Káosz differenciálegyenlettel leírható rendszerekben[1]

Kun Ferenc
Debreceni Egyetem
Elméleti Fizikai Tanszék
2000

A jelen gyakorlatok célja, hogy egyszerű fizikai – mechanikai, hidrodinamikai és elektromos – rendszereket tárgyalva szemléletes képet alakítsunk ki a káosz természetéről és megjelenésének tipikus lehetőségeiről. Az egymást követő gyakorlatok egymásra épülnek, így ajánlott a megadott sorrend követése. Azokat az ismereteket, amelyek a gyakorlatok során kitűzött feladatok megoldásához szükségesek az egyes laborgyakorlatok elején röviden összefoglaljuk, illetve az érdeklődők számára az anyag végén bőséges irodalmat adtunk meg. Az egyes gyakorlatok anyaga a következő témákat öleli fel:

- Mozgásegyenletek, lineáris stabilitás vizsgálat, egyszerű attraktorok, vasvilla–bifurkáció.
- Határciklus, Hopf–bifurkáció, Poincaré–leképezés.
- Lorenz–modell 1., a reguláris mozgás és a káoszhoz vezető út elemzése.
- Lorenz–modell 2., a kaotikus tartomány vizsgálata.
- A különös attraktor természetrajza, a káosz megvalósulásának Feigenbaum–féle útja, káosz elektronikus áramkörökben, a különös attraktor struktúrája.

A munka megkönnyítésére, az egyes fizikai rendszereket leíró differenciálegyenletek numerikus megoldására és az eredmények megjelenítésére, minden gyakorlat során ugyanazt a számítógépes programot használjuk.

[1]http://dtp.atomki.hu/~feri/proba/chaos.html

1 Közönséges differenciálegyenlet-rendszerek numerikus megoldása *Segédlet az* **ODE** *program használatához*

Az **ODE** program segítségével a differenciálegyenletekkel leírható rendszerekben tanulmányozhatjuk káosz kialakulását. A program elsőrendű, közönséges differenciálegyenlet-rendszereket old meg numerikusan és a megoldásvektor többféle grafikus reprezentációját teszi lehetővé. A tanulmányozható egyenletrendszer általános alakja a következő:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

ahol t jelöli az időt (független változó), az $x_1, \ldots, x_n$ pedig a fizikai rendszer fázistérbeli koordinátáit. Az egyenletrendszer megoldásához meg kell adni az $x_i(o)$ kezdőfeltételeket.

Az **ODE** programban a változók maximális megengedett száma 9. A program csak *autonóm*, azaz időfüggetlen egyenletrendszert tud kezelni, ezért a jobb oldalon álló f_i függvényből időfüggő esetben az időt egy új változó bevezetésével ki kell transzformálni. A numerikus megoldás ötödrendű Runge-Kutta módszerrel történik.

1.1 A program használata

Az **ODE** programnak két üzemmódja van: az egyenletrendszer numerikus integrálása és a megoldás grafikus megjelenítése. Ennek megfelelően két '*képernyőt*' használ, egy úgynevezett kontrolképernyőt és egy grafikusat. A program indításakor a kontrolképernyőre kerülünk (lásd az 1. ábrát).

A kontrolképernyő két fő részre van osztva, melyek különböző színnel vannak jelölve. A képernyő felső részében lehet megadni a megoldandó egyenletrendszert, a kezdőfeltételeket, a numerikus integrálás és az adattárolás paramétereit. A képernyő alsó részén a megoldás grafikus megjelenítésének módja állítható be. Az **F1** billentyűvel bármikor on-line help kapható. Az **F10** billentyű segítségével kiléphetünk a **DOS** operációs rendszerbe úgy, hogy közben az **ODE** rezidens marad. A visszatérés az **ODE** programba az **exit** paranccsal történik.

A kontrolképernyő felső részén található *főmenü* ismertetése:

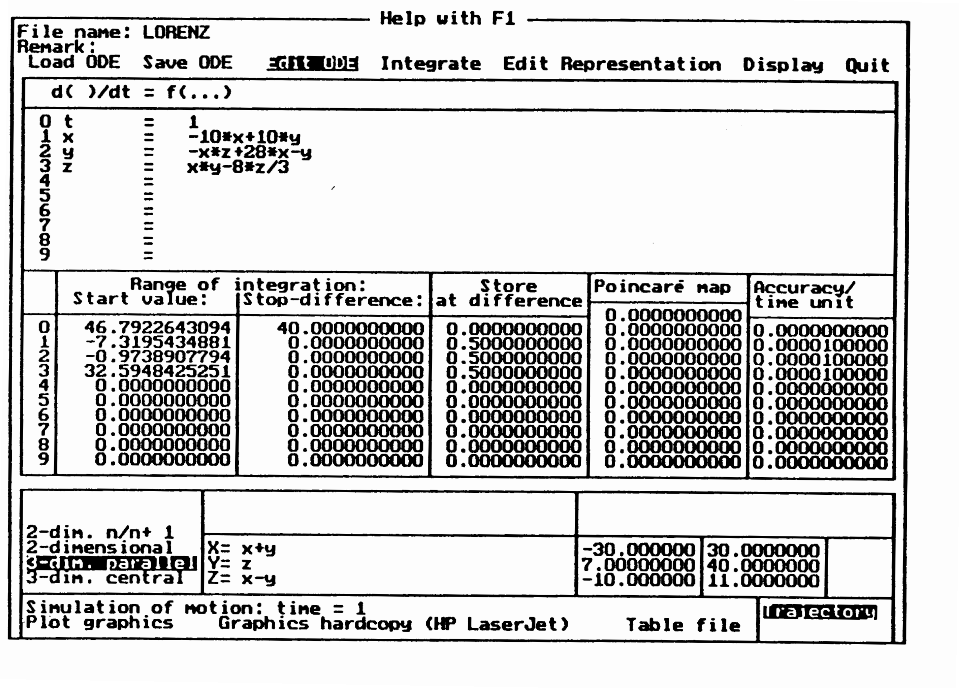

Figure 1: Az **ODE** program kontrolképernyője. A felső rész szolgál a differenciálegyenlet-rendszer megadására, az alsó pedig a grafikus megjelenítés paramétereit tartalmazza.

- **File name:** a betöldendő file neve. A file neve *.ode kell legyen. Ez a file tartalmazhatja a program egy teljes konfigurációját, azaz az egyenletrendszert, a kezdeti feltételeket és az összes paraméter értékét és a korábbi számolások eredményeit.

- **Remark:** ide bármilyen megjegyzés írható. Ez magára a programfutásra hatástalan. Alkalmazása például akkor hasznos, ha a megoldandó egyenletrendszer és a szükséges paraméterek beállítása megtörtént és a konfigurációt kimentjük egy file-ba. Ilyenkor a **Remark** ennek a file-nak a tartalmát magyarázhatja.

- **Load ODE:** az előző pontokban említett *.ode file betöltése.

- **Save ODE:** kimenthetjük a pillanatnyi konfigurációt *név.ode* néven. Lásd a **File name, Remark, és a Load ODE** pontokat.

- **Edit ODE:** aktiválja a képernyő középső részét, ahol a megoldandó egyenletrendszer, a kezdőfeltételek és az integrálás paraméterei adhatók meg. A részletes leírás az 1.2 pontban található.

- **Edit Representation:** a grafikus megjelenítés módjának beállítása.
- **Display:** a megoldás grafikus megjelenítése. A kontrolképernyőről átkapcsol a grafikus képernyőre és az **Edit Representation** pontban meghatározott módon ábrázolja a megoldást.

1.2 Az Edit ODE menüpont részletes ismertetése

Az **Edit ODE** menüpont a képernyő középső részét aktiválja. A kilépés az **ESC** billentyűvel történik. A differenciálegyenlet-rendszert a (1) egyenletnek megfelelően kell megadni két oszlopban: $d(\ldots)/dt = f(\ldots)$. Tekintsük példaként a csillapított harmonikus oszcillátor mozgását leíró egyenletrendszert egységnyi körfrekvenciával és súrlódási együtthatóval:

$$\frac{dv}{dt} = -x - v, \qquad \frac{dx}{dt} = v, \tag{2}$$

ahol x jelöli a részecske koordinátáját, v pedig a sebességét. Ezt az egyenletrendszert a következő módon kell a programban megadni: A sorokat ki-

	$d()/dt$	$=$	$f()$
0	t	$=$	1
1	v	$=$	$-x-v$
2	x	$=$	v

hagyás nélkül kell írni. A nulladik sor előre definiált, módosítani nem lehet.
A kezdőfeltételek és az integrálás paramétereinek beállítása:

- **Range of integration:**
  - *Start value:* a változók kezdőértékének megadása olyan sorrendben, ahogyan azok a $d()/dt$ oszlopban szerepelnek.
  - *Stop-difference:* ha az adott változó aktuális és kezdeti értéke különbségének abszolút értéke átlépi az itt megadott számot, az integrálás automatikusan leáll. Ha az oszlopban szereplő minden érték nulla, az integrálást egy billentyű megnyomásával kell leállítani.
- **Store at difference:** az integrálás során az egyes változók értéke Δx_{store} lépésenként kerül eltárolásra. Δx_{store} kis értéke esetén a sok tárolásra kerülő adat lelassíthatja a programfutást.

