BEVEZETÉS AZ ELEKTRODINAMIKÁBA

Sailer Kornél

Egyetemi előadás

Elméleti Fizikai Tanszék
Debreceni Egyetem
Debrecen
2002-2005.

Contents

BEVEZETÉS

Ez az előadás a második abban a sorozatban, amelyik az elméleti fizika alapjaiba vezeti be a hallgatót. Az előző félév során a klasszikus mechanika törvényeivel és fogalmaival ismerkedtünk meg és néhány egyszerű, de modellként széles körben alkalmazott példát láttunk alkalmazásukra. Most először röviden megismerkedünk a speciális relativitás elméletével és ennek keretében újra megvizsgáljuk a pontrészecske mozgásának törvényeit inerciarendszerekben. A speciális relativitás elmélete azonban nemcsak a részecskék mozgására alkalmazható, hanem a fizikai mezőkre is. Példaként az elektromosan töltött testek közötti kölcsönhatást közvetítő elektromágneses mező relativisztikus elméletével, a klasszikus elektrodinamikával ismerkedünk meg. A rendelkezésre álló idő rövidsége miatt nem törekedhetünk az elektromágneses jelenségek átfogó ismertetésére. Így az általános fizikai tanulmányok során megismert jelenségek közül csak néhány, elvi szempontból alapvető fontosságú jelenség tárgyalására fogunk szorítkozni.

1 A SPECIÁLIS RELATIVITÁS ELMÉLETE

A speciális relativitás elmélete a fizika törvényeinek tetszőleges inerciarendszerben érvényes elmélete. Kimondja a speciális relativitás elvét, amelynek értelmében a fizika törvényei minden inerciarendszerben azonosak. A speciális relativitás elmélete alkalmazható a részecskék mechanikai mozgásának leírására és a klasszikus mechanika olyan általánosítását jelenti, amely akkor is érvényes, ha a részecskék a fény vákumbeli sebességéhez közeli sebességgel mozognak. A Newton-i klasszikus mechanika a speciális relativitás elméletének speciális esete, amikor azt olyan részecskék mozgásának leírására alkalmazzuk, amelyek a fény sebességénél lényegesen kisebb sebességgel mozognak.

A speciális relativitás elve azonban nem csak a mechanika törvényeire vonatkozik, nem csak a klasszikus mechanika tetszőleges inerciarendszerre történő általánosítását teszi lehetővé. A speciális relativitás elméletének keretében értjük meg, hogy a klasszikus mechanikában, korábban bevezetett fizikai mező nem csupán matematikai segédeszköz, hanem valóságos, ,,hús-vér" fizikai objektum, amely energiát, impulzust, impulzusmomentumot hordoz, és amelyben energia, impulzus, impulzusmomentum képes véges sebességgel terjedni. Ennek köszönhető, hogy a részecskék, ill. a testek közötti kölcsönhatás a Természetben nem távolbahatásként valósul meg, hanem fizikai mezők közvetítésével, közelhatásként. A speciális relativitás elve a kölcsönhatásokat közvetítő fizikai mezők időbeli változásainak törvényeire és ezáltal magukra a kölcsönhatási ,,erőtörvényekre" is érvényes. Az elektromosan töltött részecskék ill. testek közötti kölcsönhatás, azaz az elektromágneses kölcsönhatás egyike azon alapvető kölcsönhatásoknak, amelyek eleget tesznek a speciális relativitás elvének. Az elektromágneses kölcsönhatást az elektromágneses mező közvetíti. A klasszikus elektrodinamika az elektromágneses kölcsönhatásnak ill. az elektromágneses mezőnek a speciális relativitás elvével összhangban levő elmélete. Hasonlóan, a speciális relativitás elméletével összhangban levő elméleti leírását lehetett adni az ún. gyenge és az ún. erős kölcsönhatásnak is. Előbbi, többek között a béta-bomlásért, utóbbi pedig az atommag alkatrészeinek, a protonnak és a neutronnak a létéért felelős kölcsönhatás. Az alapvető kölcsönhatások között egyetlen kivétel ismeretes, a gravitációs kölcsönhatás, amely nem tárgyalható a speciális relativitás elméletének keretében. Ennek az az oka, hogy a gravitáló anyag megváltoztatja, nem euklideszivé teszi a tér geometriáját.

A speciális relativitás elmélete olyan fizikai rendszerekre is kiterjeszthető, amelyekben nem hanyagolhatók el a kvantumeffektusok. Ha az elektromágneses kölcsönhatás olyan következményeiről akarunk beszélni, amelyek atomi vagy a szubatomi folyamatokban figyelhetők meg, akkor a kvantumeffektusokat is figyelembe kell venni. A gyenge és az erős kölcsönhatás következményei mindig atomi ill. szubatomi folyamatokban figyelhetők meg, így azok klasszikus fizikai keretekben nem érthetők meg, csak a speciális relativitás elméletének és a kvantumelméletnek az ,,összeházasítása" révén. Mindez azonban kivezet a klasszikus fizika kereteiből, a fizikának a ,,kvantumtérelmélet" nevű tudományága foglalkozik vele, ami messze meghaladja a jelen előadás anyagát.

1.1 Az alapelvek

Ebben a fejezetben megfogalmazzuk a speciális relativitás elméletének alapelveit. Először azt a kérdést tesszük fel, hogy a Természet jelenségei mögött meghúzódó természeti törvények függenek-e attól, hogy milyen inerciális vonatkoztatási rendszerből figyeljük meg azokat? Ösztönösen azt várjuk, hogy amennyiben a természeti jelenségeket szabályozó törvények egyetemesek, akkor azok nem függhetnek attól, hogy milyen mozgást végez az az inerciarendszer, amelyben a megfigyelő nyugalomban van.

Máris előrebocsátom a választ: **a Természet törvényei valamennyi inerciarendszerben azonosak. Ez a speciális relativitás elve.** A Természet törvényei abszolútak, minden inerciarendszerben azonosak. Inerciarendszerekből végtelen sok van és azok egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek. A speciális relativitás elve értelmében nincsen kitüntetett inerciarendszer. A Természet törvényei szempontjából minden inerciarendszer egyenértékű. Ennek köszönhetően nincsen abszolút nyugalomban levő inerciarendszer sem.

A klasszikus mechanikában megfogalmaztunk egy hasonló elvet, a Galilei-féle relativitási elvet. Ragaszkodva a kialakult szokáshoz, úgy fogalmaztuk, hogy a mechanika törvényei minden inerciarendszerben azonosak. Ez azt jelentette, hogy Newton II. törvényének matematikai alakja (a $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ vektoregyenlet) minden inerciarendszerben azonos és az erőtörvényt minden inerciarendszerben ugyanaz a függvénykapcsolat (az erővektora, mint a részecskék helyzetvektorainak és sebességvektorainak függvénye) írja le. A Galilei-féle relativitási elv csak a mechanika törvényeinek egyetemességéről szól, míg a speciális relativitási elv minden fizikai törvény egyetemességét fogalmazza meg.

A jelenségek körét a fizikai jelenségekre szűkítve le, a világ azért olyan gazdag jelenségekben, mert a testek egymással kölcsönhatnak. Felvetődik az a kérdés, hogy egy test hogyan hat kölcsön egy máshol levő másik testtel? Ha az egyik megváltoztatja a helyét, sebességét, stb., akkor azt a másik test mikor „észleli"? Rögtön a változás pillanatában, avagy esetleg csak bizonyos idő eltelte után? A tapasztalat által sok oldalról megerősített tény az, hogy nem nulla időtartam szükséges ahhoz, hogy a másik test a változást „észlelje". **A kölcsönhatások véges sebességgel terjednek, amelynek maximális értéke a fény terjedési sebessége a vákumban. A fény terjedési sebessége vákumban minden inerciarendszerben és minden irányban ugyanakkora. Ez a fénysebesség állandóságának elve.**

A klasszikus mechanikában azt szokás feltételezni, hogy a kölcsönhatás végtelen sebességgel terjed. A klasszikus mechanikai erőtörvényekben, mint pl. a gravitációs kölcsönhatás Newton-féle erőtörvénye, nem is szerepel az idő. Ha a két gravitáló részecske távolsága megváltozik, akkor az egyik részecske által a másikra kifejtett erő is azonnal megváltozik.

1.1.1 Vonatkoztatási rendszerek, inerciarendszerek

A jelenségeket mindig valamilyen testhez, testek rendszeréhez rögzített mérőműszerek segítségével vizsgáljuk. Ezek együttese alkotja a **vonatkoztatási rendszert**. Úgy képzelhetjük, hogy a vonatkoztatási rendszer minden pontjában nyugszik egy megfigyelő, kezében órával és mérőrúddal. Ezek a megfigyelők mérőrúdjaik segítségével térbeli koordinátarendszerrel tudják behálózni a teret. A térbeli koordinátarendszer kijelölésére természetesen végtelen sok lehetőség kínálkozik. A vonatkoztatási rendszer a választott tér-koordinátarendszer és az annak pontjaiban nyugvó órák összességének tekinthető.

A vonatkoztatási rendszerek között vannak olyanok, amelyekből a tér homogénnek és izotrópnak, az idő pedig homogénnek látszik. Ezekben a vonatkoztatási rendszerekben az egyenesvonalú egyenletes mozgást végző test megtartja egyenesvonalú egyenletes mozgását, ha semmilyen más test nem hat rá. Ezek az **inerciarendszerek**. Ha egy vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, akkor minden hozzá képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző rendszer is inerciarendszer. Következésképpen, végtelen sok inerciarendszer van. Inerciarendszerben az egyenesvonalú egyenletes mozgás leírása akkor a legegyszerűbb, ha Descartes-féle koordinátarendszert választunk. A speciális relativitás elméletében Descartes-koordinátarendszert szoktunk használni.

1.1.2 A speciális relativitás elve

A speciális relativitás elve azt mondja ki, hogy a fizika törvényei minden inerciarendszerben azonosak. Ez azt jelenti, hogy a fizika törvényei függetlenek a vonatkoztatási rendszertől, nem viszonylagosak, hanem egyetemesek. Később a speciális relativitás elvének matematikai megfogalmazását fogjuk adni, amely szerint **a fizikai törvényeket leíró egyenletek valamennyi inerciarendszerben azonos alakúak**.

A speciális relativitás elve azt a tapasztalatot fogalmazza meg, hogy az inerciarendszerek között semmilyen fizikai kísérlettel nem lehet különbséget tenni. A különböző inerciarendszerek a fizika szempontjából teljesen egyenértékűek.

A speciális relativitási elv a Galilei-féle relativitási elv általánosítása. A klasszikus mechanika keretében megtanult Galilei-féle relativitási elvet most a következőképpen pontosítjuk: A Galilei-féle relativitási elv azt a tapasztalatot fogalmazza meg elvként, hogy mechanikai kísérletekkel nem lehet különbséget tenni olyan inerciarendszerek között, amelyek egymáshoz képest a fény vákumban mért sebességénél sokkal kisebb relatív sebességgel mozognak. A mechanika törvényei az egymáshoz képest kis relatív sebességgel mozgó inerciarendszerekben azonosak. A speciális relativitás elve a Galilei-féle relativitási elv általánosítása tetszőleges fizikai törvényekre és egymáshoz képest tetszőleges relatív sebességgel mozgó inerciarendszerekre.

Érdemes megjegyezni, hogy már Galileo Galilei az 1632-ben megjelent ,,Dialogo" (,,Párbeszédek") [6] c. művében arról beszél, hogy a vonatkoztatási rendszerek között semmilyen természeti jelenséggel nem lehet különbséget tenni; példáit nem csupán a mechanikai jelenségek köréből veszi. Ennek ellenére Albert Einstein a speciális relativitás elméletét csak 1905-ben fogalmazta meg [7].

1.1.3 Fizikai mező

A mechanika Newton-féle megfogalmazásában egy test megváltoztatja mozgásállapotát, azaz impulzusát, ha másik testtel kölcsönhatásba lép és az erőt gyakorol rá. Az erőt éppen az impulzus változási gyorsasága (idő szerinti első deriváltja) méri. Az erőtörvény, ami az erő vektorát adott pillanatban meghatározza, a Newton-i mechanika szerint olyan, hogy csak a testeknek ezen pillanatban felvett helyzetétől, sebességétől, stb. függ. Ezért, ha az egyik test mozgásállapota megváltozik, akkor azt a másik test azonnal észreveszi, függetlenül attól, hogy milyen távolságban tartózkodik. Ezért azt mondjuk, hogy a Newton-i mechanika a kölcsönhatást távolhatásként értelmezi. Sok mechanikai jelenség olyan, hogy a kölcsönható testek egymással érintkeznek, s ilyenkor nem jelentkezik élesen az a kérdés, hogy hogyan is lehetséges távolhatás.

Nagyon fontos, már a Newton-i mechanikában is vizsgált jelenség, a szabadesés, amikor a Föld és a szabadon eső test nem érintkeznek. Itt már nem nyilvánvaló, hogy hogyan is fejt ki erőt a Föld a vele nem érintkező testre. Válaszként megfogalmazódott az a feltevés, hogy a kölcsönhatás nem távolhatásként, hanem közelhatásként valósul meg. Pl. a Föld gravitációs teret kelt és a Hold ebben szabadon esik. A szabadon eső testre, a Holdra a gravitációs erőtér fejt ki erőt közelhatás révén ott, ahol a Hold éppen tartózkodik az adott pillanatban. A klasszikus mechanikában azonban feltételezzük, hogy a Föld mozgásállapotának bármilyen megváltozásához a Föld által keltett gravitációs erőtér azonnal (időkésleltetés nélkül) hozzáidomul. A klasszikus mechanika közelhatásról alkotott képe szerint tehát végtelen nagy sebességgel terjed az a hatás, ami az egyik test mozgásállapotának megváltozásáról a másik testhez a testek közötti erőtérben „hírt visz”. A klasszikus mechanikában a kölcsönhatások végtelen nagy terjedési sebességét hallgatólagosan mindig feltételezzük.

Az elektromágneses hullámok felfedezése óta tudjuk, hogy a testek közötti kölcsönhatás valójában mindig úgy valósul meg, hogy az egyik test erőteret kelt, ami közelhatást gyakorol a benne elhelyezkedő másik testre. Azt is tudjuk, hogy az erőteret keltő test mozgásállapotának megváltozása nyomán **az erőtérben „zavar”**, pontosabb nevén **hullám terjed tova, ami mindig energiát hordoz.** Ez a hullám az, ami „hírül viszi” a teret keltő test mozgásállapotában bekövetkezett változást. **A kölcsönhatás** (a hullám, a zavar, a jel) **terjedésének sebessége a tapasztalat szerint mindig véges.** Azt, hogy valahol egy fizikai történés (egy esemény) ment végbe, más testek csak időben megkésve „veszik észre”. A kölcsönhatás terjedési sebességének, azaz a zavar, pontosabban a hullám terjedési sebességének fogalmát később, az elektromágneses hullámok tárgyalása során fogjuk pontosabbá tenni.

1.1.4 A fénysebesség állandóságának elve

A tapasztalat szerint a kölcsönhatások terjedési sebességének létezik maximális értéke: ez a c fénysebesség, az elektromágneses hullámok terjedési sebessége vákumban. Ha a kölcsönhatások maximális terjedési sebességének léte természeti törvény, akkor a speciális relativitás elve értelmében ennek a sebességnek minden inerciarendszerben azonosnak kell lenni. (Egyébként különbséget lehetne tenni az inerciarendszerek között.) Abból a feltevésből, hogy az inerciarendszerekben nincsenek kitüntetett irányok, következik, hogy a fény terjedési sebessége minden irányban azonos. Ezt nevezzük a fényterjedés izotrópiájának. **A fény terjedési sebessége vákumban tehát valamennyi inerciarendszerben és minden irányban azonos.**

Michelson és Morley kísérlete bizonyította [2, 3], hogy a fény terjedési sebessége vákumban csakugyan minden inerciarendszerben azonos. Amikor a kísérletet végezték, már tudták, hogy az inerciarendszerek között mechanikai kísérletekkel nem lehet különbséget tenni. Ismeretes volt továbbá az elektrodinamikának az az eredménye, hogy a fény a közegmentes térben minden irányban azonos sebességgel terjed. A kérdés csak az volt, milyen vonatkoztatási rendszerhez képest terjed a fény c sebességgel. Az volt a feltételezés a Newton-i mechanika hagyományos álláspontja szerint, hogy létezik egy abszolút nyugalomban levő inerciarendszer, az éter, és a fény ehhez képest terjed c sebességgel. A kísérlet célja az volt, hogy meghatározzák az interferométer $\vec{v}$ sebességét az éterhez képest (ld. [2]). Könnyű belátni, hogy az interferométer kimenetén az interferáló fényhullámok intenzitásának meg kellene változnia, ha az interferométert abból a helyzetből, amikor egyik karja a $\vec{v}$ sebesség irányába mutat, elforgatjuk pl. 90 fokkal a síkjára merőleges tengely körül, ahogyan az 1. ábra mutatja. (A valóságos kísérletben a T_1 és a T_2 tükrök nem pontosan merőlegesek és fénysugarak helyett párhuzamos fénysugarakból álló nyalábot használnak. Ekkor a kimeneten a mikroszkópban interferenciacsíkokat látunk, amelyeknek el kellene tolódnia az elforgatás során.)

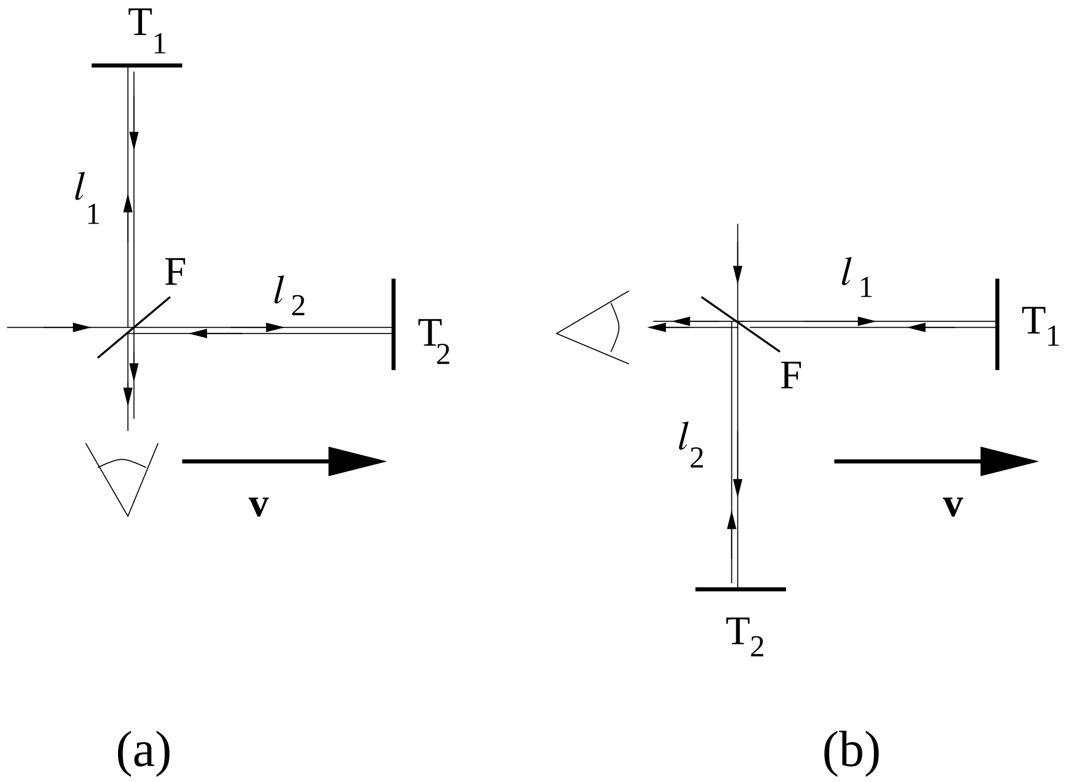

Figure 1: A Michelson-Morley-féle interferométer két, egymáshoz képest 90°-kal elforgatott helyzete, $\vec{v}$ az interferométer feltételezett sebessége az éterhez képest, T_1 és T_2 síktükrök, F félig áteresztő tükör, ℓ_1 és ℓ_2 az interferométer karjai. A „szem" a megfigyeléshez használt mikroszkóp tárgylencséjét jelöli.

Elemezzük a kísérletet az éter-felfogás szerint! A mikroszkóp objektívjében az interferométer egyes karjait befutó fénysugarak (síkhullámok) $\Delta\phi_a$ ill. $\Delta\phi_b$ fáziskülönbséggel találkoznak az (a) ill. a (b) ábrának megfelelő helyzetekben. Legyen c a fénynek a feltételezett éterhez képesti terjedési sebessége. Az (a) esetben az F félig áteresztő tükörtől induló, a T_1 tükrön visszavert hullám fázisának megváltozása amíg visszaér F-hez

$$\phi_1 = \omega\frac{2\ell_1}{c} - 2\frac{\omega}{c}\ell_1 = 0, \tag{1.1.1}$$

ugyanez a T_2 tükrön visszavert fényhullámra

$$\phi_2 = \omega\frac{\ell_2}{(c-v)} + \omega\frac{\ell_2}{c+v} - \frac{\omega}{c}\ell_2 - \frac{\omega}{c}\ell_2 = \frac{\omega}{c}\ell_2\left(\frac{c^2}{c^2-v^2} - 2\right) \equiv \phi_0 \neq 0, \tag{1.1.2}$$

s így $\Delta\phi_a = \phi_1 - \phi_2 = -\phi_0$. A (b) esetben a megfelelő fázisok

$$\phi_1 = \omega\frac{\ell_1}{(c-v)} + \omega\frac{\ell_1}{c+v} - \frac{\omega}{c}\ell_1 - \frac{\omega}{c}\ell_1 = \frac{\omega}{c}\ell_1\left(\frac{c^2}{c^2-v^2} - 2\right) \equiv \phi_0' \neq 0, \tag{1.1.3}$$

és $\phi_2 = 0$, úgyhogy $\Delta\phi_b = \phi_1 - \phi_2 = \phi_0'$. Az interferométer 90 fokos elforgatása tehát a mikroszkóp objektívjében találkozó fényhullámok fáziskülönbségének

$$\Delta\phi_a - \Delta\phi_b = -\phi_0 - \phi_0' = -\frac{\omega}{c}(\ell_1+\ell_2)\left(\frac{c^2}{c^2-v^2} - 2\right) \tag{1.1.4}$$

megváltozásához, vagyis az interferáló hullámok eredő intenzitásának megváltozásához kellene vezessen. Ilyet azonban nem észleltek (ill. a valóságos kísérletben nem észlelték az interferenciacsíkok eltolódását).

