrange-függvénye a térbeli eltolásokkal szemben invariáns, ezért a szabad részecske impulzusa megmarad,

$$m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}_0 = \text{ áll. }, \tag{2.5.18}$$

ahonnan a részecske sebességére

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}_0}{m} \equiv \mathbf{v}_0 \tag{2.5.19}$$

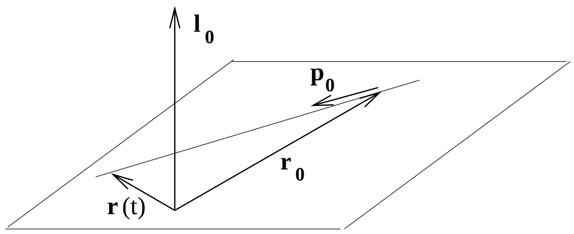

Figure 28: Részecske szabad mozgásának pályája.

ugyancsak állandó értéket kapunk. Az impulzusmegmaradás törvényének (2.5.18) egyenletét idő szerint integrálva, megkapjuk a szabadon mozgó részecske pályaegyenletét:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{\mathbf{p}_0}{m}(t - t_0). \tag{2.5.20}$$

Szabad részecske Lagrange-függvénye az időbeli eltolásokkal szemben is invariáns, ezért a részecske energiája megmarad,

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^{\,2} = E_0 = \text{ áll. }, \tag{2.5.21}$$

ahonnan a részecske állandó sebességének, ill. impulzusának nagysága rendre

$$|\mathbf{v}_0| = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}, \qquad |\mathbf{p}_0| = \sqrt{2mE_0}. \tag{2.5.22}$$

Szabad részecske impulzusa és pályaimpulzusmomentuma tetszőleges nagyságú és irányú lehet (beleértve a nullvektort is). Szabad részecske energiája tetszőleges, nem negatív, $E_0 \geq 0$ valós értéket felvehet. A szabad részecske pályája a térben nem korlátos.

B. Szabad mozgás dobozban*

Tegyük fel, hogy egy részecske szabadon mozoghat egy kocka alakú doboz belsejében, amelynek oldaléle L hosszúságú. Legyen a doboz falainak alakváltozása elhanyagolható, ha a részecske beléjük ütközik. Legyen továbbá a részecske ütközése a fallal teljesen rugalmas, amin azt értjük, hogy a fal nem ad át energiát az ütközés során a részecskének. Tegyük fel továbbá azt is, hogy a fal az ütközés során a részecskének csak a felületére merőleges irányú impulzust tud átadni, azaz a részecskére csak a felületére merőleges erővel hat.

A részecske a doboz belsejében szabad mozgást végez, amelynek pályája egyenes és amelynek során a részecske impulzusa állandó. A fallal történő ütközés feltett tulajdonságai értelmében a részecske energiája az ütközés következtében sem változik meg, azaz ha $\mathbf{p}$ ill. $\mathbf{p}'$ a részecske impulzusa az ütközés előtt ill. után, akkor

$$\frac{\mathbf{p}^{\,2}}{2m} = \frac{\mathbf{p}'^{\,2}}{2m} \tag{2.5.23}$$

érvényes a részecske ütközés előtti és utáni energiájára. Másrészt, ha a fal csak a felületére merőleges impulzust tud átadni, akkor

$$p_t = p'_t, \qquad p'_n = p_n + \Delta p_n, \tag{2.5.24}$$

ahol p_t (p'_t) ill. p_n (p'_n) a részecske impulzusának a fallal párhuzamos ill. arra merőleges összetevői az ütközés előtt (után) és Δp_n a fal által a részecskének átadott impulzus. Ha $\mathbf{n}$ a doboz falának külső normálisa, akkor $p_n > 0$ közvetlenül a részecske falba ütközése előtt. Phytagorász tételét felhasználva, az energiamegmaradás alapján

$$\mathbf{p}^{\,2} = \mathbf{p}'^{\,2} = (p'_t)^2 + (p'_n)^2 = p_t^2 + p_n^2 + 2p_n\Delta p_n + (\Delta p_n)^2 = \mathbf{p}^{\,2} + 2p_n\Delta p_n + (\Delta p_n)^2, \tag{2.5.25}$$

azaz

$$0 = (2p_n + \Delta p_n)\Delta p_n \tag{2.5.26}$$

adódik az átadott impulzusra. Mivel $\Delta p_n \neq 0$, hiszen a részecske nem haladhat át a falon, azért csak a

$$\Delta p_n = -2p_n < 0 \tag{2.5.27}$$

impulzusátadás lehetséges. A részecske normális irányú impulzuskomponense tehát előjelet vált a fallal történő ütközés során: $p'_n = -p_n < 0$.

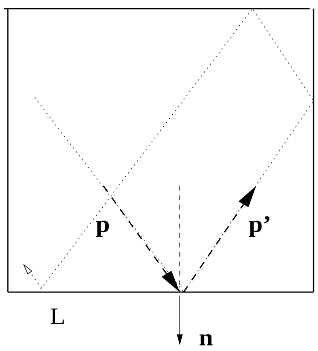

Figure 29: Dobozba zárt részecske mozgásának és fallal történő rugalmas ütközésének szemléltetése.

A részecske $\Delta t = 2\frac{L}{|p_n/m|}$ időnként beleütközik ugyanabba a falba, mindig átadva a falnak $2p_n > 0$, a falra merőleges impulzust. Ha hosszú $T = N\Delta t$ idő alatt ($N \gg 1$) mérjük a falnak átadott, merőlegesen kifelé irányuló $\Delta P = N2p_n > 0$ impulzust, akkor annak időegységre és a fal egységnyi felületére vonatkoztatott átlagértéke

$$\mathrm{p} = \frac{\Delta P}{NL^2\Delta t} > 0 \tag{2.5.28}$$

lesz. **A részecske által a doboz falának egységnyi felületű darabjára gyakorolt átlagos, merőlegesen kifelé irányuló erőt, azaz átlagosan átadott, merőlegesen kifelé irányuló impulzust a részecske által a doboz falára gyakorolt p nyomásnak nevezzük.**

Ha a fenti dobozba sok részecskét helyezünk el, amelyek egymással nem hatnak kölcsön, azaz egymással nem, csak a doboz falaival ütköznek, akkor olyan mechanikai rendszerhez jutunk, amely alkalmas arra, hogy az alacsony nyomású, nem túl alacsony hőmérsékletű gázok viselkedését megértsük. Ez a gázok ún. **ideális gáz** modellje.

2.5.2 Súrlódás*

A súrlódás általában mindig fellép, ha részecske vagy test végez haladó mozgást egy testnek a felületén (mozgási súrlódás), és akkor is, ha részecske vagy test végez haladó mozgást folytonos anyageloszlású közegben (közegellenállás). A lényege abban áll, hogy a haladó mozgást végző objektum haladó mozgásból származó kinetikus energiája szétoszlik a folyamatban résztvevő testek szabadsági fokain. Ennek a folyamatnak a részleteket mellőző, a súrlódási erő ill. a közegellenállási erő erőtörvényének révén történő, fenomenológikus leírása az, ami belefér a klasszikus mechanika kereteibe. Alább ezzel foglalkozunk. A folyamat további részleteinek megértése a résztvevő testek mikroszkopikus modelljeinek alapján a kvantumfizika, az elektrodinamika és a statisztikus fizika eszközeinek együttes felhasználásával lehetséges.

A. Mozgási súrlódás*

Tegyük fel, hogy egy m tehetetlen tömegű anyagi pont vízszintes síkon mozog és súrlódási erő hat rá. **A súrlódási erő erőtörvénye a tapasztalat szerint a következő: Egy test felületén mozgó részecskére ható S súrlódási erő ellentétes irányú a részecske v sebességével és arányos annak, a felületre merőleges N nyomóerőnek az N nagyságával, amivel a test hat a részecskére, hogy az a felszínén maradjon:**

$$\mathbf{S} = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{v}. \tag{2.5.29}$$

A μ arányossági tényezőt mozgási súrlódási együtthatónak nevezik. Ha zérus a részecske sebessége, akkor nem hat rá súrlódási erő. Ez nem alapvető kölcsönhatás erőtörvénye, hanem a részecske és a test részecskéi közötti bonyolult kölcsönhatás effektív törvénye.

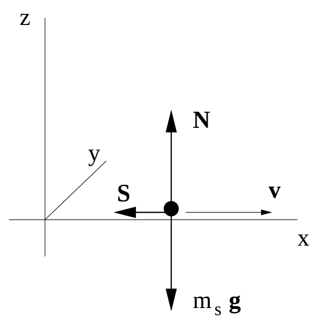

Figure 30: Vízszintes síkon súrlódva mozgó részecskére ható erők: $\mathbf{N}$ a vízszintes sík által kifejtett nyomóerő, a Föld által kifejtett $m_s\mathbf{g}$ nehézségi erő és az $\mathbf{S}$ mozgási súrlódási erő, amely a részecske $\mathbf{v}$ sebességével ellentétes irányú.

A vízszintes síkon mozgó részecske leírásához válasszunk olyan inerciális koordinátarendszert, amelynek z-tengelye függőlegesen felfelé, x-tengelye pedig a részecske kezdeti $\mathbf{v}_0$ sebességének irányába mutat. Válasszuk origónak a részecske kezdeti tartózkodási helyét! Mivel a vízszintes síkon mozgó részecskére ható erőket (ld. 30. ábra) figyelembe véve, Newton II. törvénye:

$$m\ddot{x} = \begin{cases} -\mu N \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}, & \text{ha} \quad \dot{x} \neq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad \dot{x} = 0 \end{cases}, \qquad m\ddot{y} = 0, \qquad 0 = m\ddot{z} = -m_s g + N, \tag{2.5.30}$$

ahol felhasználtuk, hogy a részecske a vízszintes síkon marad, azaz $z(t) = \dot{z}(t) = \ddot{z}(t) = 0$ az egész mozgás során. A mozgás ezért a x-tengely mentén, azaz a részecske kezdeti sebessége által meghatározott vízszintes egyenes mentén történik ($y(t) = 0$ a második egyenletből). A nyomóerő nagysága a harmadik egyenletből $N = m_s g$. Az első egyenlet mutatja, hogy kezdetben a részecske állandó, a sebességével ellentétes irányú gyorsulással rendelkezik. Pozitív $v_{0x} > 0$ kezdősebesség esetén az első egyenletet idő szerint integrálva

$$m\dot{x}(t) = mv_{0x} - \mu N(t - t_0) \tag{2.5.31}$$

adódik a részecske sebességére mindaddig, amíg

$$v_x(t) = v_{0x} - \frac{\mu N}{m}(t - t_0) > 0, \tag{2.5.32}$$

azaz amíg $t_0 \leq t < t_0 + \frac{mv_{0x}}{\mu N} \equiv T$. A $t = T$ időpillanatban a részecske sebessége nullává válik, $v_x(T) = 0$, s ekkor az x-irányú mozgás egyenlete az $m\ddot{x} = 0$ alakot ölti, azaz a gyorsulás is nullává válik, $a_x(T) = 0$. A $t \geq T$ időpillanatokban tehát $v_x(t) = 0$ és $a_x(t) = 0$ lesz érvényben. A részecske tehát a súrlódási erő hatására a $t = T$ időpillanatban nyugalomba kerül és utána abban is marad.

A felületen súrlódó mozgást végző részecske nyílt rendszer. A részecskére ható súrlódási erő elemi munkája, amelyet a részecskén végez,

$$d'W_{\text{surl.}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}dt = -\mu N v dt < 0 \tag{2.5.33}$$

mindig negatív. Ha a részecskére az $\mathbf{N}$ erőn és az $\mathbf{S}$ súrlódási erőn kívül más erő nem hat, akkor ezek együttes munkája éppen a súrlódási munka (az $\mathbf{N}$ nyomóerő merőleges a felületre, ill. a részecske elmodulására, ezért munkája nulla), a részecske energiája pedig tisztán haladó mozgásból származó kinetikus energia. A munkatétel következtében a részecske energiájának dt idő alatt bekövetkező megváltozása $dE = dT = d'W_{surl.} < 0$. A részecske tehát fokozatosan elveszti kinetikus energiáját. A T idő alatt a részecske teljes kinetikus energiáját átadja azon test részecskéinek, amelynek felületén mozog. Az energiátadás rendezetlen munkavégzés útján történik, ami példa a hőközlésre. A részecske által átadott energia a test belső energiáját növeli.

Amennyiben a felületen mozgó kis test nem tekinthető pontszerűnek, hanem belső szerkezettel rendelkezik, akkor a súrlódási erő munkája ugyan továbbra is csökkenti a felületen mozgó kis test haladó mozgásból származó kinetikus energiáját, de másrészt növeli a kis test belső energiáját is. Így a felületen mozgó kis test haladó mozgásának kezdeti kinetikus energiája részben a saját belső energiájának, részben azon test belső energiájának növelésére fordítódik, amelynek felületén mozog.

B. Közegellenállás*

Tegyük fel, hogy egy részecske egyenes mentén mozog valamilyen közegben és a sebességével arányos, azzal ellentétes irányú közegellenállási erő, $K_x = -\gamma\dot{x}$ hat rá. A közegellenállási erő megszűnik, ha a részecske sebessége zérussá válik. Hogyan mozog a részecske, ha a $t = t_0$ pillanatban az $x_0 = x(t_0) = 0$ origóból indul $v_{0x} = v_0 > 0$ kezdősebességgel? Megint nehéz lenne erre a nyílt rendszerre Lagrange-függvényt felírni. Csak olyat lehetne, amelyik egyszerre írja le a részecskét és a közeg részecskéit. Használjuk ezért közvetlenül Newton II. törvényét:

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x}. \tag{2.5.34}$$

Ezt integrálva kapjuk, hogy

$$\dot{x}(t) = v_{0x} - \frac{\gamma}{m}[x(t) - x_0] = v_{0x} - \frac{\gamma}{m}x(t). \tag{2.5.35}$$

Ez egy közönséges, elsőrendű, inhomogén, lineáris differenciálegyenlet:

$$\dot{x}(t) + \kappa x(t) = v_{0x}, \tag{2.5.36}$$

ahol bevezettük a $\kappa = \frac{\gamma}{m}$ jelöléssel a κ **csillapítási tényezőt**. Az elsőrendű, inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása visszavezethető a megfelelő homogén egyenlet megoldására

1. Oldjuk meg a homogén egyenletet,

$$\dot{x} + \kappa x = 0. \tag{2.5.37}$$

   Ennek a megoldásai $x_{\mathrm{h}}(t) = Ce^{-\kappa t}$ alakúak (C tetszőleges valós szám), amiről behelyettesítéssel közvetlenül meggyőződhetünk.

2. Az inhomogén egyenletet a következőképpen hozhatjuk homogén egyenlet alakjára. Vezessük be a $\xi = x - \frac{v_{0x}}{\kappa}$ változót, amelyre

$$\dot{\xi} + \kappa\xi = 0 \tag{2.5.38}$$

   alakú homogén egyenletet kapunk. Ezzel visszavezettük a feladatot a homogén egyenlet megoldására:

$$\xi(t) = Ce^{-\kappa t}. \tag{2.5.39}$$

A keresett megoldás alakja tehát:

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\kappa} + Ce^{-\kappa t}. \tag{2.5.40}$$

Itt a C paraméter értékét abból a kezdőfeltételből kell meghatározni, hogy

$$0 = x(t_0) = \frac{v_{0x}}{\kappa} + Ce^{-\kappa t_0}, \tag{2.5.41}$$

ahonnan

$$C = -\frac{v_{0x}}{\kappa}e^{\kappa t_0}. \tag{2.5.42}$$

A keresett megoldás tehát

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\kappa}\left[1 - e^{-\kappa(t-t_0)}\right]. \tag{2.5.43}$$

A részecske sebessége

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = v_{0x}e^{-\kappa(t-t_0)} \tag{2.5.44}$$

az idő múlásával exponenciálisan csökken, de csak a végtelenben válik zérussá. Ezért a közegellenállási erő nem válik véges idő után nullává. Nem úgy, mint a mozgási súrlódás esetén tapasztaltuk. A részecske sebességének feleződési ideje

$$\tau = \frac{\ln 2}{\kappa}, \tag{2.5.45}$$

fordítva arányos a csillapítási tényezővel. A részecske végtelen idő alatt is csak véges távolságra jut, aszimptotikusan megközelíti az $x = x_* \equiv \frac{v_{0x}}{\kappa}$ koordinátájú pontot.

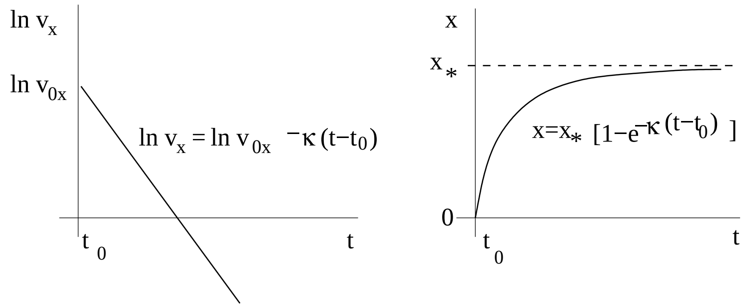

Figure 31: Közegellenállás hatására lassuló részecske sebesség-idő és út-idő grafikonja

2.5.3 Egy-dimenziós mozgás külső potenciáltérben

Tekintsünk egy részecskét, amelyik egy-dimenziós mozgást végez az x-tengely mentén külső, sztatikus potenciáltérben. A részecske Lagrange-függvénye:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x), \tag{2.5.46}$$

ahol $V(x)$ a részecske potenciális energiája a külső térben. A Lagrange-függvény az időbeli eltolásokkal szemben invariáns, ezért a részecske energiája megmarad a mozgás során. Ha $x(t)$ a mozgásegyenletek adott $x(t_0) = x_0$, $v_x(t_0) = v_{0x}$ kezdőfeltételekhez tartozó megoldása, akkor az energia állandó értéke:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + V\Big(x(t)\Big) = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 + V(x_0). \tag{2.5.47}$$

Tegyük fel, hogy a potenciál alulról korlátos, és pontos alsó korlátja $V_{\min}$. Mivel a részecske kinetikus energiája nem negatív, azért a megmaradó energia kifejezését felhasználva az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) = E - V\Big(x(t)\Big) \geq 0, \tag{2.5.48}$$

azaz a részecske energiájára az

$$E \geq V\Big(x(t)\Big) \geq V_{\min} \tag{2.5.49}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. **Sztatikus, külső potenciáltérben mozgó részecske energiája tehát alulról korlátos, ha a potenciális energia alulról korlátos. Az energia pontos alsó korlátja megegyezik a potenciális energia pontos alsó korlátjával.** Ha a potenciális energia alulról nem korlátos, akkor a részecske energiája tetszőleges negatív értéket felvehet. Ezek az állítások tetszőleges dimenzióban érvényesek.

Tegyük fel, hogy a potenciál a 32. (a) ábrán szemléltetett potenciálgödör. Ennek a potenciálnak van alsó korlátja, amely a minimuma, és $x \to \pm\infty$ esetén az értéke ugyanaz a V_* állandó, amelyet – az általánosság csorbítása nélkül – nullának választhatunk, $V_* = 0$. Legyen a potenciál minimumhelye $x_{\min}$ és a minimum értéke $V_{\min}$. Ekkor két esetet különböztethetünk meg:

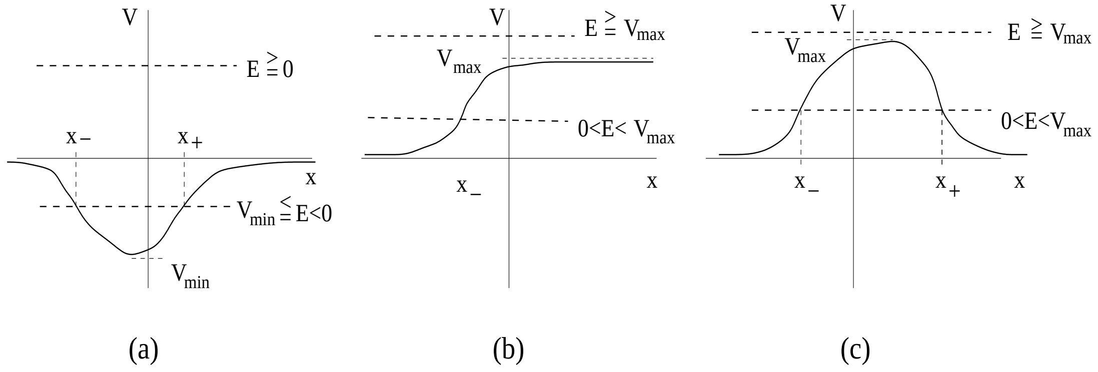

Figure 32: Egy-dimenziós mozgás (a) potenciálgödörben, (b) potenciállépcső mentén, és (c) potenciálgát jelenlétében. Az $x_\pm$ koordinátájú pontok fordulópontokat jelentenek. Kötött állapotok: (a) $V_{\min} \leq E < 0$, (b) nincs, (c) nincs. Szórási állapotok: (a) $E > 0$: a mozgás egyik irányban sem korlátos, (b) $0 < E < V_{\max}$: a mozgás balról nem korlátos; $V_{\max} \leq E$: a mozgás egyik irányban sem korlátos, (c) $0 < E < V_{\max}$: a mozgás a potenciálgáttól balra (jobbra) negatív (pozitív) irányból nem korlátos, $V_{\max} \leq E$: a mozgás egyik irányban sem korlátos.

1. *Korlátos mozgás, vagy kötött állapot.* Ha a részecske energiája a minimális érték és a nagy távolságokban aszimptotikusan felvett érték közé esik, $V_{\min} \leq E < 0$, akkor a részecske térben korlátos mozgást végez. **A térben korlátos mozgást végző részecskére azt mondjuk, hogy kötött állapotban van.** A részecske mozgása során sohasem hatol be a térnek azokba a tartományaiba, ahol a potenciális energiája nagyobb lenne, mint a teljes, megmaradó energiája. Ez azért van így, mert sem a kinetikus energia nem lehet negatív, sem az energiamegmaradás nem sérülhet meg.

   Az állítást a következőképpen láthatjuk be. Vegyük észre, hogy létezik egy $[x_-, x_+]$ intervallum, amelyben teljesül az a feltétel, hogy a részecske kinetikus energiája pozitív, az intervallum határpontjait

   $$0 = \frac{1}{2}mv_x^2 = E - V(x_\pm) \tag{2.5.50}$$

   egyenlet megoldásai jelentik. Tegyük fel, hogy a részecske egy $x' \in [x_-, x_+]$ belső pontban tartózkodik, és sebessége pozitív, $v_x(x') > 0$. Ahogy a részecske közeledik az x_+ ponthoz, sebessége csökken és az x_+ pontban zérussá válik. Ebben a pontban a részecskére $F_x = -\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_+} < 0$ erő hat, amely a negatív irányba mutat. Ezért a részecske gyorsulni kezd és a negatív irányba mutató $v_x < 0$ sebességre tesz szert. Az x_+ pont tehát fordulópontja a részecske pályájának. Hasonló gondolatmenettel beláthatjuk, hogy az x_- pont is fordulópontja a részecskének. A részecske tehát valóban térben korlátos mozgást végez az $[x_-, x_+]$ intervallumban és a fordulópontokban mindig nulla a sebessége.

2. *Nem korlátos mozgás, vagy szórási állapot.* Ha a részecske energiája nem kisebb, mint a nagy távolságokban a potenciális energia aszimptotikusan felvett értéke, $E \geq 0$, akkor a tér minden pontjában teljesül, hogy a kinetikus energia nem negatív. Ilyenkor a részecske pályájának nincsenenek fordulópontjai. A részecske mozgása a térben nem korlátos. Az ilyen részecske nincsen kötött állapotban. Azt mondjuk, hogy **szórási állapotban** van. Ha

elindul valamelyik irányba az x_0 helyről v_{0x} sebességgel, akkor sebességének iránya nem fog megváltozni, csak a sebességének a nagysága fog lecsökkenni a végtelenben felvett v_∞ értékre, amelyet az energia megmaradásának törvényéből kapunk meg:

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = E. \tag{2.5.51}$$

Példánkban a kötött állapotokra vonatkozó $\epsilon = -E > 0$ energiát a részecske kötési energiájának nevezzük. **Kötött állapotban levő részecske kötési energiáján azt az energiát érjük, amellyel egyenlő energiát kell legalább közölni a részecskével (amennyivel legalább meg kell növelni a részecske kinetikus energiáját) ahhoz, hogy a részecske nem kötött állapotba kerüljön. A kötött állapotú részecskével közölt energiát gerjesztési energiának nevezzük. A részecske legkisebb energiájú állapotát alapállapotnak nevezzük.**

A fentiekhez hasonló gondolatmenettel vizsgálhatjuk meg a kötött ill. a szórási állapotok feltételét, ha a potenciál alakja más. A 32. ábrán látható példák:

1. A fentebb diszkutált potenciálgödör (32. (a) ábra).

2. Potenciállépcső (32. (b) ábra).

3. Potenciálgát (32. (c) ábra).

A potenciállépcső jelenlétében (32. (b) ábra) a balról beérkező részecske a potenciállépcsőn visszaverődik, ill. áthalad rendre aszerint, hogy az energiája kisebb, ill. nagyobb, mint a potenciállépcső $V_{\max}$ „magassága”. A potenciálgát esetében (32. (c) ábra) a balról (jobbról) befutó részecske visszaverődik a potenciálgáton, ha energiája kisebb, mint a potenciálgát $V_{\max}$ „magassága” és áthalad rajta, ha az energiája nagyobb, mint a potenciálgát $V_{\max}$ „magassága”. Látjuk tehát, hogy az energia megmaradásának és a kinetikus energia nem negatív értékének következtében a részecske a potenciállépcsőn és a potenciálgáton is visszaverődik (azaz nem halad át), ha energiája kisebb, mint a potenciállépcső, ill. -gát maximális energiája.

2.5.4 Rezgések

A kis amplitudójú mechanikai rezgések vizsgálata alapján lehet megalkotni a lineáris harmonikus oszcillátor modelljét. Ez egy olyan egy-szabadsági fokú rendszer, amelyet leíró fizikai mennyiség ugyanolyan mozgásegyenletnek tesz eleget, mint a lineáris rugóerő hatására rezgő anyagi pont egyensúlyi helyzettől mért kitérése. A lineáris harmonikus oszcillátor ill. ilyen oszcillátorok csatolt rendszere a szilárdtestek kis amplitudójú mechanikai rezgéseinek modelljeként szolgál. Elektronikus áramköröket ismerünk, a rezgőköröket, amelyek a lineáris harmonikus oszcillátorral modellezhetők. Az elektromágneses mező úgy tekinthető, mint független lineáris oszcillátorok rendszere. A hullámok tekinthetők úgy, mint rezgési állapot tovaterjedése egymással kölcsönható lineáris oszcillátorok rendszerén. Mindezzel még messze nem merítettük ki azon jelenségek sorát, amelyeknek értelmezésében a lineáris harmonikus oszcillátor, mint fizikai modell, alkalmazást nyer. Ebben a fejezetben a lineáris harmonikus oszcillátorral ismerkedünk meg, amelyről joggal állíthajuk, hogy a fizika egyik legfontosabb modellje.

A. Lineáris harmonikus oszcillátor

A harmonikus oszcillátor, mint modell. Vizsgáljuk egy részecske egy-dimenziós mozgását potenciálgödörben (ld. 32. (a) ábra), a potenciál minimumhelyének környezetében. Annak a feltétele, hogy a részecske a minimumhelytől ne tudjon jelentősen eltávolodni, az, hogy a részecske $E_{\mathrm{gerj}} = E - V_{\mathrm{min}}$ gerjesztési energiája elég kicsi legyen. Megmutatjuk, hogy **tetszőleges potenciál minimumhelyének kicsiny környezetében mozgó, azaz ún. kisrezgéseket végző részecske harmonikus oszcillátorral modellezhető.** Ha a mozgás egy-dimenziós, akkor lineáris harmonikus oszcillátorral, ha három-dimenziós, akkor három-dimenziós harmonikus oszcillátorral.

Általánosan fogalmazva: vizsgáljunk egy $s = 1$ szabadsági fokú rendszert, amelynek mechanikai állapota a q általános koordinátával és a hozzátartozó $\dot{q}$ általános sebességgel adható meg. Legyen továbbá a rendszer kinetikus energiája

$$T = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2, \qquad A(q) > 0, \tag{2.5.52}$$

a potenciális energiája pedig $V(q)$. Tegyük fel, hogy a potenciális energiának minimuma van az általános koordináta $q = q_{\mathrm{m}}$ értékénél, $V(q_{\mathrm{m}}) = V_{\mathrm{min}}$, amelynek szükséges ill. elégséges feltétele rendre

$$\left.\frac{dV}{dq}\right|_{q=q_{\mathrm{m}}} = 0, \qquad D \equiv \left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=q_{\mathrm{m}}} > 0, \tag{2.5.53}$$

ahol D az ún. visszatérítő (vagy direkciós) erő. A potenciális energia a minimumhely közelében az alábbi Taylor-sor első tagjaival közelíthető:

$$V(q) = V(q_{\mathrm{m}}) + \frac{1}{2}D(q - q_{\mathrm{m}})^2 + \frac{1}{3!}B(q - q_{\mathrm{m}})^3 + \ldots, \tag{2.5.54}$$

ahol bevezettük a $B = \left.\frac{d^3V(q)}{dq^3}\right|_{q=q_{\mathrm{m}}}$ állandót és elhanyagoltuk a potenciál magasabb deriváltjait tartalmazó tagokat. Vezessük be az $x = q - q_{\mathrm{m}}$ változót, és tekintsük a potenciált mostantól ezen változó függvényének:

$$V(x) = V_{\mathrm{min}} + \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{6}Bx^3 + \ldots \tag{2.5.55}$$

Ennek megfelelően a részecskére ható erő erőtörvénye az $x = 0$ minimumhely közelében

$$F_x(x) = -\frac{dV}{dx} = -Dx - \frac{1}{2}Bx^2 + \ldots \tag{2.5.56}$$

alakú függvénnyel közelíthető. Látjuk, hogy kicsiny x kitérések esetén a potenciális energia kvadratikus alakkal, az erőtörvény pedig lineáris alakkal közelíthető. Ha nagyobb kitérések is előfordulnak, akkor figyelembe kell venni a potenciális energia Taylor-sorának soron következő, köbös, stb. tagjait, ill. az erőtörvény sorba fejtett alakjának a megfelelő, kvadratikus, stb. tagjait is. A potenciál kvadratikus, ill. az erőtörvény lineáris közelítése akkor jó, ha még a részecske $x_{\pm}$ fordulópontjaiban is a potenciális energia harmadfokú tagja elhanyagolható a kvadratikus taghoz képest, azaz ha

$$\frac{1}{6}|Bx^3| \ll \frac{1}{2}Dx^2 \tag{2.5.57}$$

az egész mozgás során, azaz ha

$$|x| \leq \max\,(x_+, |x_-|) \ll \frac{3D}{|B|}. \tag{2.5.58}$$

Kis gerjesztési energia esetén a fordulópontok helye közelítőleg az

$$E_{\rm gerj} = E - V_{\rm min} \approx \frac{1}{2} D x_\pm^2 \tag{2.5.59}$$

egyenletből határozható meg:

$$|x_\pm| \approx \sqrt{\frac{2E_{\rm gerj}}{D}}, \tag{2.5.60}$$

úgyhogy a kvadratikus közelítés jóságának feltétele

$$\sqrt{\frac{2E_{\rm gerj}}{D}} \ll \frac{3D}{|B|}, \qquad \Rightarrow \qquad E_{\rm gerj} \ll \frac{9D^3}{2B^2}. \tag{2.5.61}$$

Ilyenkor a kinetikus energiát is hasonlóképpen, kvadratikus tagokkal bezárólag sorbafejtve:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \ldots \tag{2.5.62}$$

alakot kapunk, ahol bevezettük az $m = A(q_{\rm m}) > 0$ állandót. A rendszer közelítő Lagrange-függvénye tehát:

$$L(x, \dot{x}) = \text{ áll. } + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} D x^2 - \frac{1}{6} B x^3 - \mathcal{O}(x^4) \tag{2.5.63}$$

A kvadratikus $V(x) = \frac{1}{2} D x^2$ potenciált **lineáris harmonikus oszcillátor potenciálnak** nevezzük. Ha hozzávesszük a potenciálhoz a kitérésben magasabb rendű, ún. **anharmonikus tagokat**, akkor anharmonikus lineáris oszcillátorról beszélünk.