- **Poincaré map:** a tárolandó adatmennyiség csökkenthető, ha nem a teljes fázistérbeli trajektóriát tároljuk, hanem csak a trajektóriának egy fázistérbeli hipersíkkal való metszéspontjait, az úgynevezett *Poincaré map*-et. A programban ez a sík a Hesse formában adható meg:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = a, \tag{3}$$

  ahol $\mathbf{x}$ a megoldás vektor, $\mathbf{n}$ a sík normálvektora a pedig egy konstans. A *Poincaré map* oszlopban az első elem az a konstans értéke és ezt követik az $\mathbf{n}$ vektor komponensei. Ha *Poincaré map*-et készítünk a **Store at difference** menüpont alatt minden érték nulla kell legyen, míg az $\mathbf{n}$-nek különböznie kell nullától.

- **Accuracy/time unit:** a numerikus integrálás pontossága. A t változóra vonatkozó első sor nem változtatható. Ha valamelyik sorban nulla szerepel, a program az illető változót nem ellenőrzi a futás során. Az oszlopban legalább egy érték nullától különböző kell legyen.

A egyenletrendszer numerikus megoldása:

- **Integrate:** az egyenletrendszer numerikus integrálása. Az integrálásra a következő lehetőségek vannak:
  - *Restart integration with start values:* az integrálás újraindul a kezdeti értékekkel.
  - *Restart integration with current values:* az integrálás az éppen aktuális értékekkel folytatódik, de a megoldásvektor előző értékei felülíródnak.
  - *Continue previous integration:* Az integrálás folytatódik és az előző értékek is megőrződnek.
  - *Start new integration, hold old values:* az integrálás újra indul esetleg újonnan beállított kezdőértékekkel és paraméterekkel. A régebbi számolások eredményei megőrződnek. Ez akkor hasznos, ha össze akarjuk hasonlítani különböző számolások eredményeit.

  Az integrálás bármely billentyű megnyomása esetén leáll.

Grafikus megjelenítési lehetőségek:

- **Edit Representation:** aktiválja a képernyő alsó részét, ahol a grafikus beállítás történik. A kilépés az **ESC** billentyűvel lehetséges. A következőkben a $\langle\rangle$ zárójellel jelölt menüpontok ha aktívak a programfutás során, akkor a képernyőn speciális háttérszínnel kiemelve jelennek meg.

- $\langle$*Representation mode*$\rangle$: A megoldásvektor grafikus ábrázolásának módja választható ki. A megoldásvektor, például $x, y, \ldots$ változók $x(n), y(n), \ldots$ alakban vannak tárolva, ahol az n index az n-edik tárolt értekre utal. A grafikusan ábrázolt X, Y és Z változók a tárolt $x, y, \ldots$ változók függvényei. Ez a függvénykapcsolat a *Representation of the solution* menüpontban kerül definiálásra (lásd később).
  - *2-dim. n/(n+k):* kétdimenziós map készítése. X tengely: $X(x(n))$; Y tengely: $X(x(n+k))$. k értéke a $[1, 32]$ intervallumon változtatható. Előre beállított értéke $k = 1$.
  - *2-dimensional:* a megoldásvektor kétdimenziós vetülete. A tengelyek beállítását lásd a *Representation of the solution* menüpont alatt.
  - *3-dim. parallel, 3-dim. central:* háromdimenziós vetülete a megoldásvektornak. Háromdimenziós ábrázolás esetén a mélységérzet segítésére a fázistérbeli trajektória a Z koordináta értékével arányos színkódot kap: a görbe szine fehérből (előtér) a sárgán és piroson keresztül sötétszürkére (háttér) változik.
- *Representation of solution:* az X, Y, Z tengelyek definíciója. Például az $x(t)$ függvény ábrázolásához az $X = t$ és $Y = x$ beállítás szükséges és a *Representation mode* menüben a *2-dimensional* pontot kell választani. A tengelyek definiálásakor a megoldásvektor komponenseinek bonyolult formuláit is megadhatjuk. Ezt kihasználva nagyon sok információ kinyerhető a megoldásokból. Például ábrázolhatjuk a kölcsönhatási potenciált, mint az általános koordináta függvényét, végezhetünk forgatást, *stb.*
- *Range of representation:* a *Representation of solution* menüpontban beállított változók ábrázolandó intervallumát határozza meg. Először célszerű az automatikus beállítást használni. Ahhoz, hogy a program figyelembe vegye a kézzel megadott határokat, ki kell kapcsolnunk az automatikus módot. Az ábrázolás intervallumanak kézi beállítását felhasználhatjuk például *zoom*-olásra.
- $\langle$*Simulation of the motion*$\rangle$: Amikor ez a mód aktív egy gömb jelenik meg a képernyőn, amely az ábrázolt trajektória mentén mozog. A mozgásnak a sebességét a *'time='* pont alatt megadott függvény segítségével lehet kontrolálni. Lehetséges beállítások például: $t,\ 0.1 \cdot t,\ \ln t$.
- $\langle$ *Trajectory*$\rangle$: aktív módban az ábrázolt pontokat a program össze-

köti.

– ⟨*Plot graphics*⟩ : aktív módban az ábrázolás nem a képernyőn történik, hanem az output a plotterre megy.

– ⟨*Graphics hardcopy*⟩ : aktív módban az ábrázolás nem a képernyőn történik, hanem az ábra a printerre megy. Így lehet közvetlenül a programból printelni.

– ⟨*Table file*⟩ : aktív módban nem készül ábra, hanem a megoldásvektor file-ba mentődik. A file név név.tab alakban adható meg.

2 Laboratóriumi gyakorlat 1. *Egyszerű attraktorok*

2.1 Mozgásegyenletekről általában

Ezen a gyakorlaton egyszerű mechanikai rendszereket vizsgálunk, melyek alkalmasak arra, hogy a káosz kialakulásával kapcsolatos legfontosabb fogalmakat és jelenségeket, illetve a kaotikus mozgás jellemzésére alkalmas mennyiségeket rajtuk tanulmányozzuk és jól megértsük. Olyan rendszereket vizsgálunk, amelyek néhány szabadsági fokkal jellemezhetők, és időbeli fejlődésüket egyszerű differenciálegyeletek írják le.

Egy véges sok szabadsági fokú mechanikai rendszert közönséges differenciálegyenlettel, vagy differenciálegyenlet-rendszerrel írhatunk le. Az egyenletekben általában magasabb időderiváltak is előfordulnak (például a mechanikában tipikus a második derivált), de a sebességeknek (vagy szükség esetén a magasabb deriváltaknak) új változóként történő bevezetésével a mozgásegyenlet az

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

alakra hozható. Ebben $(x_1, \ldots, x_n)$ n-dimenziós vektor afázistérbeli poziciót határozza meg, f_i pedig n számú adott, simának feltételezett függvény. Ha a (4) egyenlet jobboldalán explicite fellépne az idő, úgy azt az $x_{n+1} = \alpha \cdot t$ új változó bevezetésével az

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, \frac{x_{n+1}}{\alpha}), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = \alpha = f_{n+1} \tag{6}$$

alakra hozható, vagyis autonommá tehető (α egy tetszőleges időskála paraméter.

Az (5) egyenletrendszer egy több szabadsági fokú rendszer mozgását egyetlen pontnak egy n-dimenziós térben, az úgynevezett fázistérben történő mozgására vezeti vissza. Bevezetve a $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ jelölést (5) a fázistér minden pontjához egy

$$\vec{v} = \vec{f}(\vec{x}) \tag{7}$$

sebességvektort rendel, vagyis a fázistérben egy áramlási teret definiál.

A mechanikai rendszerek között kitüntetett fontos szerepet játszanak a konzervatív rendszerek, amelyek energiája mozgás során állandó marad.

Ilyenkor a mozgásegyenletek egy időtől független Hamilton-függvényből származtathatóak:

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad & i &= 1,\ldots,N \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad & i &= 1,\ldots,N \end{aligned} \tag{8}$$

ahol $q_i = x_i$ és $p_i = x_{N+i}$ $(i = 1,\ldots,N)$ a kanonikusan konjugált változópárokat, $H(q_i,p_i)$ pedig a $n = 2N$ változós Hamilton-függvényt jelöli. Konzervatív rendszerek esetén a $\vec{v}(\vec{x})$ sebességmező divergenciamentes:

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0, \tag{9}$$

a fázistérbeli áramlás tehát egy összenyomhatatlan folyadék mozgásával analóg. Ennek az a következménye, hogy a fázistér valamely kiszemelt, és az áramlással együtt mozgó tartományának a térfogata időben állandó marad. Ez *Liouville tétele*.