A Föld Nap körüli mozgása során egy adott helyzetben elvégzett kísérlet negatív eredményéből azt gondolhatnánk, hogy éppen akkor végeztük a kísérletet, amikor az interferométernek a feltételezett éterhez képesti $\vec{v}$ sebessége pontosan zérus volt. Ismételjük ezért meg a kísérletet a Föld Nap körüli pályájának különböző pontjaiban. Képzeljük magunk elé a Földet, amint a Nap körül kering. Tegyük fel, hogy a Nap sebessége az éterhez képest $\vec{V}$, a Föld keringési sebessége pedig a Naphoz rögzített inerciarendszerben $\vec{w}$. Ekkor az interferométer feltételezett sebessége az éterhez képest $\vec{v} = \vec{V} + \vec{w}$. Ez a sebesség nem lehet a Föld keringése során mindig azonosan nulla. A Földön nyugvó interferométer elforgatásakor tehát jelentkezni kellene általában az interferenciacsíkok eltolódásának. A tapasztalat azonban az, hogy nem észleltek csíkeltolódást a Föld Nap körüli pályájának semmelyik pontjában sem. Ez csak úgy érthető, ha nem ragaszkodunk ahhoz a feltevéshez, hogy a fény az éterhez képest terjed c sebességgel, hanem elfogadjuk, hogy bármely, az interferométerrel a kísérlet idején éppen együtt mozgó inerciarendszerhez képest ugyanazzal a c sebességgel terjed. Később be is fogjuk látni, hogy a kísérlet negatív tapasztalata valóban értelmezhető, ha a fénysebesség állandóságának elvéből indulunk ki.

Ez azt jelenti viszont, hogy még a fény sem tünteti ki az inerciarendszerek valamelyikét. Akkor nincs is értelme arról beszélni, hogy létezik éter, azaz egy abszolút nyugalomban lévő inerciarendszer, hiszen semmilyen kísérlettel sem lehet megkülönböztetni egyik inerciarendszert a másiktól, még a Michelson-Morley-féle kísérlettel sem.

A speciális relativitás elve azt modja, hogy a fizika törvényei minden inerciarendszerben azonosak, ami azt is jelenti, hogy a fizika törvényeinek segítségével egyik inerciarendszer sem tüntethető ki. **A speciális relativitás elve tehát azt is mondja, hogy nincsen kitüntetett inerciarendszer, s így abszolút nyugalomban levő inerciarendszer, azaz éter sincsen.**

Végül néhány fontos megjegyzés, ami a kölcsönhatások véges terjedési sebességének jelentőségét mutatja:

- Az erőtér fogalma azért válik valóban fizikaivá, mert benne a zavarok véges sebességgel tudnak terjedni. Ennek köszönhető ugyanis, hogy a távolhatás és az erőtérre alapozott közelhatás közül csak az utóbbival lehet a fizikai jelenségek közötti oksági kapcsolatot helyesen magyarázni.

- Nyilvánvaló az is, hogy a fény vákumbeli sebességénél nagyobb sebességgel mozgó test nem létezhet, mert akkor ez a test olyan kölcsönhatást valósíthatna meg, amely a fénysebességnél gyorsabban terjed. Márpedig akkor a fénysebesség nem lehetne a kölcsönhatások maximális terjedési sebessége.

- Miután a fénysebesség valamennyi inerciarendszerben minden irányban azonos, **a fényjeleket felhasználhatjuk, hogy egy adott inerciarendszerben, az abban nyugvó órákat szinkronizáljuk.** Legyen pl. O az origóban nyugvó óra. Amikor az $t_O = 0$ időt mutat, akkor bocsássunk ki az origóból minden irányban fényjeleket. Amikor a fényjel az origótól ℓ távolságra levő O' órát eléri, akkor állítsuk az O' óra mutatóját $t_{O'} = \ell/c$ állásba. Ezzel az eljárással az adott inerciarendszerben nyugvó összes órát szinkronizálhatjuk.

Valamennyi inerciarendszerben létezik tehát egységes t rendszeridő, amelyet a szinkronizált órák mérnek. (A teljesség kedvéért tegyük hozzá, hogy az ℓ távolságot az adott inerciarendszerben nyugvó méterrudakkal kell mérni.)

- **Ha a c fénysebességgel,** mint a speciális relativitás elméletében szereplő paraméterrel **formálisan a végtelenhez tartunk, akkor** ez annak felel meg, hogy a kölcsönhatások maximális terjedési sebességével végtelenhez tartunk. Ekkor **viszsza kell kapjuk a Newton-i klasszikus mechanikát, mint határesetet.** Ez a formális lépés akkor hordoz fizikai tartalmat, ha olyan rendszerek leírására törekszünk, amelyekben a részecskék a fénysebességhez képest lényegesen kisebb sebességgel mozognak.

1.2 A téridő

A speciális relativitás elvének és a fénysebesség állandósága elvének rendkívül súlyos következményei vannak az események térbeliségére és időbeliségére vonatkozó helyes kép kialakításában. **A pontszerű és pillanatszerű fizikai történések (az elemi események) a maguk egymásmellettiségében és egymásutániságában vonatkoztatási rendszertől független geometriai szerkezetet határoznak meg: ez a téridő.** Ha ezt a geometriai szerkezetet valamely megfigyelő valamely vonatkoztatási rendszerből nézi, akkor a történésekhez helyet és időt tud rendelni. Megtörténhet azonban, hogy két esemény, amely az egyik inerciarendszerben egyidejű, egy másikban már nem az. A hely és az idő az esemény vonatkoztatási rendszertől függő koordinátái. Ezek a koordináták azonban annak a téridőnek a pontjait jellemzik, amelynek a geometriai szerkezete független a vonatkoztatási rendszertől. Ezen független geometriai szerkezetben hely és idő nem válik külön, hanem egységet alkot.

A speciális relativitás elmélete szerint nem beszélhetünk a térről, mint eleve adott színpadról, amelyben az események zajlanak. Sokkal inkább az események a maguk sokaságával határozzák meg a téridőt. A hely és az idő, amit az egyes elemi eseményekhez rendelünk, esetleges, függ attól, hogy az elemi események sokaságát melyik inerciarendszerből figyeljük meg, azaz hogy melyik az az inerciarendszer, amelyben nyugalomban vannak a hely és az idő méréséhez használt méterrudak és órák. **Bár a távolságok és az időtartamok relatívak,** azaz függenek a vonatkoztatási rendszertől, amelyben mérjük őket, **a Természet törvényei** abszolútak, minden inerciarendszerben azonosak, azaz **egyetemes érvényűek.**

Ebben a fejezetben megtanuljuk, hogy a téridőnek milyen, vonatkoztatási rendszertől független jellemzői vannak, mi a kapcsolat azon hely- és időkoordináták között, amelyek egy eseményt különböző inerciarendszerekben jellemeznek és, hogy milyen következményei vannak a távolságok és az időtartamok viszonylagosságának.

1.2.1 Elemi események invariáns távolsága

Miután a kölcsönhatások mindig közelhatásként, lokálisan valósulnak meg, **a fizikai történéseket gondolatban mindig felbonthatjuk pontszerű elemi események láncolatára.** Hogy még egyszerűbb legyen gondolkoznunk, gondolatban minden pontszerű elemi eseményt azonosíthatunk egy fényjel kibocsátásával ill. elnyelésével.

Szemléletünk vonatkoztatási rendszerhez kötött. Hogy eljussunk a vonatkoztatási rendszertől független téridő fogalmához, képzeljük el először, hogy egy adott vonatkoztatási rendszerben minden helyen, minden pillanatban történik egy elemi esemény. Nevezzük ezeket **lehetséges** elemi eseményeknek. Az elemi események helye, időpontja minden vonatkoztatási rendszerben más és más. Maguk az elemi események azonban, mint fizikai történések nem viszonylagosak, hiszen minden vonatkoztatási rendszerben lezajlanak. **A lehetséges elemi események halmaza határozza meg a téridő pontjait, ill. a lehetséges elemi események halmazának vonatkoztatási rendszertől független geometriai tulajdonságai határozzák meg a téridő geometriáját.**

A pontszerű elemi eseményhez bármely inerciális vonatkoztatási rendszerben rendelhetünk Descartes-féle (x, y, z) helykoordinátákat, valamint egy t időkoordinátát. A helykoordinátákat, mint az $\vec{r}$ hármas-térbeli helyzetvektor Descartes-komponenseit az

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

hármas-oszlopvektorban foglalhatjuk össze, ill. kényelmi okokból még egy másik jelölést is használni fogunk,

$$x^i \quad (i = 1, 2, 3): \qquad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \tag{1.2.2}$$

A t időkoordináta, amely megfelel az $\vec{r}$ térbeli pontban nyugvó óra által mutatott időnek. Ugyanazon elemi eseményt különböző vonatkoztatási rendszerekben jellemző koordináták között általában bonyolult kapcsolat van, amelyre még visszatérünk.

Tegyük fel most azt a kérdést, hogy vannak-e a lehetséges elemi események halmazának olyan tulajdonságai, amelyek függetlenek a vonatkoztatási rendszertől? A válasz az, hogy **a lehetséges elemi események halmaza vonatkoztatási rendszertől független geometriai szerkezettel rendelkezik. Az elemi események halmaza vonatkoztatási rendszertől független geometriai szerkezeténél fogva határozza meg a téridőt.**

Megmutatjuk, hogy az elemi események halmazán be lehet vezetni az **invariáns ívhossz** fogalmát. Ez a legfontosabb olyan fogalom, amellyel a téridő geometriája jellemezhető. Vizsgáljunk először két olyan infinitezimálisan közeli elemi eseményt, amelyek egyike egy fényjel emissziója, a másika pedig ugyanennek a fényjelnek az abszorpciója. Ha ezen két esemény koordinátakülönbségei a tetszőleges K inerciarendszerben dx^i és az események között eltelt idő pedig dt, akkor a fénysebesség állandósága következtében a $(cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = 0$ egyenlőség áll fenn tetszőleges K inerciarendszerben.

Vegyünk most két tetszőleges, egymáshoz infinitezimálisan közeli eseményt és képezzük a

$$ds^2 \equiv (cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{1.2.3}$$

mennyiséget, amit az **ívhosszelem négyzetének** nevezünk. Ennek értéke általában nem zérus. Most azonban megmutatjuk, hogy **az ívhosszelem négyzetének értéke minden inerciarendszerben ugyanaz.** Tegyük fel, hogy a K_1 inerciarendszer $\vec{v}_1$, a K_2 inerciarendszer pedig $\vec{v}_2$ sebességgel mozog a K rendszerhez képest. Az ívhosszelem négyzete az egyik ill. a másik rendszerben azonos rendben kicsiny mennyiség, ezért $ds_1^2 \propto ds^2$ és $ds_2^2 \propto ds^2$, ahol ds^2 az ívhosszelem négyzete a K rendszerben. Az arányossági tényező a tér homogenitása és izotrópiája miatt csak a K és K_1 ill. a K és K_2 inerciarendszerek relatív sebességének nagyságától függhet, a helykoordinátáktól, az időkoordinátáktól és a sebességek irányától nem: $ds_1^2 = a(v_1)ds^2$, $ds_2^2 = a(v_2)ds^2$. Legyen a K_1 és a K_2 inerciarendszerek relatív sebessége $\vec{v}_{12}$. Ekkor a $\frac{ds_2^2}{ds_1^2}$ hányadost képezve látjuk, hogy fennáll az

$$a(v_{12}) = \frac{a(v_2)}{a(v_1)} \tag{1.2.4}$$

egyenlet. Itt azonban a bal oldal általában függ a $\vec{v}_1$ és a $\vec{v}_2$ sebességek szögétől, míg a jobb oldal nem. Az egyenlőség tetszőleges K_1, K_2 és K inerciarendszerek esetén csak úgy állhat fenn, ha az arányossági tényező állandó, de akkor $a = 1$. Ezzel beláttuk, hogy az ívhosszelem négyzete invariáns mennyiség, értéke tetszőleges inerciális vonatkoztatási rendszerben azonos.

Az infinitezimális ívhosszelemek négyzetének invarianciájából a véges ívhossznégyzetek invarianciája is következik.

A véges távolságra levő eseménypárok invariáns ívhossznégyzetét a következőképpen értelmezzük:

1. Feltesszük, hogy a téridő bármely két pontja összeköthető folytonos görbével. Az A és B pontokat összekötő $g(\tau)$ görbén a $[0,1]$ intervallumnak a téridőbe történő olyan leképezését értjük, amelyre
$$g: \tau \in [0,1] \mapsto (t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \tag{1.2.5}$$
ahol $(t(0), x(0), y(0), z(0))$ az A pont, $(t(1), x(1), y(1), z(1))$ a B pont koordinátái. A g görbe A és B pontok közötti darabjának ívhosszát az alábbi integrállal értelmezzük:
$$s[g] = \int_0^1 d\tau \frac{ds}{d\tau} = \int_0^1 d\tau \sqrt{c^2\left(\frac{dt(\tau)}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz(\tau)}{d\tau}\right)^2}. \tag{1.2.6}$$

A tetszőleges g görbe véges darabjának így értelmezett ívhossza definíció szerint invariáns ívhossz, azaz értéke bármely inerciarendszerben ugyanaz, hiszen csupa invariáns, infinitezimális ívhosszelem „összege”.

2. Az $s[g]$ ívhossz rögzített A és B pontok esetén a g görbe funkcionálja, amelynek szélsőértéke van arra a g_0 görbére, amelyre

$$0 = \frac{\delta s[g]}{\delta t(\tau)} = -\frac{c^2}{s[g]}\frac{d^2t}{d\tau^2}, \quad 0 = \frac{\delta s[g]}{\delta x(\tau)} = \frac{1}{s[g]}\frac{d^2x}{d\tau^2},$$
$$0 = \frac{\delta s[g]}{\delta y(\tau)} = \frac{1}{s[g]}\frac{d^2y}{d\tau^2}, \quad 0 = \frac{\delta s[g]}{\delta z(\tau)} = \frac{1}{s[g]}\frac{d^2z}{d\tau^2}, \tag{1.2.7}$$

aminek lineáris függvények a megoldásai:

$$g_0: \quad t(\tau) = t(0) + \tau[t(1) - t(0)], \ x(\tau) = x(0) + \tau[x(1) - x(0)],$$
$$y(\tau) = y(0) + \tau[y(1) - y(0)], \ z(\tau) = z(0) + \tau[z(1) - z(0)]. \tag{1.2.8}$$

3. Az ívhossz szélsőértékét adó g_0 görbe az A és B pontot a téridőben összekötő egyenes. Ezen egyenes A és B közötti szakaszának ívhosszát nevezzük az A és B pontok $\Delta_{A,B}s$ „távolságának” a téridőben:

$$\begin{aligned}\Delta_{A,B}s &= s[g_0] \\ &= \int_0^1 d\tau \sqrt{c^2[t(1)-t(0)]^2 - [x(1)-x(0)]^2 - [y(1)-y(0)]^2 - [z(1)-z(0)]^2} \\ &= \sqrt{c^2[t(1)-t(0)]^2 - [x(1)-x(0)]^2 - [y(1)-y(0)]^2 - [z(1)-z(0)]^2}.\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

A véges ívhossznégyzet kiszámításának módja tehát ugyanaz, mint az infinitezimálisé, és értelmezésének módjából adódik, hogy ez invariáns ívhossznégyzet, ugyanis a görbedarab ívhossza is invariáns.

1.2.2 Téridő, fénykúp

A lehetséges elemi események tehát olyan ponthalmazt alkotnak, amelyben értelmezve van bármely két pont egymástól mért négydimenziós távolsága, és ez a négydimenziós távolság, a két elemi eseményhez tartozó invariáns ívhossz, független attól, hogy az eseményeket melyik inerciális vonatkoztatási rendszerből nézzük. **Az elemi események által az invariáns ívhossz révén definiált geometriai struktúrát nevezzük téridőnek.** Az elnevezés kifejezi, hogy **a téridő geometriai szerkezetében nem válik külön a hely és az idő. Tér és idő szoros egységet alkot. Azt a geometriát, amelyben a pontok invariáns távolságának négyzetét a**

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \tag{1.2.10}$$

alakú invariáns ívhossznégyzettel értelmezzük, pszeudo-euklideszi geometriának nevezzük. A pszeudo-euklideszi geometriájú téridőt Minkowski-téridőnek, vagy rövidebben Minkowski-térnek nevezzük. A speciális relativitás elmélete szerint a téridő Minkowski-tér. A Minkowski-tér tehát olyan metrikus tér, amelyben bármely két pont távolságának négyzetét a

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \tag{1.2.11}$$

utasítással kell kiszámolni. Ellentétben az euklideszi geometriában szokásos $(\Delta\ell)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \geq 0$ távolságnégyzettel, a pszeudo-euklideszi Δs^2 távolságnégyzet egyaránt lehet pozitív, negatív és nulla is.

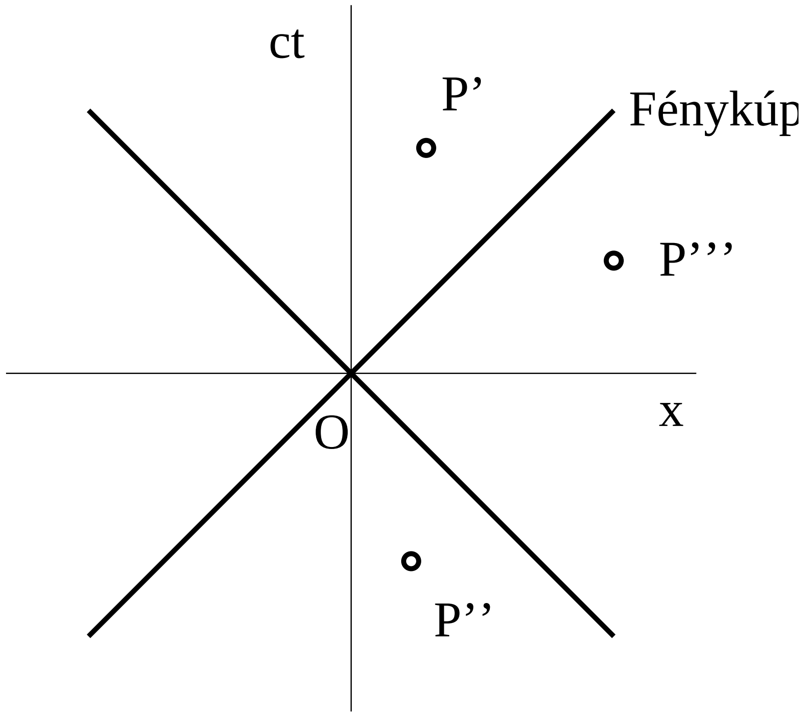

Figure 2: A fénykúp vetülete az (x, ct) síkra. A P', P'' és P''' pontok rendre az O eseménytől időszerűen elválasztott jövőbeli, időszerűen elválasztott múltbeli és térszerűen elválasztott elemi eseményeket jelölnek.

Vizsgáljuk meg egy tetszőleges O elemi eseményhez képest a téridő szerkezetét. Találunk olyan elemi eseményeket, amelyeknek az ívhossznégyzete zérus. Ezeket **fényszerűen elválasztott eseményeknek** nevezzük. Ezek alkotják az ún. **fénykúpot**. Azok az események, amelyekre az O eseményhez viszonyított ívhossznégyzet pozitív, az **időszerűen elválasztott események**. Az időszerűen elválasztott események a fénykúp belsejében helyezkednek el. Csak a fénykúpon és a fénykúp belsejében elhelyezkedő események állhatnak az O eseménnyel oksági kapcsolatban. Ekkor ugyanis a kiszemelt esemény és az O esemény közötti térbeli távolság és a közöttük eltelt idő hányadosa semmilyen inerciarendszerben nem haladja meg a fénysebességet. Ezzel szemben a fénykúpon kívül elhelyezkedő eseményekre az ívhossz négyzete negatív. Ezek a **térszerűen elválasztott események**. Közöttük és az O esemény között nem lehetséges oksági kapcsolat, mert ehhez a fénysebességnél gyorsabban terjedő kölcsönhatást kellene feltételezni. Az elemi eseményeknek ez a, tetszőlegesen kiválasztott elemi eseményhez viszonyított osztályozása fényszerűen, időszerűen és térszerűen elválasztott elemi eseményekre az invariáns ívhossz fogalmán alapul és így független a vonatkoztatási rendszertől. Ez az osztályozás ezért a téridő invariáns szerkezetének nagyon fontos jellemzője.

Itt jegyezzük meg, hogy **az események egyhelyűsége és egyidejűsége a vonatkoztatási rendszertől függő fogalmak:**

- Ha két esemény valamely inerciarendszerben egyhelyű és egyidejű, akkor minden inerciarendszerben az; a téridő egyazon pontja.

- Annak a szükséges feltétele, hogy létezzen olyan inerciarendszer, amelyben két esemény egyhelyű, az, hogy a két esemény legyen időszerűen elválasztott.

- Annak a szükséges feltétele, hogy létezzen olyan inerciarendszer, amelyben két esemény egyidejű, az, hogy az események legyenek térszerűen elválasztva.

A fénykúpon belüli eseményekről egyértelműen (vonatkoztatási rendszertől függetlenül) eldönthető, hogy azok korábbiak vagy későbbiek, múltbeliek vagy jövőbeliek az O eseményhez képest. Így **az elemi események közötti oksági viszonyok bármely inerciarendszerben változatlanok.** Azok az események, amelyeknek O érezheti elvileg a következményeit, mind az O esemény múltbeli fénykúpján belül, ill. annak a felületén helyezkednek el. Másrészről az O eseményt csak azok a megfigyelők észlelhetik, akik megfigyelésüket valamely, az O esemény jövőbeli fénykúpján belüli eseménnyel egyhelyűen és egyidejűleg végzik. Az O elemi történés szempontjából tehát a ,,világegyetem" a múltbeli és a jövőbeli fénykúpból áll. A fénykúp felületén kívül elhelyezkedő eseményeknek O-ra semmiféle hatása nem lehet és az O eseménynek sem lehet a fénykúpon kívüli eseményekre semmilyen hatása. Ezek az események az O esemény szempontjából olyanok, mintha nem is történtek volna meg, ill. nem is történnének meg.

1.2.3 Sajátidő. A müon élettartama. Ikerparadoxon

Sajátidő. Azt a kérdést akarjuk megvizsgálni, hogy hogyan telik az idő az egymáshoz képest mozgó órákon. Ebből egyúttal az is kiderül, hogy a rendszeridő különböző vonatkoztatási rendszerekben különbözőképpen telik.

Legyen K tetszőleges inerciarendszer, amelyben egy óra tetszőlegesen mozog. A K-ban felvett koordinátarendszer legyen (t, x^1, x^2, x^3). Legyen az óra sebessége a K rendszerben a t idő tetszőleges függvénye: $\vec{v}(t)$. Ekkor a mozgó óra a K rendszerből nézve dt idő alatt $dx^i = v^i dt$ elmozdulást szenved. A t ill. dt időt a K-ban nyugvó (szinkronizált) órák mérik. Mennyi idő telik el a mozgó óra fenti elmozdulása alatt magán a mozgó órán? A mozgó órával az adott pillanatban együttmozgó inerciarendszer legyen K'. Mekkora tehát a K'-ben nyugvó órán eltelt dt' idő? Tudjuk, hogy az óra K'-ben nyugalomban van, tehát $(dx^i)' = 0$. Az ívhosszelem négyzete invariáns, tehát:

$$ds^2 \equiv (cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = (cdt')^2. \tag{1.2.12}$$

Innen a mozgó óra nyugalmi rendszerében eltelt idő:

$$dt' = dt\,\sqrt{1 - (v^2/c^2)} < dt \tag{1.2.13}$$

A K rendszerben mozgó óra tehát lassabban jár, mint a K rendszerben nyugvó órák. **Az óra saját nyugalmi rendszerében eltelt időt sajátidőnek nevezzük** és a későbbiekben $d\tau$-val fogjuk jelölni. A fenti példában az óra véges elmozdulásához tartozó sajátidő és a K inerciarendszerben eltelt idő között az összefüggés:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} < t_2 - t_1. \tag{1.2.14}$$

Az (1.2.12) képletből látjuk, hogy az óra által $d\tau$ sajátidő alatt befutott ívhossz $ds = cd\tau$.