A lineáris oszcillátor sajátrezgései. A továbbiakban a lineáris harmonikus oszcillátorral fogunk foglalkozni, amelynek tehát a Lagrange-függvénye

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} D x^2. \tag{2.5.64}$$

A legegyszerűbb ilyen mechanikai rendszer az m tehetetlen tömegű részecske, amelyre az origótól mért x kitérésével arányos, az origó felé mutató $F_x = -Dx$ erő hat. Az ilyen erőt **kvázielasztikus erőnek** nevezzük. A részecske állandó energiája:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} D x^2. \tag{2.5.65}$$

Az Euler-Lagrange-egyenlet

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x, \qquad \omega_0^2 = \frac{D}{m} > 0 \tag{2.5.66}$$

alakú, amelynek megoldása ω_0 körfrekvenciájú harmonikus rezgő mozgás. Ezt már részletesen tárgyaltuk a 1.2.3 fejezetben. Az ω_0 körfrekvenciát a lineáris harmonikus oszcillátor **sajátfrekvenciájának** nevezzük, az oszcillátor most tárgyalt szabad rezgését pedig **sajátrezgésnek.** A megoldás mindig

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{2.5.67}$$

alakban írható fel. Mivel innen a sebesség

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \alpha), \tag{2.5.68}$$

azért a kitérés és a sebesség között $\frac{1}{2}\pi$ fáziseltolódás van. Az oszcillátor kinetikus energiája

$$T(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha), \tag{2.5.69}$$

a potenciális energiája pedig

$$V(t) = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \tag{2.5.70}$$

Látjuk, hogy a kitérés és a sebesség közötti fáziseltolódásnak köszönhetően a mozgás során a kinetikus és a potenciális energia periodikusan egymásba alakul át, miközben az összegük állandó marad: $E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$. Érdemes megjegyezni, hogy az oszcillátor átlagos kinetikus energiája és átlagos potenciális energiája egyenlő:

$$\frac{1}{T_0}\int_t^{t+T_0} dt' T(t') = \frac{1}{T_0}\int_t^{t+T_0} dt' V(t') = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}E. \tag{2.5.71}$$

Lineáris harmonikus oszcillátor kényszerrezgései. Akkor beszélünk az oszcillátor **kényszerrezgéseiről**, vagy más néven **kívülről vezérelt oszcillátorról**, ha a lineáris harmonikus oszcillátor alá van vetve külső, az idő adott függvényeként változó, úgynevezett **gerjesztő erőnek.** Ekkor a Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Dx^2 + xF(t), \tag{2.5.72}$$

ahol $F(t)$ az idő adott függvénye. Képezzük a részecskére ható erőt:

$$F_x = \frac{\partial L}{\partial x} = -Dx + F(t), \tag{2.5.73}$$

és látjuk, hogy az a **kvázielasztikus erőnek,** és a külső $F(t)$ gerjesztő erőnek az összege. A részecske kitérését, mint az idő függvényét meghatározó Euler-Lagrange-egyenlet:

$$m\ddot{x} = -Dx + F(t), \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{x} + Dx = F(t). \tag{2.5.74}$$

Oldjuk meg ezután a mozgásegyenletet

$$f(t) \equiv \frac{F(t)}{m} = \begin{cases} f_0 \sin(\omega(t - t_b)), & \text{ha} \quad t \geq t_b \\ 0, & \text{ha} \quad t < t_b \end{cases} \tag{2.5.75}$$

periodikus külső gerjesztő erő esetén, amelyet a $t = t_b$ pillanatban folytonosan kapcsolunk be.

A mozgásegyenlet közönséges, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet, amely $t < t_b$ esetén homogén és megegyezik a szabad sajátrezgésekre vonatkozó mozgásegyenlettel, $t \geq t_b$ esetén pedig inhomogén. A gerjesztő erő bekapcsolása előtt ($t < t_b$) végzett sajátrezgési állapot ($x(t_b) = x_0$ és $\dot{x}(t_b) = v_{0x}$) határozza meg a bekapcsolás pillanatában a bekapcsolás utáni idők ($t \geq t_b$) esetén érvényes inhomogén mozgásegyenletkezdeti feltételét. Az inhomogén egyenlet általános megoldása a megfelelő, homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának az összege. Megint kiterjesztjük az egyenletet a komplex értékű függvényekre, s ehhez a gerjesztő erő helyébe az $f(t) = -if_0 e^{i\omega(t-t_b)}$ komplex értékű függvényt írjuk. Így a komplex értékű $x(t)$ függvényre vonatkozó inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának valós része lesz a valós $x(t)$ függvényre vonatkozó (2.5.74) egyenlet partikuláris megoldása. A homogén egyenlet általános megoldását már az 1.2.3 fejezetben meghatároztuk:

$$x_{\mathrm{h}}(t) = C_1 e^{i\omega_0(t-t_b)} + C_2 e^{-i\omega_0(t-t_b)} \equiv A_0 \cos(\omega_0(t-t_b) + \alpha_0), \tag{2.5.76}$$

ahol a C_1 és C_2 komplex, ill. a nekik megfelelő A_0 és α valós állandókat a kezdőfeltételekből kell meghatározni. Tekintsük most a komplex $x(t)$ függvényre vonatkozó inhomogén egyenletet:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - if_0 e^{i\omega(t-t_b)}, \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = -if_0 e^{i\omega(t-t_b)}. \tag{2.5.77}$$

Ha vesszük ezen egyenlet mindkét oldalának valós részét, akkor látjuk, hogy a komplex értékű függvényre felírt (2.5.77) differenciálegyenlet megoldásának valós része az eredeti (2.5.74) differenciálegyenlet megoldása. Keressük a (2.5.77) egyenlet partikuláris megoldását

$$x_{\mathrm{p}}(t) = -iAe^{i\lambda(t-t_b)} \tag{2.5.78}$$

alakban. Ez akkor és csak akkor megoldás tetszőleges t esetén, ha a

$$\lambda = \omega, \qquad A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \equiv A(\omega) \tag{2.5.79}$$

egyenlőségek teljesülnek. Ekkor a megoldás valós része:

$$\mathrm{Re}x_{\mathrm{p}}(t) = -A(\omega)\mathrm{Re}ie^{i\omega(t-t_b)} = A(\omega)\sin(\omega(t-t_b)). \tag{2.5.80}$$

A (2.5.74) differenciálegyenlet általános megoldása az oszcillátor ω_0 sajátfrekvenciájával végzett harmonikus rezgőmozgás, $x_{\mathrm{h}}(t)$ és a gerjesztő erő ω frekvenciájával végzett kényszerrezgés, $\mathrm{Re}x_{\mathrm{p}}(t)$ összege:

$$x(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + \mathrm{Re}x_{\mathrm{p}}(t) = A_0\cos(\omega_0(t-t_b)+\alpha_0) + A(\omega)\sin(\omega(t-t_b)), \tag{2.5.81}$$

ahonnan a sebesség:

$$\dot{x}(t) = -A_0\omega_0 \sin(\omega_0(t-t_b)+\alpha_0) + A(\omega)\omega\cos(\omega(t-t_b)). \tag{2.5.82}$$

A kényszerrezgés kitérése azonos fázisban van a kényszererővel, a hozzátartozó sebesség azonban „siet” ehhez képest $\frac{1}{2}\pi$ fáziseltolódással.

Tegyük fel, hogy az oszcillátor az alapállapotában volt mindaddig, amíg be nem kapcsoltuk a gerjesztő erőt:

$$x(t) = 0, \qquad v_x(t) = 0, \qquad \text{ha} \quad t < t_b. \tag{2.5.83}$$

Ekkor $x(t_b) = 0$, $v_x(t_b) = 0$ a kezdőfeltételei annak a mozgásnak, amit az oszcillátor a $t > t_b$ idők esetén végez. Ezért a

$$0 = A_0 \cos \alpha_0, \qquad 0 = -A_0 \omega_0 \sin \alpha_0 + A(\omega)\omega \tag{2.5.84}$$

inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk az $A_0 \geq 0$ és az $\alpha_0 \in [-\pi, \pi]$ együtthatókra, amelynek megoldása:

$$\begin{array}{llll} \alpha_0 = \frac{1}{2}\pi, & A_0 = \frac{\omega}{\omega_0} A(\omega), & \text{ha} & \omega < \omega_0, \\ \alpha_0 = -\frac{1}{2}\pi, & A_0 = -\frac{\omega}{\omega_0} A(\omega), & \text{ha} & \omega > \omega_0. \end{array} \tag{2.5.85}$$

A kényszererő bekapcsolása tehát nemcsak a kényszerrezgést kelti, hanem egy sajátrezgést is, ill. ha volt korábban sajátrezgése az oszcillátornak, akkor módosítja annak az amplitudóját és a fázisát. Ez a sajátrezgés mindvégig jelen lesz állandó amplitudóval.

A mozgás két esetben különösen érdekes.

1. Ha a gerjesztő erő frekvenciája sokkal nagyobb, mint az oszcillátor sajátfrekvenciája, $\omega \gg \omega_0$. Ekkor a sajátfrekvenciával végzett ,,vivő" rezgésre ráülnek a nagyfrekvenciás kényszerrezgések, ún. **modulált rezgést** kapunk (ld. 33. ábra).

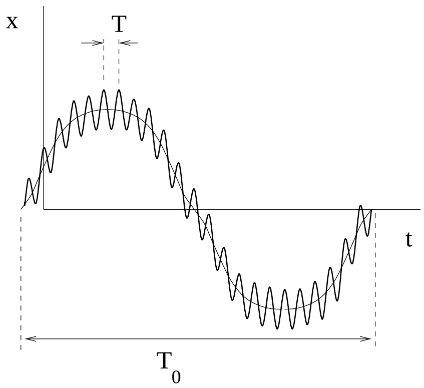

Figure 33: A $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ periódusidejű sajátrezgés modulálása $T = \frac{2\pi}{\omega}$ periódusidejű kényszerrezgéssel.

2. Ha a gerjesztő erő frekvenciája közel azonos, vagy azonos az oszcillátor sajátrezgéseinek frekvenciájával, $\omega \approx \omega_0$, akkor **rezonancia** lép fel. Ilyenkor a gerjesztő erő frekvenciájával végzett kényszerrezgések $A(\omega)$ amplitudója olymértékben megnő, hogy a rezgések már nem kicsiny amplitudójúak: az $\omega \to \omega_0$ határesetben $A(\omega) \to \infty$. Ez azt jelenti, hogy olyan rendszer leírására nem alkalmas a harmonikus oszcillátor modell, amikor a gerjesztő erő frekvenciája egyenlő, vagy közel egyenlő a harmonikus oszcillátor modell sajátfrekvenciájával. Nyilvánvalóan, ekkor a rezgések nem kis amplitudójúak, így a valóságos potenciál minimumhely körüli Taylor-sorában a magasabb rendű tagokat is figyelembe kell venni. A Természetben az amplitudó nem növekedhet végtelenre, mert ehhez végtelen nagy energiára lenne szükség. A Természet ezt vagy a potenciál anharmonikus tagjainak bekapcsolásával biztosítja, vagy az oszcillátorra ható súrlódási erő révén, vagy mindkettővel egyidejűleg.

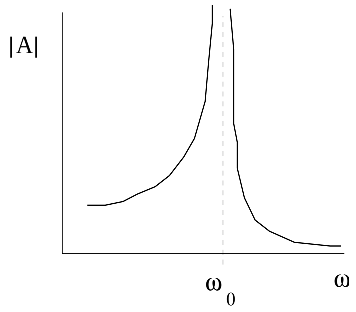

Figure 34: Lineáris harmonikus oszcillátor kényszerrezgései amplitudójának abszolút értéke, $|A|$ a gerjesztő erő ω frekvenciájának függvényében. Az amplitudó az $\omega = \omega_0$ helyen végtelenné válik.

Csillapított rezgés. Vizsgáljuk meg $S_x = -\gamma \dot{x}$ erőtörvényű csillapító erő hatását a lineáris harmonikus oszcillátor szabad rezgéseire! Ha a lineáris oszcillátor kvázi-elasztikus erő hatására mozgó anyagi pont, akkor az S_x erő megfelel a részecske sebességének nagyságával arányos, azzal ellentétes irányú közegellenállási erőnek. A csillapított oszcillátor mozgásegyenlete:

$$\ddot{x} + \kappa \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{2.5.86}$$

ahol $\kappa = \frac{\gamma}{m}$. Ez ismét homogén, közönséges másodrendű differenciálegyenlet, két lineárisan független megoldása van. Ezek alakja a κ csillapítási tényező értékétől függően különböző: ismét $x = e^{i\lambda t}$ alakban keressük őket.

1. *Gyenge csillapítás esete:* $\omega_0^2 > \frac{\kappa^2}{4}$. Ekkor léteznek $x = e^{i\lambda t}$ alakú, független megoldások,

$$x_1(t) = e^{i\lambda_+ t} = e^{-\frac{1}{2}\kappa t + i\Omega t}, \quad x_2(t) = e^{i\lambda_- t} = e^{-\frac{1}{2}\kappa t - i\Omega t}, \tag{2.5.87}$$

ahol $\lambda_\pm = i\frac{1}{2}\kappa \pm \Omega$, $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\kappa^2}{4}}$. Az általános megoldás: $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$, ahol a C_i $(i = 1, 2)$ állandókat a kezdőfeltételek határozzák meg:

$$x_0 = C_1 e^{i\lambda_+ t_0} + C_2 e^{i\lambda_- t_0}, \quad v_{0x} = i\lambda_+ C_1 e^{i\lambda_+ t_0} + i\lambda_- C_2 e^{i\lambda_- t_0}, \tag{2.5.88}$$

ahonnan

$$C_1 e^{i\lambda_+ t_0} = iX_0 - \frac{1}{2}x_0, \quad C_2 e^{i\lambda_- t_0} = -iX_0 - \frac{1}{2}x_0, \quad X_0 = \frac{v_{0x} + \frac{1}{2}\kappa x_0}{2\Omega}. \tag{2.5.89}$$

A megoldás tehát

$$\begin{aligned} x(t) &= iX_0\Big(e^{i\lambda_+(t-t_0)} - e^{i\lambda_-(t-t_0)}\Big) - \frac{1}{2}x_0\Big(e^{i\lambda_+(t-t_0)} + e^{i\lambda_-(t-t_0)}\Big) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\kappa(t-t_0)}\Big[-2X_0 \sin\Big(\Omega(t-t_0)\Big) - x_0 \cos\Big(\Omega(t-t_0)\Big)\Big] \\ &= Ae^{-\frac{1}{2}\kappa(t-t_0)} \cos\Big(\Omega(t-t_0) + \alpha\Big), \end{aligned} \tag{2.5.90}$$

ahol A és α valósak. A mozgás szigorúan monoton, az idő függvényében exponenciálisan csökkenő amplitudójú, $\Omega < \omega_0$ körfrekvenciájú rezgés: **csillapított rezgés** (ld. 35. (a) ábra). Látjuk, hogy a κ csillapítási tényező határozza meg, hogy mennyi idő alatt feleződik az amplitudó: $\tau = \frac{2\ln 2}{\kappa}$. Ezt tekinthetjük a csillapodás **karakterisztikus idejének**, amelyhez képest hosszú $\Delta t \gg \tau$ idő alatt a rezgés lecsillapodik.

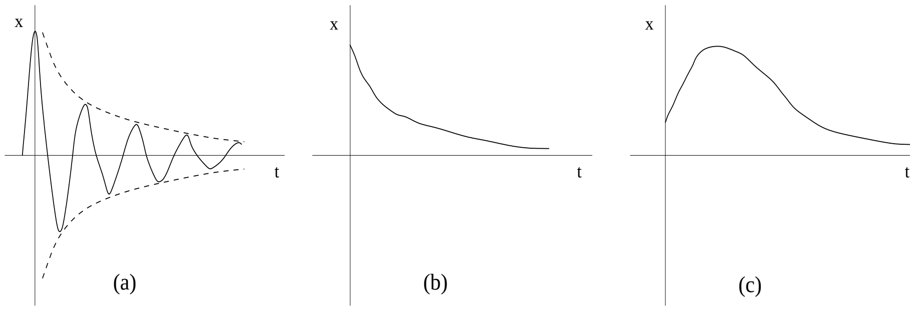

Figure 35: Csillapított lineáris harmonikus oszcillátor rezgései: (a) gyenge csillapítás, (b) erős csillapítás, (c) aperiodikus határeset.

2. *Erős csillapítás esete:* $\omega_0^2 < \frac{\kappa^2}{4}$. Ekkor a két független megoldás valós ($\lambda_\pm$ tisztán képzetes):

$$x_1(t) = e^{-\frac{1}{2}\kappa t + \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - \omega_0^2}t}, \qquad x_2(t) = e^{-\frac{1}{2}\kappa t - \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - \omega_0^2}t}, \tag{2.5.91}$$

és az általános megoldás

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t), \tag{2.5.92}$$

ahol C_1, C_2 valós együtthatók. Ez szigorúan monoton csökkenő kitérésnek felel meg (ld. 35. (b) ábra), hiszen mindkét exponenciális függvény kitevője negatív, mert $\frac{1}{2}\kappa \pm \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - \omega_0^2} > 0$.

3. *Aperiodikus határeset:* $\omega_0^2 = \frac{\kappa^2}{4}$. Ekkor $\lambda_\pm = -\frac{1}{2}\kappa$ miatt csak a független megoldások egyike exponenciális függvény. A két lineárisan független megoldás:

$$x_1(t) = e^{-\frac{\kappa}{2}t}, \qquad x_2(t) = te^{-\frac{\kappa}{2}t}. \tag{2.5.93}$$

Az általános megoldás t nagy értékeinél most is szigorúan monoton csökkenő kitérést ad, kezdetben azonban a kitérés közel lineárisan nő (35. (c) ábra).

A csillapító erő az oszcillátoron munkát végez. A dt infinitezimális idő alatt végzett **súrlódási munka** negatív:

$$d'W_{\text{surl}} = -\gamma \dot{x}^2(t) dt < 0. \tag{2.5.94}$$

Az oszcillátor energiája tehát a súrlódás miatt szigorúan monoton csökken.

Csillapított lineáris harmonikus oszcillátor kényszerrezgése. Végül vizsgáljuk meg a periodikus kényszererő hatására rezgő, csillapított oszcillátor esetét:

$$\ddot{x} + \kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = -if_0 e^{i\omega(t-t_b)}. \tag{2.5.95}$$

Tegyük fel, hogy a periodikus gerjesztő erőt a t_b pillanatban kapcsoljuk be, majd a t_k pillanatban kapcsoljuk ki. Tegyük fel továbbá, hogy a csillapítás gyenge, azaz $\omega_0^2 \gg \frac{\kappa^2}{4}$. A differenciálegyenlet most közönséges másodrendű,inhomogén, lineáris egyenlet, ha $t > t_b$. A homogén egyenlet általános megoldása

$$x_\mathrm{h} = A_0 e^{-\frac{1}{2}\kappa(t-t_b)} \cos(\Omega(t-t_b) + \alpha_0) \tag{2.5.96}$$

alakú csillapított rezgés, ahol A_0 és α_0 értékét a $t = t_b$ pillanatban érvényes kezdőfeltételek határozzák meg. Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását ismét $x_\mathrm{p}(t) = -iXe^{i\lambda(t-t_b)}$ alakban. Megoldást ilyen alakban akkor és csak akkor kapunk, ha

$$\lambda = \omega, \qquad X = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\kappa}. \tag{2.5.97}$$

Ekkor a valós megoldás:

$$\begin{aligned} x_\mathrm{p}(t) &= -\ \mathrm{Re}\ iXe^{i\omega(t-t_b)} \\ &= \frac{f_0(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\kappa^2}\sin(\omega(t-t_b)) - \frac{f_0\omega\kappa}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\kappa^2}\cos(\omega(t-t_b)) \\ &= A(\omega)\sin(\omega(t-t_b)+\alpha), \end{aligned} \tag{2.5.98}$$

$A(\omega)$ amplitudójú harmonikus rezgés, amelynek körfrekvenciája megegyezik a gerjesztő erő körfrekvenciájával. A rezgések $A(\omega)$ amplitudója és a gerjesztő erőhöz képesti $\alpha(\omega)$ fáziseltolódása függnek a gerjesztő erő ω körfrekvenciájától:

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\kappa^2}}, \qquad \mathrm{tg}\ \alpha = -\frac{\omega\kappa}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{2.5.99}$$

Rezonancia most is fellép. Gyenge csillapítás esetén a rezonancia akkor következik be, amikor a gerjesztő erő frekvenciája közelítőleg megegyezik a szabad rezgések frekvenciájával,

$$\omega_\mathrm{r} \approx \omega_0\left(1 - \frac{\kappa^2}{4\omega_0^2}\right) = \frac{\Omega^2}{\omega_0}. \tag{2.5.100}$$

A rezgések amplitudója azonban rezonancia esetén is véges marad a csillapító erő jelenlétének köszönhetően ($\kappa \neq 0$):

$$A(\omega_\mathrm{r}) \approx \frac{f_0}{\omega_0\kappa}. \tag{2.5.101}$$

A rezonancia helyén, azaz az $\omega = \omega_\mathrm{r}$ helyen a fáziseltolódási szög előjelet vált.

A mozgásegyenlet általános megoldása megint a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának az összege, azaz

$$x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t) = A_0 e^{-\frac{1}{2}\kappa(t-t_b)}\cos(\Omega(t-t_b)+\alpha_0) + A(\omega)\sin(\omega(t-t_b)+\alpha) \tag{2.5.102}$$

amíg a gerjesztő erő be van kapcsolva, azaz ha $t_b \leq t \leq t_k$. Itt A_0 és α_0 értékét $x(t_b)$ és $\dot{x}(t_b)$ kezdeti, a gerjesztő erő bekapcsolásának pillanatában felvett értékei határozzák meg. Azt is látjuk azonban, hogy teljesen mindegy, mi volt a kezdeti feltétel, a gerjesztő erő bekapcsolása után a csillapítás karakterisztikus idejénél sokkal későbbi idők esetén csak a gerjesztési frekvenciával végzett kényszerrezgés marad jelen. A kényszererő bekapcsolása után azonban a τ csillapítási idővel összemérhető ideig jelen van egy **bekapcsolási, átmeneti (tranziens) rezgés** még akkor is, ha előzőleg az oszcillátor alapállapotban volt. Ez a bekapcsolási tranziens aztán exponenciálisan lecseng. A csillapítatlan harmonikus oszcillátor esetében láttuk, hogy ez a bekapcsolási rezgés nem csengett le, mert nem volt csillapítás.

Ha a $t = t_k$ időpillanatban kikapcsoljuk a gerjesztő erőt, akkor a $t > t_k$ pillanatokban az oszcillátor mozgásegyenlete ismét a homogén mozgásegyenlet lesz. Ennek a t_k pillanatban felvett $x(t_k)$ és $\dot{x}(t_k)$ értékekhez, mint kezdőfeltételhez tartozó megoldása exponenciálisan csillapodó amplitudójú rezgés. A kikapcsolás pillanatában tehát nem szűnik meg azonnal a rezgés, hanem a csillapítás karakterisztikus idejének megfelelően cseng le. Ez az ún. **kikapcsolási tranziens.** A be- és kikapcsolási tranziens rezgés megjelenéséről, mint **be- és kikapcsolási jelenségekről** szoktunk beszélni.

A gerjesztő erő az oszcillátoron munkát végez. Miután a bekapcsolási tranziens lecsengett, a gerjesztő erő állandó amplitudójú és frekvenciájú rezgést tart fenn, amelynek energiája állandó: $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2(\omega)$. Az oszcillátor energiája az I. főtétel értelmében azért marad állandó, mert a csillapító erő negatív munkáját a gerjesztő erő pozitív munkája kompenzálja:

$$0 = dE = d'W_{\mathrm{surl}} + d'W_{\mathrm{gerj}}. \tag{2.5.103}$$

ahol $d'W_{\mathrm{surl}}$ az oszcillátoron a környezet által végzett rendezetlen munka, $d'W_{\mathrm{gerj}}$ pedig az oszcillátoron a környezet által végzett rendezett munka. A súrlódási erő elemi munkája

$$d'W_{\mathrm{surl}} = -\gamma \dot{x}_{\mathrm{p}}^2(t)dt = -m\kappa\omega^2 A(\omega)^2 \cos^2(\omega(t-t_b)+\alpha)dt < 0, \tag{2.5.104}$$

s ennek egy T periódusidőre vett integrálja

$$W_{\mathrm{surl}} = -\frac{1}{2}m\kappa\omega^2 A(\omega)^2 T. \tag{2.5.105}$$

A gerjesztő erő elemi munkája

$$\begin{aligned} d'W_{\mathrm{gerj}} &= f_0 \sin(\omega(t-t_b))\dot{x}_{\mathrm{p}}(t)dt = f_0\omega A(\omega)\sin(\omega(t-t_b))\cos(\omega(t-t_b)+\alpha)dt \\ &= f_0\omega A(\omega)\Big[\frac{1}{2}\sin(2\omega(t-t_b))\cos\alpha - \sin^2(\omega(t-t_b))\sin\alpha\Big]dt \end{aligned} \tag{2.5.106}$$

s ennek egy periódusidőre vett integrálja

$$W_{\mathrm{gerj}} = -\frac{1}{2}f_0\omega A(\omega)T\sin\alpha > 0. \tag{2.5.107}$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy $W_{\mathrm{gerj}} + W_{\mathrm{surl}} = 0$, ahogy azt az I. főtétel megköveteli.

A bekapcsolás során a gerjesztő erő annyival több pozitív munkát végez, mint a csillapító erő, hogy az fedezze a kezdetben alapállapotú, azaz nulla energiájú oszcillátornak a bekapcsolási tranziens lecsengése utáni E energiáját,

$$E - 0 = W_{\text{gerj}}^{\text{bekapcs.}} + W_{\text{surl}}^{\text{bekapcs.}}. \tag{2.5.108}$$

Rezonancia esetén a gerjesztő erő munkája maximális. A rezonancia tehát azt is jelenti, hogy az oszcillátor a sajátfrekvenciáján rezgő gerjesztési erő révén szívesen vesz fel energiát a környezetétől. A gerjesztő erő kikapcsolása után a súrlódási erő mindaddig munkát végez, amíg az oszcillátor alapállapotba kerül, azaz

$$W_{\text{surl}}^{\text{kikapcs.}} = -E. \tag{2.5.109}$$

Egy fizikai rendszer sajátfrekvenciáinak a kísérleti felderítése általában úgy történik, hogy azt nézzük, milyen gerjesztési frekvenciák esetén vesz fel szívesen energiát a környezettől, azaz jelentkezik rezonancia. Ez az ötlet képezi a **spektroszkópia** alapját és a mikroszkopikus rendszerek tulajdonságainak vizsgálatában nagy jelentőséggel bír.

B. Matematikai síkinga*

A matematikai inga az O origónak választott felfüggesztési pontban rögzített, ℓ hosszúságú, zérus tehetetlen tömegűnek tekintett fonálon lengő, $m = m_s$ tehetetlen ill. súlyos tömegű anyagi pont (36. ábra). Ha az inga kezdősebessége az O felfüggesztési ponton átmenő függőleges egyenes és az inga kezdeti helyzete által meghatározott egyenes síkjába esik, akkor az inga síkmozgást végez ebben a síkban. Ez abból következik, hogy az ingára a felfüggesztési pontban ható erőnek erre a pontra nézve nulla a forgatónyomatéka, az inga végén elhelyekedő anyagi pontra ható nehézségi erőnek pedig a felfüggesztési pontra vonatkozó forgatónyomatéka vízszintes irányú, úgyhogy az inga felfüggesztési pontra vonatkoztatott impulzusmomentumának a függőleges komponense állandó. Ha ez kezdetben nulla, akkor mindvégig nulla marad, ami azt jelenti, hogy az inga végén elhelyezkedő részecskének a sebessége benne marad a kezdeti helyzetvektor és a kezdeti sebesség által meghatározott síkban.

Használjunk síkbeli polárkoordinátákat: $r = \ell$ =áll. az anyagi pont távolsága az origótól, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ az inga szögkitérése a felfüggesztési ponton átmenő függőleges egyenestől mérve. Az anyagi pont potenciális energiája a Föld nehézségi terében:

$$V(\varphi) = -m_s g \ell \cos\varphi, \tag{2.5.110}$$

kinetikus energiája pedig

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\varphi}^2, \tag{2.5.111}$$

úgyhogy a matematikai inga Lagrange-függvénye:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\varphi}^2 + m_s g\ell\cos\varphi. \tag{2.5.112}$$

Innen

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_s g\ell\sin\varphi, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi}, \tag{2.5.113}$$

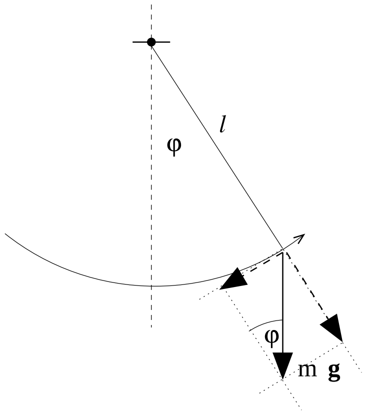

Figure 36: Matematikai inga.