Nem konzervatív, úgynevezett disszipatív rendszerek mozgásegyenletének $\vec{v}(\vec{x})$ áramlási tere nem forrásmentes, hanem

$$\mathrm{div}\vec{v} < 0. \tag{10}$$

Ilyenkor a *Liouville tétel* nem érvényes, hanem a fázistérbeli térfogatelemek nagysága mozgás közben csökken.

Vannak olyan rendszerek, amelyek mozgásegyenlete egy, az időtől explicite is függő $H(q_i,p_i,t)$ $2N+1$ változós függvényből származtathatóak a (8) kanonikus egyenletek segítségével. Ezek az úgynevezett *Hamilton-féle* rendszerek, amelyekben az $E = H(q_i,p_i,t)$ energia ugyan nem mozgásállandó, de érvényes a *Liouville tétel*.

2.2 Stabilitás vizsgálat *Differenciálegyenletek megoldása a szinguláris pontok közelében*

Az n változós elsőrendű autonom

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \tag{11}$$

differenciálegyenlet $\vec{x}_o$ pontját szingulárisnak nevezzük, ha $\vec{f}(\vec{x}_o) = 0$. A szinguláris pont – amelyet az $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{x}_o$ transzformációval az origóba tolhatunk

– kis környezetében $\vec{f}(\vec{x})$ általában egy lineáris függvénnyel közelíthető:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(0) + \left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right|_{\vec{x}=0} \vec{x} + \ldots \sim D\vec{x} \tag{12}$$

ahol a D derivált tenzor elemei:

$$D_{ik} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|_{\vec{x}=0}. \tag{13}$$

Ebben a közelítésben a mozgásegyenlet

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = D\vec{x}(t), \tag{14}$$

amely hasonlósági transzformációval diagonális alakúra hozható. A transzformáció után az eredetileg csatolt egyenletrendszer független egyenletekre esik szét:

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i(t) \quad i = 1, \ldots, n \tag{15}$$

ahol λ_i-k a D derivált mátrix (általában komplex) sajátértékeit jelölik, az y_i pedig az új változó. A (15) egyenletrendszer megoldása:

$$y_i(t) = y_i(0)e^{\lambda_i t}. \tag{16}$$

Látható tehát, hogy az eredeti (11) egyenlet szinguláris pont körüli megoldásának jellegét a D mátrix sajátértékei határozzák meg.

A λ_i sajátértékek alapján osztályozhatjuk a szinguláris pontokat:

- Amennyiben valamennyi λ_i sajátérték valós része negatív, úgy

$$\lim_{t\to\infty} \vec{y}(t) = 0. \tag{17}$$

  Ilyenkor az $\vec{x} = 0$ pontot vonzó fixpontnak nevezzük. Ugyanis a (17) egyenlet éppen azt jelenti, hogy az $\vec{x} = 0$ pontból kicsit kitérített rendszer elég hosszú idő után visszatér $\vec{x} = 0$-ba.

- Ha valamennyi λ_i-re a $Re\lambda_i > 0$, akkor az $\vec{x} = 0$ pont taszító fixpont. A fixpontból kicsit kitérített rendszer távolodni fog a fixponttól.

Vizsgáljuk részletesebben a kétkomponensű (síkbeli) $\vec{x}$ vektor esetét:

1. Mindkét sajátérték valós:

   (a) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, akkor az origót vonzó csomópontnak nevezzük. A megoldások:

   $$y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda_1 t} \tag{18}$$
   $$y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda_2 t} \tag{19}$$

   vagyis a pályagörbék egyenlete $y_2 = const \cdot y_1^a$, ahol $a = \lambda_2/\lambda_1$. Az origón végtelen sok megoldásgörbe halad át.

   (b) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, az origót taszító csomópontnak nevezzük. A mozgás az előző eset időtükrözöttje.

   (c) A sajátértékek valósak, de ellentétes előjelűek. Ez esetben a pályagörbék hiperbolák az origót pedig nyeregpontnak, vagy hiperbolikus pontnak nevezzük.

2. Amennyiben a (valós) D mátrixnak komplex gyökei vannak, úgy azok csak komplex konjugált párokban jelenhetnek meg: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$. Ekkor a megoldásokat az eredeti koordinátákkal

   $$x_1(t) = e^{-\gamma t} A_1 cos(\omega t - \phi_1), \tag{20}$$
   $$x_2(t) = e^{-\gamma t} A_2 cos(\omega t - \phi_2) \tag{21}$$

   alakban írhatjuk fel.

   (a) $\gamma < 0$ esetén a pályagörbe spirál, amelyen a mozgás a szinguláris pont felé történik. Ekkor a szinguláris pontot vonzó fókusznak nevezzük.

   (b) $\gamma > 0$ esetén a pályagörbe szintén spirál, amelyen a mozgás most kifelé történik. A szinguláris pont taszító fókusz.

   (c) $\gamma = 0$, a pályagörbe ilyenkor egy ellipszis, illetve kör. A szinguláris pontot centrumnak, vagy elliptikus pontnak nevezzük.

A fixpontok osztályozása után egy konkrét példát vizsgálunk meg.

2.3 A matematikai inga

stabil, instabil és elliptikus fixpontok, szeparátrix

Tekintsünk egy egyszerű egy szabadsági fokú rendszer, a csillapítás nélküli matematikai inga mozgását. Ebben az esetben a fázistér kétdimenziós. A részeccske tömege m a fonál hossza l, a gravitációs gyorsulás g. Az általános koordináta a fonálnak a függőlegessel bezárt szöge x. A rendszer mozgását leíró másodrendű differenciálegyenlet:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}\sin x, \tag{22}$$

amely a sebesség $v = dx/dt$ új változóként történő bevezetésével átírható az

$$\frac{dx}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{l}\sin x \tag{23}$$

alakra. A rendszer konzervatív, vagyis az energia

$$E = \frac{1}{2}ml^2v^2 + mgl(1 - \cos x) \tag{24}$$

mozgásállandó. Ez garantálja, hogy az inga mozgása szabályos marad mindig, nem mutat kaotikus viselkedést.

- **1. Feladat:** Az **ODE** program segítségével tanulmányozzuk az inga mozgását! Nulla kezdősebesség mellett nem nulla kezdeti kitéréssel indítsuk a rendszert. Az $\omega_o^2 = g/l$ paraméter értékét válasszuk egységnyinek az egyenletrendszer megadásakor. Az $x(t)$ függvény vizsgálatából becsüljük meg, hogy meddig érdemes integrálni, s ennek megfelelően módosíthatjuk a *Stop–difference* paraméter értékét! Mivel a mozgás periódikus, elegendő a $[-\pi, +\pi]$ intervallumon ábrázolni az x változót, vagyis a fázisteret gondolatban felcsavarjuk egy henger palástjára.

  1. Hogyan változik a mozgás trajektóriája ha nulla kezdősebesség mellett egyre növekvő kezdeti kitéréssel (növekvő $|x_o|$-al) indítjuk a mozgást ($x_o \in [-\pi, +\pi]$)? A trajektóriát ábrázoljuk az (x, v) fázistérben, illetve tanulságos az $x(t)$ és a $v(t)$ függvények ábrázolása is. Az egyes integrálások eredményét őrizzük meg (az *Integrate* menüből válasszuk a *Start new integration hold old values* pontot. **A feladat végén az eredményeket mentsük ki file-ba a gyakorlatvezetőnek történő bemutatáshoz.**
  2. Milyen kezdőfeltétel esetén megy át az inga mozgása lengésből forgásba? Topológiailag mi a különbség a két mozgásformához tartozó trajektóriák között?
  3. Határozzuk meg analitikusan a két mozgásformát fázistérben elválasztó görbe, az úgynevezett szeparátrix egyenletét (a $v(x)$ függvénykapcsolatot)!

4. Határozzuk meg a (25) egyenletrendszer szinguláris pontjait, és elemezzük stabilitásukat! (Mindössze a (25) egyenletrendszerhez tartozó D derivált mátrix sajátértékeit kell vizsgálnunk.) Vessük össze az analitikusan kapott eredményeket a numerikusan számolt trajektória alakokkal!

Eddig a csillapítatlan inga mozgásával foglalkoztunk. A következő feladat a csillapított inga vizsgálata, amikor az inga mozgását egy a sebességgel arányos erő fékezi. A mozgásegyenlet ekkor:

$$\frac{dx}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{l}\sin x - \alpha v, \tag{25}$$

ahol α jellemzi a fékezés erősségét.