Idődilatáció. Ha a mozgó óra $\vec{v}$ sebessége K-hoz képest állandó, akkor az óra nyugalmi rendszere, K' mindvégig inerciarendszer. Ekkor természetesen az óra τ sajátideje éppen a K' inerciarendszerben nyugvó, szinkronizált órák által mért t' rendszeridő. Ha K'-ben két egyhelyű esemény között $\Delta t'$ idő telik el, akkor eme két esemény között a K-ban nyugvó órán

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t' \qquad (1.2.15)$$

idő telik el. A dolog azonban meg is fordítható: ha két, a K-ban egyhelyű esemény között K-ban mérve Δt idő telik el, akkor ugyanezen két esemény között eltelt időt a K'-ben nyugvó órák ugyancsak hosszabbnak mérik: $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t$. Az ún. **idődilatáció** tehát nem tünteti ki egyik inerciarendszert sem.

A müonok élettartama. Ismeretes a következő jelenség [2]. A müonok a müonikus atomok belsejében kb. 10^{-6} s alatt bomlanak el. Ugyanakkor a Föld felszínétől kb. 10 km magasságban kozmikus sugárzás hatására keletkeznek müonok. Ezeknek a müonoknak a sebessége nagyságrendileg a fénysebességnél annak 1 %-ával kisebb. Ez azt jelenti, hogy a Földön nyugvó megfigyelő szerint kb. 10^{-4} s idő szükséges ahhoz, hogy eljussanak a Föld felszínére. A tapasztalat szerint a magas légkörben keletkezett müonok mégis elérik a Föld felszínét. Hogyan lehetséges ez? A magyarázat abban rejlik, hogy a nagy sebességgel mozgó müonok órája lassabban jár, s így az a kb. 10^{-4} s idő, amire a Földön nyugvó órán mérve szükségük van ahhoz, hogy lejussanak a Föld felszínére, az ő sajátidejükben mérve csak a 10^{-6} s időtartamnak felel meg (ld. [2]).

Ikerparadoxon. A mozgó órák lassabban járnak mint a velük azonos, nyugvó órák. Ennek figyelembevételével fogalmazták meg az ikerparadoxont. Tegyük fel, hogy két óránk van: az egyik, O_1 nyugalomban van a K_1 inerciarendszerben, a másik, O_2 pedig zárt pályán mozogva elindul onnan, ahol O_1 tartózkodik, majd valamennyi idő múltán visszatér ugyanoda. A fentiek szerint az O_2 sajátidejében eltelt idő O_2 elindulása és visszatérése között kisebb, mint az O_1-en eközben eltelt idő. Ha az órákkal együttmozgó ikertestvéreket képzelünk el, akkor arra a paradoxonra jutunk, hogy az induláskor egykorú ikertestvérek közül az, amelyik az O_2 órával (pl. egy visszatérő űrhajóban) együtt mozgott, fiatalabb a visszatéréskor, mint a testvére, aki a K_1 inerciarendszerben nyugalomban volt. Ez paradoxon, ha feltesszük, hogy a vonatkoztatási rendszerekben a természeti törvények azonosak. A paradoxon feloldása nyilvánvalóan abban rejlik, hogy az O_2-vel együttmozgó K_2 vonatkoztatási rendszer nem inerciarendszer, így nem alkalmazható rá a speciális relativitás elve. A K_2 vonatkoztatási rendszer nem kell hogy egyenértékű legyen a K_1 inerciarendszerrel, amelyben O_1 nyugszik.

1.2.4 A Poincaré- és a Lorentz-transzformációk

Az egyik inerciarendszerről a másikra történő áttérést matematikailag koordinátatranszformáció írja le. Ugyanannak az elemi eseménynek keressük a koordinátáit az egyik ill. a másik inerciarendszerben, és azt kérdezzük, hogy mi a kapcsolat közöttük.

A Galilei-transzformációk. A Newton-i mechanikában a kapcsolatot egyazon elemi esemény egyik ill. másik inerciarendszerben mért koordinátái között a **Galilei-transzformációk** adják meg. Amíg a fény sebességét végtelennek tekintették, addig meg lehetett maradni annál a szemléletnél, hogy az idő valamennyi inerciarendszerben azonos módon telik. A klasszikus mechanikában a K inerciarendszerben nyugvó órák által mutatott t időt és a hozzá képest tetszőleges $\vec{V}$ sebességgel mozgó K' inerciarendszerben nyugvó órákkal mért t' időt azonosnak tekintjük, $t = t'$. Ez azt jelenti, hogy a Newton-i mechanikában létezik az inerciarendszer megválasztásától független, abszolút idő, a világidő. Mindazok a mechanikai jelenségek, amelyek olyan fizikai rendszerekben lépnek fel, amelyekben a részecskék a fénysebességnél lényegesen kisebb sebességgel mozognak, a tapasztalat szerint helyesen írhatók le a Newton-i klasszikus mechanika szerint.

Tekintsük azt az esetet, amikor a K' inerciarendszer V sebességgel mozog a K inerciarendszerhez képest annak x tengelye irányában, a két rendszerben a megfelelő koordinátatengelyek a térben párhuzamosak, és az idő mérését akkor kezdtük, amikor a két rendszer origója egybeesett. (A későbbiekben, a speciális relativitáselméletről szóló fejezetekben a különböző mennyiségek transzformációit is mindig erre a speciális esetre fogom konkrétan megadni.) A K inerciarendszerben bevezetett (t, x, y, z) koordináták és a K' inerciarendszerben használt (t', x', y', z') koordináták kapcsolatát megadó valódi Galilei-transzformáció:

$$t = t', \quad x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{1.2.16}$$

Poincaré-transzformációk. Megtanultuk, hogy ha a fény sebességének végességét komolyan vesszük és a fény terjedésére is alkalmazzuk a speciális relativitás elvét, akkor abból többek között az is következik, hogy a különböző K és K' inerciarendszerekben nyugvó (fizikailag azonos) órák különbözőképpen járnak, vagyis $t' \neq t$. Bármely A elemi esemény tetszőleges K és K' inerciarendszerekben felvett koordinátái között fennáll azonban az ívhossz invarianciáját kifejező

$$s^2 \equiv (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 \tag{1.2.17}$$

összefüggés, ha a $t = t' = 0$ pillanatot annak az időpillanatnak választjuk, amikor K és K' térkoordinátarendszereinek az origója egybe esett. Az (1.2.17) ívhossznégyzet a koordinátarendszer origóját kijelölő elemi esemény (K-ban $t = 0$, $x = y = z = 0$, K'-ben $t' = 0$ és $x' = y' = z' = 0$ a koordinátái) és a kiszemelt A elemi esemény (K-ban (ct, x, y, z), K'-ben pedig (ct', x', y', z') a koordinátái) invariáns ívhossznégyzete. A $(ct, x, y, z) = (x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ 4 darab téridő-koordinátát úgy tekinthetjük, mint egy olyan 4-dimenziós tér x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ vektorának komponenseit, amelyben a vektorok hosszát az s^2 invariáns ívhossznégyzet adja meg. A Minkowski-tér tehát lineáris vektortér. A Minkowski-térben bármely két A és B pont távolságának négyzete,

$$\Delta s^2 = (x_A^0 - x_B^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x_A^i - x_B^i)^2 \tag{1.2.18}$$

minden inerciarendszerben azonos, azaz invariáns az egyik inerciarendszerről a másikra történő áttérést leíró

$$x^{\mu\,\prime} = x^{\mu\,\prime}(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{1.2.19}$$

koordinátatranszformációkkal szemben:

$$\Delta s^2 = (x_A^0 - x_B^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x_A^i - x_B^i)^2 = (x_A^0{}' - x_B^0{}')^2 - \sum_{i=1}^{3} (x_A^i{}' - x_B^i{}')^2 = \Delta s'^{\,2}. \tag{1.2.20}$$

Az egyik inerciarendszerről a másikra való áttérésnek megfelelő koordináta-transzformációkat tehát azok között a transzformációk között kell keresnünk, amelyek a Δs^2 távolságokat invariánsan hagyják. Azt is megköveteljük, hogy a szóban forgó transzformációk lineárisak legyenek. Azok az (1.2.19) lineáris koordinátatranszformációk, amelyek az (1.2.18) alakban adott Δs^2 ívhossznégyzetet invariánsan hagyják, az ún. **Poincaré-transzformációk**. A lineáris (1.2.19) koordinátatranszformáció általános alakja

$$x^{\mu\,\prime} = \sum_{\nu=0}^{3} L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu} \tag{1.2.21}$$

ahol a transzformáció 4×4-es mátrixának elemeit jelöltük – a későbbiekre tekintettel – $L^{\mu}{}_{\nu}$-vel, ahol a felső index a sorindex, az alsó az oszlopindex. A (1.2.21) transzformáció képletében $L^{\mu}{}_{\nu}$ és b^{μ} állandók, azaz a téridő minden pontjában azonos az értékük. Az ívhossznégyzet invarianciája megszorítást jelent a megengedett koordinátatranszformációk alakjára, pontosabban a koordinátatranszformáció $L^{\mu}{}_{\nu}$ mátrixának tulajdonságaira nézve. A Poincaré-transzformációk általános tárgyalásának vonalát elhagyva, most sorra vesszük a közöttük található, különböző jelentésű transzformációkat.

Eltolások $L^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$, $b^{\mu} \neq 0$	időirányú eltolások $b^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $b^0 \neq 0$	1	
	eltolások a térben ($b^0 = 0$) rendre az x^1 ($b^1 \neq 0$, $b^2 = b^3 = 0$), az x^2 ($b^2 \neq 0$, $b^1 = b^3 = 0$), ill. az x^3 ($b^3 \neq 0$, $b^1 = b^2 = 0$) tengely irányában	3	4
Lorentz-transzformációk $b^{\mu} = 0$	forgatások a térben rendre az (x^1, x^2), (x^1, x^3), (x^2, x^3) síkban	3	
	Lorentz-lökések („boost”): forgatások rendre az (x^0, x^1), (x^0, x^2), (x^0, x^3) síkban	3	6

Mindegyik transzformáció-típust folytonos paraméterek jellemzik. A táblázat jobb szélén feltüntetett egész számok azoknak a folytonos valós paramétereknek a számai, amelyeket az egyes transzformációk egyértelmű megadásához szükséges és elégséges használni. **A Poincaré-transzformációk explicit alakban az alábbiak:**

1. **Időbeli eltolás,**

$$t' = t + a, \qquad x^{i\,\prime} = x^i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.2.22}$$

ahol $a = b^0/c$ =áll. az eltolás nagysága, $-\infty < a < \infty$, ill. b^0 a transzformációt meghatározó folytonos paraméter.

2. **A térbeli eltolások** azt jelentik, hogy a K-beli térkoordinátarendszer origóját a K'-beli térkoordinátarendszer origójából a $\vec{b}$ =áll. hármas-vektorral történő

eltolással kapjuk meg, és a két térkoordinátarendszer megfelelő tengelyei egymással párhuzamosak:

$$t' = t, \qquad x^{i\prime} = x^i + b^i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.2.23}$$

Az eltolást megadó $\vec{b}$ vektor 3 Descartes-komponense a transzformáció 3 darab folytonos paramétere, $-\infty < b^i < \infty$.

3. **A térbeli forgatások** a térbeli koordinátarendszernek adott irány (tengely) körüli adott szögű elforgatásai, miközben az origó helyben marad és az idő az eredeti és az elforgatott rendszerben azonos, $t' = t$. Térbeli elforgatások között 3 független van. Ezek rendre az $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$-tengely körüli elforgatások, amelyek egymás utáni végrehajtásával tetszőleges forgatás megkapható. Ezek olyan transzformációk, amelyek a 3-dimenziós térben a helyzetvektorokat invariánsan hagyják, $\vec{r}\,' = \vec{r}$. A helyzetvektor Descartes-komponenseinek transzformációja térbeli elforgatás során

$$\sum_{i=1}^{3} x^{i\prime} x^{i\prime} = \sum_{i=1}^{3} x^i x^i. \tag{1.2.24}$$

Az ilyen transzformációkat 3×3-as $\mathbf{O}$ ortogonális mátrixok írják le,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{O}\mathbf{r} \tag{1.2.25}$$

hiszen

$$\mathbf{r}'^{\,T}\mathbf{r}' = \mathbf{r}^T\mathbf{O}^T\mathbf{O}\mathbf{r} = \mathbf{r}^T\mathbf{r} \tag{1.2.26}$$

akkor és csak akkor áll fenn azonosságként, ha

$$\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{1}, \tag{1.2.27}$$

azaz ha az $\mathbf{O}$ mátrix ortogonális. (Megemlítjük, hogy csak azok az ortogonális mátrixok írnak le forgatásokat, amelyeknek a determinánsa 1-gyel egyenlő.) Ekkor a Lorentz-transzformáció $L^\mu{}_\nu$ mátrixának elemei

$$L^0{}_0 = 1, \quad L^0{}_i = L^i{}_0 = 0, \quad L^i{}_j = O^{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1.2.28}$$

Tetszőleges térbeli elforgatást 3 paraméterrel jellemezhetünk. Ezek lehetnek

(a) vagy az $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$-tengely körüli elforgatások $\alpha_i \in [0, 2\pi]$ szögei $(i = 1, 2, 3)$, vagy

(b) az elforgatás tengelyének irányát megadó $\vec{n}$ egységvektor (2 független adat) és az adott tengely körüli elforgatás $\alpha \in [0, 2\pi]$ szöge.

4. **A Lorentz-lökések** azok a koordinátatranszformációk, amelyek a téridő tetszőleges pontjának két olyan K és K' téridőbeli koordinátarendszerben mért x^μ ill. $x^{\mu\,\prime}$ koordinátái között teremtenek kapcsolatot, amikor a megfelelő K' inerciarendszer a K inerciarendszerhez képest $\vec{V}$ relatív sebességgel mozog. (Feltesszük, hogy megfelelő hármas-térbeli koordinátarendszerek megfelelő tengelyei és origója a $t = t' = 0$ pillanatban egybeestek.) A transzformációt

megadó 3 folytonos paraméter a K' inerciarendszer K inerciarendszerhez képesti $\vec{V}$ sebességének 3 Descartes-komponense. Miután létezik határsebesség, a c vákuumbeli fénysebesség, amit a tapasztalat szerint semmilyen test, vagy anyagi pont sem tud elérni, csak tetszőlegesen megközelíteni, azért $0 \leq |\vec{V}| < c$ értékeket vehet csak fel a sebesség nagysága. A **Lorentz-lökések**nek nevezett forgatások a térkoordinátákat és az időkoordinátát összekeverik ellentétben a hármas-térbeli forgatásokkal, amelyek az időkoordinátát érintetlenül hagyják. A Lorentz-lökésekből 3 független van, hiszen a K' rendszer a K-hoz képest mozoghat annak x^1, x^2 ill. x^3 tengelye irányában, aminek rendre az (x^0, x^1), (x^0, x^2) és (x^0, x^3) síkban történő forgatások kell hogy megfeleljenek.

A térbeli forgatások és az inerciarendszerek közötti áttérést leíró Lorentz-lökések együttesen alkotják a **Lorentz-transzformációkat**. Összesen 4 független eltolás és 6 független Lorentz-transzformáció, azaz 10 független Poincaré-transzformáció van.

Példa térbeli elforgatásra. Emlékeztetőnek álljon itt a térbeli forgatásokra egy példa. Ha a K koordinátarendszer a K' koordinátarendszerhez képest az $x^3 = x^{3\,\prime}$ tengely körül φ szöggel van elforgatva (forgatás az (x^1, x^2) síkban), akkor

$$\begin{aligned} x^{1\,\prime} &= x^1 \cos\varphi + x^2 \sin\varphi, & x^{2\,\prime} &= -x^1 \sin\varphi + x^2 \cos\varphi, \\ x^{3\,\prime} &= x^3, & x^{0\,\prime} &= x^0, \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

avagy ugyanez mátrixalakban:

$$(x^{\mu\,\prime}) = (L^\mu{}_\nu)(x^\nu), \tag{1.2.30}$$

azaz

$$\begin{pmatrix} x^{0\,\prime} \\ x^{1\,\prime} \\ x^{2\,\prime} \\ x^{3\,\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{1.2.31}$$

A hármas-térbeli forgatás ortogonális mátrixa ekkor

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.32}$$

a megfelelő Lorentz-transzformáció mátrixa pedig

$$(L^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.2.33}$$

Példa Lorentz-lökésre. Keressük most meg a Lorentz-lökést leíró transzformáció explicit alakját abban az esetben, amikor a K inerciarendszer a K' rendszerhez képest az x^1-tengely irányában V sebességgel mozog és megfelelő koordinátatengelyeik párhuzamosak. Mivel most is forgatásról van szó, a transzformáció, hasonlóan a térbeli forgatásokhoz, lineáris:

$$\begin{aligned} x^{0\,\prime} &= ax^0 + bx^1, \qquad & x^{1\,\prime} &= dx^0 + ex^1. \\ x^{2\,\prime} &= x^2, & x^{3\,\prime} &= x^3. \end{aligned} \tag{1.2.34}$$

A megfelelő Lorentz-transzformáció mátrixa pedig

$$(L^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.35}$$

Itt az a, b, d és e együtthatókat kell meghatározzuk abból a feltételből, hogy a transzformáció során az ívhossz négyzete invariáns:

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = (x^{0\prime})^2 - (x^{1\prime})^2. \tag{1.2.36}$$

Az (1.2.34) képleteket behelyettesítve az azonosság bal oldalába, leolvassuk, hogy az azonosság akkor és csak akkor teljesül, ha

$$e^2 - b^2 = 1, \qquad d^2 - a^2 = -1, \qquad ed - ab = 0. \tag{1.2.37}$$

Ezek azok a megszorítások, amelyek az ivhossznégyzet invarianciájából következnek a Lorentz-transzformáció mátrixának explicit alakjára nézve. Ezt az egyenletrendszert kielégíti, ha az állandókat az alábbi módon paraméterezzük:

$$a = e = \cosh\psi, \qquad b = d = \sinh\psi. \tag{1.2.38}$$

A ψ paraméternek nyilvánvalóan a transzformáció egyetlen fizikai paraméterétől, az inerciarendszerek V relatív sebességétől kell függenie. A keresett Lorentz-lökés

$$x^{0\,\prime} = x^0\cosh\psi + x^1\sinh\psi, \qquad x^{1\,\prime} = x^0\sinh\psi + x^1\cosh\psi \tag{1.2.39}$$

azaz

$$\begin{pmatrix} x^{0\,\prime} \\ x^{1\,\prime} \\ x^{2\,\prime} \\ x^{3\,\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi & 0 & 0 \\ \sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{1.2.40}$$

alakú. A pszeudo-euklideszi geometria következtében a trigonometrikus függvények helyett hiperbolikus függvények szerepelnek.

A ψ paraméter és a V sebesség kapcsolatát úgy kapjuk meg, hogy a K rendszer origójának mozgását vizsgáljuk. Erre egyrészt $x^1 = 0$, másrészt

$$x^{0\,\prime} = x^0\cosh\psi, \qquad x^{1\,\prime} = x^0\sinh\psi. \tag{1.2.41}$$

A két egyenlet megfelelő oldalait elosztva egymással megkapjuk a keresett összefüggést:

$$\tanh\psi \;=\; \frac{x^{1\,\prime}}{x^{0\,\prime}} = \frac{Vt}{ct} = \frac{V}{c}, \tag{1.2.42}$$

azaz

$$\psi \quad = \quad \mathrm{ar\ tanh}\,\frac{V}{c} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+(V/c)}{1-(V/c)}. \tag{1.2.43}$$

Végül a hiperbolikus függvényekre vonatkozó azonosságokat felhasználva:

$$x^{1\,\prime} = \frac{x^1 + (V/c)x^0}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad x^{0\,\prime} = \frac{x^0 + (V/c)x^1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \tag{1.2.44}$$

Ugyanezt az $x^1 = x$ és $x^0 = ct$ jelölésben írva:

$$x' = \frac{x + Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad t' = \frac{t + (V/c^2)x}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \tag{1.2.45}$$

Ez tehát az x^1-irányú Lorentz-lökést leíró koordinátatranszformáció.

A Lorentz-transzformációkkal kapcsolatos észrevételek:

1. **A Lorentz-transzformáció mindig két elemi esemény koordináta-különbségeinek a transzformációját adja meg** [2]. Ha ezt nem jelöljük külön és a koordináták transzformációját írjuk fel, akkor hallgatólagosan az egyik elemi eseménynek a K és K' rendszerek origójának egybeesését tekintjük. Ez például abból látszik, hogy az ívhossz négyzete, (1.2.17), amelynek invarianciáját a transzformáció során megköveteltük, a kiszemelt elemi esemény és az origók egybeesése, mint elemi esemény közti invariáns távolság négyzete. A mondottak következtében **a Δx^μ koordinátadifferenciák és a dx^μ koordinátadifferenciálok transzformációja is ugyanolyan alakú mint az x^μ koordinátáké.**
2. A képleteink értelmetlenné válnak, ha a V sebesség nagyságának helyére a c vákumbeli fénysebességet helyettesítjük. Ez visszatükrözi az a tapasztalati tényt, hogy nemcsak a vákuumbeli fénysebességnél gyorsabban mozgó, hanem a **vákuumbeli fénysebességgel mozgó inerciarendszer sem lehetséges.**
3. Ha a K rendszer a fenti példában a K' rendszerhez képest ellentétes irányban mozog, akkor az (1.2.44) és az (1.2.45) képletekben meg kell fordítani V előjelét.
4. **A Lorentz-lökések a $V \ll c$ határesetben a Galilei-transzformációkba mennek át.** Ez azt jelenti, hogy a relativisztikus mechanika ezen határesete a Newton-i mechanika, hiszen a relativisztikus erőtörvényeknek olyan alakúaknak kell lenniük, hogy visszakapjuk belőlük a kis sebességek (azaz $c \to \infty$ ill. $v/c \ll 1$) határesetében a nem-relativisztikus, Newton-i mechanika erőtörvényeit, máskülönben a relativisztikus elmélet nem lehetne összhangban a kis sebességek tartományában szerzett tapasztalatokkal.
5. Ha a szokásosabb jelöléssel élünk, azaz a K inerciarendszerhez képest annak x^1-tengelye (pozitív) irányában állandó V sebességgel mozgó K' rendszerre alaklmazzuk a fenti képleteket, akkor

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \tag{1.2.46}$$

1.2.5 Hosszúság és időtartam

Távolságkontrakció. A Lorentz-transzformációk ismeretében megvizsgáljuk, hogy milyen hosszúnak látszik a hosszának irányában, V sebességgel mozgó rúd.