és a matematikai inga Euler-Lagrange-féle mozgásegyenlete:

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + m_s g\ell \sin\varphi = 0. \tag{2.5.114}$$

Ha az inga kitérése mozgása során mindvégig kicsi, azaz $|\varphi(t)| \ll \frac{\pi}{2}$, akkor a potenciális energiában jó közelítéssel $\sin\varphi \approx \varphi$ írható. Figyelembe véve, hogy az anyagi pont súlyos és tehetetlen tömege (megfelelő egységválasztás után) a súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciájának értelmében megegyezik, a mozgásegyenlet az alábbi egyszerű alakot ölti:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \qquad \omega^2 = \frac{m_s g}{m\ell} = \frac{g}{\ell} > 0. \tag{2.5.115}$$

Ez egy ω körfrekvenciájú lineáris harmonikus oszcillátor egyenlete. A lengések periódusideje az az idő, ami eltelik, amíg az inga kétszer egymás után veszi fel ugyanazt a szöghelyzetet:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{2.5.116}$$

Ha a $t = 0$ kezdeti pillanatban az inga szögkitérése $\varphi(0) = \varphi_0 \ll \frac{\pi}{2}$, és kerületi sebessége v_0, azaz $\dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{\ell}$, akkor a megoldás

$$\varphi(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \qquad \dot{\varphi}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \tag{2.5.117}$$

és a kezdőfeltételek az A és B állandókra az alábbi egyenleteket jelentik:

$$A = \varphi_0, \qquad B = \frac{v_0}{\ell\omega}. \tag{2.5.118}$$

Abban az egyszerű esetben, ha a kezdeti pillanatban $v_0 = 0$ az inga kerületi sebessége, akkor $B = 0$ adódik és a szögkitérésre mint az idő függvényére azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega t). \tag{2.5.119}$$

Az inga tehát a $\varphi = 0$ egyensúlyi helyzet körül, szögkitérése tekintetében harmonikus rezgőmozgást végez. A maximális szögkitérés φ_0. Az inga potenciális energiájának minimuma van a

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = m_s g\ell\sin\varphi = 0 \tag{2.5.120}$$

szükséges feltételt kielégítő $\varphi = 0$ pontban, hiszen itt

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi=0} = m_s g \ell > 0. \tag{2.5.121}$$

A harmonikus rezgések tehát a potenciális energia minimuma körül történnek. Az inga energiája állandó, mivel a Lagrange-függvény nem függ explicit módon az időtől és így invariáns az időbeli eltolásokkal szemben:

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 - m_s g\ell\cos\varphi \approx \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 - mg\ell\left[1 - \frac{1}{2}\varphi^2\right] = \text{ áll.} \tag{2.5.122}$$

Kis szögkitérések esetén a részecske kinetikus ill. potenciális energiája, rendre:

$$\frac{1}{2}m\ell^2\varphi_0^2\omega^2\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}mg\ell\varphi_0^2\sin^2(\omega t), \qquad V(t) = -mg\ell + \frac{1}{2}mg\ell\varphi_0^2\cos^2(\omega t), \tag{2.5.123}$$

ami szépen mutatja, hogy a lengések során az egyik szélső helyzetéből indított inga kezdeti potenciális energiájának egy része átalakul kinetikus energiává amikorra az inga a $\varphi = 0$ helyzetet eléri, majd mire az inga eljut a másik szélső helyzetbe, ismét visszaalakul a kinetikus energia potenciális energiává. Így marad meg a teljes energia:

$$E = -mg\ell + \frac{1}{2}mg\ell\varphi_0^2 = -mg\ell\left[1 - \frac{1}{2}\varphi_0^2\right] \approx -mg\ell\cos\varphi_0 = \text{ áll.} \tag{2.5.124}$$

Az inga minimális energiájú állapota, amikor $E = -mg\ell$, azaz az ingának $\varphi_0 = 0$ állásban $v_0 = 0$ kezdő kerületi sebességet adunk. Ekkor nyilván nyugalomban marad ebben a helyzetben. Ha adunk az ingának kicsiny $E_{\text{gerj}} = \frac{1}{2}mg\ell\varphi_0^2 \ll mg\ell$ gerjesztési energiát, akkor az egyensúlyi helyzet körül az inga úgynevezett kisrezgéseket, azaz kis amplitudójú harmonikus rezgéseket fog végezni. Természetesen, ha a gerjesztési energia nagy, akkor közelítéseink nem érvényesek és a lengések nem lesznek a szögkitérésben harmonikusak.

2.5.5 Gravitációs jelenségek

A gravitációs kölcsönhatás egyike az alapvető kölcsönhatásoknak. Szerepe a Föld-i nehézkedés révén meghatározó a Földön kialakuló hegy-vízrajzi alakzatok, tengeri és légköri jelenségek, az élőlények fejlődése szempontjából. Ugyancsak ez a kölcsönhatás felelős azért, hogy a holdak keringenek a bolygók körül, hogy naprendszerekben a bolygók keringenek a napjuk körül, stb. A gravitációs kölcsönhatás Newton-féle erőtörvénye jól leírja ezt az alapvető kölcsönhatást, ha a gravitációs erő nem túl nagy és a kölcsönhatásban résztvevő testek sebessége kicsi a fény vákumban mért sebességéhez képest. Alább foglalkozunk azzal, hogyan magyarázható Newton gravitációs törvénye alapján a Föld-i nehézkedés, milyen mozgás jön létre a nehézségi erő hatására. Megismerkedünk a részecskének (bolygó, üstökös, hold, stb.) centrális gravitációs mezőben történő mozgásával és Kepler erre vonatkozó törvényeivel. Említünk néhány jelenséget (a Merkúr perihéliumának mozgása, a kettős csillagok gravitációs sugárzása), amelyek nem magyarázhatóak meg Newton gravitációs törvénye alapján, jelezve ezzel annak korlátait. Végül kitérünk a súlytalanság és az árapály-erő magyarázatára.

A. Szabadesés nehézségi erőtérben

Ha egy testet, az egyszerűség kedvéért részecskét a Föld nehézségi erőterében magára hagyunk, hogy a nehézségi erőn kívül semmilyen más test nem fejt ki rá erőt, akkor a test mozgását szabadesésnek nevezzük.

Legyen a Föld sugara R, M_s a súlyos tömege, és legyen a részecske a Föld felszínétől mért h függőleges magasságban! A Föld felszínének egy kiszemelt pontja kicsiny környezetében, a felszín vízszintes síknak tekinthető. A Newton-féle, a Föld középpontja felé mutató

$$F_r = -\gamma \frac{M_s m_s}{r} \approx -\gamma \frac{M_s m_s}{R} + \mathcal{O}(\frac{h}{R}) \tag{2.5.125}$$

gravitációs erő, amely egy a középponttól $r = R+h$ távolságra levő m_s súlyos tömegű részecskére hat, pedig közelítőleg állandónak tekinthető nagyság és irány szerint a Földfelszín kiszemelt pontjának kicsiny környezetében. Ezért a Föld felszínéhez rögzített Descartes-féle koordinátarendszerben, amelynek z tengelyét függőlegesen felfelé irányítjuk (37. ábra), írhatjuk, hogy a nehézségi erő:

$$F_z = -m_s \frac{\gamma M_s}{R} \equiv -m_s g, \tag{2.5.126}$$

ahol $g = \frac{\gamma M_s}{R}$ a Föld által okozott **nehézségi gyorsulás**, amely a Föld felszínének egy kiszemelt pontja (a Descartes koordinátarendszer origója) kicsiny környezetében közelítőleg állandó. Ez az erő származtatható az $V = m_s g z$ potenciális energiából: $-\frac{\partial V}{\partial z} = -m_s g$. A szabadon eső anyagi pont Lagrange-függvénye tehát:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(z) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m_s g z. \tag{2.5.127}$$

Ez a Lagrange-függvény leírja az anyagi pont mozgását az $F_z = -mg$ nehézségi erő terében. A nehézségi erőtér konzervatív és homogén. A mozgást **ferde hajításnak** is szokás nevezni, ha a részecske kezdősebessége nem zérus.

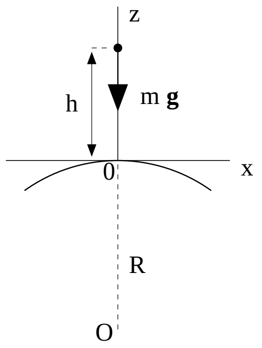

Figure 37: Részecske a Föld nehézségi erőterében.

Az Euler-Lagrange-egyenletek felírásához szükségünk van a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

$$F_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad F_y = \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad F_z = \frac{\partial L}{\partial z} = -m_s g \tag{2.5.128}$$

mennyiségekre. Segítségükkel:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad &\Rightarrow \qquad m\ddot{x} = 0, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad &\Rightarrow \qquad m\ddot{y} = 0, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \qquad &\Rightarrow \qquad m\ddot{z} = -m_s g.
\end{aligned} \tag{2.5.129}$$

Látjuk, hogy a különböző irányú mozgások szétcsatolódnak. A mozgás vetületeire független differenciálegyenleteket kaptunk. Az x- és az y-irányban a mozgás vetülete nagyon egyszerű, a megfelelő mozgásegyenleteket integrálva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = v_{x0}, \qquad \dot{y} = v_{y0}, \\
&x = v_{x0}(t - t_0) + x_0, \qquad y = v_{y0}(t - t_0) + y_0,
\end{aligned} \tag{2.5.130}$$

ahol v_{x0}, v_{y0}, x_0 és y_0 rendre a részecske kezdeti sebességének és helyének megfelelő koordinátái a t_0 kezdeti időpillanatban. A z-irányú mozgás egyenlete:

$$\ddot{z} = -\frac{m_s}{m} g, \tag{2.5.131}$$

ami azt mondja, hogy egy anyagi pont gyorsulásának nagysága a nehézségi erőtérben arányos a test súlyos és tehetetlen tömegének hányadosával. **Fontos kísérleti tapasztalat, hogy vákuumban minden részecske ugyanazzal a gyorsulással esik szabadon. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha a súlyos és a tehetetlen tömeg hányadosa minden részecskére ugyanaz az univerzális állandó. Ez a súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciájának törvénye,** amelyet először Eötvös Loránd bizonyított be kísérletileg, nagy pontossággal. **Ha a kétféle tömeg hányadosa minden részecskére ugyanaz az univerzális állandó, akkor választhatjuk a súlyos tömeg egységét azonosnak a tehetetlen tömeg egységével és akkor mondhatjuk, hogy $m_s = m$ minden részecskére (és minden testre!).** A súlyos és a tehetetlen tömeg ekvivalenciáját figyelembe véve a mozgásegyenlet

$$\ddot{z} = -g \tag{2.5.132}$$

alakúra egyszerűsödik. Ezért mondjuk, hogy a g állandó a nehézségi gyorsulás: minden részecske ugyanazzal a g nagyságú gyorsulással esik szabadon a Föld felszínének közelében. A z-irányú mozgásra integrálással

$$\dot{z} = -g(t - t_0) + v_{z0}, \qquad z = -\frac{1}{2} g (t - t_0)^2 + v_{z0}(t - t_0) + z_0 \tag{2.5.133}$$

adódik, ahol v_{z0} és z_0, rendre a t_0 kezdeti pillanatban a részecske z irányú sebessége és helykoordinátája.

Ugyanezeket az eredményeket kapjuk, ha a Hamilton-féle mozgásegyenleteket oldjuk meg. A Hamilton-függvény kanonikus alakja:

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz \tag{2.5.134}$$

A mozgásegyenletek:

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -mg,$$
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}. \tag{2.5.135}$$

A $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ mozgásegyenletek közül az impulzus vízszintes, p_x és p_y összetevőire vonatkozóknak a megoldása helyett felhasználhatjuk, hogy a Lagrange-függvény és a Hamilton-függvény független a részecske x és y koordinátájától. Ez kifejezi, hogy a rendszer invariáns az x és az y-irányú eltolásokkal szemben. Ennek következtében az impulzus vízszintes komponensei megmaradnak: p_x =áll.= mv_{x0}, p_y =áll.= mv_{y0}. Ez megengedi, hogy koordinátarendszerünket a függőleges z-tengely körül úgy forgassuk el, hogy az impulzus y-irányú összetevője nulla legyen: $p_y = mv_{y0} = 0$. Ekkor az $\dot{y}$-ra vonatkozó egyenletből $y = y_0$ adódik. Eltolhatjuk a koordinátarendszerünket úgy, hogy a részecske tartózkodási helyének vízszintes koordinátái a t_0 kezdeti pillanatban $x_0 = y_0 = 0$ legyenek. Ekkor $y = 0$ marad a mozgás során, azaz a mozgás az (x, z)-síkban zajlik le. A részecske az x-irányban egyenesvonalú egyenletes mozgást végez:

$$\dot{x} = v_{x0}, \quad x = v_{x0}(t - t_0), \tag{2.5.136}$$

a függőleges z irányban pedig egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgást,

$$\dot{p}_z = -mg, \quad p_z = -mg(t - t_0) + p_{z0} = m\Big[v_{z0} - g(t - t_0)\Big],$$
$$\dot{z} = \frac{p_z}{m} = v_{z0} - g(t - t_0), \quad z = -\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_{z0}(t - t_0) + z_0, \tag{2.5.137}$$

ahol v_{z0} és z_0 a részecske kezdeti z-irányú sebessége és kezdeti z-koordinátája a t_0 időpillanatban. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a részecske kinetikus és potenciális energiájának összege állandó (az energia megmaradásának törvénye konzervatív erőtérben mozgó anyagi pont esetén):

$$\begin{aligned} E &= H\Big(x(t), y(t), z(t), p_x(t), p_y(t), p_z(t)\Big) = \frac{p_x^2(t) + p_y^2(t) + p_z^2(t)}{2m} + mgz(t) \\ &= \frac{p_{x0}^2(t)}{2m} + \frac{p_{y0}^2(t)}{2m} + \frac{\Big[p_{z0} - mg(t - t_0)\Big]^2}{2m} + mg\Big[-\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + \frac{p_{z0}}{m}(t - t_0)\Big] \\ &= \frac{\mathbf{p}_0^2}{2m} + mgz_0 = \text{ áll.} \end{aligned} \tag{2.5.138}$$

B. Homogén anyageloszlású gömb gravitációs mezeje*

Az előző fejezetben felhasználtuk, hogy a gömbalakúnak és anyageloszlásában homogénnak (állandó tömegsűrűségűnek) feltételezett Föld a középpontjától $r > R$ távolságban (R a Föld sugara) ugyanolyan

$$E_r = -\gamma \frac{M_s}{r^2} \tag{2.5.139}$$

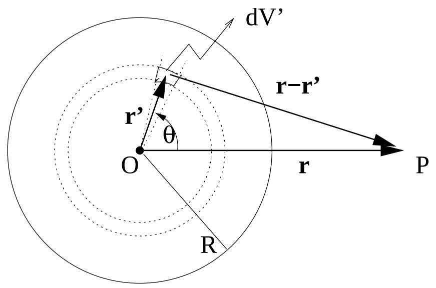

Figure 38: Geometriai ábra homogén anyageloszlású gömb gravitációs potenciáljának kiszámításához.

gravitációs térerősséget létesít, mintha teljes M_s tömege a gömb középpontjában lenne elhelyezve. Alább ezt látjuk be.

Tekintsük ehhez először egy M tömegű, inerciarendszerben nyugvó anyagi pont $\phi(r)$ gravitációs potenciálját, $\phi(r) = -\gamma\frac{M}{r}$. Ha a gömb tömegsűrűsége ρ =áll., akkor a gömb minden egyes $\mathbf{r}'$ helyzetvektorú pontján található infinitezimális dV' térfogateleme, ill. a benne nyugvó $dM = \rho dV'$ súlyos tömeg ilyen törvény szerint

$$d\phi(\mathbf{r}) = -\gamma\frac{\rho dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2.5.140}$$

gravitációs potenciált hoz létre. A geometriai viszonyokat a 38. ábra szemlélteti. Az egyes dV' térfogatelemek gravitációs potenciáljai összeadódnak, miután a gravitációs kölcsönhatásra érvényes az erőhatások függetlenségének elve, s az egyes testektől származó gravitációs mezők térerősségei vektorilag összeadódnak. A gömb által keltett potenciálmező tehát

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= -\int\gamma\frac{\rho dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\gamma\rho\int_0^R dr'\,(r')^2\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{1}{\sqrt{r^2+(r')^2-2rr'\cos\theta}} \\
&= -2\pi\gamma\rho\int_0^R dr'\,(r')^2\int_{-1}^1 d\xi\frac{1}{\sqrt{r^2+(r')^2-2rr'\xi}} \\
&= -2\pi\gamma\rho\int_0^R dr'\,\frac{(r')^2}{-rr'}\left[\sqrt{r^2+(r')^2-2rr'\xi}\right]_{-1}^1 = \frac{2\pi}{r}\gamma\rho\int_0^R dr'\,r'[r-r'-(r+r')] \\
&= -\frac{4\pi}{r}\gamma\rho\int_0^R dr'\,(r')^2 = -\gamma\frac{M}{r},
\end{aligned} \tag{2.5.141}$$

ahol $M = \rho\frac{4\pi R^3}{3}$.

C. Kepler törvényei

A Földön élő embert kezdettől fogva foglalkoztatta, hogy hogyan mozog a Nap és az égitestek. Kezdetben az égitestek mozgásának leírására tett minden próbálkozás a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerből történt, mert a Ptolemaiosz-i, Arisztotelesz-i világképben a Föld a Mindenség közepének szerepét játszotta. Mi most már ügyesebben választhatunk vonatkoztatási rendszert, miután tudjuk, hogy végtelen sok inerciarendszer van és egyikük sincs a Természetben kitüntetve. A Nap és a

Föld közös tömegközépponti rendszerében fogjuk megvizsgálni a Nap-Föld rendszer mozgását, egyelőre elhanyagolva azt, hogy a Nap-rendszerben más bolygók is vannak. Elhanyagoljuk továbbá a többi égitestnek a Nap-Föld rendszerre gyakorolt hatását is.

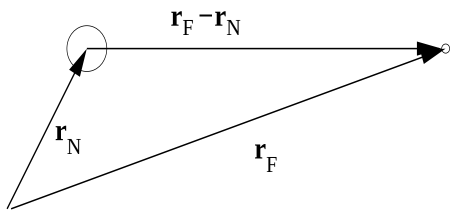

Figure 39: Geometriai ábra a Föld és a Nap helyzetvektoraival.

A kéttest-probléma visszavezetés egytest-problémára. Először a Napból és a Földből álló rendszer problémáját, ami egy kéttest-probléma, visszavezetjük egytest-problémára, azaz egyetlen részecske potenciáltérben történő mozgására. A Nap gravitációs terében a tőle r távolságra elhelyezkedő, pontszerűnek tekintett bolygó potenciális energiája $V(r) = -\gamma\frac{Mm}{r}$, ahol M ill. m rendre a Nap ill. a bolygó (súlyos) tömege, γ a gravitációs állandó. Tetszőleges inerciális vonatkoztatási rendszerben a Nap és a bolygó együttesének Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}_N^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_F^2 + \gamma\frac{Mm}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_F|}, \tag{2.5.142}$$

ahol $\mathbf{r}_N$ ill. $\mathbf{r}_F$ rendre a Nap és a Föld helyzetvektora. Vezessük be helyettük a tömegközéppont $\mathbf{R} = \frac{M\mathbf{r}_N + m\mathbf{r}_F}{M+m}$ helyzetvektorát és az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_N - \mathbf{r}_F$ relatív helyzetvektort,

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{R} + \frac{m}{M+m}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}_F = \mathbf{R} - \frac{M}{M+m}\mathbf{r}. \tag{2.5.143}$$

Toljuk el ezután a koordinátarendszer origóját a tömegközéppontba. Az állócsillagokhoz képest nem forgó tömegközépponti rendszer inerciarendszer, ha elhanyagoljuk a többi égitest gravitációs hatását. A tömegközépponti rendszerben $\mathbf{R} = 0$ (a tömegközéppontból a tömegközéppontba mutató vektor) és $\dot{\mathbf{R}} = 0$ (tömegközéppont sebessége a hozzá rögzített rendszerben). A Lagrange-függvény a tömegközépponti rendszerben

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + \gamma\frac{\mu(M+m)}{r} \tag{2.5.144}$$

alakot ölt. A két-test feladatot így visszavezettük olyan egy-részecskés feladatra, amelyben μ **redukált tömegű** részecske mozog a $\Phi(r) = -\frac{\alpha}{r}$ gravitációs potenciálban, $\alpha = \gamma(M+m)$.

Az ekvivalens egytest-probléma megoldása. Miután a Lagrange-függvény invariáns a koordinátarendszer elforgatásaival szemben, azért a rendszer pályaimpulzusmomentuma, $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mu\dot{\mathbf{r}}$ megmarad. Miután mind az $\mathbf{r}$ helyzetvektor, mind a $\dot{\mathbf{r}}$ sebességvektor merőlegesek a pályamomentum megmaradó $\mathbf{l}$ vektorára, azért a

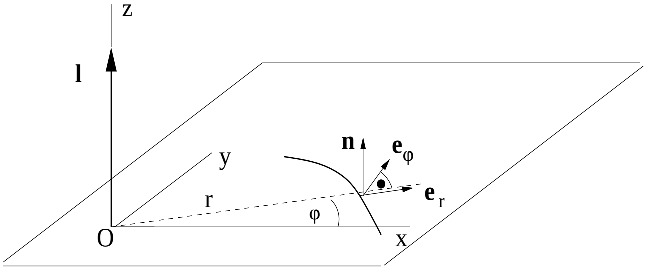

Figure 40: Síkmozgás az állandó pályaimpulzusmomentumra merőleges síkban.

mozgás síkmozgás. Vegyünk fel a mozgás síkjában egy polár-koordinátarendszert (40. ábra). Ekkor a Lagrange-függvény

$$L = \frac{1}{2}\mu\Big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\Big) - \mu\Phi(r), \tag{2.5.145}$$

és a pályamomentum

$$\mathbf{l} = r\mathbf{e}_r \times \mu(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) = r^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi \equiv l_z\mathbf{n}, \quad l_z = r^2\dot{\varphi} = \text{ áll. }, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi \tag{2.5.146}$$

alakot ölt.

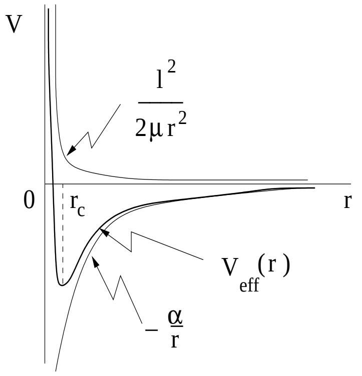

Figure 41: Az effektív potenciál távolságfüggése.

A rendszer energiája

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\varphi}^2 + \mu\Phi(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \tag{2.5.147}$$

megmaradó (ld. az energiamegmaradásának törvénye konzervatív erőtérben mozgó részecske esetén), ahol az effektív potenciális energia:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l_z^2}{2\mu r^2} + \mu\Phi(r). \tag{2.5.148}$$

Az effektív potenciális energia az alábbi tulajdonságokkal bír:

$$V_{\text{eff}} \to +\infty, \quad \text{ha } r \to 0, \qquad V_{\text{eff}} \to 0, \quad \text{ha } r \to \infty \tag{2.5.149}$$

és minimuma van azon r_c sugárnál, amelyre

$$\left.\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}\right|_{r=r_c} = 0, \qquad r_c = \frac{l_z^2}{\alpha\mu}, \quad V_{\text{eff}}(r_c) = -\frac{\mu\alpha^2}{2l_z^2}. \tag{2.5.150}$$

A rendszer energiája alulról korlátos:

$$E \geq -\frac{\mu\alpha^2}{2l_z^2} = V_{\text{eff}}(r_c). \tag{2.5.151}$$

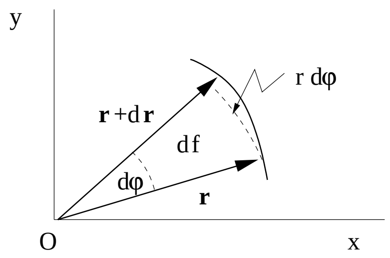

Figure 42: A potenciál O centrumától a részecskéhez húzott helyzetvektor (vezérsugár) által dt idő alatt súrolt df felület.

Az impulzusmomentum megmaradása azt jelenti, hogy az

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}r\; r\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{2.5.152}$$

úgynevezett **felületsebesség állandó: a részecskéhez a potenciál centrumából (a bolygóhoz a közös tömegközéppontból) húzott sugár egyenlő Δt idők alatt egyenlő $\Delta f = \frac{1}{2}r\; r\Delta\varphi$ felületeket súrol. Ez Kepler II. törvénye.** A törvény a Nap gravitációs terében mozgó bármilyen részecskére igaz. Mivel ez a törvény az pályaimpulzusmomentum megmaradásának törvényéből közvetlenül következik, azért bármilyen sztatikus, centrális potenciáltérben mozgó részecskére is igaz, így pl. Coulomb-potenciálban mozgó ponttöltésre is.

A pálya $r = r(\varphi)$ egyenletét a megmaradási törvények alapján egyszerűbben megkaphatjuk, mint a mozgásegyenletek integrálásával. Az energiamegmaradás törvényéből:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\Big(E - \mu\Phi(r)\Big) - \frac{l_z^2}{\mu^2 r^2}}. \tag{2.5.153}$$

Felhasználva az impulzusmomentum megmaradásának törvényét,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l_z}{\mu r^2}, \tag{2.5.154}$$

amit behelyettesítve, a pályát meghatározó $r = r(\varphi)$ függvény $\varphi = \varphi(r)$ inverzére a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{l_z}{r^2}\frac{1}{\sqrt{2\mu\Big(E - \mu\Phi(r)\Big) - \frac{l_z^2}{r^2}}}. \tag{2.5.155}$$

Használjuk fel az alábbi nevezetes integrált (ld. I.S. Gradstein, I.M. Ryzhik, 2.261.3, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 1980.):

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{(-a)^{\frac{1}{2}}} \text{ arc cos } \frac{2ax+b}{(b^2-4ac)^{\frac{1}{2}}} + \text{ áll. }, \quad \text{ha } a<0, \;\; b^2>4ac \tag{2.5.156}$$

A polárszöget mérjük úgy, hogy az integrációs állandó zérus legyen, ekkor

$$\varphi = \text{ arc cos } \frac{\frac{l_z}{r} - \frac{\alpha\mu}{l_z}}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{l_z^2}}}. \tag{2.5.157}$$

Bevezetve a

$$p = \frac{l_z^2}{\mu\alpha}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2El_z^2}{\mu\alpha^2}} \tag{2.5.158}$$

paramétereket, a pálya egyenlete explicit alakra hozható:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+e\cos\varphi}. \tag{2.5.159}$$

Ez kúpszelet egyenlete, amelynek paramétere p (jelentése $r(\frac{\pi}{2}) = p$), excentricitása e.

Ha a $\Phi(r)$ centrális potenciálban mozgó részecske energiája $V_{\text{eff}}(r_c) \le E < 0$, akkor a részecske kötött állapotban van. A bolygók mozgása ilyen. Ha a részecske energiája pozitív, $E > 0$, akkor a részecske szórási állapotban van, mozgása a térben nem korlátos. Ilyen lehet pl. az üstökösök mozgása. Az energia értékétől függően az alábbi eseteket lehet megkülönböztetni:

1. *Korlátos mozgás körpályán.* Ha $E = V_{\text{eff}}(r_c)$, akkor az energia megmaradásának következtében $\dot{r} = 0$, azaz a részecskének zérus a radiális irányú sebessége, azaz körpályán mozog, amelynek az excentricitása $e = 0$ sugara $r_c = p = l_z^2/\alpha\mu$. Ekkor a bolygó is és a Nap is körpályán mozognak a közös tömegközéppont körül. A mozgás állandó szögsebessége

   $$\dot{\varphi} = \frac{l_z}{\mu r_c^2} = \frac{\mu\alpha^2}{l_z^3} \equiv \omega_c, \tag{2.5.160}$$

   és a rendszer energiája ekkor

   $$E = V_{\text{eff}}(r_c) = -\frac{1}{2} l_z\omega_c = -\frac{1}{2}\mu r_c^2\omega_c^2. \tag{2.5.161}$$

2. *Korlátos mozgás ellipszis pályán.* Ha $0 > E > V_{\text{eff}}(r_c)$, akkor a részecske pályájának fordulópontja van az $r_\mp$ helyeken, amelyekre $V_{\text{eff}}(r_\mp) = E$. Ezekben a pontokban a radiális irányú sebességkomponens zérus, $\dot{r}(r_\mp) = 0$, és a részecskére ható erő $F_r(r_\mp) = -\left.\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}\right|_{r=r_\mp} \gtrless 0$ az r_- ill. az r_+ helyen sugárirányban kifelé ill. befelé kezdi gyorsítani a részecskét. Ezért az az $r = r_-$

és az $r = r_+$ sugarú körökkel határolt tartományban mozog a pályasíkban. Az excentricitás ekkor $0 < e < 1$, így a pálya ellipszis, amelynek fókuszában a közös tömegközéppont áll. **Ez Kepler I. törvénye: a bolygók ellipszis pályán mozognak a Nap körül, amelynek egyik fókuszában a Nap áll, pontosabban ellipszis pályán mozognak a közös tömegközéppont körül, amelynek egyik fókuszában a közös tömegközéppont helyezkedik el.** Az ellipszis féltengelyei

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{l_z}{\sqrt{2|E|\mu}} = \frac{l_z}{\sqrt{\alpha\mu}} a^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.5.162)$$

Ha az állandó impulzusmomentumot kiintegráljuk idő szerint a T keringési időre, akkor

$$l_z T = \mu \int_0^T r^2 \dot{\varphi} = \mu f = \mu \pi a b \qquad (2.5.163)$$

adódik, ahol felhasználtuk, hogy az ellipszis területe $f = \pi a b$. A féltengelyekre vonatkozó összefüggéseket felhasználva, innen megkapjuk **Kepler III. törvényét**:

$$T = \frac{\mu \pi a b}{l_z} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma(M+m)}} a^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{T^2}{a^3} = \text{ áll.} \qquad (2.5.164)$$

azaz **a bolygómozgás ellipszispályáin a félnagytengelyek köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idők négyzetei.**

3. *Mozgás nyílt pályán.* Ez akkor következik be, ha az energia $E \geq 0$, amikoris a pálya excentricitása $e \geq 1$. A pálya ekkor hiperbola ($e > 1$), ill. ($e = 1$) parabola, amelynek egyik fókuszában a közös tömegközéppont helyezkedik el.