- **2. Feladat:**

1. Az előzőekhez hasonlóan vizsgáljuk a fázistérbeli trajektóriákat különböző kezdőfeltételek esetén! Hogyan változtak meg a trajektóriák? Ábrázoljuk az (x, v) trajektóriát és az $x(t), v(t)$ függvényeket! Ezekhez a számolásokhoz válasszuk az $\alpha = 0.3$ paraméter értéket.
2. Határozzuk meg analitikus számolással a fixpontokat és elemezzük stabilitásukat a rendszert jellemző paraméterek (ω_o, α) függvényeként! Hogyan változott meg az origó $(x = 0, v = 0)$ viselkedése a csillapítatlan esethez képest?
3. Elemezzük a fixpontokat $\alpha > 2\omega_o$ és $\alpha < 2\omega_o$ esetben! Indítsunk mozgásokat különböző kezdőfeltételekkel mindkét paraméterválasztás mellet és vessük össze az egyes paraméter értékek mellett kapott $x(t)$ függvények és a trajektóriák alakját! **Az eredményeket mentsük file-ba!**

2.4 Az anharmónikus oszcillátor *bifurkációk*

A rendszer szinguláris pontjainak jellege a rendszert jellemző paraméterek lassú változására megváltozhatnak. Például a korábban stabil egyensúlyi helyzetek instabillá válhatnak, s új stabil egyensúlyi helyzetek jelenhetnek meg és viszont. Egyszerű példaként tekintsük a

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx + x^3 = 0 \tag{26}$$

másodrendű differenciálegyenlettel leírt mozgást. Ez a

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}x^4 \tag{27}$$

potenciálú erőtérben mozgó és a sebességével arányos fékező erőt érző tömegpont, a csillapított anharmónikus oszcillátor esete. Az $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ változókban a (26) mozgásegyenlet

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{28}$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha x_2 - x_1 \cdot (k + x_1^2). \tag{29}$$

egyenletrendszerré alakítható. A továbbiakban a k paramétert úgynevezett kontrollparaméternek tekintjük, amelynek értékét a rendszer környezete képes befolyásolni, és azt vizsgáljuk, hogy k különböző értékei mellet milyen mozgások alakulnak ki.

- **3. Feladat:** A rendszer mozgását rögzített $\alpha = 0.3$ mellett tanulmányozzuk k több különböző értéke esetén.

  1. Elemezzük analitikusan az (28, 29) egyenletrendszer fixpontjait, mint k függvényét! Mit lehet mondani a fixpontok stabilitásáról $k > 0$, illetve a $k < 0$ esetben?
  2. Egy rögzített $k > 0$ mellett indítsunk mozgásokat különböző kezd ofeltételekkel! A trajektóriákat ábrázoljuk az x_1, x_2 fázistérben, s a trajektóriák alakját vessük össze az előző pont analitikus eredményeivel!
  3. Egy rögzített $k < 0$ mellett indítsunk mozgásokat különböző kezdőfeltételekkel! Válasszunk origó közeli kezdőfeltételeket is! Tárjuk fel mindhárom fixpont környezetét! **Az eredményeket mentsük file-ba a gyakorlatvezetőnek történő bemutatáshoz!**
  4. Most válasszunk háromdimenziós grafikus megjelenítést! Az egyes tengelyek legyenek a következők: $X = k,\ Y = x_1,\ Z = x_2$. Mivel most k több értéke mellett kell számolásokat végezni, célszerű az (28, 29) egyenletrendszert kiegészíteni egy k-ra vonatkozó egyenlettel: $\dot{k} = 0$. Igy k különböző értékeit a kezdőfeltételek között adhatjuk meg az **ODE** programban. Végezzünk számolásokat $k > 0$ és $k < 0$ esetén számos kezdőfeltétellel úgy, hogy az előző pontban analitikusan megtalált mindegyik fixponthoz konvergáló trajektóriákat kapjunk! A k-val kiegészített háromdimenziós térben egy villa alakú objektum kell kirajzolódjon! **A végső ábrát mentsük ki file-ba a gyakorlatvezetőnek történő bemutatáshoz!**

5. Változtassuk '*adiabatikusan*' a k értékét! Ehhez k deriváltjának adjunk egy kis értéket $\dot{k} = 0.005$ (de lehet negatív is). Válasszuk úgy a k-ra vonatkozó kezdőfeltételt, hogy az integrálás során mind negatív, mind pozitív k-k előforduljanak! Végezzünk így néhány számolást! **Az eredményt mentsük file-ba!**

Összegezve, a feladat megoldása során azt láttuk, hogy $k > 0$ esetén a rendszernek egyetlen fixpontja van, az origó, amely stabil. Azonban k csökkentésekor a fixpont megváltozik. A $k < 0$ esetén az eredeti stabil fixpont elveszti stabilitását és instabillá válik, viszont helyette megjelenik két új stabil fixpont a fázistérben. Az új fixpontok pozíciója függ k konkrét értékétől. Ezt a jelenséget nevezzük **bifurkációnak** (pontosabban vasvilla bifurkációnak). A '*villa*' alak jól látható volt a feladatok megoldása során.

- **4. Feladat:** Az **ODE** program segítségével ábrázoljuk a (27) egyenlet által adott potenciált $k > 0$ és $k < 0$ esetén. Ehhez felhasználhatjuk a már meglévő és elmentett számolási eredményeket. A tengelyek választása legyen a következő: $X : x_1$, $Y : 0.5 * k * x_1^2 + 0.25 * x_1^4$. A potenciál viselkedése alapján értelmezzük a fentebb a fixpontok stabilitására kapott eredményeket!

- **5. Feladat:** Bifurkáció akkor is fellép, ha nincs fékező erő, vagyis a (28, 29) egyenletekben $\alpha = 0$ választással élünk. Viszont a fixpontok jellege természetesen más lesz. A 3. Feladat megoldása során elvégzett elemzéseket most ismételjük meg $\alpha = 0$-val és figyeljük meg a fixpontok tulajdonságainak megváltozását.

3 Laboratóriumi gyakorlat 2. *Egyszerű attraktorok, határciklus, Poincaré–leképezés*

3.1 Határciklus

Az előző laboratóriumi gyakorlat során vizsgált példákban a disszipatív rendszer elegendően hosszú idő múlva biztosan valamelyik stabil egyensúlyihelyzetébe, a fázistér valamelyik vonzó fixpontjáb a kerül. Azonban elképzelhető az is, hogy aszimptotikusan egy stabil periódikus mozgás, úgynevezett **határciklus** alakul ki. Ehhez a disszipációt pótlandó külső gerjesztésre van szükség.

A legegyszerűbb ilyen viselkedést mutató rendszer egy olyan tömegpont, amelyet periódikus külső erővel gerjesztünk, s amelyre emellett a sebességével arányos nagyságú fékező erő hat. Az egydimenziós mozgás mozgásegyenlete:

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) = A\cos\omega t, \tag{30}$$

melyet az $x_1 = \dot{x}(t)$ és $x_2 = \omega t$ változók bevezetésével az

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_1 + A\cos x_2, \\ \dot{x}_2 &= \omega \end{aligned} \tag{31}$$

autonom elsőrendő egyenletrendszerré alakítható. Az (31) egyenletrendszernek nincsenek fixpontjai, van azonban határciklusa. Az egzakt megoldás felírható

$$x_1(t) = \frac{A}{\alpha^2+\omega^2}\left[\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right] + \left[x_1(0) - \frac{A\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right]e^{-\alpha t}. \tag{32}$$

Mivel $\alpha > 0$, hosszú idő után ez átmegy az

$$x_1(t) = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\cos(\omega t + \Phi_o), \quad \tan\Phi_o = \frac{\omega}{\alpha} \tag{33}$$

periódikus mozgásba.

Annak érdekében, hogy a határciklus ne csak az x_1 változóban, hanem a teljes (x_1, x_2) fázistéren periódikus legyen, szokásos eljárás, hogy az x_2 változót csak a $0 \le x_2 < 2\pi$ intervallumon azonosítjuk ωt-vel, s az $(x_1, x_2 = 2\pi)$ koordinátájú pontokat az $(x_1, x_2 = 0)$ pontokkal azonosítjuk. Ez teljesen hasonló ahhoz, ahogyan az inga tanulmányozásánál a fázisteret nem síknak, hanem egy henger palástjának képzeltük el.

A határciklus fogalmilag nem különbözik lényegesen a fixponttól, alkalmas koordináta transzformációval (együttmozgó koordinátarendszer bevezetésével) egy határciklusba torkolló mozgás ugyanis mindig 'leállítható'. A határciklus stabilitása a fixpontokéhoz hasonlóan vizsgálható. Az (30) egyenlet linearitása miatt a határciklus akármekkora pozitív α mellett stabil, negatív α mellett pedig instabil.