Legyen a rúd a K rendszerben nyugalomban, és az abban nyugvó megfigyelők által mért hossza, a **nyugalmi hossz**, legyen $\Delta x = \ell_0$. Mozogjon a K' rendszer a K-hoz képest V sebességgel az x tengely irányában. Mérjük meg a rúd hosszát K'-ben! Ez két egyidejű esemény K'-ben, $\Delta t' = 0$, amikor azok a megfigyelők, akik mellett a rúd egyik ill. másik vége éppen elhalad, bemondják az x'_1 és x'_2 koordinátájukat. Az (1.2.45) transzformáció szerint ez a két esemény a rúd nyugalmi rendszerében nem egyidejű, $\Delta t = \frac{V}{c^2}\Delta x = \frac{V}{c^2}\ell_0$. A mozgó rúd hossza tehát a K' rendszerben

$$\ell = x'_2 - x'_1 = \Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \ell_0\sqrt{1-(V/c)^2} < \ell_0. \tag{1.2.47}$$

Ezt a jelenséget, hogy a hosszának irányában mozgó rúd a nyugalmi hosszánál rövidebbnek látszik, távolságkontrakciónak nevezik. A dolog a fentihez képest fordított helyzetben is igaz, ha K-ból nézzük a K'-ben nyugvó rudakat, akkor azok is rövidebbnek látszanak a nyugalmi hosszuknál. A (1.2.45) transzformáció képletéből az is látszik, hogy a rúd transzverzális méretei a K és a K' inerciarendszerben azonosak.

Térfogat. A távolságkontrakció következtében egy mozgó test $\mathcal{V}$ térfogata kisebbnek látszik a test $\mathcal{V}_0$ nyugalmi térfogatánál: $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0\sqrt{1-(V/c)^2}$.

Idődilatáció. **Inerciarendszerben nyugvó órán eltelő időtartamok rövidebbek, mint a megfelelő időtartamok egy ehhez képest állandó sebességgel mozgó órán. Ez az időtartamok látszólagos meghosszabbodásának jelensége, az ún. idődilatáció.**

Teljen el a K inerciarendszerben nyugvó órán $\Delta t = \Delta\tau$ sajátidő. A mutató kezdeti és végső állása a K-ban két egyhelyű esemény, $\Delta x = 0$. Ennek a két eseménynek a K' rendszerben

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (V/c^2)\Delta x}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \tag{1.2.48}$$

az időkülönbsége.

Egyhelyűség, egyidejűség. A Lorentz-transzformációk segítségével beláthatjuk az alábbiakat:

1. Két, időszerűen elválasztott esemény esetén mindig található olyan inerciarendszer, amelyben a két esemény egyhelyű. (A $\Delta x = 0$ egyenlet mindig kielégíthető, ha a K'-ről olyan K rendszerre térünk át, amelynek $-V$ sebessége $-V = -\Delta x'/\Delta t'$, hiszen ez a sebesség az események időszerű elválasztottsága miatt kisebb mint c és így értelmes.)
2. Két, térszerűen elválasztott esemény esetén mindig található olyan inerciarendszer, amelyben a két esemény egyidejű.

A két esemény időszerű (térszerű) elválasztottsága tehát nemcsak szükséges, hanem elégséges feltétele is annak, hogy létezzen olyan inerciarendszer, amelyben a két esemény egyhelyű (egyidejű).

Noha a speciális relativitáselmélet lényege az, hogy a Természet törvényei minden inerciarendszerben azonosak, ,,melléktermékként" kiderül belőle, hogy **az időtartamok és a távolságok, ill. az egyhelyűség és az egyidejűség fogalmai vonatkoztatási rendszertől függőek, relatívak**. Ez annyira jelentős változás a térnek és az időnek a Newton-i mechanikában kialakult szemléletéhez képest, hogy az elmélet létrejöttekor ezt hangsúlyozták, amikor az elméletet ,,relativitáselmélet"-nek nevezték el. Az elnevezés azonban nem változtat azon a tényen, hogy **a relativitáselmélet a Természet törvényeinek egyetemességét, általános érvényét fogalmazza meg alapelvként**. Sajnálatos módon az utóbbi a köztudatban nem eléggé vált ismertté.

1.2.6 A sebességek összeadása. A Fizeau-kísérlet

Mozogjon egy részecske a K' inerciarendszerben $\vec{v}'$ sebességgel, a K' inerciarendszer pedig a K inerciarendszer x tengelye irányában V_x sebességgel. Azt kérdezzük, hogy mi a részecske sebessége a K rendszerben.

A Newton-i mechanikában tudjuk a választ: $v_x = V_x + v'_x$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$. **A részecske mozgó rendszerben mért sebességét és a mozgó rendszernek az ,,álló" rendszerhez képest mért sebességét (a ,,hordozó" sebességet) vektorilag kell összeadni ahhoz, hogy megkapjuk a részecske ,,álló" rendszerben mért sebességét.**

A speciális relativitáselméletben a sebességösszeadás szabálya más, mint a Newton-i mechanikában. A két esemény, amelynek a koordinátáit vizsgáljuk, a részecske kezdeti és infinitezimálisan közeli, későbbi helyzete. Ezek koordináta- és időkülönbségeinek hányadosa adja a sebességet az egyik és a másik inerciarendszerben is. A K' inerciarendszerben tehát $v'_x = dx'/dt'$, $v'_y = dy'/dt'$, $v'_z = dz'/dt'$, a K rendszerben pedig az (1.2.45) transzformáció differenciális alakját felhasználva:

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V_x dt'}{dt' + (V_x/c^2)dx'} = \frac{v'_x + V_x}{1 + \frac{V_x v'_x}{c^2}}, \\
v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt' + (V_x/c^2)dx'}\sqrt{1 - (V_x^2/c^2)} = \frac{v'_y\sqrt{1 - (V_x^2/c^2)}}{1 + \frac{V_x v'_x}{c^2}}, \\
v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt' + (V_x/c^2)dx'}\sqrt{1 - (V_x^2/c^2)} = \frac{v'_z\sqrt{1 - (V_x^2/c^2)}}{1 + \frac{V_x v'_x}{c^2}}. \qquad (1.2.49)
\end{aligned}$$

Ez a **sebességek összeadásának relativisztikus szabálya.** Ha a mozgó rendszer V_x sebessége és a részecske mozgó rendszerbeli sebessége is nagyságát tekintve sokkal kisebb, mint a vákumbeli fénysebesség, akkor visszakapjuk a sebességösszeadás Newton-i mechanikában érvényes szabályát. (A $V_x/c \to 0$ ill. $v'_x/c \to 0$ határértéket vesszük az (1.2.49) képletekben.)

Fizeau kísérlete igazolja [2], hogy ezt a sebességösszeadási szabályt kell használni nagy sebességek esetén (ld. 3. ábra). A kísérlet lényege, hogy egy interferométer karjaiban víz áramlik, mondjuk a fénysugárral azonos irányban. Ha az áramlás irányát ellentétesre változtatjuk, akkor az interferenciacsíkok eltolódnak. A csíkeltolódás azzal kapcsolatos, hogy a fény közegben a közeghez képest terjed c/n sebességgel (n a törésmutató), s ezért az egyik esetben a laboratóriumhoz

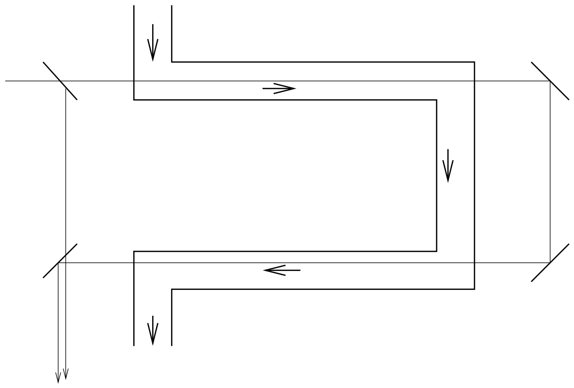

Figure 3: A Fizeau-kísérlet vázlata. A nyilak az interferométerben a folyadék áramlását jelzik. Az egyik fénysugár először az interferométer felső karján, majd az alsón halad végig a folyadékkal azonos irányban. A referencia-fénysugár közvetlenül verődik vissza egy félig áteresztő tükörről az interferométer kimenetének irányába. Ezután a folyadék áramlási irányát megfordítják, úgyhogy a karokban haladó fénysugár és a folyadék sebessége ellentétes irányú lesz. Azt figyelik meg, hogy folyadék áramlási irányának megfordításakor milyen mértékű az interferométer kimenetén az interferenciacsíkok eltolódása.

képest $c_+ = (c/n) + v$, a másikban $c_- = (c/n) - v$ sebességgel kellene terjednie a Newton-i mechanika szerint. Így nyilván különböző idők alatt futja be a fény az interferométer karjait aszerint, hogy az áramlási sebesség egyezik vagy ellentétes a fénysugár haladási irányával. Ha tehát megfordítjuk az áramlás irányát, megváltozik az interferáló fényhullámok fáziskülönbsége, ami az interferenciacsíkok eltolódását eredményezi. A megfigyelt csíkeltolódást azonban nem lehetett a sebességösszeadás nem relativisztikus szabálya szerint helyesen értelmezni. Ugyanakkor a tapasztalat összhangban van a sebességek relativisztikus összeadási szabályával, amely szerint a fény sebessége a laboratóriumi rendszerben

$$\begin{aligned} c_\pm &= \frac{(c/n) \pm v}{1 \pm (cv)/(nc^2)} \approx \left(\frac{c}{n} \pm v\right)\left(1 \mp \frac{v}{nc}\right) \\ &\approx \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \mathcal{O}(1/c). \end{aligned} \tag{1.2.50}$$

1.3 A Természet törvényeinek kovariáns alakja

A speciális relativitás elve értelmében a természettörvények minden inerciális vonatkoztatási rendszerben azonosak. Ebben a fejezetben arról van szó, hogy mit jelent ez a matematika nyelvén. A fizikai rendszerre vonatkozó minden ismeret a fizikai rendszer hatásfunkcionáljának konkrét alakjába van belesűrítve. A hatásból nyerjük a mozgásegyenleteket a legkisebb hatás elvének alkalmazásával. A speciális relativitás elve ezért azt követeli, hogy a hatás minden inerciarendszerben ugyanaz a funkcionál maradjon. Mivel a különböző inerciarendszerekben végzett mérések eredményei között a Lorentz-transzformációk teremtenek kapcsolatot, azért a hatásnak invariánsnak kell maradnia a Lorentz-transzformációkkal szemben. A fizikai törvényeket kifejező minden más egyenletnek pedig ugyancsak meg kell őriznie a matematikai alakját a Lorentz-transzformációk során. Az utóbbi kijelentést azonban pontosítani kell. Az C. függelékben ismertetjük a négyes-tenzorokat. **A négyes-tenzorok**

olyan matematikai objektumok, amelyek a Lorentz-transzformációk során változatlanok maradnak. Mivel a Természet törvényei a speciális relativitás elve értelmében minden inerciarendszerben azonosak, azért a megfelelő matematikai egyenleteknek tenzoregyenleteknek kell lenniük. Az C. függelékben azt mutatjuk meg, hogy a négyes-tenzorok komponensei hogyan transzformálódnak. Pontosan a tenzorkomponensek meghatározott transzformációs tulajdonságai biztosítják, hogy maga a tenzor vonatkoztatási rendszertől független matematikai objektum legyen.

1.3.1 Lorentz-kovariáns egyenletek

Mielőtt továbbhalad a jegyzet olvasásában, tanulmányozza a tenzorokról szóló C. függelék Tenzoralgebra c. részét (ld. a C.1. függeléket)!

Rövid kitérőként idézzük emlékezetünkbe, hogy Newton második törvénye a klasszikus mechanikában vektoregyenlet:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{1.3.1}$$

Az egyenlet bármely, egymáshoz képest tetszőlegesen elforgatott térbeli koordinátarendszerben ugyanilyen alakú. Ez azért van így, mert a hármas-vektorok a koordinátarendszer megválasztásától független objektumok (ld. az A. Függeléket). Azt is tudjuk azonban, hogy ugyanannak a vektornak különböző koordinátarendszerekben mások a komponensei. A vektor éppen azért marad koordinátarendszertől független matematikai objektum, mert térbeli elforgatások során a komponensei meghatározott módon transzformálódnak. Másképpen mondva: egy lineáris vektortér vektorai függetlenek attól, hogy hogyan választunk bázisvektorokat ebben a lineáris vektortérben. Minden vektor egyértelműen felbontható azonban tetszőleges bázisban a bázisvektorok lineáris kombinációjára. A lineáris kombináció együtthatói a vektorok komponensei az adott bázisban. A vektorkomponensek a bázis megváltoztatása esetén, azaz a koordinátarendszer megváltoztatása esetén megváltoznak, de úgy, hogy tetszőleges két vektor skaláris szorzata változatlan marad. Newton második törvényének vektorkomponensekben felírt alakja tehát nem marad változatlan, ha térbeli elforgatást hajtunk végre. Azonban az egyenlet mindkét oldala azonos módon transzformálódik. A K inerciarendszerben pl. az egyenlet komponensekben felírt alakja:

$$ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z; \tag{1.3.2}$$

a K z-tengelye körül α szöggel elforgatott K' rendszerben az egyenletek alakja:

$$\begin{aligned} m(a_x \cos\alpha + a_y \sin\alpha) &= F_x \cos\alpha + F_y \sin\alpha, \\ m(-a_x \sin\alpha + a_y \cos\alpha) &= -F_x \sin\alpha + F_y \cos\alpha, \\ ma_z &= F_z. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

A tanulság az, hogy a mozgásegyenlet, mint vektoregyenlet változatlan alakú marad, ha azonban komponensekben írjuk fel, akkor a K rendszerbeli vektorkomponensek segítségével kifejezett egyenlet alakja minden K' koordinátarendszerben más és más lesz.

A speciális relativitás elméletében is olyan matematikai objektumokat használunk, amelyek – hasonlóan a Newton-i mechanika vektoraihoz – vonatkoztatási rendszertől független matematikai objektumok. Ezek a tenzorok, pontosabb nevükön négyes-tenzorok. A Természet törvényei pedig tenzoregyenletek alakját öltik.

A Természet törvényei a speciális relativitás elve értelmében függetlenek attól, hogy mely inerciarendszerben fogalmazzuk meg azokat. Ez matematikailag azt jelenti, hogy a Természet törvényeit leíró egyenletek alakjának minden inerciarendszerben azonosnak kell lennie. Ezt az biztosítja, ha **a törvényeket kifejező egyenletek Lorentz-kovariánsak, azaz**

$$\mathbf{négyestenzor = 0}$$

alakúak. Ekkor ugyanis Lorentz-transzformáció során az egyenlet, mint tenzoregyenlet változatlan marad. Minden

$$T = S \tag{1.3.4}$$

alakú matematikai egyenlet Lorentz-kovariáns, ha a bal és a jobb oldalon álló négyestenzor, T és S azonos típusúak. Vigyázat! A Lorentz-transzformáció során a tenzorok komponensei meghatározott módon transzformálódnak. Ezért, ha a Természet törvényeit leíró egyenleteket a tenzorkomponensekre vonatkozó egyenletek formájában írjuk fel, és a tetszőleges K' rendszerben érvényes egyenlet mindkét oldalát kifejezzük egy másik K rendszerhez tartozó tenzorkomponensekkel, akkor az egyenletek konkrét alakja természetesen minden K' vonatkoztatási rendszerben más lesz aszerint, hogy hogyan transzformálódnak a megfelelő tenzorkomponensek.

1.3.2 Invariáns hatás

A fizikai rendszerek mozgásegyenleteit **a legkisebb hatás elve** alapján származtatjuk, amelyet a speciális relativitás elméletében ugyanúgy érvényesnek tekintünk, mint a Newton-i mechanikában. **A legkisebb hatás elve kimondja, hogy létezik az általános koordinátáknak és az általános sebességeknek olyan funkcionálja, amely az adott kezdő- és végpont közötti valóságos mozgás pályáján extremális értéket vesz fel, ez a hatásfunkcionál. A speciális relativitáselméletben megköveteljük, hogy a hatás Lorentz-invariáns, azaz Lorentz-skalár legyen.** Egyrészt, a hatásnak is a tenzorok közül kell kikerülnie, mert egyedül ezek olyan matematikai objektumok, amelyek a Lorentz-transzformációk során változatlanok maradnak. Másrészt, inerciarendszerben a térben nincsenek kitüntetett irányok, amit csak az fejezhet ki, ha a fizikai rendszer hatásfunkcionálja Lorentz-skalár. (Pl. egy négyesvektor kitüntetne a térben egy irányt, a négyestenzor pedig anti-szimmetrikus része révén kitüntetne két irányt is, a komponensekből képezett polár- és axiálvektor irányát, stb.) **A Lorentz-skalár hatásfunkcionál a legáltalánosabban, a legtömörebben és a speciális relativitás elvével összhangban tartalmazza a fizikai rendszerre vonatkozó összes fizikai információt.**

A Lorentz-invariancia mellett általában azt is meg kell követelni, ha a rendszer nincsen külső tér hatása alatt, hogy a hatás legyen a téridőbeli (térbeli és időbeli) eltolásokkal szemben is invariáns. Továbbá, ha csak a mechanika és az elektrodinamika esetéről van szó, akkor a hatásnak a tértükrözéssel és az időmegfordítással szemben is invariánsnak kell lennie, mert a mechanika törvényei és az elektromágneses kölcsönhatás ezekkel a szimmetriákkal rendelkeznek.

1.4 Pontrészecske mozgása

Ebben a fejezetben olyan részecske mozgását tárgyaljuk, amelyre semmiféle más test nem hat erővel. Az ilyen részecskét **szabad részecskének** nevezzük. Minden részecske mozgása során egy világvonalat ír le a téridőben. A szabad részecske hatásfunkcionálját a részecske világvonalának invariáns hosszával definiáljuk, ami Lorentz-skalár. Ebből a legkisebb hatás elve alapján megkapjuk a szabad részecske mozgásegyenletét. Megmutatjuk, hogy a megoldás egyenesvonalú egyenletes mozgás. Végül a téridő szimmetriái alapján értelmezzük a szabad részecske négyesimpulzusát és négyes-impulzusmomentumát, és megfogalmazzuk a rájuk érvényes megmaradási törvényeket.

1.4.1 Négyessebesség, négyesgyorsulás

A pontrészecske mozgása során a téridőben egy vonalat rajzol ki, ezt nevezzük a részecske világvonalának. Ha valamely K inerciarendszerben a részecske koordinátáit az x^μ koordináták adják meg, akkor a világvonalat paraméterezhetjük a világvonal s ívhosszával, amelyet a részecske ,,történetének" adott elemi eseményétől mérünk: $x^\mu(s)$. Ezzel egyenértékű természetesen az ugyanettől az elemi eseménytől mért τ sajátidő, hiszen $s = c\tau$. Idézzük emlékezetünkbe, hogy a τ sajátidőt a részecskével együttmozgó óra méri.

Értelmezzük **a részecske négyessebességét** a világvonal s paraméterű pontjában az

$$u^\mu(s) \quad = \quad \frac{dx^\mu(s)}{ds} \tag{1.4.1}$$

definícióval, **a négyesgyorsulását** pedig a

$$w^\mu(s) \quad = \quad \frac{d^2x^\mu(s)}{ds^2} \tag{1.4.2}$$

definícióval. A definícióból következik, hogy **az u^μ négyessebesség a világvonal érintő egységvektora**, $u^\mu u_\mu = 1$, hiszen $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$. Ennek viszont az a további következménye, hogy **a négyesgyorsulás merőleges a négyessebességre:**

$$w^\mu u_\mu = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}\,\frac{dx_\mu}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(u^\mu u_\mu) = 0. \tag{1.4.3}$$

Egyúttal azt is vegyük észre, hogy a részecske világvonalának érintője, **a négyessebesség időszerű vektor** és $u^0 > 0$, azaz a világvonal adott pontjának érintője mindig az ehhez a ponthoz tartozó, jövőbeli fénykúpon belül helyezkedik el. Ez a tény fejezi ki, hogy **a részecske sebessége mindig kisebb mint a fénysebesség.**

Nézzük meg, hogy mi az így bevezetett négyessebesség kapcsolata a részecske $\vec{v}$ sebességével. Utóbbi a 3-dimenziós térben értelmezett vektor, jelölje v^i $(i = 1, 2, 3)$ a sebességvektor térbeli Descartes-komponenseit. Térjünk át a világvonalnak a K inerciarendszer t rendszeridejével történő paraméterezésére. Ekkor $x^0(t) = ct$, a részecske infinitezimális elmozdulásához tartozó invariáns ívelem

$$ds = cd\tau = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}, \tag{1.4.4}$$

és a négyessebesség komponensei a 3-dimenziós térben értelmezett sebesség Descartes-komponenseivel az alábbi módon függnek össze:

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{dx^\mu(t)}{cdt\,\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = \left(\frac{cdt}{cdt\,\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}, \frac{dx^i(t)}{cdt\,\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}, \frac{v^i(t)}{c\,\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\right). \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Ez a kapcsolat a négyessebesség és a 3-dimenziós térben értelmezett sebesség komponensei között minden inerciarendszerben ugyanilyen alakú. Amíg azonban a négyessebesség komponensei négyesvektorként transzformálódnak Lorentz-transzformációk során, addig a hármas-sebesség komponensei nem. A sebességösszeadás relativisztikus szabálya alapján kell meghatározni a részecske K rendszerben mért $\vec{v}$ hármassebességéből a részecske azon K' rendszerben mért $\vec{v}'$ hármas-sebességét, amely a K-hoz képest állandó $\vec{V}$ sebességgel mozog.

1.4.2 Szabad részecske mozgásegyenlete

A hatásfunkcionál. **A mozgásegyenletet a legkisebb hatás elve alapján kapjuk meg, amely kimondja, hogy létezik a világvonalnak olyan funkcionálja, a hatás, amely az adott kezdő- és végpont között megvalósuló mozgás pályáján szélsőértéket vesz fel.** Ha tehát gondolatban a részecske világvonalát a valóságoshoz képest infinitezimálisan megváltoztatjuk, miközben a világvonal kezdő- és végpontját rögzítjük, akkor a hatásfunkcionál ennek megfelelő δS megváltozásának zérusnak kell lennie:

$$\delta S_{\text{rögzített végpontok}} = 0. \tag{1.4.6}$$

Az első kérdés az, hogy mi a szabad pontrészecske hatásfunkcionálja. A hatástól megköveteljük, hogy Lorentz-skalár legyen. A legegyszerűbb Lorentz-skalár, ami a pontrészecske mozgását jellemzi, a részecske világvonala infinitezimális darabkájának ds elemi ívhossza, amit a részecske két infinitezimálisan közeli helyzete jelöl ki a világvonalon. A legegyszerűbb kifejezés, ami ebből képezhető, a lineáris. A hatást ezért

$$S = -\alpha \int_a^b ds \tag{1.4.7}$$

alakban vesszük fel. Itt a és b a részecske világvonalának két tetszőleges pontja, az $\alpha > 0$ állandót pedig később fogjuk rögzíteni. A negatív előjelet azért választjuk, hogy a hatásnak minimuma (és ne maximuma) legyen a valóságos mozgás pályáján. Az invariáns ívhosszal teljesen egyenértékű paraméter a részecske τ sajátideje, amely az ívhosszal $ds = cd\tau$ összefüggésben áll, úgyhogy a hatás

$$S = -\alpha \int_{\tau_a}^{\tau_b} cd\tau \tag{1.4.8}$$

alakba is átírható, ahol τ_a ill. τ_b a sajátidő rendre a világvonal a és b pontjában.