A fenti példa tanulságos abból a szempontból is, mert mutatja, hogy a kéttest rendszernek vannak **kötött állapotai** ($E < 0$) és **nem kötött, ún. szórási állapotai** ($E > 0$). A kötött állapotokban a két részecske együtt marad a tér egy korlátos tartományában. Kívülről energiát kell közölni a kötött rendszerrel ahhoz, hogy nem kötött állapotba kerüljön.

Távoli csillagok bolygói. A Naprendszerben viszonylag könnyű a bolygók mozgását megfigyelni akár a Földről, akár űrszondáról. Sőt ma már másik bolygóról, a Marsról a Földet is megfigyelhetjük. Természetesnek tűnik, hogy nemcsak a Nap, hanem más, távoli csillagok is rendelkeznek bolygókkal. A bolygók azonban nem ,,világítanak" eléggé (nem szórnak elég fényt a Földi megfigyelő felé) és ezért nem lehet közvetlenül megfigyelni őket. Újabban vált lehetővé a csillagok mozgásának olyan pontots megfigyelése, hogy a csillag-bolygó kettős rendszerben a bolygónak a csillag mozgására gravitációsan gyakorolt hatását ki lehet mutatni. Ezen az úton sikerült sikerült először olyan távoli csillagokat találni, amelyeknek van bolygójuk. Azóta optikai módszerekkel számos esetben sikerült közvetlenül is bizonyítani Naprendszeren kívüli bolygók létezését.

D. Bolygórendszer mozgása*

Most vizsgáljuk meg, hogy milyen következményekkel jár egy bolygónak a Nap körüli mozgására az a tény, hogy a vizsgált bolygó a Naprendszer többi bolygóival is gravitációs kölcsönhatásban áll. A bolygók közötti kölcsönhatás potenciális energiája kicsi járulék a kiszemelt bolygó és a Nap közötti kölcsönhatás potenciális energiájához képest. Ezért úgy lehet figyelembe venni, mint kicsiny, a pályát módosító, ún. **perturbáló hatást**. A Föld közelítő Lagrange-függvénye a Nap és a többi bolygók jelenlétében

$$L = \frac{1}{2} m_F \dot{\mathbf{r}}_F^2 + \gamma \frac{M m_F}{|\mathbf{r}_F|} + \sum_{a=1}^{N} \gamma \frac{m_F m_a}{|\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_a|}, \tag{2.5.165}$$

ahol feltettük, hogy az egész rendszer tömegközéppontja közelítőleg a Napban van, N további bolygó van jelen a rendszerben, és a koordinátarendszerünk origóját a Napban választottuk. Ha a többi bolygó nem lenne jelen, akkor a pálya egyenlete (a Földre vonatkozó mozgásegyenletek megoldása) a már ismert $\mathbf{r}_F^{(0)}(t)$ ellipszispálya lenne, amely az

$$m \ddot{\mathbf{r}}_F^{(0)} = -\gamma \frac{M m_F}{(\mathbf{r}_F^{(0)})^2} \frac{\mathbf{r}_F^{(0)}}{|\mathbf{r}_F^{(0)}|} \tag{2.5.166}$$

mozgásegyenletet elégítené ki. Ez a mozgásegyenlet nulladik közelítése. A többi bolygóra nulladik közelítésben hasonló mozgásegyenlet érvényes, amelyek megoldásai ugyancsak a jól ismert $\mathbf{r}_a^{(0)}(t)$ ellipszispályák. Eggyel jobb közelítést úgy kapunk a Föld pályájára, ha a Lagrange-függvényben a többi bolygóval való kölcsönhatás potenciális energiájába beírjuk a többi bolygó nulladik közelítésben kapott pályáját, majd az ezen tagoknak megfelelő korrekciót figyelembe vesszük a Föld mozgásegyenletében:

$$\begin{aligned} m \ddot{\mathbf{r}}_F^{(1)} &= -\gamma \frac{M m_F}{(\mathbf{r}_F^{(1)})^2} \frac{\mathbf{r}_F^{(1)}}{|\mathbf{r}_F^{(1)}|} + \text{korrekció a többi bolygó miatt} \\ &\approx -\gamma \frac{M m_F}{(\mathbf{r}_F^{(1)})^2} \frac{\mathbf{r}_F^{(1)}}{|\mathbf{r}_F^{(1)}|} - -\sum_{a=1}^{N} \gamma \frac{m_a m_F}{(\mathbf{r}_F^{(0)} - \mathbf{r}_a^{(0)})^2} \frac{\mathbf{r}_F^{(0)} - \mathbf{r}_a^{(0)}}{|\mathbf{r}_F^{(0)} - \mathbf{r}_a^{(0)}|}. \end{aligned} \tag{2.5.167}$$

A hosszadalmas számolás eredménye, hogy a Föld nem mozog zárt pályán, hanem olyan pályán, ami megfelel egy a Nap mint fókusz körül lassan elforduló ellipszisnek. Az ellipszis elfordulását az ún. **perihélium-elfordulással** szokás jellemezni. **A perihélium a bolygópályának a Naphoz legközelebbi pontja.** Az ide húzott vezérsugár fokozatosan elfordul.

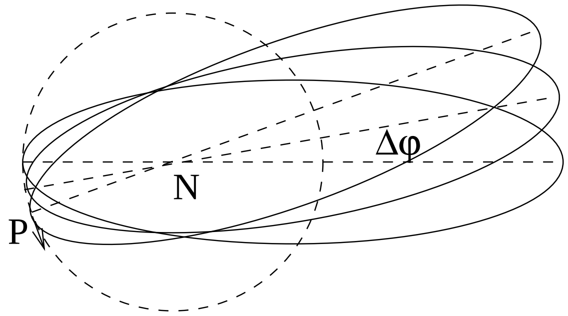

Figure 43: A P perihélium Δt idő alatt bekövetkező, az N Naphoz rögzített inerciarendszerből mért $\Delta\varphi$ elfordulása.

A Merkúr perihélium-vándorlása. A Merkúr esetében a Föld-i megfigyelő észleli a perihélium-elfordulást, 5601″/100év. Ennek azonban jelentős része, 5025″/100év, abból származik, hogy a Föld, ahonnan a megfigyelést végezzük, kering a Nap körül. A többi bolygó perturbáló hatása további $532''/100$év perihélium-elfordulást okoz. Ezek együttvéve azonban nem adnak számot a Merkúr teljes perihélium-vándorlásáról, marad további $44''/100$év meg nem magyarázott szögelfordulás. A XIX. század végén, a XX. század legelején a Newton-i gravitációs törvény alapján mindezt már tudták. Kiderült tehát, hogy a klasszikus fizika Newton gravitációs törvénye alapján nem tudja megmagyarázni a Merkúr perihélium-vándorlását. Ez volt az egyik olyan jelenség, ami arra utalt, hogy a klasszikus mechanikának, és Newton gravitációs törvénye érvényességének vannak korlátai. Ezen jelenség megértésére való törekvésnek fontos szerepe volt az **általános relativitáselmélet** kidolgozásában. Az általános relativitáselmélet végül megmagyarázta a korábban meg nem értett további járulékot a perihélium-vándorlásban. Az ok egyszerű. Newton gravitációs törvénye csak közelítése a gravitáció törvényének, amely csak a Naptól kellően távol használható. A Merkúr távolsága a Naptól elég kicsi ahhoz, hogy mozgásában már észlelhető legyen, hogy a Nap közelében már erős gravitációs térben a Newton-féle gravitációs törvény már nem elég jó közelítése a gravitáció természeti törvényének.

E. Kettős csillag*

A csillagászok számos olyan kötött rendszert figyeltek meg, amelyek két, egymás körül keringő csillagból állnak. Ezek mozgását lényegében ugyanúgy írhatjuk le, mint azt a Nap-Föld rendszer esetében tettük, amikor a többi égitest jelenlétét elhanyagoltuk. A különbség csupán annyi lesz, hogy a közös tömegközéppont most nem lesz általában egyik csillag közelében sem. A két csillag a közös tömegközéppont körül ellipszis pályán kering (vö. 44. ábra). Az ilyen rendszerek két esetben lehetnek különösen érdekesek.

Előfordulhat, hogy csak az egyiküket látjuk, de annak mozgásából rájövünk, hogy nem egyedül van, hanem van egy párja, amellyel kötött rendszert alkot. Ez az egyik módja, hogy például olyan égitestet észleljünk, mint a **fekete lyuk,** amelyik nem sugároz sem részecskéket, sem fényt, de van - nagyon is erős - gravitációs tere.

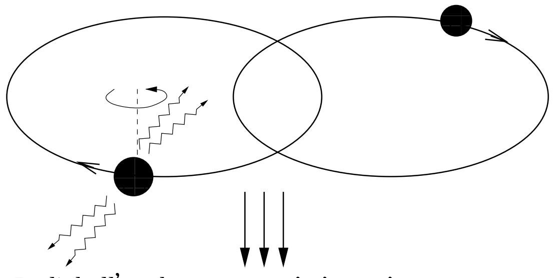

Figure 44: Kettős csillag, amelynek egyik tagja pulzár (forgó, adott irányban rádióhullámokat kibocsátó objektum). A rendszer gravitációs hullámokat bocsát ki.

Ugyancsak nagy jelentőségű volt egy olyan nevezetes kettős csillag (a PSR 1913+16) felfedezése (Hulse és Taylor[5]), amelyek közül az egyik pulzár. A pulzár keringési idejéhez képest gyorsan forog a saját tengelye körül és radiofrekvenciás jeleket sugároz adott irányban. Ez az antenna jól meghatározott időközönként felénk fordul és ekkor észleljük a

[5]Az 1993. évi fizikai Nobel-díjat Russell A. Hulse (1950-) és Joseph H. Taylor, Jr. (1941-) kapták megosztva egy új típusú pulzár felfedezéséért, egy olyan felfedezésért, amely új lehetőséget nyitott meg a gravitáció tanulmányozására.

rádiofrekvenciás felvillanását. Ez a sugárzás pontos óraként használható, hogy nagy pontossággal mérjük a csillag keringési idejét. Így sikerült kimutatni, hogy a megfigyelt kettős rendszerben a csillagok keringésének periódusideje fokozatosan csökken (ld. 45. ábra). A kettős csillag energiát veszít. Ez megint egy olyan jelenség, amelyre a gravitáció Newton-féle törvénye alapján a klasszikus mechanika keretein belül nem tudunk magyarázatot adni. Ha a kettős csillag távol van a többi égitestektől, akkor energiájának állandónak kellene maradni. A megfigyelt jelenség további bizonyítékát adta az általános relativitás elméletének, amelynek keretében azzal magyarázható, hogy a kettős csillagok mozgásuk során **gravitációs hullámokat** bocsátanak ki és így veszítik el az energiájukat.

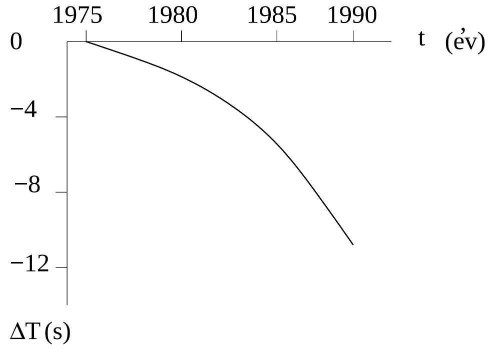

Figure 45: A PSR 1913+16 keringési idejének ΔT csökkenése az eltelt idő függvényében. A pontos mérési adatokat ld. Taylor. J.H., *Class. Quantum Gravity* **1**(1993)167.

F. Szabadesés és súlytalanság általában*

Korábban a szabadesést, mint a Föld felszíne közelében észlelt jelenséget értelmeztük. A szabadesés fogalma azonban általánosítható: **Ha egy testet, az egyszerűség kedvéért részecskét, gravitációs mezőben magára hagyunk, hogy a gravitációs mezőn kívül semmilyen más test nem fejt ki rá erőt, akkor a részecske mozgását szabadesésnek nevezzük.** Ezt ,,kísérletileg" legegyszerűbben az az űrhajó valósítja meg, amelynek kikapcsoltuk a hajtóművét és így a gravitációs mezőn kívül nem hat rá semmilyen erő. Ilyen szabadesést végez a Hold a Föld körüli mozgása során. Ugyancsak szabadesésnek tekinthető a Föld mozgása a Nap gravitációs terében, stb.

Szabadesés a Föld gravitációs terében. A Hold a Föld körül szabadon esik és a centrális gravitációs erőtérben Kepler törvényei szerint a Föld-Hold rendszer közös TKP-jához rögzített inerciarendszerben olyan ellipszis pályán mozog, amelynek a Föld-Hold rendszer tömegközéppontja van az egyik fókuszában. Hasonlóan szabadon esik a Föld körül keringő űrhajó, ha kikapcsoltuk a hajtóművét (és elhanyagoljuk rá a Hold hatását).

A súlytalanság. Tetszőleges gravitációs mezőben szabadon eső űrhajóban a magára hagyott részecske megőrzi az űrhajóhoz képesti nyugalmi állapotát, vagy egyenesvonalú egyenletes mozgását. Ez azért van így, mert a súlyos és a tehetetlen tömeg ekvivalenciája miatt a gravitációs mező adott pontjában minden részecske ugyanazt a gyorsulást szenvedi, azaz ugyanúgy esik szabadon. Az infinitezimális méretű űrhajóban szabadon hagyott részecskék tehát a gravitáció hatására nem gyorsulnak egymáshoz képest. Ez valóban így van, hiszen az űrhajóban szabad mozgást végző minden részecskére az

$$m\mathbf{a} = m_s\mathbf{g} \tag{2.5.168}$$

mozgásegyenlet áll fenn az állócsillagokhoz képest rögzített K inerciarendszerben, ahol $\mathbf{g}$ lokálisan a gravitációs mező térerőssége. Mivel azonban $m_s = m$ minden részecskére, ezért minden részecske gyorsulása a mező adott pontjában ugyanaz, $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, az ott uralkodó gravitációs térerősséggel azonos. Legyen K' az űrhajóval együtt gyorsuló, az állócsillagokhoz képest nem forgó rendszer. Ha Newton II. törvénye a K' rendszerben is érvényes, akkor a K' rendszerbeli megfigyelő azt kell mondja, hogy az m tömegű részecskére hat az $m\mathbf{g}$ gravitációs erő, azonban azért nem gyorsul, mert az űrhajóban, mint gyorsuló rendszerben fellép rá az űrhajó $\mathbf{g}$ gyorsulásával arányos, de azzal ellentétes irányú, $\mathbf{F}' = -m\mathbf{g}$ erő, ún. **tehetetlenségi erő**. Ekkor K'-ben a mozgásegyenlet, azaz Newton II. törvénye:

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{g} + \mathbf{F}' = m\mathbf{g} - m\mathbf{g} = 0. \tag{2.5.169}$$

Az űrhajós tehát azt mondja, hogy ő is, és valamennyi szabadon hagyott test is lebeg az űrhajóban. Azt a tényt, hogy a szabadon eső űrhajóban a testek súlyát (a rájuk ható gravitációs erőt) az űrhajó rendszerében fellépő tehetetlenségi erő éppen zérusra kompenzálja, **súlytalanságnak** nevezzük.

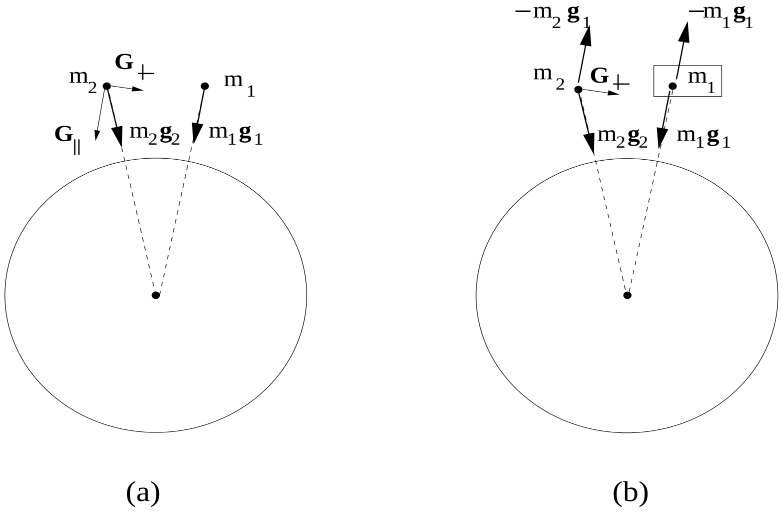

Figure 46: Árapály-erő ($\mathbf{G}_\perp$) a Föld gravitációs terében. (a) A Föld TKP-jához rögzített inerciarendszerben nyugvó megfigyelő észleli, hogy az m_2 szabadon eső részecske gyorsul az m_1 szabadon eső részecske felé: a Föld által rá kifejtett $m_2\mathbf{g}_2$ gravitációs erőnek van zérustól különböző, $\mathbf{g}_1$-re merőleges összetevője. (b) A $\mathbf{g}_1$ gyorsulással szabadon eső m_1 megfigyelő is észleli, hogy m_2 gyorsul feléje: azt mondja, hogy a vele együtt $\mathbf{g}_1$ gyorsulással szabadon eső űrhajóban a távolabbi részecskék szabad mozgása hozzá képest gyorsuló. Ezt azzal magyarázza, hogy a $-m_2\mathbf{g}_1$ tehetetlenségi erő nem kompenzálja nullára a távolabb elhelyezkedő m_2 részecskére ható $m_2\mathbf{g}_2$ gravitációs erőt.

Árapály-erő. Ha az űrhajó nem kicsi, nem tekinthető egyetlen pontnak, akkor mondjuk az űrhajó tömegközéppontjában ill. valamelyik oldalfalán szabadon hagyott 1. és 2. részecske kicsit különböző gravitációs térerősséget észlel. Legyen ez $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}$ a tömegközéppontban és $\mathbf{g}_2 \neq \mathbf{g}$ az űrhajó oldalfalán. Ekkor csak a tömegközéppontban szabadon hagyott részecske gyrosulása nulla az űrhajóból nézve: $\mathbf{a}'_1 = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g} = 0$. Az oldalfalnál elhelyezkedő szabad részecske gyorsulása $m\mathbf{a}'_2 = m\mathbf{g}_2 - m\mathbf{g}$ miatt $\mathbf{a}'_2 = \mathbf{g}_2 - \mathbf{g} \neq 0$. A különbséget **árapály gyorsulásnak** szokás nevezni.

Ilyen jellegű relatív gyorsulás felléphetne bármely égitest gravitációs terében, ha egy kiterjedt A test nagyon közel kerül az égitesthez, és az A test különböző pontjaira ható gravitációs erők észrevehetően különbözőek. Mivel az A test részecskéi is kölcsönhatnak, ezért a gyorsulás nem egészen úgy következik be, mint szabad részecskék esetén. Az A

testben fellépnek azonban árapály erők, amelyek ha elég nagyok, akkor össze is törhetik, ill. szétszakíthatják a testet.

Lokális inerciarendszer. Mi van azonban akkor, ha az űrhajó zárt és az űrhajós nem szerezhet tudomást arról, hogy kívül ott vannak más testek, amelyek gravitációs mezőt hoznak létre. Akkor azt fogja mondani, hogy az űrhajóban elengedett részecskék szabad részecskék és hogy az űrhajó inerciarendszer, hiszen benne minden szabad mozgást végző részecske megőrzi egyenesvonalú egyenletes mozgását ill. nyugalmi állapotát. Ezt azonban csak addig fogja így látni, amíg kis méretű az űrhajó. Ha az űrhajója elég nagy kiterjedésű, akkor észreveszi, hogy szomszédos térbeli pontokból szabadon elengedett részecskék egymáshoz képest gyorsulnak. Ezért kénytelen azt mondani, hogy csak az infinitezimális kiterjedésű, szabadon eső, az állócsillagokhoz képest nem forgó űrhajó inerciarendszer, ún. **lokális inerciarendszer**.

Felmerül annak a kérdése, hogy az árapály erőt, amelyet észlel tudja-e anélkül magyarázni, hogy feltételezné gravitációs mező jelenlétét. Einstein az általános relativitás elméletének keretében megmutatta, hogy ez lehetséges. Ebben az elméletben a gravitáció nem mint erőtér jelenik meg, hanem mint a tér (és az idő) nem nyilvánvaló geometriai tulajdonsága.

2.5.6 Szórásjelenségek

A fizikai törvények vizsgálata sokszor történik úgy, hogy úgynevezett bombázó részecskével („lövedékkel") bombázunk egy céltárgy-részecskét (target-részecskét). A kísérlet általában úgy zajlik le, hogy a a céltárgy és a target zárt rendszert alkot, s így a szórási folyamat során az abban résztvevő partnerek együttes impulzusa, energiája és impulzusmomentuma megmarad. Eközben az egyes részecskéknek megváltozik az impulzusa, az energiája és az impulzusmomentuma. Az ilyen kísérletet **szórási kísérletnek** nevezzük.

Előfordulhat, hogy nem érdekelnek minket a szórási folyamat részletei vagyis a szórási folyamat időbeli lefolyása, vagy hogy nem áll rendelkezésünkre olyan fizikai módszer, amellyel azt nyomon tudnánk követni. (A részecskefizikában általában ez a helyzet.) Ilyenkor csak a $t = t_k$ pillanatbeli kezdeti állapotot hasonlítjuk össze a $t = t_v$ pillanatbeli végállapottal a megmaradó mennyiségek alapján. Ekkor a szórási folyamatot **ütközésnek nevezzük**. A szórási folyamat során a részecskék kölcsönhatnak. A t_k és a t_v pillanatokat azonban úgy választjuk meg, hogy akkor még ill. már elhanyagolható legyen a részecskék közötti kölcsönhatás. Ezt formálisan úgy érhetjük el, hogy a $t = 0$ pillanatot akkor választjuk, amikor a kölcsönhatás a legerősebb, és a $t_k \to -\infty$ és $t_v \to +\infty$ választással élünk. Amikor $t \sim \mathcal{O}(t_k)$ ill. $\mathcal{O}(t_v)$, akkor az egyes részecskék még közelítőleg szabad, azaz egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek a kezdő- ill. a végsebességükkel. Azt mondjuk, hogy ekkor **a részecskék aszimptotikusan szabad állapotban vannak.**

Alább a szórási folyamatot először ütközésként tárgyaljuk, majd megismerkedünk a kölcsönhatási folyamat részleteitől is függő differenciális szórási hatáskeresztmetszet fogalmával.

A. Ütközések

A részecskék rendelkezhetnek belső szerkezettel, ekkor a sebességükön a továbbiakban a tömegközéppontjuk sebességét fogjuk érteni. Feltesszük továbbá az egyszerűség kedvéért, hogy a részecskék saját impulzusmomentuma zérus.

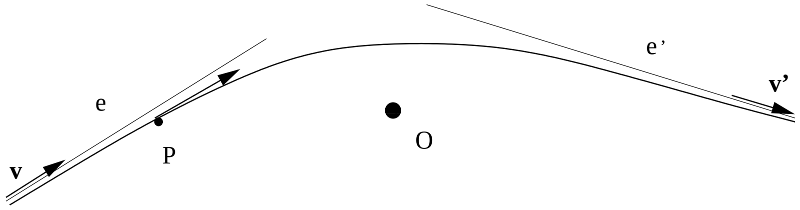

Figure 47: A részecske szóródása O centrumú potenciálon. Az e és e' egyenesek az aszimptotikusan szabad mozgás pályái, a bejövő részecske sebessége $\mathbf{v}$, a kimenőé $\mathbf{v}'$.

Az egyes ütköző részecskék energiája az aszimptotikusan szabad állapotban a haladó mozgásuk kinetikus energiájából és a saját tömegközépponti rendszerükben mért ,,belső" energiájukból tevődik össze. **Rugalmas ütközésről akkor beszélünk, ha az egyes részecskék energiája a saját tömegközépponti rendszerükben az ütközés előtti és utáni aszimptotikusan szabad állapotban azonos, azaz nem változik meg az ütközés során. Ellenkező esetben, amikor az egyes részecskék belső energiája megváltozik, azaz gerjesztési energiát kapnak, vagy adnak le, az ütközést rugalmatlannak nevezzük.**

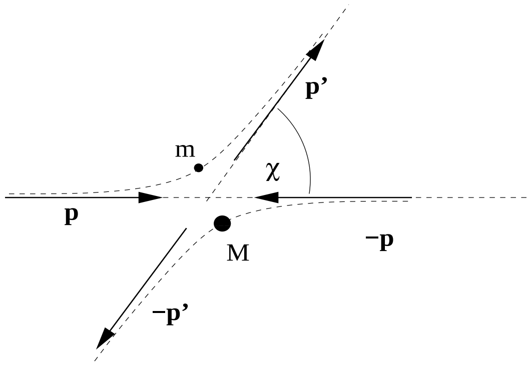

Figure 48: Rugalmas ütközés sematikus ábrája az ütköző partnerek TKP-i rendszerében. A vesszőtlen ill. vesszős impulzusok rendre a bejövő ill. kimenő részecskék impulzusai, χ az eltérülés szöge a TKP-i rendszerben. Rugalmas ütközés során az impulzusok nagysága nem változik, $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$, csak az irányuk fordul el az eredeti irányhoz képest χ szöggel.

Rugalmas ütközés. A továbbiakban részletesen csak a rugalmas ütközéssel foglalkozunk. Az, hogy rugalmas ütközés során a részecskék belső energiája nem változik meg, azt is jelenti, hogy a részecskék tehetetlen tömege sem változik meg. Rugalmas ütközés esetén az energiamegmaradás törvénye értelmében a részecskék haladó mozgásából származó kinetikus energiák összege az ütközés során állandó marad:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_b^2 + \frac{1}{2}M\mathbf{v}_t^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_b'^2 + \frac{1}{2}M\mathbf{v}_t'^2, \tag{2.5.170}$$

ahol m ill. M a bombázó és a target részecske tehetetlen tömege, a sebességek b ill. t alsó indexe a bombázó ill. a target részecskére utal, a vesszőtlen ill. a vesszős mennyiségek pedig a kezdeti ill. a végső aszimptotikusan szabad állapotot jellemzik. Az impulzus megmaradásának törvényéből pedig az alábbi egyenlet adódik:

$$m\mathbf{v}_b + M\mathbf{v}_t = m\mathbf{v}_b' + M\mathbf{v}_t'. \tag{2.5.171}$$

Azt a vonatkoztatási rendszert, amelyben a kísérlet elvégzéséhez szükséges berendezések nyugszanak, laboratóriumi rendszernek nevezzük. (Ilyen berendezések a részecskéket előállító eszközök, a gyorsítók, ill. a végállapotban történő megfigyelésükhöz szükséges eszközök, a detektorok.) Az ütközési folyamatot azonban egyszerűbb leírni az ütköző részecskék tömegközépponti (TKP-i) rendszerében. A közös TKP sebessége:

$$\mathbf{V} = \frac{m\mathbf{v}_b + M\mathbf{v}_t}{m+M} = \frac{m\mathbf{v}'_b + M\mathbf{v}'_t}{m+M}. \tag{2.5.172}$$

Jelöljük TKP alsó indexszel a TKP-i rendszerben mért mennyiségeket. A TKP-i rendszerben a két-részecskés rendszer teljes impulzusa zérus,

$$0 = m\mathbf{v}_{b,\mathrm{TKP}} + M\mathbf{v}_{t,\mathrm{TKP}} = m\mathbf{v}'_{b,\mathrm{TKP}} + M\mathbf{v}'_{t,\mathrm{TKP}}. \tag{2.5.173}$$

Ez azt jelenti, hogy a TKP-i rendszerben a két részecske impulzusa egyenlő nagyságú és ellentétes irányú az ütközés előtti és utáni aszimptotikusan szabad állapotban is:

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}_{b,\mathrm{TKP}} = -M\mathbf{v}_{t,\mathrm{TKP}}, \qquad \mathbf{p}' \equiv m\mathbf{v}'_{b,\mathrm{TKP}} = -M\mathbf{v}'_{t,\mathrm{TKP}}. \tag{2.5.174}$$

Felhasználva a sebességösszeadás szabályát és a TKP sebességének (2.5.172) képletét, az energia megmaradásának (2.5.170) törvénye az alábbi alakot ölti a TKP-i rendszerben:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2_{b,\mathrm{TKP}} + \frac{1}{2}M\mathbf{v}^2_{t,\mathrm{TKP}} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2_{b,\mathrm{TKP}} + \frac{1}{2}M\mathbf{v}'^2_{t,\mathrm{TKP}}, \tag{2.5.175}$$

ahonnan az impulzusokra vonatkozó (2.5.174) összefüggések segítségével azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}m\Big(1+\frac{m}{M}\Big)\mathbf{v}^2_{b,\mathrm{TKP}} = \frac{1}{2}m\Big(1+\frac{m}{M}\Big)\mathbf{v}'^2_{b,\mathrm{TKP}}, \tag{2.5.176}$$

azaz

$$|\mathbf{v}_{b,\mathrm{TKP}}| = |\mathbf{v}'_{b,\mathrm{TKP}}|, \qquad |\mathbf{v}_{t,\mathrm{TKP}}| = |\mathbf{v}'_{t,\mathrm{TKP}}|. \tag{2.5.177}$$

Rugalmas ütközés során az egyes részecskék sebességének nagysága változatlan marad, csak a sebességek iránya fordul el. Egy részecske sebességének kezdeti és végső iránya közti $\chi \in [0,\pi]$ szöget nevezzük a tömegközépponti rendszerben az **eltérülés szögének.** Ennek értékét csak akkor tudjuk meghatározni, ha a kölcsönhatást ismerjük és a szórási folyamatot részleteiben vizsgáljuk.