3.2 Poincaré–leképezés

A határciklushoz vezető mozgások tanulmányozásánál is nagyon hasznos módszer a *Poincaré–leképezés*. Amennyiben a külső gerjesztés periódikus (a periódus ideje $T = 2\pi/\omega$), úgy megtehetjük, hogy az időt leszámítva N komponensű

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) = \vec{x}(t) \tag{34}$$

állapotvektort csupán a T periódusidő egész számú többszöröseinél nézzük meg. Igy az N dimenziós térben egy

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= \vec{x}(T), \\ \vec{x}_2(t) &= \vec{x}(2T), \\ &\vdots \\ \vec{x}_n(t) &= \vec{x}(nT) \end{aligned} \tag{35}$$

pontsorozatot kapunk. (x_i az $\vec{x}$ vektor i-edik komponensét, $\vec{x}_n$ pedig az n-edik iteráció eredményvektorát jelöli!) Mivel a

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t) \tag{36}$$

mozgásegyenlet jobboldalán álló függvény periódikus, $\vec{x}_n$ egyértelműen meghatározza $\vec{x}_{n+1}$-et, vagyis a

$$\vec{x}_{n+1} = P(\vec{x}_n) \tag{37}$$

leképezés függvényalakja nem függ n-től. Amennyiben a mozgásegyenletnek egy T periódusidejű határciklusa van, úgy a *Poincaré–leképezésnek* valamilyen $\vec{x}^*$ pontban fixpontja van:

$$P(\vec{x}^*) = \vec{x}^*, \tag{38}$$

ha pedig a határciklus $2T$ periódusidejű, akkor a leképezésnek kettes periódusú ciklusa, vagyis P^2-nek fixpontja van:

$$P\left[P(\vec{x}^*)\right] = \vec{x}^*, \tag{39}$$

és így tovább.

A Poincaré–Bendixson tétel szerint kétdimenziós folyamatokra a határciklusnál bonyolultabb attraktor nem alakulhat ki.

- **1. Feladat:** Tanulmányozzuk az **ODE** program segítségével a határciklus kialakulását!

  1. Az egyszerűség kedvéért válasszuk az (31) egyenletrendszerben szereplő paraméterek értékét a következő módon: $A = 1.0$, $\omega = 1.0$ és válasszuk az α értékét a $[0.01, 0.5]$ intervallumban. Végezzünk számolásokat rögzített α mellett változtatva a kezdeti $x_1(0)$ értéket (célszerű az $x_2(0) = 0.0$ választással élni)! Figyeljük $x_1(t)$-t az egyes esetekben és becsüljük meg, hogy meddig érdemes integrálni (mennyi idő alatt éri el a rendszer a határciklust)! Vizsgáljuk a mozgás trajektóriáját az (x_1, X_2) síkon is.
  2. Végezzünk számolásokat rögzített $x_1(0)$ mellett változtatva α értékét a fent javasolt intervallumon! Az előzőekhez hasonló grafikus ábrázolásokat csináljunk!
  3. Vizsgáljuk a rendszer *Poincaré–leképezését*! Ez a (3.2) részben elmondottak alapján azt jelenti, hogy a mozgást csak T időközönként nézzük meg, így mintegy stroboszkópikus felvételt készítünk a mozgásról. Itt T jelöli a külső gerjesztés periódusidejét. Ennek érdekében alkalmazzuk a következő trükköt: egészítsük ki az egyenletrendszerünket az
  $$\dot{s} = \cos(\frac{\pi}{T} \cdot t) \qquad (40)$$
  differenciálegyenlettel. Az integrálás után s arányos lesz $\sin(\frac{\pi}{T} \cdot t)$-vel, melynek a zérushelyei $t = n \cdot T$-nél vannak. Ezen zérushelyek felhasználásával könnyen készíthetünk stroboszkópikus képet. Az s-el kiegészített állapottérben az $s = 0$ síkkal képezve a *Poincaré – metszetet* T lépésekben kapunk pillanatfelvételeket a mozgásról. Ehhez a *Poincaré–map* menüpontban egyedül az s sorába kell 1-et írni. Ezek után ábrázoljuk az $x_1(x_2)$ függvényt! Hogyan jelenik meg itt a határciklus?
  4. Az előző pontban bemutatott technikával készítsünk stroboszkópikus képet $\frac{T}{2}, \frac{T}{4}$ periódusidővel! Értelmezzük a kapott eredményeket! Továbbra is az $x_1(x_2)$ függvényt vizsgáljuk!
  5. A 3 és 4 feladatokat most ismételjük meg, de most az $x_{n+1}(x_n)$ függvénykapcsolatot vizsgáljuk! Ehhez aktiváljuk a *2-dim. n/n+1* menüpontot és az X tengely legyen $X : x$.

6. A (31) egyenletrendszer (32) megoldásának ismeretében határozzuk meg analitikusan is az $x_n \to x_{n+1}$ leképezés alakját és vessük össze a numerikusan kapott eredményekkel!

3.3 Van der Pol–oszcillátor *Hopf–bifurkáció*

Az előző laborgyakorlat során láttuk, hogy egy a rendszert jellemző úgynevezett kontrollparaméter változtatásakor a rendszerünkben a fixpontok jellege megváltozhat. Előfordulhat, hogy egy stabil fixpont instabillá válik és helyette két új stabil fixpont jelenik meg. Ezt az effektust nevezzük vasvilla bifurkációnak. Erre láttunk példát az anharmónikus oszcillátor tanulmányozásakor.

Előfordulnak olyan fizikai rendszerek, amelyekben a kontrollparaméter változtatásakor bifurkáció történik stabil fixpontból határciklusba. Ezt nevezzük *Hopf–bifurkációnak.* A *Hopf–bifurkációt* mutató rendszerre az egyik legegyszerűbb példa a *Van der Pol–oszcillátor*, melyet a

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \tag{41}$$

egyenlet definiál. A (41) Van der Pol egyenlet ekvivalens a következő két elsőrendű egyenlettel:

$$\dot{x} = \mu\left[y - \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right], \tag{42}$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{\mu}x. \tag{43}$$

Vizsgáljuk meg, hogy az oszcillátor nyugalmi állapota milyen μ értékekre stabil. A (41) egyenlet kis kitérésekre érvényes linearizált alakja:

$$\ddot{x} = \mu\dot{x} - x, \tag{44}$$

ekvivalens egy $-\mu$ közegellenállású csillapított harmónikus oszcillátor mozgásegyenletével. Tehát levonhatjuk azt a következtetést, hogy a nyugalmi állapot (azaz $x = 0$, $\dot{x} = 0$) $\mu < 0$ esetén stabil, $\mu \geq 0$ esetén viszont instabil. A $\mu = 0$ eset a csillapítatlan oszcillátornak felel meg.

Ha $\mu \geq 0$ a (41) egyenletnek létezik stabil határciklus megoldása, a határciklus alakja azonban lényegesen különbözik a $\mu << 1$ és $\mu >> 1$ esetekben. A (41) egyenlet kis μ-kre érvényes alakjából könnyen belátható, hogy ekkor a határciklus egy $R = 2$ sugarú kör az $(x, \dot{x})$ síkon. A határciklushoz tartás meglehetősen lassú, $\exp(-\mu t)$-vel arányos.

A $\mu >> 1$ esetben a határciklus alakja a (42) egyenletrendszerből határozható meg. (Erre a feladatok során látunk példát.)

- **2. Feladat: A Hopf–bifurkáció vizsgálata**

  1. A $\mu < 0$ tartományban több paraméter érték mellett indítsunk mozgásokat, majd ábrázoljuk az $x(t)$ függvényt, illetve a trajektóriát az $(x, \dot{x})$ síkon! Vegyük észre, hogy $y \neq \dot{x}$, ezért az $x, \dot{x}$ síkon történő ábrázoláshoz a tengelyek definíciója a következő kell legyen: $X : x,\ Y : \mu * [y - (x^3/3 - x)]$.
  2. A $\mu << 1$ esetben figyeljük meg a határciklus kialakulását! Ehhez például $\mu = 0.05,\ 0.02$ mellett indítsunk mozgásokat és figyeljük meg a kör alakú határciklus létrejöttét az $(x, \dot{x})$ síkon. Vegyünk kezdőfeltételeket a körön belül és a körön kívül is!
  3. Tekintsük a $\mu >> 1$ tartományt! Ehhez vegyük például a $\mu = 15$ értéket. Indítsunk mosgásokat és figyeljük a határciklus létrejöttét! Vegyünk kezdőfeltételeket a határcikluson belül és kívül is!
  4. A $\mu >> 1$ esetben a határcikluson történő mozgás nem egyenletes, a ciklusnak van gyors és lassú szakasza is. A sebesség érzékeltetésére végezzünk animációt!
  5. A $\mu >> 1$ esetben próbáljuk meg analitikusan értelmezni a határciklus alakját és az előző pontban megfigyelt nem-egyenletes mozgást, kiindulva a (42) egyenletekből!