A mozgásegyenlet. A szabad részecske (1.4.8) hatásfunkcionáljából a legkisebb hatás elve alapján a szabad részecske mozgására az alábbi mozgásegyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = 0. \tag{1.4.9}$$

Ez az egyenlet a szabadon mozgó, azaz semmilyen erő hatása alatt nem álló pontrészecske mozgásegyenlete. **A szabadon mozgó részecske négyesgyorsulása zérus.**

Származtassuk most le a hatás (1.4.8) kifejezéséből a szabad részecske mozgásegyenletét. Ehhez válasszunk egy tetszőleges K inerciarendszert. Legyen ebben a részecske világvonalának paraméteres alakja $x^\mu(s)$. A hatás kifejezése a K inerciarendszerben átírható az alábbi alakba:

$$S = -\alpha \int_{s_a}^{s_b} ds \sqrt{\frac{dx^\mu(s)}{ds} \frac{dx_\mu(s)}{ds}}. \tag{1.4.10}$$

Képezzük ennek δS megváltozását a világvonal **tetszőleges, elképzelt infinitezimális megváltozása, azaz variációja**,

$$x^\mu(s) \rightarrow x^\mu(s) + \delta x^\mu(s) \tag{1.4.11}$$

esetén:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\alpha \int_{s_a}^{s_b} ds \frac{\frac{dx^\mu(s)}{ds} \frac{d\delta x_\mu(s)}{ds}}{\sqrt{u^\mu u_\mu}} \\ &= -\alpha \int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{d}{ds} \left(u^\mu \delta x_\mu \right) - \delta x_\mu \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right] \\ &= -\alpha \left[u^\mu \delta x_\mu |_a^b - \int_{s_a}^{s_b} ds \delta x_\mu \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right]. \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Ha feltesszük, hogy a pálya kis változtatását úgy végezzük, hogy a kezdő- és a végpont ne változzon, és megköveteljük, hogy a hatás se változzon, ahogy azt a legkisebb hatás elve értelmében tenni kell, akkor azt kapjuk, hogy a hatás megváltozására (variációjára) a

$$\delta S_{\text{rögzített végpontok}} = \alpha \int_{s_a}^{s_b} ds \delta x_\mu \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0 \tag{1.4.13}$$

egyenletnek kell tetszőleges δx^μ variáció esetén fennállni. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha az integrandusban a tetszőleges δx^μ variációt megszorzó kifejezés azonosan eltűnik, azaz ha fennáll az (1.4.9) egyenlet. Ezt akartuk belátni.

A mozgásegyenlet megoldása. A szabadon mozgó részecske négyesgyorsulása zérus. Integrálással ebből azt kapjuk, hogy a szabad részecske négyessebessége állandó a részecske világvonala mentén:

$$\frac{dx^\mu(s)}{ds} = u^\mu = \text{áll.} \tag{1.4.14}$$

A világvonal tehát olyan görbe, amelynek érintő egységvektora állandó vektor, azaz **a szabad részecske világvonala egyenes,**

$$x^\mu(s) = x^\mu(s_a) + \int_{s_a}^{s} ds' u^\mu = x^\mu(s_a) + (s - s_a) u^\mu \tag{1.4.15}$$

amely átmegy az $x^\mu(s_a)$ ponton. Utóbbi és az u^μ =áll. négyessebesség a mozgás kezdőfeltételei. A négyessebesség állandósága egyúttal azt is jelenti, hogy a részecske 3-dimenziós térben értelmezett $\vec{v}$ sebessége tetszőleges inerciarendszerben állandó. **A szabadon mozgó részecske tehát tetszőleges inerciarendszerben egyenesvonalú egyenletes mozgást végez.**

1.4.3 A Poincaré-szimmetria és a megmaradó mennyiségek

Azt a transzformációt nevezzük szimmetria-transzformációnak (röviden szimmetriának), amellyel szemben a hatás invariáns. A klasszikus mechanikában a tér és az idő szimmetriáinak megmaradási törvények a következményei. Az energia, az impulzus és az impulzusmomentum megmaradása annak a szimmetriának a következménye, hogy a rendszer invariáns rendre az időbeli eltolással, a térbeli eltolásokkal és a térbeli elforgatásokkal szemben. Ennek alapján az energia, az impulzus és az impulzusmomentum fogalmát az alábbi módon általánosítjuk a speciális relativitáselméletben: azt a mennyiséget nevezzük energiának, impulzusnak ill. impulzusmomentumnak, amelynek megmaradása annak a következménye, hogy a rendszernek az időbeli eltolás, a térbeli eltolás és a térbeli forgatás rendre a szimmetriája.

Pontrészecske négyesimpulzusa. A speciális relativitás elmélete szerint a tér és az idő vonatkoztatási rendszertől függő fogalmak, míg a négy-dimenziós téridő nem. Ezért azt várjuk, hogy az (adott inerciarendszeren belüli) térbeli ill. időbeli eltolással szemben mutatott szimmetria következtében megmaradó $\vec{p}$ hármas-impulzus, ill. energia vonatkoztatási rendszertől függő fogalmak, ugyanakkor a négy-dimenziós téridőben végrehajtott eltolásokkal szembeni szimmetria következtében olyan mennyiség fog megmaradni, ami kovariáns módon transzformálódik és 4 komponense van, melyeket adott inerciarendszerben a hármas-impulzus Descartes-komponenseivel és az energiával (ugyancsak 4 független adat!) lehet egyértelmű kapcsolatba hozni. Ez a várakozás teljes mértékben igazolódik. Mivel a szabad részecske, mint fizikai rendszer a téridőben végrehajtott tetszőleges irányú eltolásokkal szemben invariáns, azért létezik egy négyesvektor, amely ezen szimmetria következtében megmarad a részecske mozgása során. **A téridőben végrehajtott eltolásokkal szembeni szimmetria következtében megmaradó**

$$p^\mu = \alpha u^\mu = m_0 c u^\mu \tag{1.4.16}$$

négyesvektort a részecske négyesimpulzusának nevezzük. A szabad részecske megmaradó négyesimpulzusa arányos a részecske négyes-sebességével. Az α arányossági tényező ugyanaz, mint a hatásfunkcionálban szereplő, korábban nem rögzített arányossági tényező. Ennek $\alpha = m_0 c$ értékét, mint alább látni fogjuk, úgy lehet rögzíteni, hogy kis sebességek határesetében visszakapjuk a hármas-impulzus és a hármas-sebesség között a Newton-i mechanikában fennálló $\vec{p} = m_0\vec{v}$ kapcsolatot. Ezért m_0 a részecske **nyugalmi tömege**, azaz az a tehetetlen tömege, amelyet akkor mérhetünk ütközési kísérletekben, ha a sebessége elhanyagolhatóan kicsi a vákumbeli fénysebességhez képest. **Szabad mozgást végző pontrészecske négyesimpulzusa tehát állandó:** $p^\mu =$áll.

Lássuk be, hogy szabad részecske megmaradó négyesimpulzusát a (1.4.16) összefüggés definiálja. Legyen $x^\mu(s)$ a részecske világvonala a K inerciarendszerben. Nézzük meg, hogyan változik meg a hatásnak a valóságos mozgás pályáján felvett értéke, ha a koordinátarendszert a téridőben infinitezimálisan eltoljuk: $x^\mu \to x^\mu + \delta a^\mu$. A hatás megváltozása az (1.4.12) képlet alapján:

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{valódi pályán}} &= -\alpha \int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{d}{ds}(u^\mu \delta a_\mu) - \delta a_\mu \frac{d^2 x^\mu(s)}{ds^2} \right] \\ &= -\delta a_\mu \left. (\alpha u^\mu) \right|_{s_a}^{s_b} . \end{aligned} \tag{1.4.17}$$

A téridőbeli eltolás szimmetriája a pontrészecskének, ezért a hatás fenti megváltozása tetszőleges δa^μ eltolás esetén zérus:

$$\delta S_{\text{valódi pályán}} = 0. \tag{1.4.18}$$

Innen azt kapjuk, hogy a $p^\mu = \alpha u^\mu$ négyesvektor mozgásállandó. Az α arányossági tényező értékét alább fogjuk rögzíteni.

A négyesimpulzus és hármasimpulzus ill. az energia közötti kapcsolat. Miután a négyesimpulzus megmaradása a téridőbeli eltolási szimmetria következménye, azért a p^0 komponenst a pontrészecske energiájával, a p^i komponenst pedig a pontrészecske impulzusával fogjuk (állandó együtthatóktól eltekintve) definíció szerint azonosítani. Egyúttal megmutatjuk, hogy akkor maradunk a Newton-i mechanikával összhangban, ha az α arányossági tényezőt az $\alpha = m_0 c$ összefüggéssel rögzítjük.

A négyesimpulzus térszerű komponensei:

$$p^i = \alpha u^i = \frac{\alpha v^i}{c\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \qquad (i=1,2,3). \tag{1.4.19}$$

A $v \ll c$ határesetben p^i-nek át kell mennie az impulzus klasszikus definíciójába,

$$p^i \to \alpha v^i/c \equiv m_0 v^i, \qquad (i=1,2,3) \tag{1.4.20}$$

ahol m_0 a részecske **nyugalmi tömege** (a saját nyugalmi rendszerében mért tömege). Innen az α állandó értékét rögzíthetjük: $\alpha = m_0 c$. A részecske **impulzusa** tehát

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \equiv m v^i, \qquad (i=1,2,3) \tag{1.4.21}$$

ahol

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \tag{1.4.22}$$

a részecske ún. **mozgási tömege**. **A részecske mozgási tömege nagyobb a részecske nyugalmi tömegénél vagy egyenlő azzal; egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a részecske sebessége nulla:**

$$m \geq m_0. \tag{1.4.23}$$

Ha a részecske sebessége tetszőlegesen megközelíti a fénysebességet, akkor a tehetetlenségét és az impulzusát meghatározó mozgási tömeg minden határon túl megnő. **Ez a relativisztikus tömegnövekedés jelensége.** A részecskegyorsítókban, ahol a részecskéket a fénysebességhez közeli sebességekre gyorsítják fel, meg lehet figyelni a tehetetlenség mértékének ezt a növekedését, és azt a gyorsítók tervezésekor figyelembe is kell venni.

A négyesimpulzus időszerű komponense:

$$p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}. \tag{1.4.24}$$

Ennek értéke a klasszikus mechanikai határesetben ($v \ll c$):

$$p^0 \to \frac{1}{c}\left(m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2}\right). \tag{1.4.25}$$

Ezt úgy értelmezzük, hogy **a részecskének** az $\frac{1}{2}m_0v^2$ kinetikus energiája mellett **a nyugalmi tömegéből adódóan** még m_0c^2 **nyugalmi energiája is van.** A határesetben felvett alak mutatja, hogy a részecske E energiája és a négyesimpulzus p^0 komponense arányos egymással: $p^0 = E/c$.

Szabad részecske négyesimpulzusának megmaradása azt jelenti tehát, hogy a részecske energiája és impulzusa megmarad.

A tömeg és az energia ekvivalenciája. A speciális relativitás elmélete értelmében tehát a részecske energiája

$$E \;=\; cp^0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = mc^2. \tag{1.4.26}$$

Ez Einstein híres képlete, amely az energia és a (mozgási) tömeg azonosságát fejezi ki.

A tömeg és energia azonosságának egyik szép bizonyítéke **a tömegdefektus jelensége,** amelyet atommagreakciók során figyeltek meg. Képzeljük el, hogy két atommag, A és B ütköznek és a kölcsönhatás, a magreakció eredményeként a C és D reakciótermékek állnak elő. Az atommagok nyugalmi tömegeinek összege a reakció előtti és a reakció utáni állapotban általában nem egyenlő, $m_A + m_B \neq m_C + m_D$. A reakció során a nyugalmi tömeg nem megmaradó. A tömegkülönbségnek,

$$\Delta m = (m_A + m_B) - (m_C + m_D) \tag{1.4.27}$$

megfelelő $Q \equiv c^2\Delta m$ energia a reakció során kinetikus energia, vagy sugárzás formájában szabadul fel.

Szabad részecske energiája és impulzusa közti Einstein-féle összefüggés. További hasznos összefüggést kapunk, ha a négyesimpulzus nagyságát képezzük:

$$p^\mu p_\mu = \alpha^2 u^\mu u_\mu = \alpha^2 = m_0^2c^2. \tag{1.4.28}$$

Egyrészt látjuk, hogy a négyesimpulzus hossza a nyugalmi tömeggel arányos. Másrészt az alábbi **Einstein-féle összefüggést kapjuk a szabad részecske energiája és impulzusa között**:

$$E^2 \;=\; m_0^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2. \tag{1.4.29}$$

Ennek a képletnek a különleges jelentőségét az adja, hogy arra az esetre is lehet általánosítani, amikor a részecske nyugalmi tömege nulla. A Természetben előfordulnak ilyen részecskék (pl. a neutrinók, a fotonok és a gluonok). Zérus nyugalmi tömegű részecske energiája és impulzusa között Einstein képlete

$$E = |\vec{p}|c \tag{1.4.30}$$

összefüggést ad.

Pontrészecske pályaimpulzusmomentuma. **A szabad mozgást végző pontrészecske hatásfunkcionálja invariáns a téridőbeli elforgatásokkal szemben (hiszen Lorentz-skalár). Ennek következtében létezik egy megmaradó mennyiség, amelyet definíció szerint a részecske négyes-impulzusmomentumának nevezünk.** A megmaradó négyes-impulzusmomentum antiszimmetrikus, másodrendű tenzor,

$$J^{\mu\nu} \;=\; x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu = \text{áll.} \tag{1.4.31}$$

Ezt a $J^{\mu\nu}$ tenzort nevezzük a szabad részecske négyes-impulzusmomentumának.

Legyen a téridőbeli koordinátarendszer infinitezimális elforgatását leíró (lineáris) transzformáció $x^\mu \to x^\mu + x_\nu \delta\omega^{\mu\nu}$. Ez eleget kell hogy tegyen annak a követelménynek, hogy a tetszőleges x^μ négyesvektor hosszát változatlanul hagyja (a Lorentz-transzformációkat így definiáltuk):

$$(x^\mu + x_\nu \delta\omega^{\mu\nu})(x_\mu + x^\rho \delta\omega_{\mu\rho}) = x^\mu x_\mu. \tag{1.4.32}$$

Innen a transzformáció infinitezimális paramétereire az alábbi megszorítás adódik: $\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu}$. Azaz a transzformációnak csak 6 darab független infinitezimális paramétere van: $\delta\omega^{0i}$ a 3 független Lorentz-lökés és $\delta\omega^{12}$, $\delta\omega^{13}$, $\delta\omega^{23}$ a 3 független, térbeli forgatás paramétere.

Képezzük a hatás megváltozását infinitezimális Lorentz-transzformációk során (ld. (1.4.12)):

$$\begin{aligned}
\delta S_{\text{valódi pályán}} &= -m_0 c \int_{s_a}^{s_b} ds \frac{d}{ds}(u^\mu \delta\omega_{\mu\nu} x^\nu) \\
&= -\, p^\mu x^\nu \delta\omega_{\mu\nu}\Big|_{s_a}^{s_b} \\
&= -\frac{1}{2}\left(p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu\right)\delta\omega_{\mu\nu}\Big|_{s_a}^{s_b} = 0.
\end{aligned} \tag{1.4.33}$$

Innen azt kapjuk, hogy a $J^{\mu\nu} = p^\nu x^\mu - p^\mu x^\nu$ antiszimmetrikus, másodrendű négyestenzor komponensei a mozgás során állandók.

A négyes-impulzusmomentum komponenseinek fizikai jelentése. Vizsgáljuk meg az impulzusmomentum-tenzor komponenseinek jelentését, és annak az állításnak a jelentését, hogy azok mozgásállandók.

A $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$ antiszimmetrikus másodrendű tenzornak 6 független komponense van. Közülük 3 komponens a háromdimenziós térben értelmezett $\vec{j}$ impulzusmomentum 3 komponense:

$$j^1 = J^{23} = x^2p^3 - x^3p^2,\ j^2 = -J^{13} = x^3p^1 - x^1p^3,\ j^3 = J^{12} = x^1p^2 - x^2p^1, \tag{1.4.34}$$

azaz $\vec{j} = \vec{r} \times \vec{p}$. Az impulzusmomentum-tenzor megfelelő J^{ij} komponenseinek megmaradása tehát azt jelenti, hogy **a szabad részecske pálya-impulzusmomentuma megmarad.**

Az impulzusmomentum-tenzor J^{0i} komponensei háromdimenziós polárvektort definiálnak:

$$J^{0i} \;=\; c\left(tp^i - (E/c^2)x^i\right), \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1.4.35}$$

Ennek állandósága a mozgás során azt jelenti, hogy a mozgás $\vec{r}(t)$ pályájára tetszőleges inerciarendszerben fennáll az

$$\vec{r} \;=\; \text{áll.} + \frac{c^2}{E}\vec{p}t = \text{áll.} + \vec{v}t \tag{1.4.36}$$

alakú egyenlet. Ennek értelmében a szabad részecske egyenesvonalú egyenletes mozgása megmarad, hiszen ez egy egyenes egyenlete, és azon a részecske egyenletes mozgást végez, miután az E energia és a $\vec{p}$ impulzus megmaradása következtében a részecske

$$\vec{v} = c^2\vec{p}/E = \vec{p}/m \tag{1.4.37}$$

sebessége is állandó. Az impulzusmomentum-tenzor J^{0i} komponenseinek megmaradása tehát azt jelenti, hogy **a szabad részecske egyenesvonalú egyenletes mozgása megmarad.**

Szabad részecske impulzusmomentum-tenzorának megmaradása azt jelenti tehát, hogy a részecske impulzusmomentuma és egyenesvonalú egyenletes mozgása megmarad.

2 PONTTÖLTÉS MOZGÁSA KÜLSŐ ELEKTROMÁGNESES TÉRBEN

Ebben a fejezetben megfogalmazzuk azt az elméleti modellt, a négyes-vektorpotenciállal jellemzett fizikai mezőhöz minimálisan csatolt ponttöltés modelljét, amely alkalmas a külső elektromágneses térben mozgó ponttöltés tárgyalására. Végül foglalkozunk a ponttöltés mozgásával speciálisan adott külső terekben.

2.1 Minimális csatolás

Ebben a fejezetben az **a célunk, hogy eljussunk az elektromágneses mezőt jellemző fizikai mennyiségek, az elektromos térerősség és a mágneses indukció értelmezéséhez.** Ebből a célból töltött, pontszerű test mozgását fogjuk vizsgálni négyes-vektormezővel leírt fizikai mezőben, amikor a vektormező és a ponttöltés közötti kölcsönhatás úgynevezett **minimális csatolás** révén valósul meg. Az a tény, hogy a részecske e **töltéssel** rendelkezik, ebben az általános elméleti keretben csupán azt jelenti, hogy a részecskének van olyan tulajdonsága, ami nem nulla és ezért képes kölcsönhatni a vektormezővel. A vektormezőt az $A^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv A^\mu(x)$ négyes-vektorpotenciál jellemzi. (A jelölésünket leegyszerűsítjük azáltal, hogy a térmennyiségek, mint pl. a vektorpotenciál argumentumában nem írjuk ki a négyes-helyzetvektor (x^0, x^1, x^2, x^3) komponenseit, ha ez nem okvetlenül szükséges, hanem helyettük csak index nélküli x-szel jelöljük a térmennyiség függését a téridő tetszőleges pontjába mutató négyes-helyzetvektortól.) A kölcsönhatás általánosított potenciális energiája pedig a részecske e töltésének, $u^\mu(x(s))$ négyessebességének és az $A^\mu(x(s))$ négyes-vektorpotenciálnak a szorzata:

$$eu^\mu(x(s))A_\mu(x(s)), \tag{2.1.38}$$

ahol $x^\mu(s)$ a ponttöltés világvonala, s a Lorentz-invariáns ívhosszparaméter a görbe mentén. A (2.1.38) általánosított potenciális energia jelenti az úgynevezett minimális csatolást a vektormező és a ponttöltés között. Nyilvánvalóan, ha $e = 0$ lenne, azaz a részecske töltése nulla lenne, akkor nem hatna kölcsön a részecske és a fizikai mező.

Meg fogjuk mutatni, hogy a megfogalmazott elméleti modell, **a vektormezővel minimális csatolás révén kölcsönható ponttöltés modellje, alkalmazható a külső elektromágneses térben mozgó elektromos ponttöltés tárgyalására. Ezt abból fogjuk látni, hogy a részecske mozgásegyenleteiben megjelenik a Lorentz-erő tapasztalatból jól ismert erőtörvénye, ha e-t a részecske elektromos töltésével, az A^μ vektorpotenciált pedig az elektromágneses mező vektorpotenciáljával azonosítjuk. A Lorentz-erő kifejezése egyúttal azt is megmutatja, hogy nem a négyes-vektorpotenciál mérhető közvetlenül próbatöltések mozgásának megfigyelése révén, hanem az abból leszármaztatott négyes-térősség komponensei, azaz az elektromos térerősség és a mágneses indukció az elektromágneses mezőt jellemző mérhető mennyiségek. A Lorentz-erő kifejezése megadja ezen térmennyiségek pontos mérési utasítását.** A mozgásegyenleteknek a legkisebb hatás elve alapján történő leszármaztatása révén kapjuk meg a kapcsolatot a négyes-vektorpotenciál komponensei és a Lorentz-féle erőtörvényben szereplő négyes-térerősség között. Egyúttal megmutatjuk, hogy Newton második törvénye a külső elektromágneses térben mozgó ponttöltésre érvényben marad. Végül foglalkozunk a ponttöltés mozgásával speciális külső terekben.

2.1.1 A kölcsönhatás és a fizikai mező

Már a klasszikus mechanikában megfogalmazódott az a felismerés, hogy **két részecske fizikai tér, más néven fizikai mező közvetítésével hat kölcsön.** Az egyik részecske valamilyen tulajdonságánál fogva, amelyet nevezhetünk általánosan **töltésnek**, fizikai teret kelt maga körül, amely a beléhelyezett másik részecskére erővel hat, ha annak ugyanilyen fajta töltése van. **A fizikai mezőt térmennyiség jellemzi, amely a három-dimenziós tér minden pontjában és minden időpillanatban jól meghatározott értékű. A tér a benne tartózkodó részecskére olyan erőt fejt ki, amely arányos a részecske töltésével és csak attól függ, hogy mekkora a térmennyiség értéke a részecske tartózkodási helyén az ott-tartózkodása pillanatában.** Az utóbbi miatt nevezzük a kölcsönhatást a részecske és a fizikai mező között lokálisnak.

A relativitáselmélet szerint **a kölcsönhatások véges, a vákumbeli fénysebességnél nem nagyobb sebességgel terjednek.** Ha a mezőt keltő valamelyik töltés kicsit elmozdul, akkor véges idő telik el, amíg ennek következtében az elmozdult töltéstől véges távolságra a fizikai mezőt jellemző térmennyiség értéke megváltozik. Véges idő telik el tehát addig, amíg egy részecske elmozdulását a másik, tőle véges távolságra levő részecske ,,észleli". Elektromágneses mező esetén a kölcsönhatás terjedési sebessége a vákumbeli fénysebesség. **A fizikai mező tehát maga is fizikai objektum.** A fizikai mezőt keltő részecske kicsiny elmozdulása zavart, azaz hullámot kelt a fizikai mezőben, amely a vákumbeli fénysebességnél nem nagyobb sebességgel terjed tova a három-dimenziós térben. A zavar, a hullám a fizikai mezőben egy ,,állapot" tovaterjedése.Amikor ez a zavar elér egy másik részecskéhez, akkor az ,,észreveszi", hogy a mező megváltozott, mert megváltozik a mező által erre a töltésre gyakorolt erő.