Rugalmatlan ütközés. **Rugalmatlan ütközésről akkor beszélünk, amikor az egyes ütköző részecskék belső energiája a saját tömegközépponti rendszerükben megváltozik,** azaz más a kezdeti és a végső aszimptotikusan szabad állapotban. **Ha egy részecske belső energiája a saját tömegközépponti rendszerében megnő, ill. lecsökken, akkor azt mondjuk, hogy a részecske gerjesztési energiára tesz szert ill. gerjesztési energiát veszít.** A tapasztalat szerint minden részecskének van minimális energiájú állapota, ún. **alapállapota** a saját tömegközépponti rendszerében. A gerjesztési energia az az energiatöbblet, amivel a részecske a saját tömegközépponti rendszerében az alapállapoti energiához képest rendelkezik. Rugalmatlan ütközés esetén az impulzusmegmaradás törvénye a (2.5.171) egyenlethez képest annyi módosítással érvényes, hogy a kezdeti és a végső tehetetlen tömegek általában nem egyeznek meg. Az energiamegmaradás törvénye azonban csak úgy érvényes, ha figyelembe vesszük a gerjesztési energiákat, vagy ami ugyanazt eredményezi a részecskék belső energiáját.

B. Szórási hatáskeresztmetszet

Az ütközésekről szóló fejezetben a szórási folyamatot csak a kezdeti és a végső a-szimptotikusan szabad állapot impulzus- és energiaviszonyainak összehasonlításával vizsgáltuk. Ehhez nem volt szükségünk a mozgás időbeli lefolyásának ismeretére. Most értelmezzük a **differenciális szórási hatáskeresztmetszetet,** amit a szórási kísérletekben meg lehet mérni, és megmutatjuk, hogy ennek értéke hogyan függ a kölcsönhatástól.

A szóráskísérleteket alapvetően két kísérleti elrendezésben szokás végezni:

1. az állótargetes szóráskísérlet, és az
2. ütközőnyalábos szóráskísérlet.

Az állótargetes szóráskísérlet. Az egyszerűség kedvéért olyan esetet fogunk vizsgálni, amikor a targetrészecske végtelen nehéz és a bombázó részecske és a target között a kölcsönhatás potenciállal írható le. Ez egyúttal azt is feltételezi, hogy sem a bombázó részecske, sem a target nem gerjesztődik, azaz az ütközés rugalmas.

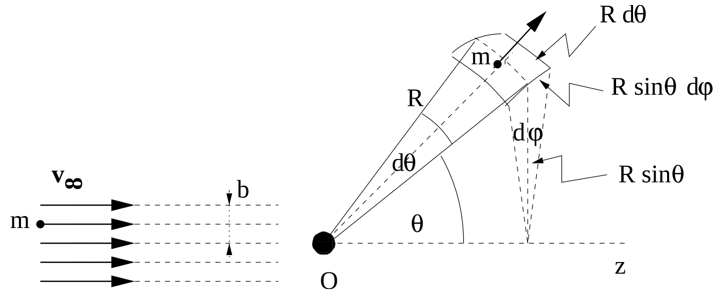

Figure 49: Álló targetes szóráskísérlet geometriai viszonyai a differenciális szórási hatáskeresztemetszet értelmezéséhez.

A tipikus kísérleti elrendezésben nem egyetlen bombázó részecskével szokás a laboratóriumi rendszerben álló targetet bombázni, hanem olyan részecskék nyalábjával, amelyek a kezdeti $t_k \to -\infty$ pillanatban mind azonos $\mathbf{v}_\infty$ sebességgel rendelkeznek. A nyaláb egy részecskéjét még az is jellemzi, hogy a $\mathbf{v}_\infty$ sebességgel párhuzamos, aszimptotikusan egyenes pálya milyen távolságra van a targetrészecskétől, ezt a távolságot nevezzük a b **ütközési paraméternek**. A nyalábot a **bejövő részecskeáram sűrűségével**, azaz a nyaláb irányára merőleges egységfelületen időegység alatt átlépő részecskék számával jellemezzük:

$$j_{\text{be}} = \frac{n_0 \, df \, v_\infty dt}{df \, dt} = n_0 v_\infty \qquad (2.5.178)$$

ahol a számlálóban a nyalábra merőleges df felületelemen dt idő alatt merőlegesen átlépő részecskék száma áll; n_0 a részecskék száma a nyaláb térfogategységében. A szokásos kísérleti elrendezésben a szórt részecskék dN_s számát a targettől nagy R távolságban, a bombázó nyaláb ($\mathbf{v}_\infty$) irányához képest θ szög alatt és φ polárszög alatt elhelyezkedő, $d\Omega$ térszöget lefedő detektorral szokás mérni. A $d\Omega$ térszög a detektorablak dF felületének és az R távolság négyzetének hányadosa: $d\Omega = \frac{dF}{R^2}$. Ha a detektor ablakának felülete a target-detektor egyenesre merőlegesen helyezkedik el, akkor a dF infinitezimális felületdarab az R sugarú, O (target) középpontú gömbfelület darabkája, azaz $dF = R\sin\theta d\theta\; Rd\varphi = R^2\sin\theta d\theta d\varphi$, az infinitezimális térszög tehát

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{2.5.179}$$

A (θ,φ) irány körüli $d\Omega$ térszögbe szórt részecskék száma arányos a nyaláb $j_{\rm be}$ áramsűrűségével, a részecskeszámlálás dt időtartamával és a detektorablak által lefedett $d\Omega$ térszöggel:

$$dN_{\rm s} = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega j_{\rm be}\, dt, \tag{2.5.180}$$

ahol az arányossági tényező a **differenciális szórási hatáskeresztmetszet**, amelyet

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\varphi) = \frac{dN_{\rm s}}{d\Omega\; n_0 v_\infty\; dt} \tag{2.5.181}$$

összefüggés alapján lehet értelmezni. A differenciális szórási hatáskeresztmetszet térszög szerinti integrálját nevezzük **teljes hatáskeresztmetszetnek:**

$$\sigma = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\varphi). \tag{2.5.182}$$

Alább megmutatjuk, hogy a kölcsönhatás ismeretében a differenciális szórási hatáskeresztmetszet a mozgásegyenletek alapján meghatározható. Tegyük fel, hogy a mozgás centrális potenciálban történik, azaz hogy $V = V(r)$. A potenciál centruma a nyugvó target, amelynek visszalökődését elhanyagoljuk, azaz elhanyagoljuk, hogy a szórás során a target-részecske is impulzusra tesz szert. (Van olyan kísérleti elrendezés, amikor ez ténylegesen jó közelítés.) Bármely szóródó részecske mozgása síkmozgás. A részecske bemenő és kimenő impulzusa feszíti ki a mozgás síkját, az ütközési síkot. Centrális potenciál esetén a szórás tengelyszimmetrikus a targeten átmenő, nyalábirányú egyenesre nézve. A differenciális szórási hatáskeresztmetszet ezért nem függ attól, hogy a detektort ezen tengely körül forgatva milyen φ szögállásban helyezzük el: $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$. A részecske kezdetben is és a végállapotban is aszimptotikusan egyenes pályán mozog. A részecske helyzetvektorának szögelfordulása (a target-részecske helyéről, azaz a potenciál O centrumából nézve) $2\alpha = \pi - \theta$, ha a részecske bejut a detektorba. A bolygómozgás vizsgálata során megállapítottuk, hogy a helyzetvektor szögelfordulása egyértelműen kifejezhető a részecske megmaradó, az ütközési síkra merőleges pályaimpulzusmomentuma, $l = bmv_\infty$ és megmaradó energiája, $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$ segítségével. Ha az ott kapott (2.5.155) képletben $\mu\Phi(r)$ helyére a tetszőleges $V(r)$ centrális potenciált írjuk, akkor az általánosabb

$$2\alpha = 2\int_{r_{\rm min}}^\infty \frac{\frac{l}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{l^2}{r^2}}} \equiv 2\alpha(b) = \pi - \theta(b) \tag{2.5.183}$$

eredményt kapjuk a részecske helyzetvektorának teljes szögelfordulására a végtelen távoli kezdeti és végső helyzetek között. Ez nyilvánvalóan azt jelenti, hogy egyértelmű kapcsolat van a b ütközési paraméter és az α szögelfordulás ill. a θ szórási szög között.

A részecske akkor kerül a potenciál centrumától minimális $r_{\rm min}$ távolságra, amikor teljes kinetikus energiája potenciális energiává alakul, azaz amikor $E =$

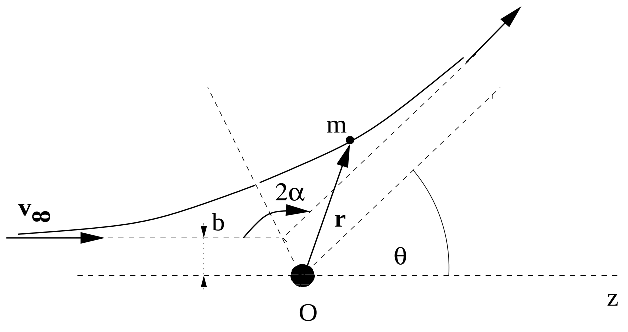

Figure 50: A b ütközési paraméterű, m tömegű részecske az O centrumú potenciálon a nyalábirányhoz képest θ szög alatt szóródik. A szóródó részecske $\mathbf{r}$ helyzetvektorának teljes szögelfordulása $2\alpha = \pi - \theta$ az aszimptotikus bejövő és kimenő helyzetek között (a pálya aszimptotáinak szöge).

$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = V(r_{\rm min})$ teljesül. Ez az összefüggés határozza meg a részecske legkisebb $r_{\rm min}$ távolságát a potenciál centrumától a mozgás során. Az ütközési paraméter és a szórási szög közötti egyértelmű kapcsolat miatt azok a részecskék szóródnak a detektorba, amelyek a bombázó nyaláb keresztmetszetében a b és $b + db$ sugarú körökkel és a φ és $\varphi + d\varphi$ irányú sugarakkal határolt területen jönnek be dt idő alatt:

$$dN_{\rm s} = b\ d\varphi db n_0 v_\infty\ dt = b(\theta)\left|\frac{db}{d\theta}\right| d\theta d\varphi n_0 v_\infty\ dt. \tag{2.5.184}$$

Innen a differenciális szórási hatáskeresztmetszet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\varphi) = \frac{dN_{\rm s}}{d\Omega n_0 v_\infty\ dt} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \tag{2.5.185}$$

ahol a $b(\theta)$ függvényt az (2.5.183) egyenlet határozza meg implicit alakban.

Az ütközőnyalábos szóráskísérlet. Ebben az esetben két részecskenyaláb fut egymással szemben és a részecskék a tér egy meghatározott pontjának kis környezetében ütköznek. Ezt úgy érhetjük el, hogy a két nyalábot csak rövid Δt ideig eresztjük be az ütközési zónába. Az ütköző nyalábos szóráskísérlet fő előnye, hogy adott E energiájú gyorsító használata esetén megnöveli az ütköző részecskék TMP-i energiáját az állótargetes kísérletben elérhető TKP-i energiához képest. Ennek illusztrálására tegyük fel, hogy a két nyalábban a részecskék impulzusa azonos és ellentétes irányú. Ekkor a laboratóriumi rendszer egy-egy ütköző részecskepár TKP-i rendszere. Ha olyan gyorsítónk van, amelyik a részecskéket E kinetikus energiával tudja előállítani, akkor ütközőnyalábos kísérletben (azonos tömegű ütköző részecskék esetén) $2E$ TKP-i energiával rendelkezik a két-részecskés rendszer. Ugyanakkor egy ilyen energiát biztosító gyorsító használata az állótargetes esetben (ugyancsak azonos tömegek esetén) laborrendszerben $E = \frac{1}{2}mv^2$ bombázó energiát, TKP-i rendszerben pedig $E_{\rm TKP} = 2\cdot\frac{1}{2}m(\frac{v}{2})^2 = \frac{1}{2}E$ energiát jelent az ütközőnyalábos kísérletben elérhető $2E$ TKP-i energiával szemben.

2.5.7 Merevtestek

Ebben a fejezetben a legegyszerűbb kiterjedt testek mozgásával, a merevtestek mozgásával ismerkedünk meg. Ezeknek a testeknek az a fő jellemzőjük, hogy a rájuk ható erők és forgatónyomatékok, ill. a bennük ható erők és forgatónyomatékok hatására nem szenvednek alakváltozást. Ezért mozgásukat úgy lehet megérteni, mint a test egészének haladó és forgó mozgása. Éppen ezért ezek a testek olyan pontrendszerek, amelyeknek részecskéi kollektív mozgást végeznek és a mechanikai állapotuk leírható az ezt a mozgást jellemző néhány (általában 6 darab) szabadsági fok segítségével. A vonatkoztatási rendszerek, mint merev mérőrudak egymáshoz mereven rögzített rendszerei szintén merevtestek. Az inerciális vonatkoztatási rendszerek olyan merevtestek, amelyek az állócsillagokhoz képest nem forognak. A merevtestek mozgásának ismeretében megtaláljuk azokat a tehetetlenségi erőket, amelyeknek fel kell lépniük a nem inerciális vonatkoztatási rendszerekben ahhoz, hogy a legkisebb hatás elve azokban is érvényes legyen.

A. Merevtestekről általában

A merevtest fogalma. **Merevtestnek az olyan testet (pontrendszert) nevezzük, amelynek bármely két pontja a mozgás során állandó távolságra marad egymástól:**

$$|\mathbf{r}_a(t) - \mathbf{r}_b(t)| = \text{áll.} \tag{2.5.186}$$

a test bármely két a és b pontjára, ahol $\mathbf{r}_a(t)$, ill. $\mathbf{r}_b(t)$ rendre ezen pontok helyzetvektorai, mint az idő függvényei. A merevtest természetesen ugyanúgy idealizált fogalom, mint az anyagi pont fogalma. A valóságos testek soha sem tökéletesen merevek, de jó közelítéssel mereveknek lehet őket tekinteni, ha a deformációjuk elhanyagolhatóan kicsi. A távolságméréshez használt mérőrudak definíció szerint merevtestek. Maga a vonatkoztatási rendszer is merevtest, a teret behálózó, egymáshoz képest mereven rögzített mérőrudak rendszere.

A merevtest általános elmozdulása. Szögsebesség. A merevség feltételének fontos következményei vannak, amelyek nagymértékben leegyszerűsítik a merevtestek mozgásának leírását. **A merevtest infinitezimális elmozdulása mindig összetehető egy infinitezimális eltolásból (haladó mozgásból, azaz transzlációból) és egy infinitezimális elforgatásból (forgásból, azaz rotációból).** A merevtest helyzetének megadásához két koordinátarendszert érdemes használni. Az egyik az a K inerciarendszer (laboratóriumi vonatkoztatási rendszer), amelyben le akarjuk írni a merevtest mozgását, a másik a merevtesthez rögzített K' koordinátarendszer (ld. 51. ábra). Helyezzük az utóbbi origóját a merevtest O' pontjába. Legyen a K koordinátarendszer O origójából az O' pontba mutató helyzetvektor $\mathbf{R}$, a merevtest teszőleges P pontjába mutató helyzetvektor $\mathbf{r}$ és a P pont helyzetvektora a K' rendszerben $\mathbf{r}'$. Ekkor érvényes az

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' \tag{2.5.187}$$

egyenlőség.

Az infinitezimális transzláció azt jelenti, hogy a merevtest minden pontja azonos $\delta_{\text{tr}}\mathbf{r} = d\mathbf{R}$ elmozdulást szenved, miközben a merevtesthez rögzített K' koordinátarendszer tengelyei önmagukkal párhuzamosan tolódnak el. Az infinitezimális forgatás pedig azt jelenti, hogy a merevtest egésze az O' ponton átmenő $\mathbf{n}'$ egységvektorral adott irány körül $d\varphi'$ szöggel elfordul, azaz a merevtest pontjai $\delta_{\text{rot}}\mathbf{r} = \mathbf{n}'d\varphi' \times \mathbf{r}'$ elmozdulást szenvednek. A merevtest tetszőleges P pontjának teljes infinitezimális elmozdulása így az infinitezimális transzlációból és az infinitezimális elfordulásból adódó elmozdulások vektori összege (ld. 52. ábra):

$$d\mathbf{r} = \delta_{\text{tr}}\mathbf{r} + \delta_{\text{rot}}\mathbf{r} = d\mathbf{R} + \mathbf{n}'d\varphi' \times \mathbf{r}'. \tag{2.5.188}$$

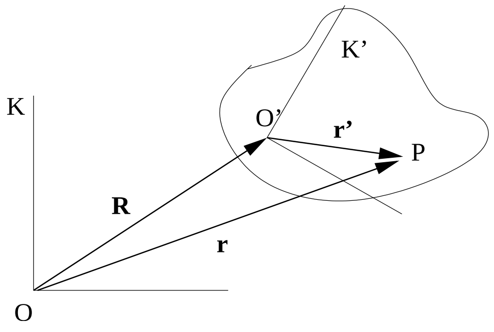

Figure 51: Merevtest P pontjának $\mathbf{r}$ és $\mathbf{r}'$ helyzetvektorai az inerciális laboratóriumi K rendszerben és a merevtesthez rögzített K' rendszerben.

Ha ezek az infinitezimális elmozdulások dt idő alatt következtek be, akkor

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \qquad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \omega' = \mathbf{n}'\frac{d\varphi'}{dt} \tag{2.5.189}$$

rendre az O' pont sebessége a K laboratóriumi rendszerben, a tetszőleges P pont sebessége K-ban ill. a merevtest O' pont körüli forgásának szögsebességvektora. A merevtest tetszőleges P pontjának sebességére a

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \omega' \times \mathbf{r}' \tag{2.5.190}$$

összefüggés áll fenn, azaz a haladó mozgás $\mathbf{V}$ sebességéből és az O' pont körüli forgásból adódó sebességből tevődik össze.

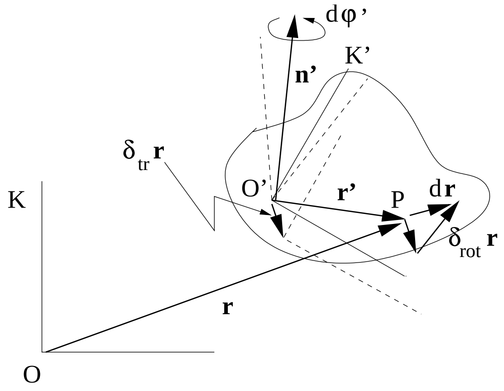

Figure 52: Merevtest P pontja K rendszerben észlelt infinitezimális $d\mathbf{r}$ elmozdulásának összetevése rendre a merevtest haladó és forgó mozgásából származó $\delta_{\mathrm{tr}}\mathbf{r}$ és $\delta_{\mathrm{rot}}\mathbf{r}$ infinitezimális elomozdulásaiból.

Most megmutatjuk, hogy az ω szögsebességvektor független az O' origó helyének megválasztásától. Válasszunk egy másik, O'' pontot a merevtesthez rögzített másik K'' koordinátarendszer origójának. Legyen a merevtest tetszőleges P pontjának helyzetvektora ebben a koordinátarendszerben $\mathbf{r}''$, és legyen az O'-ből O''-be mutató helyzetvektor $\mathbf{b}$. Ha az O'' pont sebessége a K rendszerben $\mathbf{V}''$, akkor

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}'' + \omega'' \times \mathbf{r}'' \tag{2.5.191}$$

írható, ahol ω'' a merevtest O'' pont körüli forgásának szögsebességvektora. Másrészt, alkalmazhatjuk a (2.5.189) összefüggést az O'' pont K rendszerben mért sebességére:

$$\mathbf{V}'' = \mathbf{V}' + \omega' \times \mathbf{b}, \tag{2.5.192}$$

ahol $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$ az O' pont sebessége a K rendszerben. Ezt behelyettesítve a (2.5.191) egyenlőségbe, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \omega' \times \mathbf{b} + \omega'' \times \mathbf{r}''. \tag{2.5.193}$$

Hasonlítsuk ezt össze a tetszőleges P pont sebességének azon kifejezésével, amit úgy kapunk, hogy az

$$\mathbf{r}' = \mathbf{b} + \mathbf{r}'' \tag{2.5.194}$$

egyenlőséget helyettesítjük a (2.5.189) egyenletbe:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \omega' \times \mathbf{b} + \omega' \times \mathbf{r}''. \tag{2.5.195}$$

A (2.5.193) és a (2.5.195) egyenletek összehasonlítása alapján az adódik, hogy a merevtest bármely pontja körüli forgásának szögsebességvektora ugyanaz:

$$\omega' = \omega''. \tag{2.5.196}$$

A továbbiakban tehát elhagyhatjuk a szögsebesség jelölésében a merevtesthez rögzített koordinátarendszer origójának helyzetére vonatkozó utalást (a vesszőket).

A továbbiakban, az egyszerűbb összefüggések érdekében a merevtesthez rögzített koordinátarendszer O' origóját a merevtest tömegközéppontjában választjuk.

Merevtest szabadsági fokainak a száma. A merevtest helyzetét a tömegközéppontjának 3 darab Descartes-koordinátája (R_x, R_y, R_z), és a merevtesthez rögzített K' koordinátarendszer tengelyeinek a K laboratóriumi koordinátarendszer megfelelő tengelyeivel bezárt szögei, $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, azaz további 3 darab szögadat határozza meg. A merevtest helyzetének meghatározásához tehát 6 darab független geometriai adatot kell megadni. A merevtest 6 darab szabadsági fokkal rendelkező mechanikai rendszer. Micsoda leegyszerűsödés azzal szemben, hogy az egy molnyi anyagot tartalmazó merevtestben az egyes részecskék helyzetét megadó koordináták száma $3 \cdot 6 \cdot 10^{23}$!

Merevtest kinetikus energiája. Tehetetlenségi nyomaték. A merevtest kinetikus energiája a merevtestet alkotó részecskék kinetikus energiáinak az összege:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \Big(\mathbf{V} + \omega \times \mathbf{r}'_a\Big)^2 \\ &= \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \mathbf{V} \cdot \Big(\omega \times \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}'_a\Big) + \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a (\omega \times \mathbf{r}'_a)^2, \end{aligned} \tag{2.5.197}$$

ahol $M = \sum_{a=1}^{N} m_a$ a merevtest tehetetlen tömege, $\mathbf{V}$ a merevtest tömegközéppontjának sebessége a laboratóriumi rendszerben, ω a merevtest szögsebessége, $\mathbf{r}'_a$ pedig a merevtest a indexű részecskéjének helyzetvektora a merevtesthez rögzített K' rendszerben. A kinetikus energia kifejezésében a jobb oldalon az első tag a merevtest haladó mozgásából származó kinetikus energia. Mivel $\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}'_a = 0$ a merevtest TKP-jának helyzetvektora a merevtesthez rögzített rendszerben, amelynek origóját a TKP-ban választottuk, azért a jobb oldalon a második tag eltűnik. A jobb oldal harmadik tagja a merevtestnek a TKP-ja körüli forgásából származó kinetikus energiája,

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a(\omega \times \mathbf{r}'_a)^2 = \sum_{a=1}^{N}\sum_{l,i,k,j,n=1}^{3} \epsilon_{lik}\omega_i r'_{ak}\epsilon_{ljn}\omega_j r'_{an} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\Theta_{ij}\omega_i\omega_j. \end{aligned} \tag{2.5.198}$$

Az i, j, k, l, n indexek a vektoroknak a merevtesthez rögzített K' Descartes-féle koordinátarendszerben vett összetevőit jelölik.

Felhasználtuk a

$$\sum_{l=1}^{3}\epsilon_{lik}\epsilon_{ljn} = \delta_{i,j}\delta_{k,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,k} \tag{2.5.199}$$

azonosságot.

Bevezettük a

$$\Theta_{ij} = \sum_{a=1}^{N} m_a \sum_{k,n=1}^{3}(\delta_{i,j}\delta_{k,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,k})r'_{ak}r'_{an} = \sum_{a=1}^{N} m_a\left(\delta_{i,j}\mathbf{r}_a'^{\,2} - r'_{ai}r'_{aj}\right) \tag{2.5.200}$$

tehetetlenségi nyomatékot. A tehetetlenségi nyomaték mátrixa a merevtesthez rögzített K' Descartes-féle koordinátarendszerben szimmetrikus:

$$\Theta_{i,j} = \Theta_{j,i}. \tag{2.5.201}$$

Valós szimmetrikus mátrix mindig diagonális alakra hozható alkalmas ortogonális transzformáció, azaz a K' rendszer koordinátatengelyeinek alkalmas elforgatása segítségével. A forgási energia kvadratikus alakja ezért a K' rendszer koordinátatengelyei irányának alkalmas megválasztásával diagonális alakot ölt, azaz **főtengelyre transzformálható;** ekkor

$$\Theta_{i',j'} = \Theta_{i'}\delta_{i',j'}, \tag{2.5.202}$$

és a megfelelő koordinátatengelyeket **a merevtest főtengelyeinek,** a diagonális alakú tehetetlenségi nyomaték $\Theta_{i'}$ diagonális elemeit pedig **fő tehetetlenségi nyomatékoknak** nevezzük. Meg lehet mutatni, hogy

$$\Theta_{1'} = \sum_{a=1}^{N} m_a\left(x_{a2}'^{\,2} + x_{a3}'^{\,2}\right), \quad \Theta_{2'} = \sum_{a=1}^{N} m_a\left(x_{a1}'^{\,2} + x_{a3}'^{\,2}\right), \quad \Theta_{3'} = \sum_{a=1}^{N} m_a\left(x_{a1}'^{\,2} + x_{a2}'^{\,2}\right), \tag{2.5.203}$$

azaz az egyes főtengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékokhoz az egyes részecskék additívan járulnak hozzá, mindegyik a tehetetlen tömege és a főtengelytől mért merőleges távolsága négyzetének szorzatával, a tehetetlen tömegének a főtengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatékával.

Ezek a tehetetlenségi tenzor mátrixának a Θ' sajátértékei, amelyeket a

$$\text{Det}\left(\Theta_{i,j} - \Theta'\delta_{i,j}\right) = 0 \tag{2.5.204}$$

egyenlet megoldásával lehet megtalálni. A 3 független $\Theta' = \Theta_{i'}$ $(i' = 1, 2, 3)$ sajátértéknek, azaz fő tehetetlenségi nyomatéknak megfelelő, egységhosszúságú sajátvektorok, $\mathbf{n}^{(i')}$ jelölik ki a 3 főtengely irányát, ezek a

$$\sum_{j=1}^{3}\Big(\Theta_{i,j} - \Theta_{i'}\delta_{i,j}\Big)n_j^{(i')} = 0 \tag{2.5.205}$$

homogén lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásai.

A fő tehetetlenségi nyomatékok kifejezéséből következik az is, hogy $\Theta_{i'} \geq 0$, azaz **a fő tehetetlenségi nyomatékok nem negatívak.** Segítségükkel a forgási energia alakja:

$$T_{\rm rot} = \sum_{i'=1}^{3}\frac{1}{2}\Theta_{i'}\omega_{i'}^2. \tag{2.5.206}$$

Egy szabadon mozgó merevtestet, amelynek mindhárom fő tehetetlenségi nyomatéka különböző, **aszimmetrikus pörgettyűnek** nevezünk. Ha két fő tehetetlenségi nyomaték megegyezik, akkor **a pörgettyű tengelyszimmetrikus** azon tengely körüli forgatásokra nézve, amelyik tengelyhez a nem elfajult fő tehetetlenségi nyomaték tartozik. Ha mindhárom fő tehetetlenségi nyomaték megegyezik, akkor **a pörgettyű gömbszimmetrikus.** A szabad mozgást végző pörgettyű Lagrange-függvénye

$$L(\mathbf{V},\omega) = \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \sum_{i'=1}^{3}\frac{1}{2}\Theta_{i'}\omega_{i'}^2. \tag{2.5.207}$$

Merevtest impulzusmomentuma. A K laboratóriumi inerciarendszerben a merevtest $\mathbf{J}$ impulzusmomentuma a részecskéi pályaimpulzusmomentumainak a vektori összege:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \sum_{a=1}^{N} m_a\mathbf{r}_a\times\mathbf{v}_a = \sum_{a=1}^{N} m_a(\mathbf{R}+\mathbf{r}'_a)\times(\mathbf{V}+\omega\times\mathbf{r}'_a)\\ &= M\mathbf{R}\times\mathbf{V} + \sum_{a=1}^{N} m_a\mathbf{r}'_a\times\mathbf{V} + \mathbf{R}\times\Big(\omega\times\sum_{a=1}^{N} m_a\mathbf{r}'_a\Big) + \sum_{a=1}^{N} m_a\mathbf{r}'_a\times(\omega\times\mathbf{r}'_a).\end{aligned} \tag{2.5.208}$$

Itt a második és a harmadik tag eltűnik a jobb oldalon, mert az egyik a TKP sebességét, a másik a TKP helyzetvektorát tartalmazza a TKP-i rendszerben, s azok nullvektorok. Az utolsó tag, a vektori szorzatokra vonatkozó

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{2.5.209}$$

azonosságot felhasználva,

$$\mathbf{J}_{\rm rot} = \sum_{a=1}^{N} m_a\Big[\omega r_a'^{\,2} - \mathbf{r}'_a(\omega\cdot\mathbf{r}'_a)\Big] \tag{2.5.210}$$

alakot ölt. Ez a merevtestnek a TKP-ja körüli forgásából származó impulzusmomentuma. A K laboratóriumi rendszerben a merevtest teljes $\mathbf{J}$ impulzusmomentuma a TKP $\mathbf{L}_{\rm TKP}$ pályaimpulzusmomentumának és a TKP körüli forgásból származó $\mathbf{J}_{\rm rot}$ impulzusmomentumnak a vektori összege:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L}_{\rm TKP} + \mathbf{J}_{\rm rot} = \mathbf{R}\times M\mathbf{V} + \mathbf{J}_{\rm rot}. \tag{2.5.211}$$

A forgásból származó impulzusmomentum komponensei a merevtesthez rögzített K' rendszerben:

$$J_{\mathrm{rot}\, i} = \sum_{j=1}^{3} \omega_j \sum_{a=1}^{N} m_a ({r'_a}^2 \delta_{i,j} - r'_{ai} r'_{aj}) = \sum_{j=1}^{3} \Theta_{ij} \omega_j, \qquad (2.5.212)$$

ill. ha főtengely-irányokban választjuk a K' rendszer koordinátatengelyeit, akkor

$$J_{\mathrm{rot}\, i'} = \Theta_{i'} \omega_{i'}, \qquad (i' = 1, 2, 3) \qquad (2.5.213)$$

ahol nincsen összegzés az i' indexre.

Merevtest mozgásegyenletei. Tegyük fel, hogy a merevtestre ható külső erők eredője $\mathbf{F}$ a K laboratóriumi inerciarendszerben. Ekkor az impulzustételt a K inerciarendszerben felírva, a TKP mozgásegyenletét nyerjük:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \qquad (2.5.214)$$

ahol $\mathbf{P} = M\mathbf{V}$ a merevtest teljes impulzusa. Tegyük fel, hogy az eredő $\mathbf{F}$ külső erő nem függ attól, hogy a merevtest hogyan fordul el a TKP-ja körül, hanem csak a tömegközéppont $\mathbf{R}$ helyzetvektorától függ. Ekkor a TKP fenti mozgásegyenlete a merevtest TKP-ja $\mathbf{R}$ helyzetvektorának időfüggését (adott kezdeti feltételek esetén) egyértelműen meghatározza és lecsatolódik azokról a mozgásegyenletekről, amelyek a merevtest forgását írják le.