4 Laboratóriumi gyakorlat 3, 4. *A Lorenz – modell (Kaotikus mozgásra vezető nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer)*

4.1 A jelenség

Melegítsünk egy vízszintes folyadékréteget alulról. Ha a hőmérséklet gradiense egy küszöbértéket meghalad, a folyadék mozgásba jön és egy idő múlva stacionárius áramlás alakul ki. A felfelé és lefelé áramlás váltakozása révén a folyadékrétegben sajátos struktúrák jönnek létre. Ennek az úgynevezett szabad konvekciónak a beindulása a hidrodinamikai instabilitások egyik legegyszerűbb példája. Az első kísérleti megfigyeléseket Bénard végezte 1900-ban, míg a konvekciómentes állapot stabilitásának feltételét Rayleigh vezette le elsőként 1916-ban. Innen a jelenség neve: Rayleigh–Bénard instabilitás.

Amíg az edény alja és teteje között a hőmérsékletkülönbség kicsi, az energia áramlás a folyadékban hődiffúzió révén valósul meg. Amikor azonban túllépünk egy kritikus ΔT_c hőmérsékletkülönbséget, makroszkópikus mozgás kezdődik. Megfelelő peremfeltételek esetén az áramlás a 2 ábrán látható hengerszerű felületek mentén történik. A folyamat kontrollparamétere, amely a rendszer viselkedését meghatározza a ΔT hőmérsékletkülönbség.

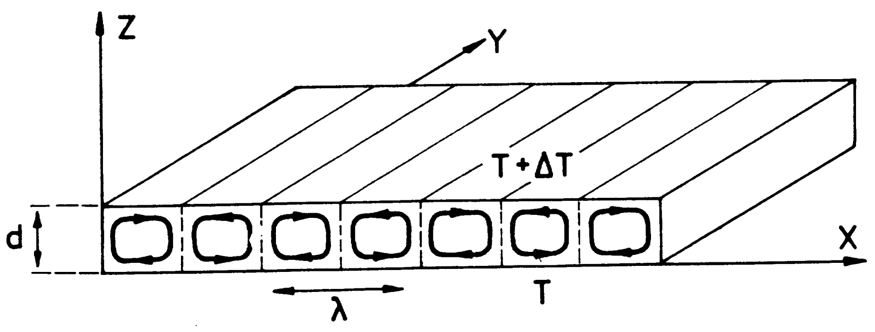

Figure 2: A kísérleti elrendezés és a szabad konvekció kialakulása. d jelöli a minta magasságát, T a hőmérséklet, ΔT pedig a hőmérséklet különbség az alsó és a felső lap között.

A hőmérsékletkülönbség további növelésekor a a szabályos áramlási kép elromlik, a folyadék mozgása egyre bonyolultabbá, majd kaotikussá válik.

Ennek a jelenségnek a vizsgálatára Lorenz bevezetett egy egyszerű modellt. A rendszer nagyszámú módusai közül hármat tartott meg. E három módus $X(t), Y(t)$ és $Z(t)$ amplitúdója a hőmérsékleteloszlással és az áramlási teret jellemző áramlási függvénnyel kapcsolatosak. A részletek megtalálhatók az [1, 3, 4] irodalomban. Áramlásmentes esetben $X = Y = Z = 0$, míg stacionárius hengeres áramlás esetén mindegyik amplitúdó időben állandó, véges érték. A hidrodinamikai egyenletekből megkapható az amplitúdók mozgásegyenlete:

$$\begin{array}{rcllll} \dot{X} & = & -\sigma X & +\sigma Y & \\ \dot{Y} & = & -Y & +rX & -XZ \\ \dot{Z} & = & -bZ & & +XY \end{array} \tag{45}$$

A (45) egyenletrendszert nevezzük *Lorenz – modell* -nek. Ebben az $r > 0$ mennyiséget tekintjük kontrollparaméternek (ez tartalmazza ΔT-t). A további paraméterek standard értékei: $\sigma = 10,\ b = 8/3$. Megfigyelhető, hogy a (45) egyenletrendszer első oszlopában szereplő tagok az egyes módusok csillapítását adják, a második oszlopbeliek a gerjesztést írják le, míg a harmadik oszlop a nemlineáris csatolásokat tartalmazza.

A *Lorenz* egyenletekben r növelésekor a hengeres áramlásnak megfelelő tartományból rögtön kaotikus viselkedésű tartományba jutunk. A modell nem írja le hűen a *Rayleigh-Bénard* instabilitásban tapasztalt jelenségeket. A továbbiakban a modellt, mint a kaotikus viselkedésre vezető differenciálegyenletek prototípusát tekintjük.

A modell néhány fontos tulajdonsága:

- Az egyenletek invariánsak X és Y tükrözésére, vagyis az

  $$X \to -X, \quad Y \to -Y, \quad Z \to Z \tag{46}$$

  transzformációra. A *Rayleigh – Bénard* instabilitásban ez annak felel meg, hogy a hengerek forgásirányának megváltozására invariánsak a mozgásegyenletek.

- Az állapottér időegységre eső relatív térfogatváltozása

  $$\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(\sigma + b + 1) \tag{47}$$

  Mozgás közben tehát a fázistér térfogata egyenletes ütemben húzódik össze.

- Minden megoldás korlátos, amint $t \to \infty$. Az egyenletes összehúzódás miatt következik, hogy minden megoldás a fázistérben aszimptotikusan egy **korlátos halmazhoz tart, amely zérus térfogatú**.
- Ha a (45) egyenletrendszerből elhagyjuk a disszipatív tagokat (vagyis az első oszlopot), akkor a modell konzervatívvá válik és integrálható lesz. Így nem mutat kaotikus viselkedést.

4.2 A Lorenz–modell elemzése

A további feladatok arra szolgálnak, hogy lépésről-lépésre nyomon kövessük a káosz létrejöttét a rendszerben.

- **1. Feladat: A stacionárius áramlási tér vizsgálata.**
  1. Határozzuk meg analitikusan a (45) egyenletrendszer fixpontjait és elemezzük stabilitásukat az r kontrollparaméter függvényében! Melyik fixpont írja le az áramlásmentes állapotot, és melyik felel meg a stacionárius konvekciónak? Mi a szabad konvekció beindulásához tartozó kritikus r érték?
  2. Az **ODE** programmal indítsunk mozgásokat $r < 1$ és $1 < r < 10$ paraméterek mellett és reprodukáljuk numerikusan az előző pontban kapott stabil fixpontokat! Vizsgáljuk az $X(t), Y(t), Z(t)$ függvényeket továbbá a háromdimenziós fázistérben is elemezzük a trajektória alakját!
  3. Az $1 < r < 10$ esetben indítsunk mozgásokat az $X = Y = Z = 0$ pont közeléből. Figyeljük hová tart a trajektória!
- **2. Feladat: Út a káoszhoz.** Most az $1 < r < 24.74$ kontrollparaméter tartományban végzünk részletes elemzéseket. Célunk annak megértése, hogy a rendszerben a reguláris mozgásból hogyan alakul ki fokozatosan a kaotikus viselkedés.
  1. Indítsunk mozgásokat a következő r értékek mellett: $r = 2$, 4, 6, 8, 10, 13.926. Minden rögzített r mellett végezzünk két számolást az $x_o^1 = 10$, $y_o^1 = 8$, $z_o^1 = 2$ és az $x_o^2 = -10$, $y_o^2 = -8$, $z_o^2 = 2$ kezdőfeltételekkel.
     Ábrázoljuk a $z(x)$ függvényt és figyeljük meg, hogy r különböző értékei mellett kapott fixpontok a $z - x$ síkon milyen görbén helyezkednek el. A 'csigák' viselkedéséből próbáljuk kitalálni, miért kitüntetett az $r = 13.926$ paraméter érték!