A fizikai mező állapota egy adott időpillanatban az, hogy a mezőt jellemző térmennyiség milyen függvénye a helynek (helyzetvektornak). **A fizikai mezőt jellemző térmennyiséget, mint a hely függvényét térkonfigurációnak nevezzük.** Szemléletesen szólva, a térkonfiguráció egy ,,mintázat" a térben, a hullám pedig ennek a mintázatnak a mozgása, a ,,terjedése" a térben változatlan vagy lassan változó alakban. **A fizikai mező vákumállapota az, amikor a térmennyiség mindenütt azonosan eltűnik a térben.** Be fogjuk látni, hogy ahhoz, hogy a vákumállapotból nem azonosan nulla térkonfigurációt hozzunk létre, energiára van szükség, ezért **a nem azonosan nulla térkonfigurációkat a fizikai mező gerjesztett állapotainak nevezzük.** Azt is belátjuk majd, hogy a fizikai mezőben az energia elosztva van jelen, minden térfogatelem energiát hordoz, amelynek nagysága attól függ, hogy az adott térfogatelemben mekkora a térmennyiség. A hullámban az energiának ez a térbeli eloszlása terjed tova a térben. **A fizikai mező térfogatelemei,** mint látni fogjuk, **energiát, impulzust, impulzusmomentumot hordoznak. Pontosan ez teszi a fizikai mezőt fizikaivá.** Az energia, az impulzus és az impulzusmomentum megmaradásának törvényeiben a fizikai mező ezen tulajdonságait ugyanúgy figyelembe kell venni, mint a részecskék (tömegpontok) ezen tulajdonságait.

A fenti felfogás szerint **a kölcsönhatás** mindig **lokális**: a részecske (ponttöltés) erővel hat a mezőre a saját tartózkodási helyén, a mező bármely infinitezimális térfogateleme erővel hat a szomszédos térfogatelemekre, és a mező erővel hat a benne tartózkodó részecskére (ponttöltésre). Az erőhatás értéke adott helyen és pillanatban mindig csak attól függ, hogy mi a térmennyiség értéke az adott helyen és pillanatban.

A fizikai mezőket a fentiek szerint térmennyiség írja le, amely a téridő minden pontjában értelmezve van. Ahhoz, hogy a természettörvények

Lorentz-kovariáns matematikai alakot öltsenek, **a térmennyiségnek a Lorentz-transzformációk során vagy skalárként, vagy vektorként, vagy másodrendű tenzorként, stb. kell transzformálódnia.**

2.1.2 A hatás

Olyan hatást szerkesztünk, amely az elektromos ponttöltés mozgását írja le a külső elektromágneses térben. Feltesszük, hogy az elektromágneses teret vektormező jellemzi. **A kölcsönhatás konkrét alakjának megválasztásakor a Poincaré-szimmetria megőrzése és az egyszerűségre való törekvés vezet.**

Induljunk azzal a munkahipotézissel, hogy a fizikai mezőt négyesvektor írja le:

$$A^\mu(x) \;=\; \left(A^0(t,\vec{r}), \vec{A}(t,\vec{r})\right). \tag{2.1.1}$$

Nevezzük ezt a négyesvektort **négyes-vektorpotenciálnak**. A négyes-vektorpotenciál tehát a téridő minden pontjában értelmezve van. Ha adott inerciarendszerből nézzük a fizikai mezőt, akkor azt a $\phi(t,\vec{r}) \equiv A^0(t,\vec{r})$ skalárpotenciál és az $\vec{A}(t,\vec{r})$ hármas-vektorpotenciál adja meg, amelyek minden $\vec{r}$ helyen és minden t időpillanatban értelmezve vannak.

Próbáljuk meg kitalálni, hogy mi a hatásnak az a tagja, ami a ponttöltésnek a vektorpotenciállal való kölcsönhatását leírja. Mozogjon a ponttöltés az $x^\mu(s)$ világvonalon. Miután **a kölcsönhatás lokális,** a kölcsönhatási tagban a vektorpotenciálnak csak a részecske világvonalának $x^\mu(s)$ pontjaiban felvett $A^\mu(x(s))$ értéke kell szerepeljen. **A tapasztalat szerint érvényes a lináris szuperpozició elve**, azaz két különböző töltéstől származó elektromágneses tér által a próbatöltésre kifejtett erő olyan, mintha azokat az erőket adnánk vektorilag össze, amelyek akkor lépnének fel, ha csak az egyik ill. csak a másik töltés keltené a teret. Ahhoz, hogy ezt a hatás biztosítsa, az elektromágneses mező és a töltés kölcsönhatásának a vektorpotenciált lineárisan kell tartalmaznia. Ezután feltehetjük a kérdést, hogy milyen másik négyesvektorral kell megszorozzuk a vektorpotenciált, hogy Lorentz-skalárt kapjunk? Utóbbinak nyilván a részecske jellemzői közül kell kikerülni. A részecskét jellemző négyesvektorok: $x^\mu(s)$, $u^\mu(s) = dx^\mu(s)/ds$, $w^\mu(s) = d^2x^\mu(s)/ds^2$, ... A négyes-helyzetvektor nem szerepelhet szorzóként, mert az elrontaná a hatásnak a téridőbeli eltolásokkal szembeni invarianciáját. Utóbbi természetesen csak akkor áll fenn, ha egyidejűleg ugyanolyan mértékben toljuk el a ponttöltést és az egész külső elektromágneses mezőt. A legegyszerűbb eset tehát, amikor szorzóként a ponttöltés négyessebessége szerepel: $A^\mu(x(s))u_\mu(s)$. (Egyébként ez biztosítja, hogy az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletek közönséges másodrendű differenciálegyenletek legyenek a mozgás világvonalára nézve.) **A vektorpotenciáltérben mozgó ponttöltésre tehát az alábbi hatásfunkcionált kapjuk:**

$$S \;=\; -m_0 c \int_{s_a}^{s_b} ds - \lambda e \int_{s_a}^{s_b} ds A^\mu(x(s))u_\mu(s). \tag{2.1.2}$$

Itt explicit módon szerepeltetjük az e töltést, ami megmutatja, hogy milyen erős a kölcsönhatás a mező és a ponttöltés között. Esetleges további állandók is szerepelhetnek, amelyeket a λ tényezővel jelöltünk. Ennek értékét később határozzuk meg úgy, hogy a hatásból levezetett mozgásegyenlet csakugyan az elektromos ponttöltés kísérleti tapasztalatok alapján megalkotott mozgásegyenlete legyen külső elektromágneses térben.

2.1.3 A mozgásegyenlet

A mozgásegyenlet alakja. A fejezet elolvasása előt tanulmányozza a vektoranalízisről szóló (B.) függeléket.

A szabad ponttöltés mozgását az $A^\mu(x)$ négyes-vektorpotenciállal leírt külső elektromágneses térben a (2.1.2) hatás írja le. Erre alkalmazva a legkisebb hatás elvét, **a külső elektromágneses térben mozgó ponttöltés mozgásegyenleteként az alábbi egyenletet kapjuk:**

$$m_0 c \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = \lambda e F_{\mu\nu} u^\nu, \tag{2.1.3}$$

ahol fellép az

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.1.4}$$

térerősség-tenzor, ami egy antiszimmetrikus másodrendű tenzor, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. **A térerősség-tenzor határozza meg az adott u^μ négyessebességű ponttöltésre a külső elektromágneses tér által kifejtett ún. Lorentz-féle négyeserőt,**

$$K_\mu = \lambda e F_{\mu\nu} u^\nu, \tag{2.1.5}$$

a mozgásegyenlet jobb oldalán látható módon. A mozgásegyenlet kezdőfeltétele, hogy a világvonal adott $s = s_0$ ívhosszparaméterű pontja hol helyezkedik el a téridőben és mi ebben a pontban a világvonal (időszerű) érintővektora:

$$x^\mu(s_0) = x_0^\mu, \qquad u^\mu(s_0) = u_0^\mu. \tag{2.1.6}$$

Adott kezdőfeltétel mellett a mozgásegyenlet (közönséges másodrendű differenciálegyenlet az $x^\mu(s)$ világvonalra) megoldása egyértelműen létezik.

Láttuk a szabad pontrészecske mozgásának vizsgálata során, hogy a mozgásegyenletek és a megmaradó mennyiségek leszármaztatásához egyaránt szükségünk van arra, hogy ismerjük a hatásfunkcionál infinitezimális megváltozását a részecske világvonalának tetszőleges, elképzelt, infinitezimális megváltoztatása (variációja) esetén. A hatás első tagjának, a szabad mozgáshoz tartozó hatásnak a variációját már ismerjük (ld. a (1.4.12) egyenletet). A hatás

$$S_{kh} = -\lambda e \int_{s_a}^{s_b} ds A^\mu(x(s)) \frac{dx_\mu(s)}{ds} \tag{2.1.7}$$

kölcsönhatási tagjának a megváltozása a részecske világvonalának elképzelt infinitezimális $\delta x^\mu(s)$ megváltozása esetén:

$$\delta S_{kh} = -\lambda e \int_{s_a}^{s_b} ds F_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu - \lambda e \left[A_\mu \delta x^\mu\right]_{s_a}^{s_b}, \tag{2.1.8}$$

ahol megjelenik az $F_{\mu\nu}$ térerősség-tenzor.

Ennek belátásához szükségünk van a vektorpotenciál infinitezimális megváltozására:

$$A^\mu(x + \delta x) = A^\mu(x) + \partial_\nu A^\mu \cdot \delta x^\nu + \mathcal{O}(\delta x^2). \tag{2.1.9}$$

A hatás kölcsönhatási tagjának infinitezimális megváltozása:

$$\delta S_{kh} = -\lambda e \int_{s_a}^{s_b} ds \left[\partial_\nu A^\mu \frac{dx_\mu}{ds} \delta x^\nu + A^\mu \frac{d}{ds} \delta x_\mu\right]. \tag{2.1.10}$$

Integráljunk a jobb oldalon a második tagban parciálisan és használjuk fel, hogy

$$\frac{d}{ds}A^\mu(x(s)) \;=\; \partial_\nu A^\mu \,\frac{dx^\nu}{ds}, \tag{2.1.11}$$

ekkor

$$\begin{aligned}
\delta S_{kh} \;&=\; -\lambda e \int_{s_a}^{s_b} ds \left[\partial_\nu A^\mu \,\frac{dx_\mu}{ds}\delta x^\nu - \partial_\nu A^\mu \,\frac{dx^\nu}{ds}\delta x_\mu\right] \\
&\quad -\lambda e \left[A^\mu(x(s))\delta x_\mu\right]_{s_a}^{s_b} \\
&=\; -\lambda e \int_{s_a}^{s_b} ds\partial_\nu A_\mu \,\left(\frac{dx^\mu}{ds}\delta x^\nu - \frac{dx^\nu}{ds}\delta x^\mu\right) \\
&\quad -\lambda e \left[A_\mu(x(s))\delta x^\mu\right]_{s_a}^{s_b}.
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

A jobb oldalon az első tag integrandusában a zárójeles kifejezés antiszimmetrikus a μ és a ν indexekben. Ezért az előtte álló kifejezés helyébe írhatjuk annak antiszimmetrikus részét,

$$\partial_\nu A_\mu \;\to\; \frac{1}{2}\left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right), \tag{2.1.13}$$

majd ezután az antiszimmetrikus

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^\mu}{ds}\delta x^\nu - \frac{dx^\nu}{ds}\delta x^\mu\right) \tag{2.1.14}$$

kifejezést lecserélhetjük a $\frac{dx^\mu}{ds}\delta x^\nu$ kifejezésre. Ha bevezetjük az (2.1.4) másodrendű antiszimmetrikus tenzort a vektormező jellemzésére, a hatás kölcsönhatási tagjának a variációja a (2.1.8) alakot ölti.

Adjuk hozzá a hatás kölcsönhatási tagja (2.1.8) megváltozásához a szabad részecskéhez tartozó hatásnak a (1.4.12) megváltozását. Ekkor megkapjuk az S hatás keresett variációját:

$$\begin{aligned}
\delta S \;&=\; m_0 c\int_{s_a}^{s_b} ds\frac{d^2x_\mu}{ds^2}\delta x^\mu - m_0 c\left[u_\mu \delta x^\mu\right]_{s_a}^{s_b} \\
&\quad -\lambda e \int_{s_a}^{s_b} dsF_{\mu\nu}u^\nu\delta x^\mu - \lambda e\left[A_\mu \delta x^\mu\right]_{s_a}^{s_b}.
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Most már készen állunk arra, hogy megkeressük a ponttöltés mozgásegyenletét és a mozgás során megmaradó mennyiségeket.

A legkisebb hatás elve értelmében a hatás δS variációja eltűnik a mozgás valóságos $x^\mu(s)$ világvonalán, ha a variációt rögzített kezdő- és végpontokkal képezzük. Legyen ezért $\delta x^\mu(s)$ olyan tetszőleges variáció, amelyre $\delta x^\mu(s_a) = \delta x^\mu(s_b) = 0$ teljesül. A $\delta S = 0$ feltételt ilyen variációkra követelve meg, a (2.1.15) egyenletben a szögletes zárójelekben szereplő tagok eltűnnek. Az el nem tűnő tagokat közös integrál alá írjuk:

$$0 \;=\; \int_{s_a}^{s_b} ds\left[m_0 c\frac{d^2x_\mu}{ds^2} - \lambda e F_{\mu\nu}u^\nu\right]\delta x^\mu. \tag{2.1.16}$$

Az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn tetszőleges $\delta x^\mu(s)$ variáció esetén, ha a szögletes zárójelben szereplő kifejezés azonosan eltűnik. Ekkor valóban megkapjuk a (2.1.3) alakú mozgásegyenletet.

A Lorentz-erő. Ha nincs jelen külső tér, azaz $A^\mu(x) \equiv 0$, akkor természetesen $F_{\mu\nu} = 0$ és visszakapjuk a szabad részecske mozgásegyenletét. Az egyenlet bal oldalán a részecske $p_\mu = m_0 c u_\mu$ négyesimpulzusának az ívhossz szerinti deriváltja áll.

Newton második törvényével összhangban kell maradjunk a klasszikus mechanikai határesetben, ha a részecske sebessége sokkal kisebb, mint a vákumbeli fénysebesség, $v \ll c$. Ezért a mozgásegyenlet jobb oldalát úgy kell értelmeznünk mint a részecskére ható négyeserő erőtörvényét. A kérdés tehát az, hogy mi ez az erőtörvény, ami az általunk konstruált hatásból következik. Alább belátjuk, hogy a λ állandó alkalmas megválasztása esetén a Lorentz-erő tapasztalatból ismert erőtörvényét kapjuk meg. Miután a részecskére ható négyeserő arányos az $F_{\mu\nu}$ tenzorral, nevezzük ezt **a térerősség tenzorának**.

Vizsgáljuk a ponttöltés mozgását tetszőlegesen választott K inerciarendszerben. Ebben az inerciarendszerben a négyes-vektorpotenciál komponensei az $\vec{r}$ helyvektortól és a t rendszeridőtől függő $\phi(t,\vec{r}) = A^0(x)$ skalárpotenciál és az $A^i(t,\vec{r})$ hármas-vektorpotenciál. Mint azt a négyes-tenzorokról szóló C. függelékben elmondjuk, az $F_{\mu\nu}$ másodrendű antiszimmetrikus négyestenzor komponensei definiálnak egy $\vec{E}$ hármas-vektort és egy $\vec{B}$ hármas-axiálvektort: $E^i = F_{0i}$, $B^3 = -F_{12}$, $B^2 = F_{13}$ és $B^1 = -F_{23}$. Ezeket az összefüggéseket a térerősségtenzor (2.1.4) definíciója alapján részletesen is kiírhatjuk a tetszőlegesen választott K inerciarendszerben:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{ grad } \phi, \qquad \vec{B} = \text{ rot } \vec{A}. \tag{2.1.17}$$

A térerősségtenzor komponenseit mátrixalakban a következőképpen rendezhetjük el (ld. (C.1.15)):

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.18}$$

Írjuk fel a K inerciarendszerben a mozgásegyenletet a négyesimpulzus térkomponenseire:

$$\frac{d}{dt}p^i = \lambda e \left(E^i u_0 + F^{ij} u_j\right) c\sqrt{1-(v^2/c^2)} = \lambda\, c\, e \left(E^i + \frac{1}{c}F^{ij} v_j\right). \tag{2.1.19}$$

Ha a $\lambda = 1/c$ választással élünk, akkor **a mozgásegyenlet** az alábbi alakot ölti:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}. \tag{2.1.20}$$

Az egyenlet jobb oldalán felismerjük az elektromágneses térben mozgó ponttöltésre ható Lorentz-erő kísérleti úton megállapított erőtörvényét. Az erőtörvényből olvashatjuk ki az $\vec{E}$ elektromos térerősség és a $\vec{B}$ mágneses indukció fizikai jelentését:

1. az $\vec{E}$ elektromos térerősség a nyugvó, egységnyi próbatöltésre ható erő,

2. a $\vec{B}$ mágneses indukció terében a $\vec{v}$ sebességgel mozgó próbatöltésre $\vec{F}_m = \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$ erő lép fel.

A munkatétel. Végül olvassuk le a (2.1.3) mozgásegyenletből a külső elektromágneses térben mozgó ponttöltésre vonatkozó munkatételt. A ponttöltés kovariáns alakban felírt (2.1.3) mozgásegyenletéből a mechanikai négyesimpulzus $p^0 = \mathcal{E}/c = (mc^2)/c$ időirányú komponensére az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{e}{c} F^{0\nu} u_\nu c \sqrt{1 - (v^2/c^2)}, \tag{2.1.21}$$

azaz

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \equiv \frac{d(mc^2)}{dt} = e\vec{E}\vec{v}. \tag{2.1.22}$$

A bal oldalon a ponttöltés $\mathcal{E} = mc^2$ „mechanikai” energiájának időegységre eső megváltozása áll, a jobb oldalon pedig az elektromágneses tér által a ponttöltésen időegység alatt végzett munka. Az egyenlet kifejezi, hogy **a ponttöltés mc^2 „mechanikai” energiája külső elektromos térben nem marad meg, időegységre eső megváltozása egyenlő a ponttöltésen az elektromos tér által időegység alatt végzett munkával.** Ehhez a munkához csak az elektromos tér munkája járul hozzá, mert a mágneses tér által kifejtett erő merőleges a részecske sebességére, úgyhogy annak P teljesítménye nulla: $P \propto (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$. A mágneses tér nem végez munkát a ponttöltésen, csak az elektromos tér.

2.1.4 Az általános négyesimpulzus*

Keressük meg a külső elektromágneses térben mozgó ponttöltés P^μ **általános négyesimpulzusát**. Ez definíció szerint az a P^μ négyesvektor, amely megmaradna, ha a hatás a téridőbeli koordinátarendszer eltolásaival szemben invariáns lenne. A korábbiaktól eltérően, azért fogalmazunk feltételes módon, mert a külső tér jelenléte miatt térbeli eltolási szimmetria legfeljebb csak bizonyos irányokban lehetséges, pl. homogén elektromágneses térben, amikor $\vec{E}$ és $\vec{B}$ független a helytől; időbeli eltolási szimmetriával meg csak a sztatikus elektromágneses tér rendelkezik, amikor $\vec{E}$ és $\vec{B}$ független az időtől. **A külső elektromágneses térben mozgó ponttöltés általános négyesimpulzusa**:

$$P^\mu = p^\mu + \frac{e}{c} A^\mu. \tag{2.1.23}$$

Az általános négyesimpulzus azonban általában nem marad meg a mozgás során, így általában sem a ponttöltés energiája, sem impulzusa nem maradnak meg a mozgás során. A P^0 komponens, a ponttöltés energiája akkor állandó, ha a külső elektromágneses tér sztatikus, azaz az elektromos térerősség és a mágneses indukció függetlenek az időtől. A P^i $(i = 1, 2, 3)$ komponensek közül bizonyosak akkor maradnak meg, ha a külső elektromágneses tér invariáns bizonyos irányú eltolásokkal szemben. Pl. a homogén elektromos tér invariáns a térerősségre merőleges irányú eltolásokkal szemben, ill. a homogén mágneses tér invariáns a mágneses indukcióval párhuzamos irányú eltolásokkal szemben.

Az általános négyesimpulzus (2.1.23) kifejezését az alábbi módon kaphatjuk meg. Tekintsük a hatás (2.1.15) megváltozását a mozgás valóságos pályáján tetszőleges $\delta x^\mu(s) = \delta a^\mu =$áll. infinitezimális eltolás esetén:

$$\delta S_{\text{valódi mozgás}} = -\left(m_0 c u^\mu + \frac{e}{c} A^\mu\right)_{s_a}^{s_b} \delta a_\mu. \tag{2.1.24}$$

Ha eltolási szimmetria lenne, akkor ez zérusnak adódna tetszőleges δa^μ eltolás esetén, azaz a zárójeles kifejezés mozgásállandó lenne. Ezért az általános négyesimpulzus kifejezése éppen (2.1.23).

Tetszőlegesen választott K inerciarendszerben a ponttöltés

$$H = cP^0 = cp^0 + e\phi = mc^2 + e\phi \tag{2.1.25}$$

energiája (Hamilton-függvénye) és

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A} \tag{2.1.26}$$

impulzusa között az alábbi összefüggés áll fenn a $p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$ egyenlőség következtében:

$$\left(\frac{H - e\phi}{c}\right)^2 - \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = m_0^2 c^2. \tag{2.1.27}$$

Ezt átrendezve megkapjuk **a külső elektromágneses térben mozgó ponttöltés energiáját**:

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{m_0^2 c^4 + \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 c^2} + e\phi \\ &= \sqrt{m_0^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2} + e\phi = mc^2 + e\phi. \end{aligned} \tag{2.1.28}$$

Az energia tehát az mc^2 „mechanikai" energiának és a ponttöltés $e\phi$ potenciális energiájának az összege. A vektorpotenciált és a skalárpotenciált a fenti képletben adott t pillanatban azon az $\vec{r}(t)$ helyen kell venni, ahol a részecske éppen tartózkodik.

2.2 Speciális esetek

Ebben a fejezetben azt tárgyaljuk, hogy milyen mozgást végez a ponttöltés homogén, sztatikus elektromos ill. mágneses térben.