A merevtestnek a TKP-ja körüli forgását a 3 forgási szabadsági foknak megfelelő 3 szög időbeli változása határozza meg. A megfelelő további mozgásegyenletek az impulzusmomentum-tételből adódnak:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{M}, \qquad (2.5.215)$$

ahol $\mathbf{M}$ a merevtestre ható külső forgatónyomaték. Ha a haladó mozgás lecsatolódik a forgásról, akkor ez 3 darab csatolt, közönséges másodrendű differenciálegyenlet annak a 3 szögnek az időfüggésére, amelyeket a merevtesthez rögzített K' rendszer tengelyei zárnak be a K inerciarendszer megfelelő tengelyeivel. A mozgásegyenlet bal oldalán természetesen fel kell használni a haladó mozgás mozgásegyenleteinek megoldását a TKP pályamozgásából származó $\mathbf{L}_{\mathrm{TKP}}$ pályaimpulzusmomentum kiszámításakor, hiszen $\mathbf{J} = \mathbf{L}_{\mathrm{TKP}} + \mathbf{J}_{\mathrm{rot}}$.

A merevtest mozgásegyenleteinek explicit alakjával és azok megoldásával általános esetben nem foglalkozunk. Alább megvizsgáljuk néhány esetben a merevtest szabad mozgását, ill. a merevtest rögzített tengely körüli forgását.

Merevtest szabad mozgása. Szabad mozgásról akkor beszélünk, ha a merevtestre ható erők $\mathbf{F}$ eredője és a merevtestre ható külső forgatónyomatékok $\mathbf{M}$ eredője egyaránt zérus. Ekkor a merevtest mozgásegyenletei,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \qquad (2.5.216)$$

a merevtest $\mathbf{P}$ impulzusának és $\mathbf{J}$ impulzusmomentumának a megmaradását fejezik ki a K inerciarendszerben. Ekkor a merevtesttel együtthaladó, nem forgó K_0 rendszer egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, azaz inerciarendszer. Válasszuk ennek origóját a merevtest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző TKP-jában. Nézzük a merevtest TKP körüli forgását ebből a K_0 inerciarendszerből. Az impulzusmomentum megmaradása, azaz

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \tag{2.5.217}$$

a K_0 inerciarendszerben is változatlanul érvényes. Ekkor a $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathrm{rot}}$ vektor állandó ($\mathbf{L}_{\mathrm{TKP}} = 0$), nagyság és irány szerint.

Vegyük sorra a különböző merevtestek szabad mozgását:

1. *Gömbi pörgettyű:* valamennyi fő tehetetlenségi nyomaték megegyezik, $\Theta_{1'} = \Theta_{2'} = \Theta_{3'} \equiv \Theta \geq 0$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{J} = \Theta\omega$ alakú, egyszerű lineáris összefüggés áll fenn az impulzusmomentum és a szögsebesség vektora között. A szögsebesség tehát nagyság és irány szerint állandó és iránya megegyezik a megmaradó impulzusmomentum vektorának irányával.

2. *Rotátor.* A **rotátor** olyan speciális merevtest, amelynek részecskéi egy egyenes mentén helyezkednek el. Legyen ez az egyenes a K' rendszer x'_3 tengelye. Ekkor $\Theta_{3'} = 0$, ami azt jelenti, hogy (a szögsebesség végességét feltételezve) az impulzusmomentumnak a rotátor tengelye irányába mutató, $J_{3'}$ komponense zérus. A rotátor impulzusmomentuma tehát merőleges a rotátor tengelyére. Mivel egy egyenesnek nincsen olyan tulajdonsága, amelynek alapján beszélni lehetne arról, hogy önmaga, mint tengely körül elfordul, ezért azt kell mondani, hogy ilyen irányú forgás nem lehetséges. Ezért a rotátor szögsebességének a rotátor tengelye irányába mutató komponense zérus: $\omega_{3'} = 0$. A rotátor szögsebessége tehát merőleges a rotátor tengelyére. A rotátor tengelyére merőleges, a rotátor TKP-ján átmenő tengelyekre vonatkoztatott fő tehetetlenségi nyomatékok azonosak, $\Theta_{1'} = \Theta_{2'} \equiv \Theta$, így a rotátor impulzusmomentuma és szögsebességvektora egy irányba mutat, $\mathbf{J} = \Theta\omega$.

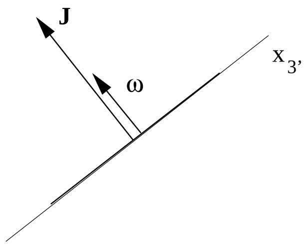

Figure 53: A TKP-jával együttmozgó inerciarendszerben a rotátor **J** impulzusmomentuma és ω szögsebessége merőleges a rotátorra.

3. *Szimmetrikus pörgettyű.* A szimmetrikus pörgettyű TKP-ra vonatkoztatott fő tehetetlenségi nyomatékai közül 2 azonos, legyenek ezek $\Theta_{1'} = \Theta_{2'} = \Theta$ és a harmadik különböző, $\Theta_{3'} \neq \Theta$. Válasszuk úgy a szimmetrikus pörgettyű x'_3 szimmetriatengelyére merőleges $1'$ és $2'$ koordinátatengelyeket, hogy a megmaradó **J** impulzusmomentum az $(1', 3')$ síkba essen. Ekkor

$$J_{1'} = \Theta_{1'}\omega_{1'}, \qquad J_{3'} = \Theta_{3'}\omega_{3'}. \tag{2.5.218}$$

Ha az impulzusmomentum vektora θ szöget zár be a pörgettyű x'_3 szimmetriatengelyével, akkor a pörgettyű szögsebességének el nem tűnő komponensei (54.

ábra):

$$\omega_{1'} = \frac{J_{1'}}{\Theta_{1'}} = \frac{J\sin\theta}{\Theta_{1'}}, \qquad \omega_{3'} = \frac{J_{3'}}{\Theta_{3'}} = \frac{J\cos\theta}{\Theta_{3'}}. \qquad (2.5.219)$$

Az ω szögsebességvektor tehát benne van a **J** impulzusmomentum és a pörgettyű x_3' tengelye által meghatározott síkban.

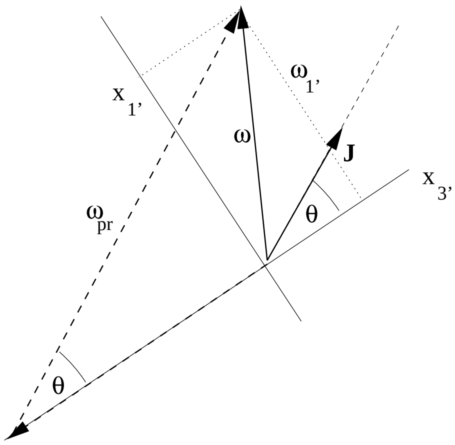

Figure 54: Szimmetrikus pörgettyű tengelyének precessziója $\omega_{\rm pr}$ precessziós szögsebességgel a **J** impulzusmomentum állandó vektora körül a pörgettyű TKP-jával együtthaladó inerciarendszerből nézve.

Bontsuk fel a szögsebesség vektorát a térben rögzített **J** irányába mutató és a pörgettyű tengelyének irányába mutató összetevőkre. Ebben a felbontásban a szögsebesség **J** irányú komponense,

$$\omega_{\rm pr} = \frac{\omega_{1'}}{\sin\theta} = \frac{J}{\Theta_{1'}}. \qquad (2.5.220)$$

Ez az időben állandó, ún. **precessziós szögsebesség** felelős azért, hogy a pörgettyű x_3' szimmetriatengelye változtatja a helyzetét az impulzusmomentumhoz képest a térben a mozgás során. A szimmetriatengely állandó $\omega_{\rm pr}$ szögsebességgel ,,körbejár" az impulzusmomentum rögzített iránya körül, ezt nevezzük **precessziónak.**

4. Az *aszimmetrikus pörgettyű* esetével nem foglalkozunk, hanem az érdeklődő Olvasót a tankönyvekre utaljuk.

B. Merevtest tengely körüli forgása

Ha a merevtest egy, a K inerciarendszerben rögzített tengely körül forog, akkor nem végez haladó mozgást, szögsebességének és impulzusmomentumának pedig csak a forgástengely (a továbbiakban z-tengely) irányába eső komponense nem zérus, $\omega_z \neq 0$, $J_z \neq 0$. Válasszuk K-ban a Descartes-koordinátarendszerünk origóját a forgástengely O pontjának. Ekkor a $J_z = \sum_{j=1}^{3} \Theta_{3,j}\omega_j = \Theta_{z,z}\omega_z$ összefüggés alapján a mozgásegyenlet

$$\frac{dJ_z}{dt} \equiv \Theta_{z,z}\frac{d\omega_z}{dt} = M_z, \quad \text{azaz} \quad \Theta_{z,z}\beta_z = M_z \qquad (2.5.221)$$

alakot ölt, ahol β_z és M_z rendre a z-tengely körüli szöggyorsulás ill. a merevtestre ható külső forgatónyomaték z-irányú komponense.

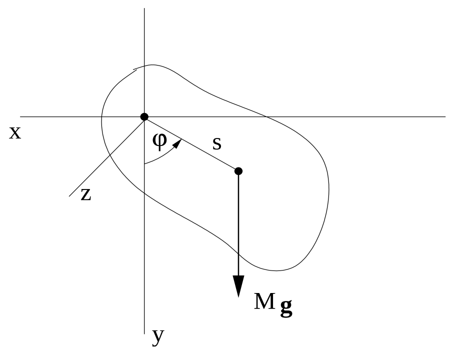

Figure 55: Fizikai inga.

A tengely körül forgó merevtest egy speciális esete a fizikai inga (55. ábra). A fizikai inga a Föld nehézségi terében, vízszintes forgástengely (z-tengely) körül kis, φ szögelfordulásokat szenvedő merevtest. A Föld a fizikai inga minden részécskéjére $\mathbf{F}_a = m_a\mathbf{g}$ függőlegesen lefelé mutató erőt fejt ki. Legyen a másik vízszintes koordinátatengely az x-tengely, az y tengely pedig mutasson függőlegesen lefelé. Ekkor az $\mathbf{r}_a$ helyzetvektorú anyagi pontra ható erő forgatónyomatékának z-komponense:

$$M_{az} = x_a F_{ay} - z_a F_{ax} = m_a g x_a, \tag{2.5.222}$$

ahol g a nehézségi gyorsulás nagysága. A merevtestre ható eredő forgatónyomaték z-irányú komponense ezért:

$$M_z = g\sum_{a=1}^{N} m_a x_a = XMg, \tag{2.5.223}$$

ahol X a merevtest TKP-jának x-koordinátája. Legyen a TKP a forgástengelytől s távolságban, és legyen φ az a szög, amit a TKP-ból a forgástengelyre állított merőleges a z-tengely pozitív félegyenesével bezár és az előjele pozitív, ha az y tengely irányával az elfordulás jobbcsavart alkot. Ekkor $X = -s\sin\varphi$ és az impulzusmomentumtételből a mozgásegyenlet:

$$\Theta_{zz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mgs\sin\varphi. \tag{2.5.224}$$

Kis szögkitérések ($\sin\varphi \approx \varphi$) esetén a mozgásegyenlet a harmonikus rezgőmozgás egyenletének alakját ölti:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Omega^2\varphi = 0, \tag{2.5.225}$$

ahol a kisrezgések körfrekvenciáját a

$$\Omega^2 = \frac{Mgs}{\Theta_{zz}} \geq 0 \tag{2.5.226}$$

összefüggés határozza meg. A szögkitérés az idő függvényében tehát

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\Omega t + \alpha) \tag{2.5.227}$$

alakú, ahol a φ_0 „amplitudót” és az α fáziseltolódást a kezdeti feltételek határozzák meg.

G. Tehetetlenségi erők*

Eddig láttuk, hogy az inerciarendszerek teljesen egyenértékűek a mechanikai törvények szempontjából. A mozgásegyenletek a legkisebb hatás elvének következményei, a kölcsönhatási törvények (az általánosított potenciális energia, ill. az erőtörvény) minden inerciarendszerben ugyanolyan alakú függvényei az adott inerciarendszerben értelmezett megfelelő változóknak. Jogos a kérdés, hogy érvényesek-e a mechanika inerciarendszerekben megtanult törvényei az inerciarendszerekhez képest gyorsulva haladó ill. forgó vonatkoztatási rendszerekben is. A jelen fejezetben megmutatjuk, hogy **a gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben is érvényes a legkisebb hatás elve, ill. Newton II. törvénye, ha feltesszük, hogy ezekben a rendszerekben ún. tehetetlenségi erők lépnek fel.** Ezek olyan erők, amelyeknek létezését azért kell elfogadnunk tényként, hogy a részecske szabad mozgását ugyanúgy a legkisebb hatás elve alapján nyert mozgásegyenletekkel, vagyis Newton II. törvényével tudjuk leírni az inerciarendszerben és a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben. A kölcsönhatások erőtörvényeinek különböző inerciarendszerekben érvényes alakjára a Galilei-féle relativitási elv azt mondja, hogy azok minden inerciarendszerben azonosak. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy a hatásfunkcionálnak, s azon belül a kölcsönhatást leíró általánosított potenciális energiának a különböző inerciarendszerekben érvényes alakjai egymásból a megfelelő valódi Galilei-transzformációk elvégzésével kaphatók meg. Most elfogadjuk ennek általánosítását, hogy a mechanika törvényei minden vonatkoztatási rendszerben azonosak, azaz hogy a hatásfunkcionál inerciarendszerben ismert alakjából a korrdináták és a sebességek alkalmas transzformációjával lehet megkapni a hatásfunkcionálnak valamilyen gyorsuló rendszerben érvényes alakját.

A klasszikus mechanika keretein messze túllépő **általános relativitás elmélet alapelvként mondja ki, hogy a Természet fizikai törvényei minden vonatkoztatási rendszerben azonosak: ez az általános kovariancia elve.** Az általános relativitás elmélete a fizikai törvényeknek olyan matematikai megfogalmazását adja, amelyből nyilvánvaló, hogy azok tetszőleges vonatkoztatási rendszerben azonos matematikai alakkal rendelkeznek.

Nézzük tehát, hogyan kell a szabad részecskére vonatkozó hatást, ill. Lagrange-függvényt módosítani, ha azt akarjuk, hogy a legkisebb hatás elve gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben is érvényes maradjon. A választ két lépesben adjuk meg:

1. *Szabad részecske Lagrange-függvénye gyorsulva haladó vonatkoztatási rendszerben.* Legyen K inerciarendszer és K_0 a K-hoz képest $\mathbf{W}(\mathbf{t})$ gyorsulással haladó mozgást végző, nem forgó vonatkoztatási rendszer. Itt a K_0 rendszernek (mint merevtestnek) a K rendszerhez képesti $\mathbf{W}(t)$ gyorsulása az időnek adott függvénye. A K_0 rendszert akkor nevezzük nem forgónak, ha tengelyeinek iránya a K rendszer tengelyeinek irányaihoz képest nem változik a mozgás során. (Másképpen, ha a tengelyeinek irányai nem változnak az állócsillagokhoz képest.) Ha a szabadon mozgó részecske sebessége $\mathbf{v}$ a K inerciarendszerben és $\mathbf{v}_0$ a K_0 gyorsuló rendszerben, akkor

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}(t) + \mathbf{v}_0, \tag{2.5.228}$$

ahol $\mathbf{V}(t)$ a K_0 rendszernek a K-ban mért sebessége. Helyettesítsük be ezt a kifejezést az inerciarendszerben érvényes hatásfunkcionálba:

$$
\begin{aligned}
S &= \int dt \frac{1}{2} m \mathbf{v}^{\,2} = \int dt \frac{1}{2} m \Big(\mathbf{v}_0^2 + 2\mathbf{v_0}\mathbf{V}(t) + \mathbf{V}^{\,2}(t) \Big) \\
&= \int dt \Big(\frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 - m\mathbf{r_0}\mathbf{W}(t) + \text{ áll.} \Big) \qquad (2.5.229)
\end{aligned}
$$

Itt a második sor második tagját az első sor második tagjából parciális integrálással kaptuk. Az állandó tag független a részecske $\mathbf{r}_0$ helyzetvektorától és $\mathbf{v}_0$ sebességvektorától, ezért elhagyható a hatásból. Ha feltesszük, hogy a szabad részecskére vonatkozó hatás értéke az általános kovariancia elve értelmében minden inerciarendszerben (additív állandó erejéig) azonos, akkor a K_0 rendszerben a hatásra az

$$
S_0 = \int dt L_0 = \int dt \Big(\frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 - m\mathbf{r_0}\mathbf{W}(t) \Big) \qquad (2.5.230)
$$

kifejezést kapjuk.

2. *Szabad részecske hatásfunkcionálja gyorsulva haladó és forgó vonatkoztatási rendszerben.* Legyen a K' rendszer olyan, hogy origója egybe esik a K_0 vonatkoztatási rendszer origójával, közös helyzetvektoruk K origójából mérve $\mathbf{R}(t)$. Ugyanakkor forogjon a K' rendszer a K_0 rendszerhez képest $\omega(t)$ szögsebességgel, amely az időnek adott függvénye. A részecske helyzetvektora K_0-ban és K'-ben ugyanaz az $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'$ vektor (csak a Descartes-komponensek különbözők K_0-ban és K'-ben!). Legyen a részecske sebessége a K' rendszerben $\mathbf{v}'$, ekkor a K_0 rendszerben mért sebessége a K' rendszerben észlelt haladó mozgásából származó $\mathbf{v}'$ sebességnek és a K' rendszer forgásából származó $\omega \times \mathbf{r}'$ „hordozó" sebességnek a vektori összege:

$$
\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}'. \qquad (2.5.231)
$$

Helyettesítsük ezt be az L_0 Lagrange-függvénybe:

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \frac{1}{2} m [\mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}']^2 - m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{W} \\
&= \frac{1}{2} m [(\mathbf{v}')^2 + 2\mathbf{v}' \cdot (\omega \times \mathbf{r}') + (\omega \times \mathbf{r}')^2] - m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{W} \\
&= \frac{1}{2} m [(\mathbf{v}')^2 - 2\mathbf{r}' \cdot (\omega \times \mathbf{v}') + \omega^2 (\mathbf{r}')^2 - (\omega \cdot \mathbf{r}')^2] - m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{W} \\
&\equiv L'. \qquad (2.5.232)
\end{aligned}
$$

Ezzel megkaptuk a Lagrange-függvénynek a K inerciarendszerhez képest $\mathbf{W}(t)$ gyorsulással haladó és $\omega(t)$ szögsebességgel forgó K' rendszerben érvényes L' alakját.

Az L' Lagrange-függvényt parciálisan deriválva,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} &= m\mathbf{v}' + m(\omega \times \mathbf{r}'), \\
\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} &= -m(\omega \times \mathbf{v}') + m\omega^2 \mathbf{r}' - m(\omega \cdot \mathbf{r}')\omega - m\mathbf{W}, \qquad (2.5.233)
\end{aligned}
$$

a legkisebb hatás elve alapján kapott Euler-Lagrange-egyenletek,

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} - \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} = 0, \qquad (2.5.234)
$$

az alábbi alakot öltik:

$$m\mathbf{a}' = -m(\beta \times \mathbf{r}') - 2m\omega \times \mathbf{v}' + m\omega^2 \mathbf{r}' - m(\omega \cdot \mathbf{r}')\omega - m\mathbf{W}, \qquad (2.5.235)$$

ahol $\mathbf{a}' = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}'$ a részecske gyorsulása a K' rendszerben és $\beta(t) = \frac{d}{dt}\omega(t)$ a K' rendszer szöggyorsulása. Ez Newton II. törvényének szokásos alakja, ahol azonban most szabad részecske esetén sem nulla áll a jobb oldalon, hanem olyan erők, amelyek kizárólag azért lépnek fel, mert nem inerciális vonatkoztatási rendszerből figyeljük meg a részecskét. Ezek a **tehetetlenségi erők**:

1. A $-m(\beta \times \mathbf{r}')$ erő csak akkor lép fel, ha a K' rendszer nem egyenletesen forog, azaz ha nem nulla a szöggyorsulása;

2. a $-2m\omega \times \mathbf{v}'$ Coriolis-erő minden forgó rendszerben, minden nem nulla sebességgel mozgó részecskére fellép, iránya merőleges a rendszer szögsebességére és a részecske sebességére;

3. a $m\omega^2\mathbf{r}' - m(\omega \cdot \mathbf{r}')\omega$ centrifugális erő a részecske K' rendszerben felvett helyzetvektorának és a K' rendszer szögsebességének síkjában van; ha a részecske pályája a K' rendszerben merőleges a K' rendszer szögsebességére, akkor a centrifugális erő a szögsebesség hatásvonalára merőlegesen kifelé mutat az origóból;

4. a $-m\mathbf{W}(t)$ tehetetlenségi erő a gyorsulva haladó mozgás következtében lép fel.

2.5.8 Rugalmasan deformálható testek*

A rugalmas testeknek külső erők és forgatónyomatékok hatására bekövetkező alakváltozását a mérnöki tervezésben messzemenően figyelembe kell venni. A hangszereinkben rugalmas testeken rezgéseket, állóhullámokat keltünk, amelyek aztán megrezgetik a környező levegőt és abban rugalmas hullámokat indítanak el. A hang nem más, mint közegben terjedő rugalmas hullám.

Ebben a fejezetben megismerkedünk a rugalmas testek legfontosabb mechanikai tulajdonságaival, mint a deformáció tenzora és a feszültség tenzora. Egy egyszerű példát mutatunk hanghullámok terjedésére rugalmas szilárdtestben.

A. Rugalmas deformáció*

Deformáció, azaz alakváltozás. Foglalkozzunk a **szilárdtestek deformációjának modelljével**. Nulladik közelítésben azt mondhatjuk, hogy a szilárdtest egy merevtest. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a szilárdtest mint egész, nem végez sem haladó, sem forgó mozgást abban a K inerciális vonatkoztatási rendszerben, amelyből megfigyeljük. Ekkor a szilárdtest részecskéi mind egy meghatározott egyensúlyi helyzetet foglalnak el (ha eltekintünk a részecskék hő- mozgásától). **A deformáció, az alakváltozás, abban nyilvánul meg, hogy a részecskék kimozdultak egyensúlyi helyzetükből valamilyen külső behatásra (erő, forgatónyomaték). A deformációt rugalmasnak nevezzük, ha a deformációt előidéző külső behatás megszűntével a deformáció is megszűnik egy bizonyos idő elteltével, és a test részecskéi újra felveszik a K rendszerben eredeti egyensúlyi helyzetüket**. A tapasztalat azt mutatja, hogy általában kis deformációk esetén lesz a deformáció rugalmas. Erősebb deformációk esetén a testek maradandó alakváltozást szenvedhetnek.

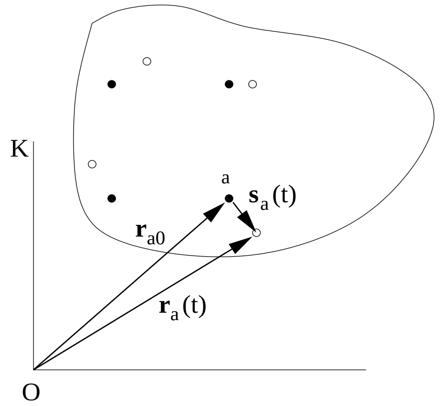

Figure 56: Test deformációjának sematikus ábrája. A fekete pontok ill. a körök jelölik a részecskék helyzetét rendre az egyensúlyi ill. a deformált állapotban.

Hogyan írhatjuk le kinematikailag a deformációt ebben a modellben? Azzal, hogy megadjuk a testet alkotó egyes részecskéknek, azaz anyagi pontoknak az egyensúlyi helyzetükhöz képesti $\mathbf{s}_a(t)$ $(a = 1, 2, \ldots, N)$ elmozdulását a t idő függvényében:

$$\mathbf{s}_a(t) = \mathbf{r}_a(t) - \mathbf{r}_{a0} \tag{2.5.236}$$

ahol $\mathbf{r}_a(t)$ a részecskék helyzetvektora a t pillanatban, $\mathbf{r}_{a0}$ pedig a helyzetvektoruk az egyensúlyi helyzetükben. Az $\mathbf{s}_a(t)$ elmozdulásvektorok idő szerinti első és második deriváltja, $\frac{d\mathbf{s}_a(t)}{dt}$ és $\frac{d^2\mathbf{s}_a}{dt^2}$, rendre az egyes részecskék egyensúlyi helyzet körüli mozgásának sebességét és gyorsulását adják meg.

Deformáció folytonos közegben. A szilárdtestek deformációját nemcsak a fenti mikroszkopikus modell alapján tudjuk leírni. Tekintsük a deformálható testet folytonos közegnek. Ekkor nem az egyes részecskéknek az elmozdulását adjuk meg mint a t idő függvényét, hanem a tér egyes $\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontjai környezetében elhelyezkedő kicsiny, makroszkopikus anyagdarabkáknak az egyensúlyi helyzetükhöz képesti $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ elmozdulásait, az úgynevezett kitérés-vektormezőt. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban elfelejtkezhetünk arról, hogy a kitérés makroszkopikus anyagdarabkák elmozdulása és úgy tekinthetjük, mintha az anyagot folytonosan elosztott, kontinuum sok anyagi pont alkotná. Az alakváltozás további kinematikai jellemzésére a $\frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$ sebességmező, és a $\frac{\partial^2 \mathbf{s}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}$ gyorsulás vektormező szolgál. Ezek a vektormezők példák a közeget jellemző térmennyiségekre.

Nyugvó folyadékokban és a gázokban is lehetséges rugalmas deformáció, amit hasonlóan írhatunk le.

A deformáció tenzora. Az anyag deformációját lokálisan jellemezzük azzal, hogy a közeg egy tetszőleges P pontjához képest hogyan mozdulnak el a közeg azon Q pontjai, amelyek a P pont infinitezimális környezetében helyezkednek el. Így a közeg deformációjának olyan jellemzését kapjuk, amely tetszőleges két, infinitezimálisan közeli anyagi pont egymáshoz képesti helyzetének megváltozását mondja meg.

Legyen eredetileg a közeg P pontja a tér $\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontjában, és a közeg Q pontja pedig az $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontban, ahol $\Delta\mathbf{r}$ tetszőleges, infinitezimális vektor. Rögzített t pillanatban a deformációról az alábbiakat mondhatjuk. Az P pont kitérése az $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ vektor, a Q pont kitérése az $\mathbf{s}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ vektor. Utóbbinak a Descartes-féle komponenseit (a koordinátairányokat a rögzített $\mathbf{E}_i$ $i = 1, 2, 3$, páronként ortogonális egységvektorok jelölik ki) Taylor-sorba fejthetjük a P és Q pontok deformáció előtti relatív

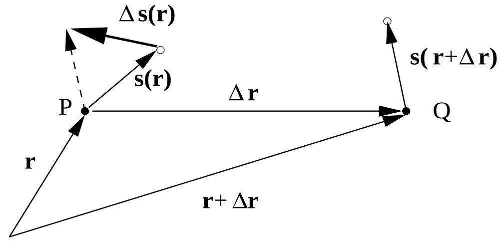

Figure 57: Folytonos közeg szomszédos P és Q pontjai $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ és $\mathbf{s}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})$ elmozdulásainak összehasonlítása. Az összehasonlításhoz a Q pontban értelmezett $\mathbf{s}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})$ elmozdulásvektort eltoltuk párhuzamosan a P pontba.

helyzetét meghatározó $\Delta\mathbf{r}$ vektor komponensei szerint:

$$s_i(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) = s_i(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial s_i}{\partial r_j}\Delta r_j + \mathcal{O}((\Delta r_j)^2), \quad j = 1,2,3. \tag{2.5.237}$$

A szomszédos P és Q pontok egyensúlyi helyzetből történő elmozdulásai közötti különbség tehát:

$$\Delta s_i(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}(\mathbf{r})\Delta r_j, \tag{2.5.238}$$

ahol az

$$A_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial r_j} \tag{2.5.239}$$

2-indexes mennyiség teljesen meghatározza a közeg relatív deformációját az $\mathbf{r}$ térbeli pont környezetében. Matematikai szempontból az $\mathbf{A}: \ \Delta\mathbf{r} \to \Delta\mathbf{s}$ leképezés a P pontban értelmezett helyzetvektorok V_P terének önmagára való lineáris leképezése, amely független a koordinátarendszer megválasztásától. Vegyünk egy tetszőleges másik, a P pontban értelmezett infinitezimális $\Delta\mathbf{r}'$ helyzetvektort, és képezzük a

$$\Delta\mathbf{r}' \cdot \Delta\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{3} \Delta r_i' \Delta s_i = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(\mathbf{r})\Delta r_i' \Delta r_j \tag{2.5.240}$$

skalárszorzatot, amelynek értéke független a koordinátarendszer megválasztásától. Innen látjuk, hogy az $\mathbf{A}$ leképezés a koordinátarendszer megválasztásától függetlenül definiált,

$$\mathbf{A}: V_P \times V_P \to R \tag{2.5.241}$$

mindkét változójában lineáris leképezésként is felfogható. Az ilyen leképezést **tenzornak** nevezzük. Mint a példa is mutatja, ahogy a vektort a komponenseivel, úgy a tenzort a tenzorkomponenseivel adhatjuk meg rögzített $\mathbf{E}_i \in V_P$ bázisvektorok használata esetén. Ahogy a vektorkomponenseket oszlopvektorba, úgy a tenzorkomponenseket mátrixba (példánkban A_{ij}) rendezhetjük.