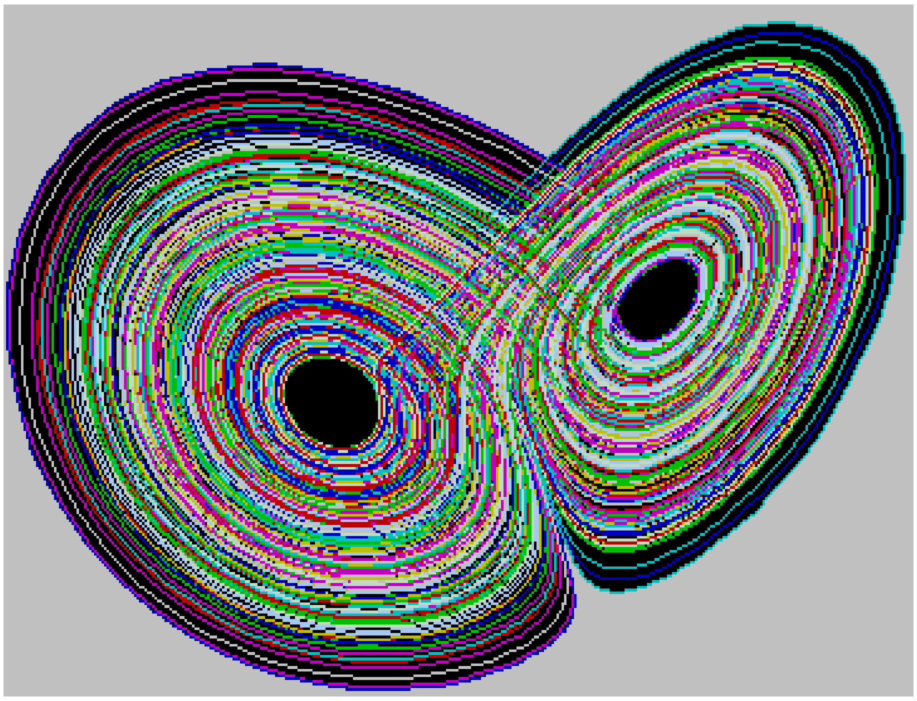

Figure 3: A Lorenz-modell különös attraktora, a Lorenz-attraktor.

2. Az előző számolások eredményeinél nézzük meg a $z(t)$ és az $x(t)$ függvényeket is!
3. Az $r = 10$ rögzített paraméter érték mellett indítsunk néhány mozgást az $X = Y = Z = 0$ pont közeléből! Figyeljük mi történik a trajektóriákkal és próbáljuk indokolni a látottakat!
4. Az $r = 21$ és $r = 23$ kontrollparaméterekkel végezzünk egy - egy számolást az $x_o = y_o = z_o = 5.0$ kezdeti feltételekkel! Legalább $t = 200$-ig integráljunk!
   Figyeljük a $z(t)$ és az $x(t)$ függvények viselkedését! Mi jelzi a kaotikus tartományhoz való közeledést? *(Segítség: hasonlítsuk össze a valamelyik fixponthoz történő konvergálást megelőző kaotikus oszcillációk számát!)* Ábrázoljuk a fázistérbeli trajektóriákat is a két esetben az $X : X + Y, Y : Z, Z : X - Y$ koordinátetengely választással! Miért hívják a látottakat 'preturbulens' viselkedésnek? **Az eredményeket mentsük ki file-ba a gyakorlatvezetőnek történő bemutatáshoz!**

- **3. Feladat: A kaotikus tartomány elemzése.** Láttuk, hogy az r kontrollparaméter növelésével az (45) egyenletekkel leírt rendszer mozgása egyre bonyolultabbá válik. A kritikus r érték, ahol a kaotikus mozgás kezdődik az $r_t = 24.74$.

1. Válasszuk az $r = 28$ értéket (tehát a kaotikus tartományban). Vizsgáljuk meg az $X(t), Y(t), Z(t)$ függvényeket különböző kezdőfeltételek mellett! Hogyan nyilvánul meg a mozgás kaotikus jellege?

2. Most az előző pont eredményeit ábrázoljuk a háromdimenziós fázistérben. A tengelyek tehát legyenek $X : X, Y : Y, Z : Z$! Indítsunk mozgásokat a legkülönbözőbb kezdőfeltételekkel és figyeljük meg, hogy a trajektória mindig ráhúzódik a fázistérnek egy korlátos, nullmértékű halmazára. Ez az objektum a *Lorenz–attraktor*. A jobb szemléltetés kedvéért érdemes elforgatni a koordinátarendszert, azaz a tengelyeket válasszuk most a következő módon: $X : X + Y, Y : Z, Z : X - Y$!

3. Vizsgáljuk az attraktoron történő mozgást! Ehhez végezzünk animációt! Aktiváljuk a *Simulation of motion* menüpontot a '*time = t*' beállítással! Figyeljük meg, hogy a golyó hogyan mozog az attraktor két 'levelén'! Mi felel meg most a korábban az $X(t), Y(t)$, $Z(t)$ függvényeken megfigyelt szabálytalan viselkedésnek?

4. Indítsunk két mozgást egymáshoz nagyon közeli kezdőfeltételekkel! Figyeljük az $X(t)$ függvényeket a két esetben és a trajektóriákat! Milyen következtetés vonhatunk le a trajektóriák távolodására vonatkozóan?

5. Készítsük el a folyamat *Poincaré – leképezését* Adott r mellett metszük el a trajektóriákat a $Z = r - 1$ síkkal! A kapott ponthalmaz egyes részeire rá is zoom-olhatunk!

6. Elemezzük a $z(t)$ függvény egymást követő maximumainak kapcsolatát! Ez kényelmesen elvégezhető a következő módon: A $z(t)$ függvény lokális maximumait keressük. Bevezetünk egy új változót a $w = \dot{z}$ definícióval, amely a (45) egyenletrendszer alapján a következő egyenletnek tesz eleget:

$$\dot{w} = \sigma(y - x)y + (-xz + rx - y)x - (xy - bz)b \tag{48}$$

   a $w(0) = x(0)y(0) - bz(0)$ kezdőfeltétellel. Ha *Poincaré– metszetet* készítünk a $w = 0$ síkkal, akkor éppen a z_n maximumait kapjuk. Ábrázoljuk ezekután a $z_n \to z_{n+2}$ függvényt és elemezzük tulajdonságait. Célszerű $1000 - 2000$ maximumot kiszámolni! (Csak minden második z szélsőérték jelent maximumot.)

- **4. Feladat: A kaotikus tartomány finomszerkezete** Az eddig bemutatott különös attraktoron kívül az $r > 24.74$ kontrollparaméter tartományban további érdekes dolgokat figyelhetünk meg. Az eddig bemutatott Lorenz – attraktor csak $r = 145$-ig stabil.

  1. Az $r = 145$ paraméternél fokozatos átmenet kezdődik egy határciklusba. Az átmenet $r = 148.4$ környékén ér véget. Indítsunk mozgásokat ebben a paramétertartományban a legkülönbözőbb kezdőfeltételekkel és figyeljük meg a határciklus kialakulását.
  2. $r = 166.1$-nél egy új, az előbbitől különböző különös attraktor alakul ki. A fentiekhez hasonlóan elemezzük tulajdonságait.
  3. Az $166.1 < r < 233.5$ intervallumban ismét egy határciklus kialakulás figyelhető meg. Próbáljuk megtalálni!
  4. Ezeken kívül a Lorenz–modell érdekes intermittens viselkedést is képes mutatni. Itt az intermittencia azt jelenti, hogy a rendszer mozgása viszonylag hosszú ideig regulárisnak tűnik, amit aztán kaotikus tartományok tarkítanak. Ilyen intermittens viselkedés a második attraktorról az azt követő határciklusra való átmenet során figyelhető meg. Válasszuk az $r = 166.0,\ 166.1,\ \ldots,\ 167.0$ paramétereket és próbáljunk találni intermittens viselkedést!

5 Laboratóriumi gyakorlat 5. *A különös attraktor természetrajza, a káosz létrejöttének Feigenbaum–féle útja*

A *Lorenz–modell* kapcsán példát láttunk kaotikus mozgásra vezető differenciálegyenlet-rendszerre. A modell elemzése alapján általános következtetéseket is levonhatunk a káosz kialakulásának feltételeire. A (45) egyenletrendszer három darab csatolt, elsőrendű, nem-lineáris egyenletből áll. Általánosan is belátható, hogy kaotikus mozgás háromnál kisebb dimenziós fázistérben nem alakulhat ki, ugyanis a *Poincaré–Bendixon* tétel szerint kétdimenzióban a legbonyolúltabb attraktor a határciklus lehet. A káosz létrejöttéhez szintén szükséges feltétel a rendszert jellemző mozgásegyenletek nemlineáris csatolása is.

Disszipatív rendszerekben egy kiszemelt fázistérbeli térfogat az idő múlásával csökken. Ebből következik, hogy $t \to \infty$-re a d dimenziós állapottérben egy olyan tartományhoz – attraktorhoz – tart, amelynek dimenziója kisebb, mint d. A kaotikus viselkedést mutató disszipatív rendszerek attraktorai, az úgynevezett különös attraktorok a végesben helyezkednek el, korlátos kiterjedésűek és vonzók. Viszont több tulajdonságukban lényegesen eltérnek az egyszerű attraktoroktól (fixpont, határciklus, tórusz). A különös attraktorok legfontosabb tulajdonsága a hiperbolicitás, ami azt jelenti, hogy két egymáshoz közeli kezdőfeltétellel indított pálya nagyon gyorsan eltávolodik egymástól. A különös attraktor alakja csak a konkrét rendszer ismeretében határozható meg, rendszerint az egyenletrendszer numerikus megoldásának aszimptotikus viselkedése alapján.