2.2.1 Mozgás homogén, sztatikus elektromos térben

Akkor beszélünk homogén elektromos térről, ha a tér minden pontjában nagyság és irány szerint azonos az $\vec{E}$ elektromos térerősség. Az elektromos tér sztatikus, ha az elektromos térerősség független az időtől. A sztatikus elektromos térbe helyezett töltött részecske az időbeli eltolással szemben invariáns, hiszen a sztatikus külső tér nem sérti meg az idő homogenitását. Ezért a sztatikus elektromos térben mozgó részecske $\mathcal{E}$ energiája állandó. Válasszuk a térerősség térben és időben állandó vektorával azonosnak a térbeli Descartes-koordinátarendszer x-tengelyének pozitív irányát. Ekkor $E_x = E$ a térerősség egyetlen el nem tűnő komponense, a skalárpotenciál pedig az $E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$ összefüggés integrálása révén

$$\phi(x) = -Ex + \phi_0 \tag{2.2.1}$$

alakúnak adódik, ahol az általánosság csorbítása nélkül választhatjuk a potenciál értékét az origóban nullának, $\phi_0 = 0$. A vektorpotenciál, amely azonosan eltűnő mágneses indukciót szolgáltat, választható mint $\vec{A} = 0$. Ebből látszik, hogy a homogén, sztatikus elektromos tér eltolási szimmetriával rendelkezik a térerősség irányára merőleges síkban történő eltolásokkal szemben. Ezért a részecskének a térerősség irányára merőleges impulzuskomponense megmaradó.

Itt elnapoltuk későbbre annak a megmutatását, hogy létezhet homogén elektrosztatikus tér, és annak a tisztázását, hogy négyes-vektorpotenciál komponenseinek fenti megválasztása egyértelmű-e.

Vizsgáljuk az origóból, $p_y = p_0$ y-irányú kezdőimpulzussal indított, e töltésű részecske mozgását az $E_x = E$ térerősségű, homogén sztatikus elektromos térben. A mozgás nyilvánvalóan az (x, y) síkban zajlik. A mozgásegyenletek:

$$\dot{p}_x = eE, \qquad \dot{p}_y = 0, \tag{2.2.2}$$

és megoldásuk:

$$p_x = eEt, \qquad p_y = p_0. \tag{2.2.3}$$

A részecske energiája,

$$\mathcal{E} = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} + e\phi(x) = \text{ áll.} \tag{2.2.4}$$

megmarad; itt m_0 a részecske nyugalmi tömege, $\phi(x) = -Ex$ a külső skalárpotenciáltér. Figyelembe vettük, hogy sztatikus, homogén elektromos tér esetén $\vec{A} = 0$ választással élhetünk. Az energia kifejezését feloldhatjuk a részecske x koordinátájára:

$$x(t) = \frac{1}{eE}\left(\sqrt{m_0^2 c^4 + (ceEt)^2 + (cp_0)^2} - \mathcal{E}\right), \tag{2.2.5}$$

ahol az energia

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(t = 0) = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p_0^2}. \tag{2.2.6}$$

Ha a részecske kezdőimpulzusa kicsi, azaz a mozgása nem relativisztikus, akkor közelítőleg írhatjuk, hogy

$$\mathcal{E} \approx m_0 c^2\left(1 + \frac{p_0^2}{2m_0^2 c^2}\right), \qquad x(t) \approx \frac{eE}{2m_0} t^2. \tag{2.2.7}$$

Felhasználtuk az alábbi közelítést:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2), \qquad \text{ha} \quad x \ll 1. \tag{2.2.8}$$

A (2.2.7) eredmény azt jelenti, hogy a részecske az x irányban, a sztatikus, homogén térerősség irányában egyenletesen gyorsuló mozgást végez

$$a_x = \frac{F_x}{m_0} = \frac{eE}{m_0} \tag{2.2.9}$$

állandó gyorsulással. Figyelembe véve, hogy az y irányban megtett útra nem relativisztikus mozgás esetén a

$$p_y \approx m_0 \dot{y} = p_0 \tag{2.2.10}$$

egyenletből, $y(t = 0) = 0$ kezdőfeltétel esetén

$$y(t) = \frac{p_0}{m_0} t \tag{2.2.11}$$

adódik, azt kapjuk, hogy a mozgás pályája parabola:

$$x \approx \frac{1}{4} \frac{eE}{\frac{p_0^2}{2m_0}} y^2. \tag{2.2.12}$$

2.2.2 Millikan kísérlete

Millikan kísérletében azt vizsgálta, hogy az elektromos töltés milyen értékeket vehet fel. Kimutatta, hogy **az elektromos töltés kvantált**. Minden elektromosan töltött test egy meghatározott e töltésmennyiség egész számú többszörösével rendelkezik. Ezt az e töltésmennyiséget **elemi töltésnek** nevezzük. Később kiderült, hogy az elemi töltés éppen az elektron töltésének nagysága. Érdekes módon kiderült később az is, hogy a szabadon megfigyelhető elemi részecskék is mind az elemi töltés egész számú többszörösével rendelkeznek. Azt is sikerült azonban kísérleti úton kimutatni, hogy pl. a protonok belsejében olyan részecskék vannak, amelyek szabadon sohasem figyelhetők meg és amelyek az elemi töltésnek csak tört részét hordozzák. Ezek a kvarkok.

Millikan híres kísérlete könnyen megérthető, ha ismerjük a ponttöltés mozgását külső, homogén, sztatikus elektromos térben. Egy kondenzátor vízszintes lemezei között függőleges irányú, homogén $\vec{E}$ elektrosztatikus teret hozunk létre. A lemezek közé olajcseppeket porlasztunk be, amelyek a porlasztás során elektromos töltésre tesznek szert. Ezután megfigyeljük a töltött olajcseppek mozgását; az egyszerűség kedvéért azokét, amelyek vízszintes irányú sebessége nulla. Ezek a rájuk ható nehézségi erő és elektrosztatikus erő eredőjének hatására egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végeznének a

$$ma_z = mg + qE_z \tag{2.2.13}$$

mozgásegyenlet szerint (a z-tengelyt függőlegesen lefelé irányítottuk). Valójában azonban a jelenlevő levegő a sebességükkel arányos nagyságú, azzal ellentétes irányú $-\eta v_z$ közegellenállási erőt fejt ki rájuk:

$$ma_z = mg + qE_z - \eta v_z, \tag{2.2.14}$$

ahol $\eta > 0$ a közegellenállási együttható. A közegellenállás következtében bizonyos idő eltelte után minden függőlegesen mozgó olajcsepp állandó sebességgel fog mozogni:

$$v_z = \frac{1}{\eta}(mg + qE_z). \tag{2.2.15}$$

Kiszemelhetünk egy olajcseppet és megmérjük $E_z = +E$ esetén az egyenletes mozgásának $v_z = v_+$ sebességét, majd ellentétesre változtatjuk a térerősség irányát, $E_z = -E$ és az egyenletes mozgás beállta után újra mérjük a $v_z = -v_-$ sebességet:

$$v_+ = \frac{1}{\eta}(mg + qE), \qquad -v_- = \frac{1}{\eta}(mg - qE). \tag{2.2.16}$$

A két összefüggést kivonva egymásból az olajcsepp keresett q töltése meghatározható:

$$q = \frac{\eta(v_+ + v_-)}{E}. \tag{2.2.17}$$

A tapasztalat az, hogy az olajcseppek töltése mindig ugyanazon elemi töltés egész számú többszörösének adódik. A töltés kvantált. Az elektron töltése pontosan megegyezik a töltés kvantumával. Ezek a tapasztalatok bármely inerciarendszerben érvényesek. Az elemi töltés, az elektron töltése minden inerciarendszerben azonos, azaz Lorentz-skalár. Ebből általánosan is következik, hogy az elektromos töltés Lorentz-skalár.

2.2.3 Mozgás homogén, sztatikus mágneses térben

Homogén sztatikus mágneses térről akkor beszélünk, ha a mágneses indukció vektora nem függ sem a helytől, sem az időtől, az elektromos térerősség pedig azonosan nulla. A skalárpotenciál ekkor helytől és időtől független állandó, amit az általánosság csorbítása nélkül választhatunk nullának, $\phi \equiv 0$. Válasszuk a Descartes-koordinátarendszer z tengelyét a $\vec{B}$ mágneses indukcióval párhuzamosnak és egyirányúnak, ekkor $B_z = B$, $B_x = B_y = 0$. A ponttöltésre ható Lorentz-erő merőleges a mágneses indukció vektorára, tehát benne van a mágneses indukcióra merőleges (x, y)-síkban, ezért a részecske p_z impulzuskomponense állandó. Másrészt a mágneses indukciótér elemi munkája a mozgás során mindvégig zérus, mert a Lorentz-erő merőleges a részecske sebességére, ezért a ponttöltés $\mathcal{E}$ energiája is állandó. Mivel

$$\mathcal{E} = \sqrt{m_0^2 c^4 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)c^2} \tag{2.2.18}$$

megmaradó és p_z is az, azért a részecske impulzusának a mágneses indukcióra merőleges komponense is állandó p_t nagyságú: $p_t^2 = p_x^2 + p_y^2 = \mathcal{E}^2 - m_0^2 c^4 - p_z^2 c^2 =$áll.

A hármasvektorpotenciál olyan, hogy eleget tegyen a $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ összefüggésnek. Egy lehetséges megválasztása $A_y = \frac{1}{2}Bx$, $A_x = -\frac{1}{2}By$, $A_z = 0$. Innen látszik, hogy a homogén mágneses tér csak a z-irányú eltolásokkal szemben invariáns, a részecskének tehát a $P_z = p_z + \frac{e}{c}A_z = p_z$ impulzuskomponense marad meg. A sztatikus mágneses tér természetesen nem sérti meg az idő homogenitását. Ezért a homogén sztatikus mágneses térben mozgó ponttöltés $\mathcal{E}$ energiája megmarad. Újra megkaptuk, hogy p_z és $\mathcal{E}$ megmaradó mennyiségek.

A ponttöltés mozgásegyenlete

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}. \tag{2.2.19}$$

Mivel a részecske sebessége és impulzusa között

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}\vec{v}}{c^2} \tag{2.2.20}$$

összefüggés áll fenn, a mozgásegyenletet

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \vec{\omega} \tag{2.2.21}$$

alakra hozhatjuk, ahol

$$\vec{\omega} = \frac{ec}{\mathcal{E}}\vec{B}. \tag{2.2.22}$$

A mozgásegyenlet komponensekben kiírva:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \qquad \dot{v}_y = -\omega v_x, \qquad \dot{v}_z = 0. \tag{2.2.23}$$

A z-irányú mozgás sebessége innen állandónak adódik:

$$v_z = \text{ áll. } = \frac{c^2 p_{z0}}{\mathcal{E}}, \tag{2.2.24}$$

ahol p_{z0} a ponttöltés z-irányú kezdőimpulzusa. A ponttöltés z-koordinátája pedig:

$$z = z_0 + \frac{c^2 p_{z0}}{\mathcal{E}} t. \tag{2.2.25}$$

A mozgás a z-irányban egyenesvonalú egyenletes mozgás.

A mozgásnak a mágneses indukcióra merőleges (x, y) síkra vonatkozó vetületét a legegyszerűbben úgy kaphatjuk meg, hogy (2.2.23) második egyenletét $i = \sqrt{-1}$-gyel szorozzuk és hozzáadjuk (2.2.23) első egyenletéhez:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y). \tag{2.2.26}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása a $v_x + iv_y$ komplex értékű függvényre nézve:

$$v_x + iv_y = Ce^{-i\omega t}, \tag{2.2.27}$$

ahol $C = v_{0t}e^{-i\alpha}$ tetszőleges komplex állandó, ill. v_{0t} és α tetszőleges valós állandók. A valós és képzetes részt különválasztva,

$$v_x = v_{0t}\cos(\omega t + \alpha), \qquad v_y = -v_{0t}\sin(\omega t + \alpha) \tag{2.2.28}$$

alakban adódik a megoldás. A

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_{0t} \tag{2.2.29}$$

összefüggésből látjuk, hogy a részecske sebességének a mágneses indukcióra merőleges komponense állandó nagyságú, v_{0t}. A mozgásegyenlet megoldása mutatja, hogy a mozgás vetülete a mágneses indukcióra merőleges (x, y) síkra egyenletes körmozgás, amelynek körfrekvenciája

$$\omega = |\vec{\omega}| = \frac{ec}{\mathcal{E}}B. \tag{2.2.30}$$

Ha a koordinátarendszerünk origóját a kör középpontjába helyezzük, akkor

$$x(t) = R\sin(\omega t + \alpha), \qquad y(t) = R\cos(\omega t + \alpha) \tag{2.2.31}$$

adódik, ahol a kör sugara

$$R = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{cp_t}{eB}, \tag{2.2.32}$$

ahol p_t a részecske impulzusa $\vec{B}$-re merőleges összetevőjének az állandó nagysága.

A fentiek alapján a mozgás pályája csavarvonal. A csavarvonal tengelye párhuzamos a homogén mágneses indukció irányával, az R sugara és a „menetemelkedése" pedig állandó. A mozgás pályájának a mágneses indukcióra merőleges síkra a merőleges vetülete kör, amelynek

$$R = \frac{cp_t}{eB} \tag{2.2.33}$$

sugara arányos a ponttöltés mágneses indukcióra merőleges impulzuskomponensének p_t nagyságával, ami ugyancsak mozgásállandó, és fordítva arányos a mágneses indukció nagyságával.

Ha a részecske kezdősebessége nem relativisztikus, $v_{0t} \ll c$, akkor közelítőleg

$$\mathcal{E} \approx m_0c^2, \qquad p_t \approx m_0v_{0t}, \tag{2.2.34}$$

úgyhogy a sugár

$$R \approx \frac{cm_0v_{0t}}{eB}. \tag{2.2.35}$$

A Lorentz-erő éppen ilyen sugár esetén tudja biztosítani azt a centripetális gyorsulást, ami ahhoz szükséges, hogy a ponttöltés körpályán maradjon:

$$m_0\frac{v_{0t}^2}{R} = \frac{e}{c}v_{0t}B. \tag{2.2.36}$$

3 AZ ELEKTROMÁGNESES MEZŐ

Ebben a fejezetben a legkisebb hatás elve alapján leszármaztatjuk az elektromágneses mező mozgásegyenleteit, a Maxwell-egyenleteket. Megmutatjuk, hogy az elektromágneses mezőt töltések és áramok keltik, amelyek eleget tesznek a töltés lokális megmaradását kifejező kontinuitási egyenletnek. Belátjuk, hogy a Maxwell-egyenletek azért vannak összhangban a töltés lokális megmaradásának törvényével, mert a Maxwell-egyenletek mértékinvariánsak. Megmutatjuk továbbá, hogy az elektromágneses mező minden térfogatelemben energiát, impulzust és impulzusmomentumot hordoz. A szabad elektromágneses mező mindig úgy változik, hogy ezek a fizikai mennyiségek lokális megmaradási törvényeket, azaz a lokális megmaradásukat kifejező kontinuitási egyenleteket elégítenek ki. Amennyiben a zárt fizikai rendszer töltésekből és elektromágneses mezőből áll, akkor a töltések és az elektromágneses mező egyaránt hozzájárulnak a rendszer megmaradó teljes energiájához, impulzusához, ill. impulzusmomentumához.

3.1 A szabad elektromágneses mező

Ebben a fejezetben megszerkesztjük a szabad elektromágneses mező hatásfunkcionálját, mint a térősség-tenzorból képezett legegyszerűbb Lorentz-skalárt. A térerősség-tenzor az a mennyiség, amelyik az elektromágneses mezőt közvetlenül jellemzi azáltal, hogy az elektromágneses mező a Lorentz-féle erőtörvény által meghatározott erőt gyakorol a beléje helyezett ponttöltésre. Az ilyen módon felírt hatásfunkcionál helyességét az fogja utólag igazolni, hogy belőle pontosan azokat a Maxwell-egyenleteket tudjuk a legkisebb hatás elve alapján leszármaztatni, amelyeket a kísérleti tapasztalatok teljes mértékben igazolnak. (Emlékezzünk: a Maxwell-egyenleteket először a kísérleti tapasztalatok alapján fogalmazták meg.) A Maxwell-egyenleteket egy későbbi fejezetben vezetjük majd le a hatásból.

3.1.1 Az elektromos térerősség és a mágneses indukció transzformációja

Megtanultuk, hogy **az elektromágneses mezőt azáltal tudjuk mérhető módon jellemezni, hogy az egyes térbeli pontokban az elektromágneses mező milyen erőt fejt ki a beléje helyezett pontszerű próbatöltésre. Ez a Lorentz-erő,**

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu, \tag{3.1.1}$$

amelyben az elektromágneses mező $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ térerősség-tenzora szerepel, mint az elektromágneses mezőt jellemző mennyiség. A ponttöltés mozgásegyenletében e a részecske elektromos töltése, u^ν pedig a négyessebessége.

Tetszőleges K inerciarendszerből nézve, a térerősség-tenzor megfelelő komponensei a 3-dimenziós térben értelmezett $\vec{E}$ polárvektor komponenseit és $\vec{B}$ axiálvektor komponenseit határozzák meg. Ezeket neveztük rendre az elektromos térerősség $\vec{E}$ és a mágneses indukció $\vec{B}$ vektorának. Három-dimenziós térbeli Descartes-komponenseik kapcsolata a térősség négyestenzorának komponenseivel az alábbi elrendezésből olvasható le, ahol μ, $\nu = 0, 1, 2, 3$ értékeket vesznek fel ebben a sorrendben és μ a mátrix sorindexe, ν a mátrix oszlopindexe (vö. a C. függelék (C.1.15) képletével):

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.2}$$

Ismétlés! A 3-dimenziós térben a Descartes-koordinátarendszer tengelyei irányának megfordítását, azaz a megfelelő bázisvektorok irányának megfordítását **tértükrözés**nek nevezzük. Ekkor az $\vec{r}$ helyzetvektor Descartes-komponenseiből képezett $\mathbf{r}$ oszlopvektor transzformációja $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$. Azokat a 3-komponensű $\mathbf{v}$ mennyiségeket, amelyeknek komponensei a 3-dimenziós tér $\mathbf{O}$ forgatásaikor és a $\mathbf{P}$ tértükrözéskor úgy transzformálódnak, mint az $\vec{r}$ helyzetvektor megfelelő komponensei,

$$\mathbf{v} \to \mathbf{v}' = \mathbf{O}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \to \mathbf{v}' = \mathbf{P}\mathbf{v} = -\mathbf{v}, \tag{3.1.3}$$

polárvektoroknak nevezzük. Azokat a 3 Descartes-komponensükkel megadható $\mathbf{a}$ mennyiségeket, amelyeknek komponensei a koordinátarendszer forgatásaikor ugyanúgy transzformálódnak, mint a helyzetvektor megfelelő komponensei, de tértükrözéskor változatlanok maradnak,

$$\mathbf{a} \to \mathbf{a}' = \mathbf{O}\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \to \mathbf{a}' = \mathbf{P}\mathbf{a} = \mathbf{a}, \tag{3.1.4}$$

axiálvektoroknak nevezzük. Két polárvektor vektori szorzata axiálvektor. A helyzetvektor, a sebesség, az impulzus, az erő polárvektorok, az impulzusmomentum pedig axiálvektor.

A Lorentz-erő $\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$ alakjából, továbbá a $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ sebesség és az impulzus első deriváltjaként értelmezett $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ erő transzformációs tulajdonságaiból megkapjuk, hogyan kell az elektromos térerősségnek és a mágneses indukciónak transzformálódnia tértükrözés során:

$$\mathbf{F} \to -\mathbf{F}, \quad \mathbf{v} \to -\mathbf{v}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} \to -\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \to \mathbf{B}. \tag{3.1.5}$$

Az $\vec{E}$ elektromos térerősség polárvektor, a $\vec{B}$ mágneses indukció pedig axiálvektor.

Lorentz-transzformáció során a térerősség-tenzor komponensei egymás lineáris kombinációiba transzformálódnak. Ezért, **ha az elektromágneses mezőnek ugyanazt az állapotát különböző inerciarendszerekből figyeljük meg, akkor az elektromos térerősséget és a mágneses indukciót inerciarendszerenként különbözőnek találjuk.**

Tegyük fel pl., hogy a K' inerciarendszer a K inerciarendszerhez képest az egymással párhuzamos x és x' tengelyek irányában állandó V sebességgel mozog. Legyenek a megfelelő koordinátatengelyek párhuzamosak. A vizsgált x irányú Lorentz-lökés során az $\vec{E}$ elektromos térősség és a $\vec{B}$ mágneses indukció transzformációja:

$$\begin{aligned} &E_x(t,\mathbf{r}) = E_x'(t',\mathbf{r}'), \quad B_x(t,\mathbf{r}) = B_x'(t',\mathbf{r}'), \\ &E_y(t,\mathbf{r}) = \frac{E_y'(t',\mathbf{r}') + \frac{V}{c}B_z'(t',\mathbf{r}')}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad E_z(t,\mathbf{r}) = \frac{E_z'(t',\mathbf{r}') - \frac{V}{c}B_z'(t',\mathbf{r}')}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \\ &B_y(t,\mathbf{r}) = \frac{B_y'(t',\mathbf{r}') - \frac{V}{c}E_z'(t',\mathbf{r}')}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad B_z(t,\mathbf{r}) = \frac{B_z'(t',\mathbf{r}') + \frac{V}{c}E_y'(t',\mathbf{r}')}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

ahol $(x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}$ és $(x^{\mu\,\prime}) = \begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$ a téridő ugyanazon pontja négyes-helyzetvektorának komponensei a K ill. a K' inerciarendszerben.

A térerősségek fenti transzformációs képleteit könnyen megkaphatjuk, ha

- felhasználjuk a megfelelő Lorentz-lökés képleteit:

$$dx = \frac{dx' + \frac{V}{c}dx^{0\prime}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad dx^0 = \frac{dx^{0\prime} + \frac{V}{c}dx'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz'; \tag{3.1.7}$$

- felhasználjuk, hogy az $F^{\mu\nu}$ tenzorkomponensek úgy transzformálódnak mint a $dx^\mu dx^\nu$ rendezett szorzatok.

Például írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} -E_x = F^{01} \quad &\sim \quad dx^0 dx = \frac{\left(dx^{0\prime} + \frac{V}{c}dx'\right)\left(dx' + \frac{V}{c}dx^{0\prime}\right)}{1-(V/c)^2} \\ &\sim \quad \frac{F^{01\prime} + \frac{V}{c}\left(F^{11\prime} + F^{00\prime}\right) + \frac{V^2}{c^2}F^{10\prime}}{1-(V/c)^2} = -E'_x, \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Ugyanezen séma szerint kapjuk a többi összefüggést is.

A transzformációs képletekből azt a tanulságot szűrhetjük le, hogy **az elektromos térerősségnek és a mágneses indukciónak a $\vec{V}$ sebességgel párhuzamos komponensei a $\vec{V}$ irányú Lorentz-lökés során nem változnak meg, ugyanakkor a sebességre merőleges síkban az elektromos térerősség és a mágneses indukció komponensei egymással „keverednek”. Ez explicit módon mutatja, hogy az elektromágneses mező olyan fizikai „test”, amelynek az elektromos és a mágneses tulajdonsága függ attól, hogy a mezőt melyik inerciarendszerben állva figyeljük meg.**

3.1.2 Invariánsok

A kölcsönhatások véges terjedési sebességének köszönhetően az elektromágneses mező dinamikai változásokra képes, valódi fizikai objektum. Kontinuum végtelen sok szabadsági foka van, az $F^{\mu\nu}$ térerősség-tenzor komponenseinek értékei a tér pontjaiban, egy tetszőleges, adott időpillanatban.