Itt jegyezzük meg kis kitérőként, hogy a merevtestek tehetetlenségi nyomatéka is tenzor, s annak a tenzorkomponenseit rendeztük el a Θ_{ij} mátrixba. A lényeges különbség egy mátrix és tenzor között az, hogy a mátrix elemei bázistranszformáció (azaz koordinátatranszformáció) során nem változnak, míg a tenzor komponensei transzformálódnak. Pl. a tenzort, mint lineáris leképezést definiáló (2.5.240) kifejezés éppen azért marad bázistranszformáció során invariáns, mert a Δr_i vektorkomponensekkel együtt az A_{ij} tenzorkomponenseket is megfelelően transzformálni kell. A példából is látszik, hogy a tenzor A_{ij} komponenseinek bázistranszformáció során pontosan úgy kell transzformálódniuk, mint az infinitezimális helyzetvektorok komponenseiből képezett $\Delta r_i \Delta r_j$ rendezett szorzatoknak

Valódi deformáció és elfordulás. A tenzorkomponensek A_{ij} mátrixát mindig egyértelműen felbonthatjuk egy szimmetrikus A^{s}_{ij} és egy antiszimmetrikus A^{a}_{ij} mátrix összegére:

$$\begin{aligned} &A_{ij} = A^{\mathrm{s}}_{ij} + A^{\mathrm{a}}_{ij}, \quad A^{\mathrm{s}}_{ij} = \frac{1}{2}\Big(A_{ij} + A_{ji}\Big), \; A^{\mathrm{a}}_{ij} = \frac{1}{2}\Big(A_{ij} - A_{ji}\Big), \\ &A^{\mathrm{s}}_{ji} = A^{\mathrm{s}}_{ij}, \quad A^{\mathrm{a}}_{ji} = -A^{\mathrm{a}}_{ij}. \end{aligned} \tag{2.5.242}$$

Ezen túlmenően minden szimmetrikus mátrix felbontható egyértelműen egy zérus spúrral rendelkező és egy diagonális mátrix összegére:

$$A^{\mathrm{s}}_{ij} = \Big(A^{\mathrm{s}}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{i,j}\mathrm{SpA}\Big) + \frac{1}{3}\delta_{\mathrm{i,j}}\mathrm{SpA}. \tag{2.5.243}$$

A fenti felbontások egyúttal a tenzorok egyértelmű felbontásai is, mert meg lehet mutatni, hogy nem függenek a bázis megválasztásától. (Pl. ha egy tenzor komponenseinek mátrixa valamely bázisban szimmetrikus, akkor minden bázisban szimmetrikus, stb.)

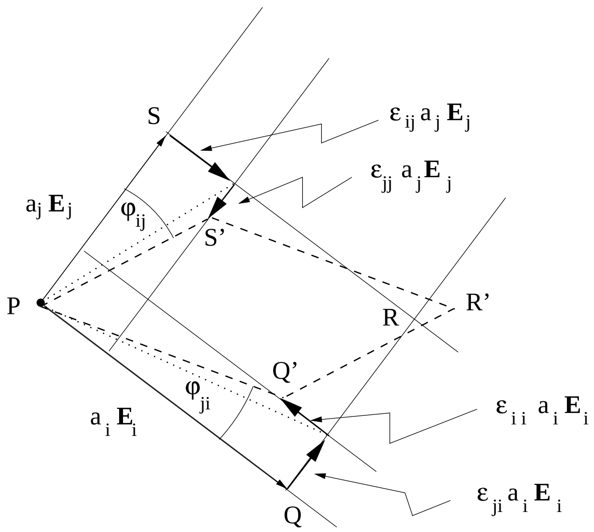

Figure 58: Az (i,j) síkban kijelölt infinitezimális $PQRS$ paralelogramma deformációja a $PQ'R'S'$ paralelogrammává.

A szimmetrikus

$$\epsilon_{ij} \equiv A^{\mathrm{s}}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial r_j} + \frac{\partial s_j}{\partial r_i}\right) \tag{2.5.244}$$

mátrix a közeg tiszta deformációját határozza meg, ezért az ϵ tenzort **a deformáció tenzorának** nevezzük. A deformáció tenzorának komponensei szemléletes geometriai jelentéssel bírnak. A 58. ábra mutatja, hogy tetszőleges (i,j)-síkban, amelyet az $(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j)$ ortonormált bázisvektorok feszítenek ki, egy olyan infinitezimális téglalap, amelynek egyik csúcsa a P pontban van, paralellogrammává torzul a deformáció hatására. **A diagonális és nem diagonális tenzorkomponensek eközben rendre az oldalélek hosszváltozását ill. szögelfordulását határozzák meg első rendben.**

1. Vegyük pl. az $a_i\mathbf{E}_i$ infinitezimális oldalélt (a 58. ábrán a PQ él)! A megváltozott PQ' él hossza

$$a_i' = \frac{a_i(1+\epsilon_{ii})}{\cos\varphi_{ji}} = a_i(1+\epsilon_{ii}) + \mathcal{O}(\epsilon_{ii}\varphi_{ji}^2). \qquad (2.5.245)$$

Hasonló összefüggéseket kaphatunk a másik két irányban is. **Ezért a deformációs tenzor diagonális komponensei az egyes bázisvektorok $\mathbf{E}_i$ irányaiban felvett infinitezimális szakaszok relatív hosszváltozását mérik a deformáció során:**

$$\frac{a_i' - a_i}{a_i} = \epsilon_{ii}. \qquad (2.5.246)$$

A tisztán csak relatív hosszváltozással járó deformációt tágulásnak ill. összenyomásnak nevezzük.

2. Vizsgáljuk most pl. a PQ él és a PQ' él által bezárt α_{ji} elfordulási szöget a deformációban első rendben:

$$\mathrm{tg}\varphi_{ji} = \frac{\epsilon_{ji}a_i}{a_i(1+\epsilon_{ii})} = \frac{\epsilon_{ji}a_i}{a_i} + \mathcal{O}(\epsilon_{ii}\epsilon_{ji}) = \epsilon_{ji}. \qquad (2.5.247)$$

Ha azonban az elfordulási szög tangense infinitezimális, akkor a szög és a tangense első rendben megegyeznek, úgyhogy

$$\varphi_{ji} = \epsilon_{ji}. \qquad (2.5.248)$$

érvényes első rendben. Mivel a deformációs tenzor szimmetrikus

$$\varphi_{ij} = \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} = \varphi_{ji}. \qquad (2.5.249)$$

A deformációs tenzor nem diagonális komponensei tehát az egyes bázisvektorok irányában felvett, anyagi pontok láncából alkotott infinitezimális hosszúságú nyilak szögelfordulását határozzák meg. Az irányok elfordulását jelentő deformációt nyírásnak, a megfelelő szögelfordulásokat nyírási szögeknek nevezzük.

A deformációs tenzor spúrja

$$\Theta \equiv \mathrm{Sp}A = \mathrm{Sp}\epsilon = \sum_{i=1}^{3}\epsilon_{ii} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial s_i}{\partial r_i}, \qquad (2.5.250)$$

a közeg pontjai által kijelölt, ΔV térfogatú infinitezimális paralelepipedonnak a deformáció miatt bekövetkező Θ relatív térfogatváltozását, tágulását ($\Theta > 0$) ill. összezsugorodását ($\Theta < 0$) méri.

Transzformáljuk ennek belátásához az ϵ szimmetrikus tenzort főtengelyre. Jelölje a páronként ortogonális főtengelyek irányaiba mutató egységvektorokat $\mathbf{e}_i$, ($i = 1,2,3$). Tekintsük az $a^{(i)}\mathbf{e}_i$, páronként ortogonális, infinitezimális (a főtengelyek irányába mutató) vektorok végpontjai által kijelölt infinitezimális téglatest térfogatának megváltozását:

$$\Delta V = a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)} \to \Delta V' = \prod_{i=1}^{3}\left(a^{(i)} + \epsilon_{ii}a^{(i)}\right) \approx \Delta V\left(1 + \sum_{i=1}^{3}\epsilon_{ii}\right), \qquad (2.5.251)$$

ahonnan a relatív térfogatváltozás:

$$\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = \sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ii} = \Theta. \tag{2.5.252}$$

Mivel a tenzor spúrja egy adott pontban invariáns az ezen pontban végrehajtott lokális bázistranszformációval szemben, ezért a test egy adott pontjában vett deformációs tenzor diagonális komponenseinek összege tetszőleges lokális bázisban megadja a relatív térfogatváltozást a test ezen pontjában. **Tehát Θ, azaz a deformációs tenzor spúrja a relatív térfogatváltozás, idegen szóval térfogati expanzió.**

Végül vizsgáljuk meg, hogy mi a jelentése az A_{ij} tenzor antiszimmetrikus részének! Az antiszimmetrikus tenzor komponenseiből képezhetjük a φ axiálvektor komponenseit:

$$\varphi_k = \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{kij} A^{\mathrm{a}}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{kij} \left(\frac{\partial s_j}{\partial r_i} - \frac{\partial s_i}{\partial r_j} \right), \tag{2.5.253}$$

amelynek segítségével az antiszimmetrikus tenzor komponensei:

$$A^{\mathrm{a}}_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{jik} \varphi_k. \tag{2.5.254}$$

Könnyű megmutatni, hogy az antiszimmetrikus A^{a}_{ij} tenzor a P pontból kiinduló tetszőleges $\Delta\mathbf{r}$ vektort olyan $\Delta\mathbf{r}'$ vektorba képezi le, amelyre

$$\Delta r'_j = \sum_{i=1}^{3} A^{\mathrm{a}}_{ji} \Delta r_i = \sum_{i,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \varphi_k \Delta r_i = \sum_{i,k=1}^{3} \epsilon_{jki} \varphi_k \Delta r_i, \tag{2.5.255}$$

azaz

$$\Delta\mathbf{r}' = \varphi \times \Delta\mathbf{r}. \tag{2.5.256}$$

Ez azt jelenti, hogy valamennyi P-ból kiinduló $\Delta\mathbf{r}$ infinitezimális vektort $|\varphi|$ szöggel forgatjuk el a $\frac{\varphi}{|\varphi|}$ irány körül a jobbkéz-szabálynak megfelelően. **A deformáció általános tenzorának antiszimmetrikus része tehát az anyagdarabkák lokális elfordulását jellemzi.**

A mechanikai feszültség tenzora. A deformált testekben kétféle erőhatás lép fel. **A hosszú hatótávolságú erők ún. térfogati erőket eredményeznek, amelyeknek nagysága arányos a makroszkopikus anyagdarabka térfogatával.** Ennek oka, hogy a dV infinitezimális térfogatelemtől távol elhelyezkedő bármely részecske a térfogatelem minden részecskéjére kb. ugyanazt az erőt fejti ki, a részecskék száma a térfogatelemben pedig arányos a térfogatelem nagyságával. Így a dV térfogatelemre ható térfogati erő nagysága $\mathbf{f}dV$, ahol $\mathbf{f}$ az ún. **térfogati erősűrűség. A részecskék között fellépő rövid hatótávolságú erők felületi erőket eredményeznek.** Az anyagban kiszemelt valamely $\mathbf{n}$ „külső” normálisú, df nagyságú felületelemnek a „belső” oldalán elhelyezkedő részecskékre ható $d\mathbf{F}_{\mathrm{fel}}$ erő, amelyet a felületelem külső oldalán elhelyezkedő részecskék fejtenek ki, nyilván arányos a felület mentén elhelyezkedő részecskék számával, azaz magával a felületelem nagyságával. Ha felveszünk egy ΔV, kicsiny térfogatú anyagdarabot és feltesszük, hogy az egyensúlyban van a térfogati és a felületi erők hatására, akkor nem gyorsul, azaz

$$\int_{\Delta V} \mathbf{f} dV + \int_f d\mathbf{F}_{\mathrm{fel}} = 0 \tag{2.5.257}$$

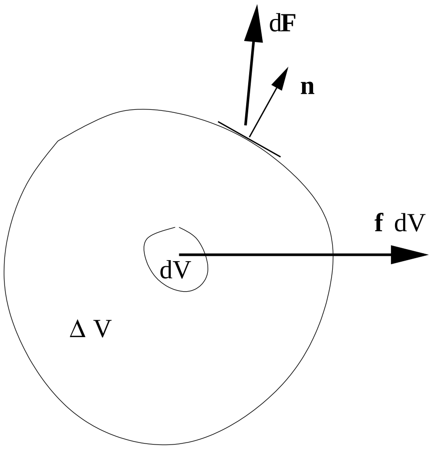

Figure 59: A test kicsiny, makroszkopikus darabjára ható térfogati és felületi erők.

írható. (A belső erők eredője a hatás-ellenhatás törvénye miatt zérus.) A (2.5.257) egyenlet azt jelenti matematikailag, hogy a bal oldal első tagjában szereplő térfogati integrál minusz egyszerese felírható felületi integrál alakjában. A matematika vektoranalízisnek nevezett fejezete értelmében ez azt jelenti, hogy létezik olyan $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ $(i, j = 1, 2, 3)$ másodrendű tenzor, amelynek segítségével

$$\int_f dF_{\text{fel}\, i} = -\int_{\Delta V} f_i dV = \int_{\Delta V} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} dV = \int_f \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j df, \tag{2.5.258}$$

ahol $\mathbf{r}$ annak a pontnak a helyzetvektora, amelynek környezetében a ΔV térfogatelemet felvettük. Meg lehet mutatni, hogy a mechanikai feszültség tenzora szimmetrikus:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \tag{2.5.259}$$

A feszültségtenzor σ_{ij} komponense az n_j normálisú, egységnyi felületre, a felületi normális oldaláról ható felületi erőnek az i irányú komponensével egyenlő. Pontosabban: az n normálisú, df felületelemre, a normális oldalán elhelyezkedő részecskék által kifejtett felületi erő i irányú komponense $\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j df$. A feszültségtenzor diagonális komponenseit húzó-, nyomó feszültségeknek, a nem diagonális komponenseit pedig nyíró feszültségeknek nevezzük.

Hooke törvénye. A deformációt teljesen rugalmasnak nevezzük, ha a mechanikai feszültség tenzora a közeg adott pontjában, adott időpillanatban csak a tiszta deformáció tenzorának ezen a helyen, ebben a pillanatban felvett értékétől függ. Kis deformációk esetén feltehetjük, hogy a kapcsolat a feszültség és deformáció között lineáris. Ha az anyagban deformálatlan állapotában nincsenek feszültségek, akkor a lineáris kapcsolat nem tartalmaz tiszta tagot, azaz

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,l=1}^{3} c_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{r}, t), \tag{2.5.260}$$

ahol c_{ijkl} a közeg rugalmas tulajdonságait jellemző anyagállandók. Ez **Hooke törvénye** általános alakban. **A közeget izotrópnak nevezzük,** ha a fenti lineáris kapcsolat

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\Theta\delta_{i,j} = 2\mu\Big(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\text{Sp}\epsilon\delta_{i,j}\Big) + \frac{3\lambda + 2\mu}{3}\text{Sp}\epsilon\delta_{i,j} \tag{2.5.261}$$

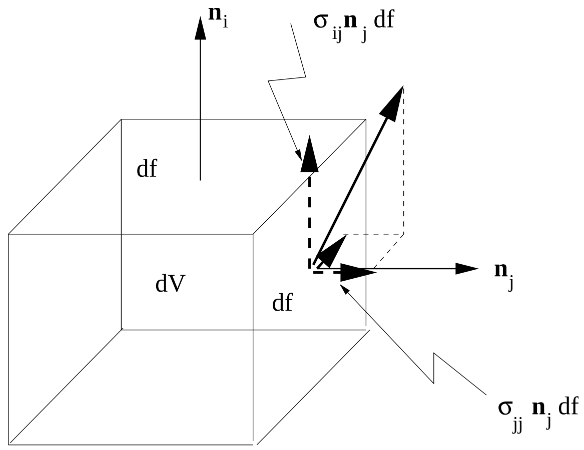

Figure 60: A test infinitezimális dV térfogatú, kockalakú darabkájának felületére kívülről ható erők és a feszültségi tenzor komponenseinek kapcsolata. $\mathbf{n}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ a kocka oldallapjainak külső normálisai.

alakú, ahol csak két független anyagállandó, λ és μ szerepel. Itt $\Theta = \mathrm{Sp}\epsilon = \sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ii}$ a tiszta deformáció tenzorának spúrja, azaz a térfogati expanzió, és $\Theta\delta_{i,j}$ a tiszta térfogati expanzió (nyújtás, összenyomás) tenzora, míg $\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\Theta\delta_{i,j}$ a tiszta nyírás tenzora.

Látszik, hogy **tiszta térfogati expanzió esetén** a feszültség tenzora minden koordinátarendszerben diagonális, és mindhárom diagonális eleme megegyezik. Ekkor a diagonális elemek mínusz egyszeresét p **nyomásnak** nevezzük,

$$\sigma_{ij} = -\mathrm{p}\delta_{ij}, \tag{2.5.262}$$

mert ez - definíció szerint - a j irányú egységfelületen pozitív j irányban (a normálissal ellentétes oldalról a normális oldalára), időegység alatt átadott, i irányú impulzus. A tiszta nyiráshoz tartozó feszültség,

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{nyir}} = 2\mu\left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{Sp}\epsilon\delta_{i,j}\right), \tag{2.5.263}$$

csupán nem diagonális komponenseket tartalmaz, adott j normálisú felületen a felülettel párhuzamos i irányú impulzusnak a normális irányában történő átadását jelenti.

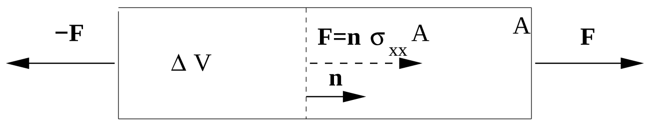

Figure 61: Rugalmas rúd nyújtása állandó erővel. A ΔV térfogatdarab egyensúlyát biztosító erők: a külső $-\mathbf{F}$ erő és a jobb oldali anyagdarab által kifejtett $\sigma_{xx}A\mathbf{n}$ felületi erő.

Példa: Rúd nyújtása. Tegyük fel, hogy az x tengellyel párhuzamos rudat egyik végén $\mathbf{F}$, másik végén $-\mathbf{F}$ állandó erővel megnyújtott állapotban tartjuk. Ha a rúd keresztmetszete A, akkor a rúd egyensúlyának feltétele alapján (bármely rúddarabkára ható erők eredője nulla):

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \text{áll.} = \frac{F}{A} \tag{2.5.264}$$

a rúd bármely pontjában. Ha elhanyagoljuk a haránt irányú összehúzódást és a nyírást, akkor a deformációs tenzornak csak az ϵ_{xx} komponense különbözik zérustól:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\delta L}{L} \tag{2.5.265}$$

ez a rúd relatív megnyúlása (L a rúd hossza, δL a rúd megnyúlása). Ekkor a feszültség és a deformáció közötti lineáris kapcsolat

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\delta L}{L}, \qquad Y = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \tag{2.5.266}$$

alakot ölt, ahol Y a Young-modulus. Ez **Hooke törvényének** legegyszerűbb alakja: **a feszültség arányos a relatív megnyúlással a rúd bármely pontjában.**

B. Rugalmas hullámok. Hang*

Haladó hullámok. Hang. Ahelyett, hogy általánosan tárgyalnánk rugalmas hullámok terjedését rugalmasan deformálható közegekben, szorítkozzunk az x-tengellyel párhuzamosan elhelyezkedő rugalmas rúdban terjedő longitudinális hullámokra. Tegyük fel, hogy Hooke törvénye értelmében

$$\sigma_{xx}(x,t) = Y\epsilon_{xx}(x,t) \tag{2.5.267}$$

a rúd mentén tetszőleges x helyen, tetszőleges t pillanatban. Tegyük fel, hogy a feszültségtenzor többi komponensei zérussal egyenlők. Írjuk fel a rúd infinitezimális dx hosszúságú, df keresztmetszetű darabkájának mozgásegyenletét (ld. 62. ábra). Ezen darabka tehetetlen tömege $dm = \rho dxdf$, ahol ρ a rúd tömegsűrűsége. A továbbiakban a sűrűségről is feltesszük, hogy állandó (térben és időben). Legyen a kiszemelt anyagdarabkának a kitérése $s_x(x,t)$, a gyorsulása $\frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial t^2}$, úgyhogy a rúddarabka impulzusváltozási gyorsasága:

$$\rho\frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial t^2}dxdf. \tag{2.5.268}$$

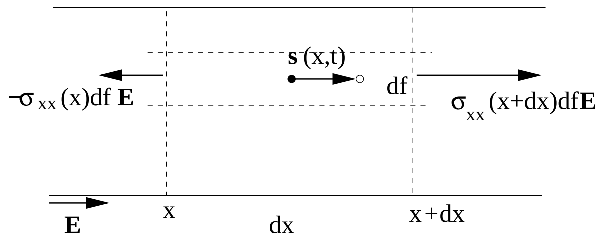

Figure 62: Rugalmas rúd $dxdf$ térfogatelemének longitudinális $\mathbf{s}(x,t)$ kitérése mint a hely és idő függvénye és a szomszédos anyagdarabkák által rá kifejtett húzó-nyomó erők, $\mathbf{E}$ az x-tengely irányába mutató egységvektor.

Másrészt a rúddarabkára a feszültségből származó

$$\sigma_{xx}(x+dx,t)df - \sigma_{xx}(x,t)df = \frac{\partial\sigma_{xx}(x,t)}{\partial x}dxdf = Y\frac{\partial\epsilon_{xx}(x,t)}{\partial x}dxdf = Y\frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial x^2}dxdf \tag{2.5.269}$$

erő hat, ahol felhasználtuk Hooke törvényét és azt, hogy $\epsilon_{xx} = \frac{\partial s_x}{\partial x}$. Ekkor a rúddarabka mozgásegyenlete

$$\left(\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)s_x(x,t) = 0 \tag{2.5.270}$$

alakot ölt, ahol

$$c_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{2.5.271}$$

az úgynevezett longitudinális hangsebesség. A kapott egyenlet a **hullámegyenlet** tipikus alakja. Az általános megoldása (végtelen hosszú rúd esetén):

$$s_x(x,t) = f_-(x - ct) + f_+(x + ct), \tag{2.5.272}$$

ahol $f_-(u)$ és $f_+(u)$ az u argumentum tetszőleges függvényei. Itt az első, ill. a második tag rendre jobbra ill. balra haladó síkhullámot ír le. Az általános megoldás tehát egy balra és egy jobbra haladó síkhullám szuperpozíciója. Mivel a kitérés a hullám terjedési irányával párhuzamos, azért ezt a hullámot **longitudinális hullámnak** nevezzük.

Tetszőleges periodikus síkhullám megoldás előállítható

$$s_x(x,t) = A\cos(\omega t \pm kx + \alpha) \tag{2.5.273}$$

alakú balra $(\omega t + kx)$ ill. jobbra $(\omega t - kx)$ haladó, harmonikus síkhullámok lineáris szuperpozíciójaként. A hullám ω körfrekvenciájának és a k hullámszámnak ki kell elégítenie

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2}, \qquad k = \frac{\omega}{c_l} \tag{2.5.274}$$

egyenlőséget ahhoz, hogy a fenti harmonikus síkhullámok valóban a hullámegyenlet megoldásai legyenek. Erről meggyőződhetünk, ha behelyettesítjük a (2.5.273) függvényt a (2.5.270) hullámegyenletbe.

Szilárdtestekben nemcsak longitudinális, hanem transzverzális rugalmas hullámok is lehetségesek. A rugalmas hullám transzverzális, ha a kitérés merőleges a hullám terjedési irányára. Kétféle transzverzális hullám lehetséges, miután a kitérés a terjedési irányra merőleges síkban két független, egymásra merőleges irány mentén rezeghet. A transzverzális hullámok és a longitudinális hullámok terjedési sebessége általában különböző. Folyadékokban és gázokban csak longitudinális rugalmas hullámok lehetségesek. A deformálható közegekben terjedő rugalmas hullámokat közös néven hangnak nevezzük.

Állóhullámok. Vizsgáljuk még meg a (2.5.270) egyenlet megoldását véges L hosszúságú rúdon, ha gondoskodunk róla, hogy a rúd végei rögzítettek: $s_x(0,t) = 0$ és $s_x(L,t) = 0$. Ekkor kereshetjük a hullámegyenlet megoldásait

$$s_x(x,t) = f(x)g(t) \tag{2.5.275}$$

szeparált alakban. Ezt visszahelyettesítve a (2.5.270) hullámegyenletbe,

$$\frac{d^2 g}{dt^2}\frac{1}{c_l^2 g(t)} = \frac{d^2 f}{dx^2}\frac{1}{f(x)} = -k^2 \tag{2.5.276}$$

adódik. $k^2 > 0$ esetén az $f(x)$ és a $g(t)$ függvényekre vonatkozó, független megoldások

$$f(x) = \sin(kx), \text{ ill. } \cos(kx), \qquad g(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \tag{2.5.277}$$

alakba írhatóak, ahol $\omega = kc_l$. Az $f(x)$-re kapott független megoldások közül csak $f(x) = \sin(kx)$ elégíti ki a rögzített végnek megfelelő határfeltételeket. Az is akkor és csak akkor, ha

$$kL = n\pi \tag{2.5.278}$$

azaz a hullámszám a diszkrét

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.5.279}$$

értékek valamelyikét veszi fel. Ez azt jelenti, hogy a félhullámhossz egész számszor fér rá a rúd L hosszára:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \qquad L = n\frac{\lambda_n}{2}. \tag{2.5.280}$$

Ennek megfelelően a hullámok körfrekvenciája is diszkrét értékeket vehet csak fel:

$$\omega_n = c_l k_n = n\omega_1, \tag{2.5.281}$$

az $\omega_1 = \frac{\pi}{L} c_l$ alapfrekvencia egész számú többszöröseit. A kapott megoldások

$$s_x^{(n)}(x,t) = A\cos(\omega_n t + \alpha)\sin(k_n x) = A\cos(n\omega_1 t + \alpha)\sin(nk_1 x) \tag{2.5.282}$$

alakú állóhullámok, amelyek a megoldások teljes rendszerét alkotják. Ez azt jelenti, hogy a végein mereven rögzített rúdon terjedő tetszőleges hullám felbontható ilyen állóhullámok lineáris szuperpozíciójára.

Meg lehet mutatni, hogy $k^2 \leq 0$ esetén a (2.5.276) egyenleteknek nincsen korlátos megoldása. Ezért ezt a lehetőséget fizikailag ki kell zárnunk. Az energia megmaradása csak korlátos megoldásokat enged meg.

FÜGGELÉK

A Koordinátarendszerek

A.1 Globális és lokális koordinátarendszer

Láttuk, hogy a klasszikus mechanika szerint a tér három-dimenziós euklideszi tér. Ezért tetszőleges vonatkoztatási rendszerben természetes módon tudtunk az egész térre kiterjedő Descartes-féle koordinátarendszert értelmezni. **Az egész térben értelmezett koordinátarendszert globális koordinátarendszernek nevezzük.** A globális Descartes-féle koordinátarendszer tengelyeit az origóban felvett $\mathbf{E}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ortonormált bázisvektorok jelölik ki.

A tér helyzetvektoraival ellentétben az elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás olyan vektorok, amelyek a részecske pillanatnyi tartózkodási helyén vannak értelmezve. Célszerű ezért lokális koordinátarendszerek értelmezése, amelyekben ezeket a vektorokat komponenseikre tudjuk bontani. **A tér valamely pontjának infinitezimális környezetében értelmezett koordinátarendszert lokális koordinátarendszernek nevezzük.** Jelölje a P pontban értelmezett (a P pontból kiinduló) vektorok lineáris terét V_P. Értelmezzünk a tér minden pontjában lokális koordinátarendszereket úgy, hogy a tér minden P pontjában, azaz minden V_P lineáris vektortérben felveszünk egy $\mathbf{e}_i(P)$ $(i = 1, 2, 3)$ bázist. Ekkor a P pontban értelmezett bármely $\mathbf{v}(P)$ vektor felbontható komponenseire:

$$\mathbf{v}(P) = \sum_{i=1}^{3} v_i(P)\mathbf{e}_i(P). \tag{A.1.1}$$

Az egyszerűség kedvéért csak olyan konkrét esetekkel fogunk foglalkozni, amikor a lokális bázis ortonormált, $\mathbf{e}_i(P) \cdot \mathbf{e}_j(P) = \delta_{i,j}$. Ekkor a vektorkomponensek:

$$v_i(P) = \mathbf{v}(P) \cdot \mathbf{e}_i(P), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{A.1.2}$$

Itt fontos a következőt tudatosítanunk magunkban: A vektor, mint a P pontban értelmezett V_P lineáris vektortér eleme, nem függ attól, hogy milyen bázist választunk a vektortérben. A bázistól csak a vektornak az adott bázisban vett komponensei függenek. Ezért, ha bázistranszformációt hajtunk végre, akkor a vektorok változatlanok maradnak, csak a komponenseik transzformálódnak. Alább látni fogjuk, hogy a globális koordináták transzformációja azt jelenti, hogy megfelelő lokális bázistranszformációkat hajtunk végre. Ezért mondhatjuk, hogy koordinátatrnszformációk során a vektorok változatlanok maradnak, csak a vektorok komponensei transzformálódnak.

Általában a lokális bázisokat teljesen tetszőlegesen felvehetjük. Ha azonban pontról pontra haladva, a térben felvett bázisok megfelelő vektorai „kellően simán” változnak, akkor a lokális koordinátarendszerek egyetlen globális koordinátarendszerré „varrhatók össze”. Az „összevarrás” úgy történik, hogy rendre megkeressük azokat a görbéket, amelyeknek rendre az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és az $\mathbf{e}_3$ vektorok az érintői. Így három független görbesereget kapunk, az ún. **koordinátavonalak** seregeit. Az így kapott koordinátavonalak behálózzák a teret. Minden ponton pontosan három, különböző koordinátavonal halad át. A koordinátavonalak egyes seregeiben található koordinátavonalakat valós számokkal megjelölve, minden térbeli ponthoz 3 valós szám, 3 koordináta rendelhető. A kapott koordinátarendszert **globális, görbevonalú koordinátarendszernek** nevezzük. A globális görbevonalú koordinátarendszereket a fentiek alapján vagy azzal jellemezzük, hogy a tér

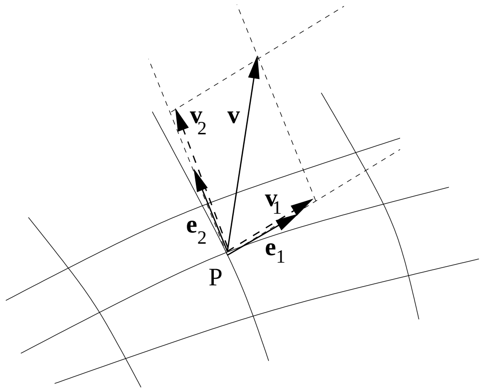

Figure 63: Globális koordinátavonalokhoz illeszkedő lokális koordinátarendszer bázisvektorainak és tetszőleges vektor felbontásának semléltetése a két-dimenziós síkon.

minden pontjában megadjuk a megfelelő lokális bázist, vagy azzal, hogy megadjuk a térben a koordinátavonalak három seregét.