A jelen gyakorlat során olyan rendszerekkel foglalkozunk, amelyek fázistere háromdimenziós, tehát amelyeket három, autonom, nemlineáris differenciálegyenlet ír le. A káosz létrejöttének a *Lorenz–modell*-nél látottaknál más útjai is lehetségesek, illetve a különös attraktor formája a *Lorenz–attraktor*-tól eltérő is lehet. A továbbiakban először a káosz kialakulásának *Feigenbaum–féle* útját mutatjuk be és néhány egyszerű példával illusztráljuk a különös attraktor lehetséges topológiai tulajdonságait.

5.1 A Rössler–modell

Az egyik legegyszerűbb, kaotikus mozgásra vezető, nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer az úgynevezett *Rössler–modell*, amelyet a következő egyenletek definiálnak:

$$\dot{x} = -(y+z), \tag{49}$$

$$\dot{y} = x + 0.2 \cdot y,$$
$$\dot{z} = 0.2 + x \cdot z - c \cdot z.$$

A harmadik egyenletben található az egyetlen, nemlineáris csatolást létrehozó tag. A modellben a c-t tekintjük kontrollparaméternek.

A (49) egyenletrendszernek a $c = 2.6$ paraméterértéknél stabil határciklus megoldása van $\nu \sim 16$Hz frekvenciával (a periódusidő $T = \frac{1}{\nu}$). A c növelésével egy jól meghatározott c_k értéknél ez a határciklus instabillá válik és megjelenik egy $2T$ periódusú stabil határciklus. Ezt a jelenséget nevezzük perióduskettőző bifurkációnak. A c további növelésével újabb bifurkáció történik egy $4T$ periódusú ciklusba, *stb.* Alább táblázatban foglaltuk össze néhány periódus-kettőződéshez tartozó c_k értéket:

c_k	Határciklus periódusa
2.6	$1T$
3.5	$2T$
4.1	$4T$
4.18	$8T$

A táblázatban megfigyelhető, hogy c növelésével az egyes periódusketttőző bifurkációkhoz tartozó c_k értékek egyre sűrűbben helyezkednek el és a c_k sorozatnak a $c_\infty \sim 4.2$ érték környékén torlódási pontja van. A rendszer mozgásának tehát két lehetséges módja van: $c < c_\infty$ esetén a mozgás periódikus, míg $c > c_\infty$ mellett a rendszer mozgása kaotikussá válik. A bemutatott *Rössler–modellben* tehát periódus-kettőző bifurkációk sorozatán át jutunk el a kaotikus mozgáshoz a kontrollparaméter változtatásakor. A káosz kialakulásának ezt az útját nevezzük *Feigenbaum–féle* útnak. A *Rössler–modell* részletes vizsgálata megtalálható [5]-ben.

- **1. Feladat: A Rössler–modell vizsgálata**

  1. A fenti táblázatban megadott c_k értékeket felhasználva reprodukáljuk az egyes határciklusokat az **ODE** programmal! Az integrálás időtartamát célszerű hosszúnak választani ($t \geq 200$), hogy a kezdeti tranziensektől megszabaduljunk. A határciklus létrejöttét (vagyis a periódikus mozgást) jól lehet érzékelni az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvények viselkedésében. Először ábrázoljuk ezeket és figyeljük meg, hogy ezeken a függvényeken hogyan nyílvánul meg a periódus-kettőződés!

2. Az előző pont eredményeit felhasználva most ábrázoljuk a fázistérbeli trajektóriákat és figyeljük a perióduskettőződés létrejöttét! **Az eredményeket mentsük file-ba!**
3. Változtassuk c_k értékét finom lépésekben a $2.6 - 3.5$ intervallumon és figyeljük meg, hogyan deformálódik az első határciklus alakja és jelenik meg a bifurkáció!
4. Az egyes bifurkációkhoz tartozó c_k értékek pontos meghatározásának a numerikus integrálás véges pontossága szab gátat. A torlódási pont környékén nehéz megkülönböztetni az egyes perióduskettőző bifurkációkhoz tartozó c_k értékeket. Az integrálásunk pontosságát növelve határozzuk meg a programmal a $16T$ periódusidejű határciklushoz tartozó c_k-t!
5. Készítsünk a T periódusidővel stroboszkopikus képet (azaz *Poincaré – map*-et) a korábban bemutatott eljárással! Hogyan jelenik meg itt a határciklus illetve a perióduskettőződés?
6. Indítsunk mozgást a kaotikus tartományban és határozzuk meg a *Rössler–modell* különös attraktorát, az úgynevezett **Rössler–attraktort**! Az ábrázoláshoz válasszuk a tengelyeket a $X : x,\ Y : y,\ Z : z$-nek majd a jobb szemléltetés céljából cseréljük fel az Y és a Z rengelyt, azaz $X : x,\ Y : z,\ Z : y$.
7. A mozgás kaotikus jellegét vizsgáljuk meg az animáció segítségével is! A trajektóriákon kívül vizsgáljuk az $x(t), y(t), z(t)$ függvényeket is!
8. A kaotikus tartományban indítsunk két trajektóriát egymáshoz közeli kezdőfeltétellel és a korábbiakhoz hasonlóan elemezzük a távolodásuk sebességét!

5.2 További különös attraktorok

A most következő modelleket nem elemezzük részletesen, hanem azt vizsgáljuk, hogy az egyes esetekben milyen szerkezetű különös attraktor alakul ki. Tekintsük a következő nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - x \cdot y - z, \\ \dot{y} &= x^2 - 0.1 \cdot y, \\ \dot{z} &= 0.08 \cdot x - 0.38 \cdot z + 0.0015. \end{aligned} \tag{50}$$

Az (50) egyenletrendszerben megadott paraméterek már a kaotikus mozgáshoz tartoznak. Figyeljük meg az első és a második egyenletben a nemlinearitást okozó tagokat!

- **2. Feladat: Kettős spirál attraktor**
  Vizsgáljuk az (50) egyenletrendszer különös attraktorát!

  1. Indítsunk mozgásokat több különböző kezdőfeltétellel és figyeljük meg, hogyan húzódnak rá a trajektóriák az attraktorra!
  2. A rendszer különös attraktora úgynevezett kettős spirál alakú. Figyeljük meg ezt az alakot az előző pontban kapott eredményeken! Esetleg a koordinátarendszer elforgatása segíthet a kifejező ábrázolásban.

Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x,y,z), \\ \dot{y} &= f_2(x,y,z), \\ \epsilon \cdot \dot{z} &= f_3(x,y,z), \end{aligned} \tag{51}$$

ahol x, y, z dimenziótlan változók, f_1, f_2, f_3 függvények egységnyi nagyságrendű, vagy ennél kisebb együtthatókat tartalmaznak csak, s f_3 mindenképpen nemlineáris kifejezés. Az $\epsilon << 1$ esetben, ha z nem változik gyorsan, akkor a z-re vonatkozó egyenlet bal oldala elhanyagolhatóan kicsi. Ekkor igaz, hogy $f_3 = 0$. Mivel f_3 nemlineáris függvény, így az $f_3(x,y,z) = 0$ feltételt több felület is kielégíti. Ezeken a felületeken a rendszer kétváltozós. A felületek között azonban, a rendszer mozgása során, kialakulnak gyors átmenetek, amelyek során z nem hanyagolható el. A z változó tehát '*kapcsoló*' változónak tekinthető az (51) egyenletrendszerben. Konkrét példaként vizsgáljuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + 0.15 \cdot y, \\ 0.03 \cdot \dot{z} &= (1 - z^2)(x - 1 + z) - 0.03 \cdot z \end{aligned} \tag{52}$$

- **3. Feladat: Kapcsolóváltozót tartalmazó differenciálegyenletrendszer különös attraktora.**

  1. Indítsunk mozgásokat több különböző kezdőfeltétellel és figyeljük, hogy a trajektóriák milyen attraktorra húzódnak rá!
  2. Az (52) egyeneletek alapján határozzuk meg az $f_3(x,y,z) = 0$ egyenletű felületek alakját és vessük össze az előző pontban numerikusan számoltakkal!

3. Figyeljük az attraktoron történő mozgást! Végezzünk animációt és figyeljük meg azt, hogy hogyan történik a mozgás az $f_3 = 0$ egyenletű felületeken és mikor történik meg az átkapcsolás!
4. Indítsunk két trajektóriát közeli kezdőfeltételekkel és elemezzük távolodásuk sebességét!

Ajánlott irodalom

[1] Szépfalusi Péter, Tél Tamás, *A káosz*, (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982).

[2] H. J. Korsch, H. J. Jodl, *Chaos*, (Springer Verlag, 1994).

[3] H. Haken, *Bevezetés a szinergetikába*, (Springer Verlag, 1980).

[4] H. Haken, *Advanced Sinergetics*, (Springer Verlag, 1985).

[5] J. Crutchfield, *et. al*, Phys. Lett. **76A** 1.