A.2 Természetes koordináták

Az elemi elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás vektorai az anyagi pont pillanatnyi tartózkodási helyén értelmezett vektorok, az anyagi pont mozgásának lokális jellemzői. Ezeket a vektorokat felbonthatjuk összetevőikre, ha rendelkezésünkre áll az anyagi pont bármely tartózkodási helyén a térben, három lineárisan független egységvektor, úgynevezett bázis.

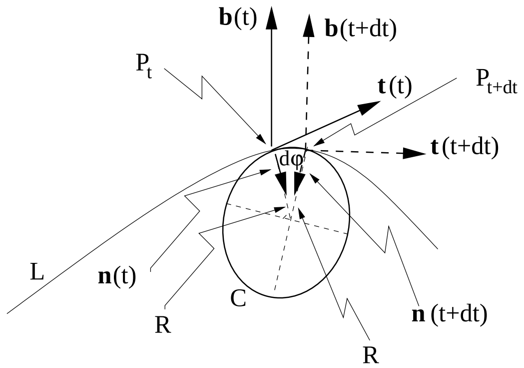

Figure 64: Az L pályagörbe természetes koordinátarendszerét kifeszítő lokális bázisvektorok a P_t és a P_{t+dt} pontban. A P_t pontban a pályagörbe simulóköre C, annak sugara R. A pályagörbén a dt idő alatt befutott ívelem $ds = Rd\varphi$.

Miután ilyen bázisokra csak a pályagörbe pontjaiban, azaz az anyagi pont lehetséges tartózkodási helyein van szükségünk, ezért az a természetes, hogy a pálya minden pontjában értelmezünk egy egységvektorokból álló bázist. Legyen $\mathbf{t}(P_t)$ a pálya tetszőleges P_t pontjában a pályagörbének az anyagi pont haladása irányába mutató érintő egységvektora. Legyen továbbá $\mathbf{n}(P_t)$ ugyanebben a pontban a pályagörbéhez simuló kör középpontja felé mutató egységvektor, és végül $\mathbf{b}(P_t)$ a $\mathbf{t}(P_t)$ és az $\mathbf{n}(P_t)$ vektorokra merőleges binormális egységvektor. A bázisvektorok a $(\mathbf{t}(P_t), \mathbf{n}(P_t), \mathbf{b}(P_t))$ sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak. Az így értelmezett bázisok a pálya minden pontjában meghatároznak egy-egy lokális koordinátarendszert, amelyeket a **pálya természetes koordinátarendszerének** nevezünk (ld. 64. ábra). Az anyagi pont elemi elmozdulása érintőirányú,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{t}ds = \mathbf{t}vdt, \tag{A.2.1}$$

így koordinátái a pálya természetes koordinátarendszerében:

$$(dr)_t = ds = vdt = Rd\varphi, \qquad (dr)_n = (dr)_b = 0. \tag{A.2.2}$$

Itt bevezettük a P_t pontban a pálya simulókörének R sugarát, az úgynevezett görbületi sugarat, és a simulókör középpontjából az anyagi pont tartózkodási pontjához húzott sugár dt idő alatt bekövetkező $d\varphi$ szögelfordulását. Következésképpen az anyagi pont sebessége,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{t}v = \mathbf{t}\frac{ds}{dt}, \tag{A.2.3}$$

így a sebesség koordinátái a pálya természetes koordinátarendszerében:

$$v_t = v = \frac{ds}{dt}, \qquad v_n = v_b = 0. \tag{A.2.4}$$

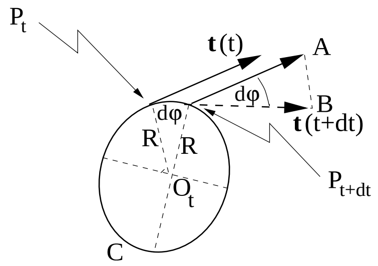

Figure 65: A részecske pillanatnyi tartózkodási helyéhez tartozó **t** pályaérintő megváltozása infinitezimális dt idő alatt. Az $O_tP_tP_{t+dt}$ és a $P_{t+dt}AB$ háromszögek hasonlóak.

A gyorsulást a sebesség idő szerinti első deriváltjaként kapjuk meg:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{t}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{\mathbf{t}(P_{t+dt}) - \mathbf{t}(P_t)}{dt} \\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t} + v\mathbf{n}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t} + \frac{v}{R}\mathbf{n}\frac{Rd\varphi}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t} + \frac{v}{R}\mathbf{n}\frac{ds}{dt} \\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}.
\end{aligned} \tag{A.2.5}$$

Itt felhasználtuk, hogy az anyagi pont P_t és P_{t+dt} helyzetei és a pálya P_t pontjához tartozó simulókörének O_t középpontja által alkotott $P_tP_{t+dt}O_t$ háromszög infinitezimális dt időtartam esetén hasonló ahhoz a $P_{t+dt}AB$ háromszöghöz, amit úgy kapunk, hogy a $\mathbf{t}(P_t)$ érintőt önmagával párhuzamosan a P_{t+dt} pontba toljuk, és vesszük ezen eltolt egységvektor hegye, a $\mathbf{t}(P_{t+dt})$ egységvektor hegye és a P_{t+dt} pont által meghatározott háromszöget (ld. 65. ábra). A kapott (A.2.5) összefüggés alapján a gyorsulás összetevői:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}, \tag{A.2.6}$$

ahol a_t ill. a_n az úgynevezett érintőirányú (tangenciális), ill. centripetális gyorsulás. A pálya természetes koordinátarendszerét definiáló bázisvektorok páronként merőlegesek egymásra, így a gyorsulás nagyságát a vektorösszetevőkből Pitagorasz tétele segítségével kapjuk meg:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \tag{A.2.7}$$

A.3 Descartes-koordináták

Lokális, Descartes-féle koordinátarendszerhez úgy jutunk a tér egyes P pontjaiban, hogy a vonatkoztatási rendszer O origójában felvett $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ ortonormált bázisvektorokat önmagukkal párhuzamosan eltoljuk a tér egyes P pontjaiba. Jelölje az így kapott lokális bázisvektorokat rendre $\mathbf{e}_x(P)$, $\mathbf{e}_y(P)$, $\mathbf{e}_z(P)$. Ekkor az elemi elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás lokálisan értelmezett vektorai a pálya tetszőleges pontjában felbonthatók az ottani bázis szerinti lineáris kombinációra, azaz Descartes-összetevőkre. A teret behálózó globális Descartes-koordinátarendszer koordinátavonalait három, páronként egymásra merőleges egyenessereg egyenesei alkotják. Az egyes koordinátavonal-seregekbe tartozó egyenesek párhuzamosak. A tér minden P pontján pontosan három, páronként merőleges egyenes megy át, amelyeket a P pontba mutató helyzetvektor $\mathbf{r} = x\mathbf{E}_x + y\mathbf{E}_y + z\mathbf{E}_z$ felbontásában szereplő x, y és z összetevőivel jelölhetünk meg. Itt pl. x a P pontnak az (y, z) koordinátasíktól mért előjeles távolsága, stb. Pitagorasz tétele értelmében a helyzetvektor hossza:

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{A.3.1}$$

Az elemi elmozdulás felbontása

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{E}_x + dy\mathbf{E}_y + dz\mathbf{E}_z \tag{A.3.2}$$

és ennek megfelelően a sebesség felbontása

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{E}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{E}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{E}_z, \tag{A.3.3}$$

ahonnan leolvashatjuk a sebesség Descartes-összetevőit:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{A.3.4}$$

A gyorsulás a sebesség idő szerinti első deriváltja. A bázisvektorok az anyagi pont pályája mentén most midenütt azonosak (párhuzamos eltolás erejéig), ezért azok különbsége a pálya két pontjában, amelyekben a részecske a $t + dt$ ill. a t pillanatban tartózkodik, zérus; pl. $\mathbf{e}_x(P_{t+dt}) - \mathbf{e}_x(P_t) = 0$. Tehát a bázisvektorok idő szerinti első deriváltja zérus. Így a gyorsulásra

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{e}_z \tag{A.3.5}$$

adódik, ahonnan a gyorsulás Descartes-komponensei:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{A.3.6}$$

Ezután alkalmazhatjuk Pitagorász tételét a vektorok nagyságának meghatározására:

$$ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{A.3.7}$$

A.4 Síkbeli polárkoordináták

Ha az anyagi pont egy adott síkon mozog, akkor használhatjuk helyzetének megadásához a síkbeli Descartes-koordinátákat. A Descartes-koordinátákat ugyanúgy vezethetjük be a síkon, mint a térben. Sok esetben azonban kényelmesebb az anyagi pont helyzetét síkbeli polárkoordinátákkal megadni (ld. 66. ábra). Ezek:

1. a sík tetszőleges P pontjának r távolsága az O origótól, $r = |OP|$;
2. egy tetszőlegesen választott rögzített irány, pl. az O origójú Descartes-koordinátarendszer x-tengelyének pozitív iránya, és az OP sugár által bezárt, az óramutató járásával ellentétes irányban mért φ szög.

Ebből rögtön következik a Descartes-koordináták és a polárkoordináták közti kapcsolat:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{A.4.1}$$

A sík tetszőleges P pontjában a vektorokat az $(\mathbf{e}_r(P), \mathbf{e}_\varphi(P))$ ortonormált bázis szerint bontjuk fel, ahol $\mathbf{e}_r(P)$ az OP sugárral párhuzamos, az origóból kifelé mutató egységvektor, $\mathbf{e}_\varphi(P)$ erre merőleges, az óramutató járásával ellentétes irányba mutató egységvektor:

$$\mathbf{e}_r(P)\cdot\mathbf{e}_r(P) = \mathbf{e}_\varphi(P)\cdot\mathbf{e}_\varphi(P) = 1, \qquad \mathbf{e}_r(P)\cdot\mathbf{e}_\varphi(P) = 0. \tag{A.4.2}$$

Ennek megfelelően a síkbeli polárkoordinátarendszer koordinátavonalai az origóból kifelé mutató félegyenesek (φ =áll.) és origó középpontú koncentrikus körök (r =áll.).

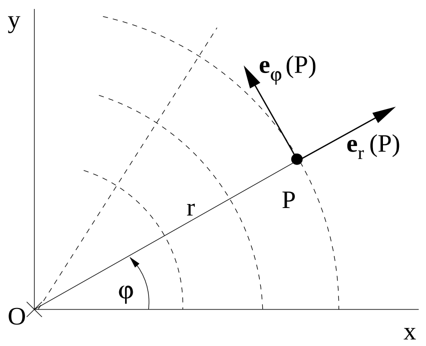

Figure 66: A síkbeli polárkoordinátarendszer koordinátavonalai és lokális bázisvektorai.

Az elemi elmozdulás felbontása,

$$d\mathbf{r} = dr\ \mathbf{e}_r + r\ d\varphi\ \mathbf{e}_\varphi, \tag{A.4.3}$$

elemi geometriai megfontolás alapján adódik, hiszen első rendben kicsiny tagokkal bezárólag az RP_{t+dt} ill. a $P_tR = P_tQ \cup QR$ szakaszok előjeles „hossza" (ld. 67. ábra) rendre:

$$RP_{t+dt} = d\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_r = \left(r + dr - \frac{r}{\cos d\varphi}\right)\cos d\varphi = dr + \mathcal{O}((d\varphi)^2),$$
$$RP_t = d\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_\varphi = r\ \mathrm{tg}\ d\varphi + \left(r + dr - \frac{r}{\cos d\varphi}\right)\sin d\varphi = r\ d\varphi + \mathcal{O}(dr\ d\varphi). \tag{A.4.4}$$

Felhasználtuk, hogy

$$OP_t = r, \quad OQ = \frac{r}{\cos d\varphi}, \quad QP_t = r \text{ tg } d\varphi,$$
$$OP_{t+dt} = r + dr, \quad QP_{t+dt} = r + dr - \frac{r}{\cos d\varphi}. \tag{A.4.5}$$

Vigyázat! Az infinitezimális elmozdulás vektorának hossza nem egyezik meg a radiális koordináta dr növekményével: $|d\mathbf{r}| \neq dr$.

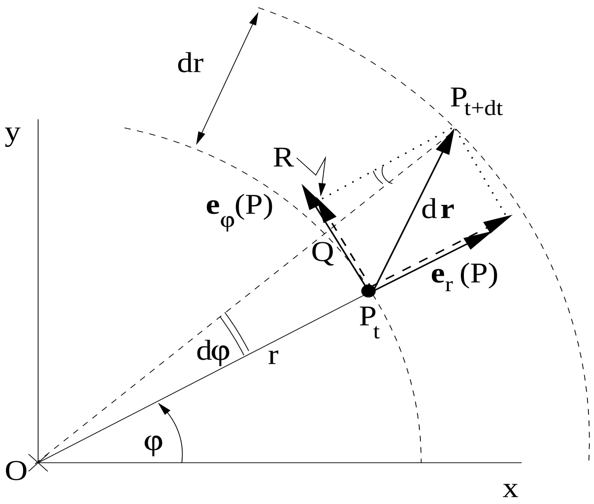

Figure 67: A részecske $P_t(r,\varphi)$ pontból $P_{t+dt}(r+dr,\varphi+d\varphi)$ pontba történő infinitezimális elmozdulásához tartozó $d\mathbf{r}$ elmozdulásvektor felbontása a P_t pontban értelmezett lokális bázisvektorok szerint.

Ennek megfelelően az anyagi pont sebessége

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi \tag{A.4.6}$$

alakban bontható fel, úgyhogy a radiális és a poláris komponensei rendre:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega, \tag{A.4.7}$$

ahol bevezettük az

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{A.4.8}$$

szögsebességet.

A gyorsulást a sebességvektor idő szerinti első deriváltjaként kapjuk. Ha felhasználjuk a 68. ábrán feltüntetett háromszögek hasonlóságát és hogy a P_tS szakasz és körív hossza első rendben megegyezik, akkor a részecske pillanatnyi helyzetéhez tartozó bázisvektorok idő szerinti első deriváltjai:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{\mathbf{e}_r(P_{t+dt}) - \mathbf{e}_r(P_t)}{dt} = \frac{|\mathbf{e}_r| d\varphi \mathbf{e}_\varphi}{dt} = \omega \mathbf{e}_\varphi,$$
$$\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \frac{\mathbf{e}_\varphi(P_{t+dt}) - \mathbf{e}_\varphi(P_t)}{dt} = \frac{-|\mathbf{e}_\varphi| d\varphi \mathbf{e}_r}{dt} = -\omega \mathbf{e}_r. \tag{A.4.9}$$

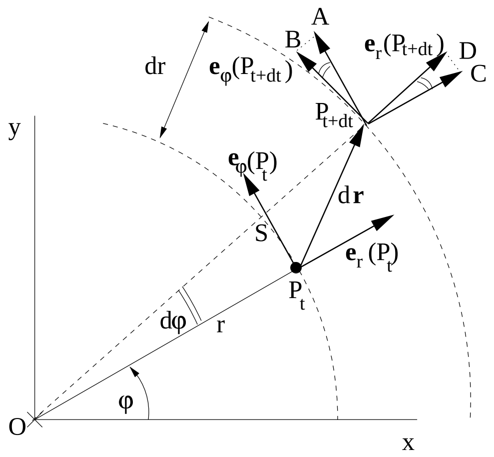

Figure 68: A részecske $P_t(r, \varphi)$ pontból $P_{t+dt}(r+dr, \varphi+d\varphi)$ pontba történő infinitezimális elmozdulása esetén a polárkoordinátarendszert definiáló, ezen pontokhoz tartozó lokális bázisvektorok összehasonlítása. Az OP_tS, a $P_{t+dt}AB$ és a $P_{t+dt}CD$ egyenlő szárú háromszögek hasonlóak.

Ezek segítségével a gyorsulásra az alábbi kifejezés adódik:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_r}{dt}\mathbf{e}_r + v_r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dv_\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi + v_\varphi\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} \\
&= \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{e}_r + v_r\omega\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt}\right)\mathbf{e}_\varphi - r\omega^2\mathbf{e}_r \\
&= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt}\right)\mathbf{e}_\varphi, \qquad \text{(A.4.10)}
\end{aligned}$$

úgyhogy a gyorsulás radiális és poláris komponense, rendre:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2, \qquad a_\varphi = r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt}. \qquad \text{(A.4.11)}$$

A.5 Hengerkoordináták

A síkban értelmezett polárkoordinátarendszer egyik lehetséges térbeli általánosítása a henger-koordinátarendszer. Használata különösen akkor előnyös, ha a mozgás, amelyet le akarunk írni, tengelyszimmetriával rendelkezik. A hengerkoordinátarendszerhez úgy jutunk, hogy választunk egy origót és egy azon keresztül menő e egyenest (rendszerint a szimmetriatengelyt). Vegyük ezután az O origón átmenő, e tengelyre merőleges S síkot. A tér egy tetszőleges P pontjához az alábbi koordinátákat rendeljük hozzá (ld. 69. ábra):

1. Vetítsük a P pontot merőlegesen az S síkra, és vegyük a kapott P_v pont S síkban ételmezett polárkoordinátáit: r és φ.
2. A P_vP szakasz előjeles hosszát nevezzük a P pont z koordinátájának.

Ha a Descartes-koordinátarendszer és a henger-koordinátarendszer origója egybe esik, és z-tengelyeik is egybe esnek, továbbá a φ polárszöget az pozitív x-tengelyhez képest az óramutató járásával ellentétes irányban mérjük, akkor a Descartes-koordináták és a hengerkoordináták közötti kapcsolat:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z. \tag{A.5.1}$$

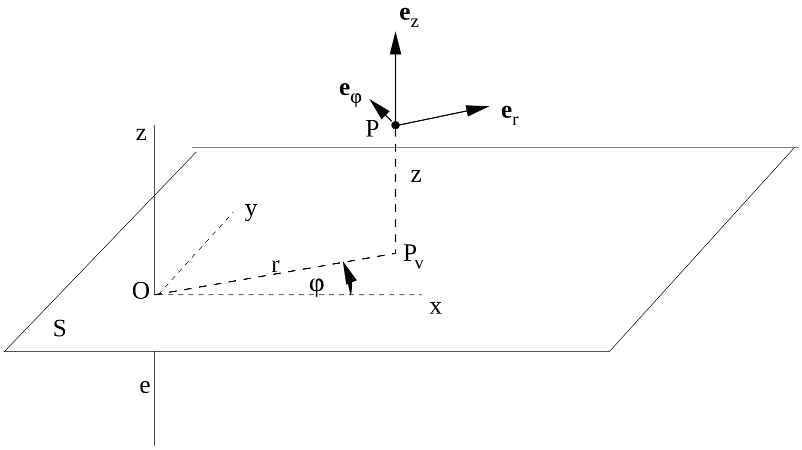

Figure 69: A hengerkoordináták értelmezése és a megfelelő lokális bázisvektorok.

A henger-koordinátarendszert alkotó koordinátavonalak

1. a z-tengely pontjaiból kifutó, a z tengelyre merőleges félegyenesek: r-vonalak ($\varphi =$áll., $z =$áll.);
2. a z-tengelyre merőleges síkokban elhelyezkedő körök, amelyeknek középpontja a z-tengelyen van: φ-vonalak (r=áll., $z =$áll.);
3. a z-tengellyel párhuzamos egyenesek: z-vonalak ($r =$áll., $\varphi =$áll.).

Ezen koordinátavonalak érintő egységvektorai a tér tetszőleges pontjában ortogonális bázist alkotnak. Szokásos választásuk, hogy $\mathbf{e}_r$ mutasson a z-tengelytől kifelé, és az $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ sorrendben alkossanak jobbsodrású vektorrendszert.

Az elemi elmozdulás felbontása ebben a bázisban:

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\varphi\mathbf{e}_\varphi + dz\mathbf{e}_z, \tag{A.5.2}$$

ahonnan az anyagi pont sebességének felbontása:

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\omega\mathbf{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z, \tag{A.5.3}$$

úgyhogy

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\varphi = r\omega, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{A.5.4}$$

A gyorsulás felbontása (felhasználva a gyorsulás S síkkal párhuzamos komponensének polárkoordináták szerinti felbontását):

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{e}_z. \tag{A.5.5}$$

A.6 Gömbi polárkoordináták

A gömbi polárkoordináták használata akkor előnyös, ha a mozgás gömbszimmetrikus. A térben a gömbi polárkoordinátákat a következőképpen értelmezzük. Válasszuk meg először a koordinátarendszer O origóját. Tekintsük a tér egy tetszőleges P pontját. Ehhez az alábbi koordinátákat rendeljük hozzá (ld. 70. ábra):

1. A P pont origótól mért $r = OP$ távolsága az úgynevezett radiális koordináta, $r \in [0, \infty)$.
2. Legyen az O origójú Descartes-koordinátarendszer x-tengelye és az OP szakasz (x, y) síkra vett OP_v vetületének szöge, az x-tengelyhez képest az óramutató járásával ellentétes irányban mérve, a φ polárszög, $\varphi \in [0, 2\pi]$.
3. Az OP szakasznak a pozitív z-tengellyel alkotott szöge a θ azimutszög, $\theta \in [0, \pi]$.

A Descartes-koordináták és a gömbi polárkoordináták közti kapcsolat:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta. \tag{A.6.1}$$

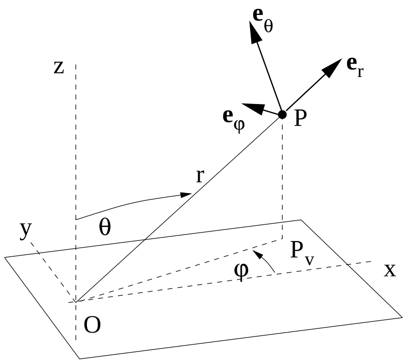

Figure 70: A gömbi polárkoordináták értelmezése és a megfelelő lokális bázisvektorok.

A koordinátavonalak

1. az origóból kifutó félegyenesek (r-vonalak),
2. a z-tengelyre merőleges síkokban elhelyezkedő, z-tengelyen fekvő origóval rendelkező, $r \sin\theta$ sugarú körök (φ-vonalak, vagy szélességi körök),
3. a z-tengellyel határolt félsíkokon elhelyezkedő, O középpontú félkörök (θ-vonalak vagy hosszúsági körök).

A tér tetszőleges pontjában ezen koordinátavonalak érintő egységvektorai ortonormált bázist alkotnak. Legyen ennek a bázisnak $\mathbf{e}_r$ a sugárirányban kifelé mutató egységvektora., Legyenek továbbá a φ- és θ-vonalak érintői, $\mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_\theta$ úgy irányítva, $\mathbf{e}_\varphi$ a φ polárszög óramutató járásával ellentétes értelmű megváltozásának irányába mutasson, és $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta$ alkossanak ebben a sorrendben jobbsodrású vektorrendszert.

Az elemi elmozdulás és a sebesség felbontása a gömbi polárkoordináta-bázisban:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= dr\mathbf{e}_r + r\sin\theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi + rd\theta\mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{v} &= v_r\mathbf{e}_r + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi + v_\theta\mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \tag{A.6.2}$$

ahol a sebesség összetevői:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\varphi = r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}, \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}. \tag{A.6.3}$$

A sebesség idő szerinti első deriváltját képezve most is meghatározhatjuk a gyorsulás komponenseit.

B A közeget jellemző térmennyiségek értelmezése

Alább azt részletezzük, hogy hogyan kell a kicsiny, makroszkopikus térfogatra vonatkozó, átlagos F mennyiségekhez tartozó f térmennyiségeket értelmezni. Olyan értelmezési utasításra van szükség, hogy a kapott térmennyiség független legyen az eljárás során változtatott ΔV térfogattól. Az f térmennyiség értelmezésének alapjául szolgáló átlagos F fizikai mennyiség, mint az a 1.3.2 fejezetben elmondott értelmezéséből következik, függ a ΔV térfogatdarabka nagyságától. Kis térfogatról lévén szó, a függés a Taylor-sor első néhány tagjának megtartásával már jól közelíthető,

$$F = F_0 + F_1\Delta V + \mathcal{O}((\Delta V)^2) \tag{B.1}$$

mindaddig, amíg ΔV makroszkopikus. A tapasztalat szerint kétféle fizikai mennyiség használata fontos a fizikában: 1. az **intenzív mennyiségeké**, amikor a nulladrendű tag a Taylor-sorban nem zérus, $F_0 \neq 0$, ill. 2. az **extenzív mennyiségeké**, amikor a nulladrendű tag eltűnik és a vezető rendű járulékot az elsőrendű tag adja.

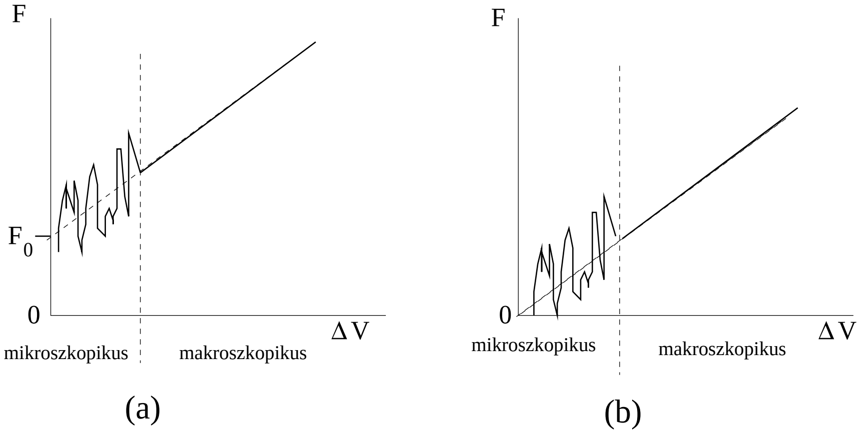

Figure 71: Az intenzív ((a) ábra) és extenzív ((b) ábra) térmennyiségeket eredményező fizikai mennyiségek kvalitatív függése a kis, makroszkopikus ΔV átlagolási térfogattól.

1. *Intenzív mennyiségek.* Olyan térmennyiségek mint pl. a $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ sebességmező, vagy az $\mathbf{a}(\mathbf{r},t)$ gyorsulásmező, csak akkor értelmezhetők egyértelműen, ha az alábbi viselkedés tapasztalható: Pl. a ΔV térfogatban a részecskék átlagos $\mathbf{V}$ sebessége konvergál egy meghatározott értékhez, amikor a tér tetszőleges P pontját tartalmazó ΔV térfogatot valamilyen nagy értékről fokozatosan csökkentjük és közben kezdjük „ráhúzni" a P pontra. Olyan lineáris függést kell tapasztaljunk, amelyet $\Delta V \to 0$-ig extrapolálva, az F_0 értéket olvashatjuk le az $F = F(\Delta V)$ diagramon.

A lineáris viselkedést valóban extrapolálni kell a nulláig, mert a lineáris függés csak addig jelentkezik, amíg el nem érjük az atomok közötti távolságokkal összemérhető méreteket, azaz ΔV mikroszkopikussá nem válik. Ekkor az átlagsebesség hevesen kezd ingadozni, ahogy ΔV-t tovább csökkentjük. A leírt viselkedés pontosan akkor következik be, ha a $\mathbf{V}$ átlagsebesség Taylor-sorában (az F_0-nak megfelelő) nulladrendű tag nem zérus. Ha az értelmezni kívánt f térmennyiség alapjául szolgáló F átlagos fizikai mennyiség a fentihez hasonló viselkedést mutat, akkor azt **intenzív mennyiségnek nevezzük.** Ilyenkor a f térmennyiség értéke adott pontban a megfelelő F átlagos mennyiségnek azzal az értékével azonos definíció szerint, amit a ΔV térfogat értékének egy meghatározott intervallumában megfigyelt lineáris viselkedés zérus térfogatig történő extrapolációjával határozunk meg, azaz $f = F_0$. Ha adott mechanikai rendszer és adott F fizikai mennyiség tekintetében létezik olyan térfogatintervallum, amelyben F értéke lineárisan változik marad mielőtt elérnénk a mikroszkopikus térfogatokat, akkor azt mondjuk, hogy az adott rendszerben a makroszkopikus és a mikroszkopikus méretskálák jól elkülönülnek. Ilyenkor tudjuk értelmezni a leírt módon a megfelelő f térmennyiséget. Előfordulhat, hogy a kívánt tulajdonságú térfogatintervallum nem létezik adott mechanikai rendszer és adott F fizikai mennyiség tekintetében. Akkor nem tudunk egy F-nek megfelelő f térmennyiséget értelmezni. Ilyenkor nem válnak szét a makroszkopikus és a mikroszkopikus méretskálák.

2. *Extenzív mennyiségek.* Vannak olyan f térmennyiségek, amelyek értelmezésének alapjául szolgáló F átlagos mennyiség Taylor-sorában a tiszta tag zérus $F_0 = 0$. Ilyen pl. a ΔV térfogatban a részecskék átlagos ΔN száma. Ekkor azt a viselkedést tapasztaljuk a ΔV térfogatot tetszőleges pontra ráhúzva, hogy F azaz példánkban az átlagos ΔN részecskeszám a ΔV térfogattal arányosan változik a ΔV térfogatnak egy meghatározott ablakában, még mielőtt elérnénk a mikroszkopikus térfogatokat, és ezt a lineáris viselkedést a nulla térfogatig extrapolálva, azt találjuk, hogy az egyenes az $F = F(\Delta V)$ diagram origóján megy át. Ha létezik ΔV értékében ilyen ablak, akkor abban képezhetjük az $\frac{F}{\Delta V} = F_1$ hányadost, ami ebben az ablakban állandó értéket vesz fel. Ezt az F mennyiség sűrűségének nevezzük és az F menynyiséghez tartozó térmennyiséget $f = F_1$ egyenlőséggel értelmezhetjük. Példánkban $\frac{\Delta N}{\Delta V} = n$ a részecskesűrűség, ha a bal oldalon álló hányadost abban a térfogatablakban képezzük, amikor a fenti hányados állandó. A ΔN részecskeszám extenzív mennyiség, de a sűrűsége már intenzív mennyiség. Ilyenkor térmennyiségnek természetesen csak a n részecskeszámsűrűséget használhatjuk. Szimbolikusan lehet írni, hogy
$$n(P) = \lim_{\Delta V \to P} \frac{\Delta N}{\Delta V}, \tag{B.2}$$
ahol a határértékképzést azonban a fent leírt eljárással kell elvégezni. A jelölés arra akar csupán emlékeztetni, hogy a térfogatot a P pontra kell ráhúzni.

References

[1] Budó Á., *Mechanika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.)

[2] Bába Á., *Mechanika I., II.* (KLTE, Debrecen, 1985.)

[3] L.D. Landau, E.M. Lifsic, *Elméleti fizika I., Mechanika.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.)

[4] Dede M., Demény A., *Kísérleti fizika I.-II.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.)

[5] Tél T., Gruiz M., *Kaotikus dinamika*, (Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.)