Az elektromágneses mező dinamikáját, „mozgását” leíró egyenleteket a legkisebb hatás elve alapján kapjuk meg. Ehhez a hatásfunkcionál kifejezését kell megsejtenünk. A hatás legfontosabb tulajdonsága, hogy Lorentz-skalár. A hatás megszerkesztéséhez segítséget jelent, ha előzőleg **megkeressük azokat a Lorentz-invariáns kifejezéseket, amelyeket a térerősség-tenzorból tudunk alkotni.**

A térerősség-tenzorból két kifejezés képezhető, amelyek a valódi Lorentz-transzformációk (a 3-dimenziós térbeli forgatások és a Lorentz-lökések) során invariánsak maradnak:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \text{skalár}\ , \\ \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda} &= \text{pszeudoskalár}\ . \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Itt $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$ a teljesen antiszimmetrikus negyedrendű tenzor, komponenseinek értéke $+1$ (-1), ha $(\mu\nu\kappa\lambda)$ a (0123) indexsorozat páros (páratlan) permutációja, és nulla egyébként (vagyis amikor legalább két index értéke megegyezik). Felhasználva a térerősség-tenzor $F^{\mu\nu}$ komponenseinek és az elektromos térerősség ill. a mágneses indukció komponenseinek (3.1.2) kapcsolatát, az elektromágneses mező Lorentz-invariánsait tetszőleges K inerciarendszerben ki tudjuk fejezni az ott uralkodó $\vec{E}$ elektromos térerősséggel és $\vec{B}$ mágneses indukcióval:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) &= 2\left(\vec{B}^{\,2}(t,\mathbf{r}) - \vec{E}^{\,2}(t,\mathbf{r})\right) = \text{ skalár}, \\ \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}(x)F_{\kappa\lambda}(x) &\sim \vec{E}(t,\mathbf{r})\cdot\vec{B}(t,\mathbf{r}) = \text{ pszeudoskalár }, \end{aligned} \qquad (3.1.10)$$

ahol $(x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}$ a téridő azon pontjának négyes-helyzetvektora, amelyben az invariánsok értékét vizsgáljuk.

A pszeudoskalár olyan egy-komponensű mennyiség, amely Lorentz-transzformációkkal szemben invariáns, de a (3-dimenziós) tértükrözéskor előjelet vált. A skalár ezzel szemben nem vált tértükrözéskor előjelet. Nyilvánvalóan polárvektor négyzete és axiálvektor négyzete is skalár, de polárvektor és axiálvektor skaláris szorzata pszeudoskalár.

Érdekességek. Az invariánsokból még a hatás megszerkesztése előtt sok érdekeset olvashatunk ki az elektromágneses mezőre vonatkozóan. Ha létezik olyan inerciarendszer, amelyben az elektromos térerősség és a mágneses indukció merőlegesek egymásra, akkor azok minden inerciarendszerben merőlegesek egymásra. Ha létezik olyan inerciarendszer, amelyben az elektromos térerősség és a mágneses indukció nagysága egyenlő, akkor azok minden inerciarendszerben egyenlő nagyságúak. Érdekességként jegyezzük meg, hogy a szabadon terjedő elektromágneses hullámban (így a fényben is) a térerősség és a mágneses indukció tetszőleges inerciarendszerben merőlegesek egymásra és egyenlő nagyságúak. (Az utóbbi állítás az általunk használt Gauss-féle egységrendszerben igaz. SI mértékrendszerben a skalár-invariáns a $c^2B^2 - E^2$ kifejezéssel arányos és ezért, ha $E = cB$ teljesül valamely inerciarendszerben, akkor $E' = cB'$ minden inerciarendszerben.)

3.1.3 A szabad elektromágneses mező. A hatás

Miután az elektromágneses mező saját dinamikával rendelkező fizikai objektum, azért létezik olyan hatásfunkcionál, amelyből az elektromágneses mező mozgásegyenletei a legkisebb hatás elve alapján leszármaztathatók. Találjuk ki, hogy milyen alakú ez a hatás.

A szabad elektromágneses mező hatásfunkcionáljától megköveteljük, hogy

1. **Lorentz-skalár legyen,**
2. **invariáns legyen a tértükrözéssel és az időtükrözéssel szemben,**
3. **az előző követelményeknek eleget tevő legegyszerűbb kifejezés legyen.**

Az 1. követelményből következik, hogy a hatásfunkcionál csak a skalár- vagy a pszeudoskalár invariánson keresztül függhet a térrősség-tenzortól. Vizsgáljuk a 2. követelményt. Tértükrözés során $\mathbf{E} \to -\mathbf{E}$, $\mathbf{B} \to \mathbf{B}$, azaz az elektromos térerősség Descartes-komponensei előjelet váltanak, míg a mágnese indukció Descartes-komponensei nem. A Lorentz-erő $\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$ alakjából, továbbá a $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ sebesség és az impulzus első deriváltjaként értelmezett $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ erő transzformációs tulajdonságaiból azt is könnyen megkapjuk, hogyan kell az elektromos térerősségnek és a mágneses indukciónak transzformálódnia időtükrözés (időmegfordítás) során:

$$\mathbf{F} \to \mathbf{F}, \quad \mathbf{v} \to -\mathbf{v}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \to -\mathbf{B}. \tag{3.1.11}$$

Nyilvánvaló, hogy mind tértükrözés, mind időtükrözés esetében a skalárinvariáns változatlan marad, míg a pszeudoskalár invariáns, $\vec{E} \cdot \vec{B}$ előjelet vált. A szabad elektromágneses mező hatásfunkcionáljának a térerősség-tenzortól tehát csak az elektromágneses mező skalárinvariánsa révén, ill. a pszeudoskalár-invariáns páros hatványai révén szabad függenie. Az egyszerűségre való törekvés 3. követelményét is szem előtt tartva egyetlen lehetőség marad: a hatásfunkcionál a **legegyszerűbb skalár-kifejezés**, azaz az, amelyik a skalárinvariánst lineárisan, később tetszőlegesen rögzíthető konstanssal szorozva tartalmazza.

A hatásfunkcionál kifejezésében tehát a téridő egyes x pontjaiban vett

$$F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \tag{3.1.12}$$

kifejezésnek kell állnia. Adott t pillanatban a fizikai mezőt úgy lehet megadni, hogy a tér minden $\vec{r}$ helyzetvektorú pontjában megadjuk az $F^{\mu\nu}$ térerősség-tenzor értékét. Ha feltesszük, hogy a 3-dimenziós tér egyes pontjaiban vett térerősségek független szabadsági fokok, akkor

1. a mező tetszőleges, infinitezimális dV térfogatelemének a Lagrange-függvényhez a dV térfogatelemmel (a független szabadsági fokok számával) arányos járulékot kell adnia,
2. és az egyes térfogatelemektől származó $F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)dV$ járulékokat a Lagrange-függvényben egyszerűen össze kell adni. Ez, infinitezimális térfogatelemekről lévén szó, térfogati integrálást jelent.

A szabad elektromágneses mező Lagrange-függvénye tehát:

$$L = -a \int dV F_{\mu\nu}(t, \mathbf{r})F^{\mu\nu}(t, \mathbf{r}), \tag{3.1.13}$$

ahol az a állandót később választjuk meg. A hatást a Lagrange-függvényből a rögzített kezdeti t_k és végső t_v időpillanatok közötti, idő szerinti integrálással kapjuk:

$$S = -a \int_{t_k}^{t_v} dt \int dV F_{\mu\nu}(t, \mathbf{r})F^{\mu\nu}(t, \mathbf{r}). \tag{3.1.14}$$

Vegyük figyelembe, hogy a $dVcdt = d\Omega$ négyes-térfogatelem Lorentz-skalár. Ha az idő szerinti integrálás határait kiterjesztjük a végtelenbe, $t_k \to -\infty$, $t_v \to +\infty$, akkor a hatás kapott kifejezése valamennyi, korábban megfogalmazott követelményünknek eleget tesz. Ekkor a hatást

$$S = -\frac{a}{c} \int d\Omega F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \tag{3.1.15}$$

alakba írhatjuk. A térerősség mértékegységének alkalmas megválasztásával: $a = \frac{1}{16\pi}$. Végül tehát **a szabad elektromágneses mezőt leíró hatás:**

$$S = -\frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{8\pi} \int dt \int dV \left(\vec{E}^{\,2} - \vec{B}^{\,2}\right). \tag{3.1.16}$$

A hatás előjele. A negatív előjelet a hatás kovariáns alakjában az indokolja, hogy a hatásnak legyen minimuma. Az $\vec{E}^2$ kifejezés tartalmaz ugyanis a legmagasabb hatványon időderiváltat, $(\partial\vec{A}/\partial t)^2$. Tetszőlegesen gyorsan változó térben ennek értéke tetszőlegesen naggyá válhat. Ezért a negatív előjel elhagyása esetén a hatásnak nem lenne minimuma. Később megtanuljuk, hogy a szabad elektromágneses mező minden térfogategysége energiát hordoz. Be lehet látni, hogy amennyiben a hatás előjelét megváltoztatnánk, akkor a szabad elektromágneses mező térfogategységének energiája nem lenne alulról korlátos. Ez a tapasztalatnak ellentmondana, hiszen ekkor korlátlanul lehetne a szabad elektromágneses mezőből energiát kinyerni.

3.2 Az elektromágneses mező forrásai

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy az elektromágneses mező lokális mértékszimmetriája következtében a töltésekre lokális megmaradási törvénynek kell teljesülnie. Megmutatjuk, hogy az elektromágneses mező és a töltések kölcsönhatását a Lagrange-sűrűségben a töltések négyes-áramsűrűségének és a négyes-vektorpotenciálnak a szorzata írja le. Ez a kölcsönhatás az ún. minimális kölcsönhatás, amely összhangban van egyrészt a Lorentz-erő erőtörvényével, másrészt pedig ennek köszönhetően a töltések négyes-áramsűrűsége az elektromágneses mező forrása.

3.2.1 Diszkrét ponttöltések rendszere

A vizsgált fizikai rendszerbe értsük bele az elektromágneses mezőt és az elektromágneses mezőt keltő töltéseket is. Ennek a rendszernek a hatásfunkcionálja három tagból áll:

1. a töltésekre, mint m_0 nyugalmi tömegű, szabad pontrészecskékre vonatkozó S_{r} tagból,
2. a ponttöltések és az elektromágneses tér közötti S_{kh} kölcsönhatásból, és
3. a szabad elektromágneses teret leíró S_{em} tagból.

Tehát **a hatás:**

$$\begin{aligned} S &= S_{\mathrm{r}} + S_{\mathrm{kh}} + S_{\mathrm{em}} \\ &= -\sum_a \left(m_0 c \int ds \right)_a - \sum_a \left(\frac{e}{c} \int ds u^\mu(x(s)) A_\mu(x(s)) \right)_a \\ &\quad -\frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x), \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

ahol $\sum_a$ a ponttöltésekre végzett összegzés, a $(\ldots)_a$ jelölés azt jelenti, hogy a zárójelben levő mennyiségeket az a-adik ponttöltés $x_a^\mu(s)$ világvonalán kell kiszámolni.

3.2.2 Folytonos töltéseloszlás. Négyes-áramsűrűség

Töltés- és áramsűrűség. Ha valamely térfogatban makroszkopikus számú töltés van jelen, akkor a töltéseket nem érdemes egyesével, külön-külön számbavenni. Ehelyett adott inerciarendszerben álló megfigyelő az ottani $\vec{j}$ áram- és ρ töltéssűrűséget szokta használni. A töltéssűrűség (adott t időpillanatban) a

$$\rho(t,\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to P} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \tag{3.2.2}$$

határértékkel van értelmezve a tér $\vec{r}$ helyzetvektorú P pontjában, ahol ΔQ a ΔV térfogatban található töltés, a P pont benne van a ΔV térfogat belsejében. A határértéket úgy képezzük, hogy az $\vec{r}$ helyzetvektorú P pont körül felvett ΔV infinitezimális térfogatot fokozatosan ráhúzzuk a P pontra. **Az, hogy a tér $\vec{r}$ pontjában, a t időpillanatban a töltéssűrűség $\rho(t,\vec{r})$, azt jelenti, hogy az $\vec{r}$ helyzetvektorú pontot tartalmazó, tetszőleges infinitezimális dV térfogatelemben található töltés a t pillanatban**

$$dQ = \rho(t,\vec{r})dV. \tag{3.2.3}$$

Az, hogy a tér $\vec{r}$ helyzetvektorú P pontjában $\vec{j}(t,\vec{r})$ az áramsűrűség a t időpillanatban, azt jelenti, hogy a P pontban felvett tetszőleges, dF nagyságú, $\vec{n}$ (egységvektor) normálisú infinitezimális felületelemen, infinitezimális $(t, t+dt)$ időintervallum alatt a normális irányában áthaladó töltés

$$dQ = j_n dF dt, \tag{3.2.4}$$

ahol $j_n = \vec{j} \cdot \vec{n}$ az áramsűrűségnek a felületelem $\vec{n}$ normálisa irányába mutató komponense. Ebből az értelmezésből következik, hogy ha a töltések sebessége az $\vec{r}$ helyen $\vec{v}$, akkor az áramsűrűség

$$\vec{j} = \rho\vec{v}. \tag{3.2.5}$$

A töltéssűrűség és az áramsűrűség valójában a közeg makroszkopikus darabjainak átlagolással értelmezett tulajdonságai, abban az értelemben, ahogy arról a „Bevezetés a mechanikába" c. jegyzet B. függelékében beszéltünk.

Az áramsűrűség négyesvektora. A **kovariáns áramsűrűséget** a következőképpen vezetjük be. Abból indulunk ki, hogy **a tetszőleges infinitezimális térfogatelemben található dQ töltés minden inerciarendszerben azonos, tehát Lorentz-skalár.** Ez az állítás annak **a tapasztalatnak az általánosítása, amely szerint az elektron töltése minden inerciarendszerben ugyanakkora.** Tetszőleges K inerciarendszerben $dQ = \rho dV$, ha dV ott az anyagdarabka térfogata. Meg lehet mutatni, hogy a

$$j^\mu = \left(\rho c, \vec{j} = \rho\vec{v}\right) \tag{3.2.6}$$

komponensekkel adott mennyiség négyes-vektor, ezt nevezzük a **négyes-áramsűrűségnek.**

Szorozzuk meg a dQ invariáns töltésmennyiséget azzal a dx^μ kovariáns elmozdulással, amelyet ezek a töltések a K rendszerben mért dt infinitezimális idő alatt (átlagosan) elszenvednek:

$$\rho dV dx^\mu = \rho dV \frac{dx^\mu}{dt} dt. \tag{3.2.7}$$

A kapott mennyiség, egy skalár és egy négyesvektor szorzata, maga is négyesvektor. Írjuk ezt a négyesvektort az alábbi alakba:

$$\frac{1}{c}\rho\frac{dx^\mu}{dt} dV c dt = \frac{1}{c}\left(\rho\frac{dx^\mu}{dt}\right) d\Omega. \tag{3.2.8}$$

Miután $d\Omega = dVcdt$, a Lorentz-invariáns térfogatelem skalár, a zárójelben szereplő

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} \tag{3.2.9}$$

mennyiség négyesvektor. **Ezt a négyesvektort nevezzük az áramsűrűség négyesvektorának**. A négyes-áramsűrűség komponensei

$$j^\mu = \left(\rho c, \vec{j} = \rho \vec{v}\right) \tag{3.2.10}$$

a 3-dimenziós térben értelmezett ρ töltéssűrűség (c faktortól eltekintve) és $\vec{j}$ áramsűrűség.

Töltésáram és elektromágneses mező kölcsönhatása. Folytonos eloszlású töltések esetén a hatásnak a töltések és az elektromágneses tér kölcsönhatását leíró S_{kh} tagja az egyes térfogatelemekben levő $dQ(t, \vec{r}) = \rho dV$ töltésmennyiségekre tartalmaz összegzést (ami térfogati integrálást jelent):

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{kh}} &= -\frac{1}{c} \int ds \int dV \ \rho \ A_\mu \frac{dx^\mu}{ds} = -\frac{1}{c} \int dt \int dV \ \rho \ A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} \\ &= -\frac{1}{c^2} \int d\Omega \ j^\mu A_\mu. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Az elektromágneses kölcsönhatást tehát a hatásfunkcionálban a négyes-áramsűrűség és a négyes-vektorpotenciál szorzata írja le. A minimális csatolás azt jelenti, hogy az elektromos négyes-áramsűrűség lineárisan van csatolva a hatásfunkcionálban az elektromágneses mező négyes-vektorpotenciáljához.

3.2.3 Mértékszimmetria. Töltésmegmaradás. Kontinuitási egyenlet

Mértékszimmetria. Vegyük észre, hogy a hatás nemcsak a Poincaré-transzformációkkal szemben invariáns, hanem egy további szimmetriával is rendelkezik. Végezzük el tetszőleges $f(x)$ függvény segítségével az

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu f(x) \tag{3.2.12}$$

transzformációt, amelyet **mértéktranszformáció**nak nevezünk. Nem nehéz belátni, hogy mértéktranszformáció esetén a térerősség tenzora változatlan marad:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \rightarrow \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + (\partial^\mu \partial^\nu f - \partial^\nu \partial^\mu f) = F^{\mu\nu}. \tag{3.2.13}$$

A térerősség tenzora mértékinvariáns tehát, ami azt jelenti egyrészt, hogy ugyanazt az elektromágneses teret végtelen sokféle, egymástól csak egy mértéktranszformációban különböző vektorpotenciállal le lehet írni. Másrészt, ha a térerősség tenzora mértékinvariáns, akkor ennek következtében **a szabad elektromágneses térre vonatkozó hatás is invariáns a mértéktranszformációkkal szemben.**

A mértéktranszformáció **lokális transzformáció** és a mértékszimmetria **lokális szimmetria** ellentétben a Poincaré-transzformációkkal, amelyek **globális transzformációk** ill. globális szimmetriák. A globális szimmetriatranszformáció a térmennyiségek olyan transzformációja, amely független a helytől és az időtől, ezzel szemben a szimmetriatranszformációt lokálisnak nevezzük, ha a téridő minden pontjában másképpen transzformáljuk a térmennyiségeket. Az előzőekben azt láttuk, hogy **ha a téridő globális transzformációi szimmetriái a fizikai rendszernek, akkor ezeknek megmaradási törvények felelnek meg.** Alább meg fogjuk mutatni, hogy **a lokális mértékszimmetriának egyik következménye az elektromos töltés lokális megmaradása.** Későbbi tanulmányaink során majd azt is megtanuljuk, hogy az elektromágneses kölcsönhatás pontosan azért jön létre, mert az elektronok rendszerében a mértékszimmetria lokális. Kanyarodjunk most vissza az elektromos töltés megmaradásának kérdéséhez.

Az elektromos töltés lokális megmaradása. Induljunk ki abból a feltevésből, hogy nemcsak a szabad elektromágneses térre vonatkozó hatás mértékinvariáns, hanem, hogy **a mértékszimmetria az elektromágneses tér és a töltött részecskék kölcsönhatásának is tulajdonsága.** Megmutatjuk, hogy **a mértékszimmetria következtében a töltésre lokális megmaradási törvény, úgynevezett kontinuitási egyenlet érvényes: tetszőleges térfogatban a töltés csak annak árán tud megváltozni, hogy a térfogatot határoló zárt felületen töltés áramlik ki vagy be. Töltés nem keletkezhet ill. nem tűnhet el. A töltés lokális megmaradását kontinuitási egyenlet fejezi ki, amelynek Lorentz-kovariáns alakja**

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \tag{3.2.14}$$

és nem Lorentz-kovariáns alakja pedig

$$\partial_t \rho + \text{ div } \vec{j} = 0. \tag{3.2.15}$$

Induljunk ki a hatás (3.2.11) kölcsönhatási tagjából és követeljük meg annak mértékszimmetriáját, azaz hogy

$$-\frac{1}{c^2}\int d\Omega j^\mu A_\mu = -\frac{1}{c^2}\int d\Omega j^\mu \left(A_\mu + \partial_\mu f\right) \tag{3.2.16}$$

álljon fenn tetszőleges $f(x)$ függvénnyel adott mértéktranszformáció esetén. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha a

$$\int d\Omega j^\mu \partial_\mu f \quad = \quad 0 \tag{3.2.17}$$

egyenlet tetszőleges $f(x)$ függvényre fennáll. Hajtsunk végre parciális integrálást,

$$\int d\Omega \partial_\mu \left(j^\mu f\right) - \int d\Omega f \partial^\mu j_\mu \quad = \quad 0, \tag{3.2.18}$$

és írjuk át az első tagban a térfogati integrált Gauss tételének alkalmazásával felületi integrállá. A teljes téridő-tartományt határoló zárt felület térben végtelen távoli felületdarabjain (azaz $|\vec{r}| \to \infty$ esetén) az áramsűrűség nulla. Legyen továbbá $f(x)$ olyan tetszőleges függvény, amely $t \to \pm\infty$ esetén eltűnik. Ekkor a felületi integrál eltűnik és

$$-\int d\Omega f(x) \partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{3.2.19}$$

azaz

$$\partial_\mu j^\mu(x) \quad = \quad 0 \tag{3.2.20}$$

adódik. **Ez az egyenlet a kontinuitási egyenlet kovariáns alakja.**

Az alábbi globális és lokális megmaradási törvényeket olvashatjuk ki az elektromos töltésre vonatkozó kontinuitási egyenlet kovariáns alakjából:

1. **A töltésmegmaradás globális törvénye: zárt rendszer összes elektromos töltése megmarad, azaz időben állandó.**

   Integráljuk a (3.2.20) egyenlet mindkét oldalát az $x^0 = ct_k$ és az $x^0 = ct_v$, kezdeti ill. végső időpontoknak megfelelő hipersíkok közötti téridő- tartomány azon részére, amelyet térben a zárt rendszer falai határolnak. A rendszer zárt, ezért a falain az elektromos töltésáram sűrűsége zérus. Az áramsűrűség négyesdivergenciájának négyes-térfogati integrálját Gauss tétele értelmében át lehet írni a négyes-áramsűrűség külső normális irányú komponensének a határfelületekre vett integráljává. Felhasználva, hogy az áramsűrűség a térbeli határfelületeken, azaz a rendszer falain eltűnik, a felületi integrálhoz csak az $x^0 = ct_k$ és $x^0 = ct_v$ hipersíkok adnak járulékot. Mivel az $x^0 = ct_k$ hipersík külső normálisa az x^0 tengellyel párhuzamos negatív irányba mutat, ennek a síknak a járuléka negatív. Az állandó x^0 értékhez tartozó hipersíkokon a négyes-felületelem éppen a dV térfogatelem. Mindezeket felhasználva:

   $$\int d\Omega \partial_\mu j^\mu \quad = \quad \int_V dV j^0(t_v, \vec{r}) - \int_V dV j^0(t_k, \vec{r}) = 0. \tag{3.2.21}$$

   Ez azt jelenti, hogy **a zárt rendszer teljes V térfogatában található töltés időben állandó, azaz a zárt rendszer össztöltése megmaradó mennyiség. Ez a töltésmegmaradás globális törvénye.**

2. **A töltésmegmaradás lokális törvénye: tetszőleges, térbeli tartomány V térfogatában a töltés mennyiségének adott Δt idő alatt bekövetkezett megváltozása egyenlő a tartomány határán ezen Δt idő alatt kiáramlott, ill. beáramlott töltések előjeles összegével.**

   Írjuk fel a kontinuitási egyenletet tetszőlegesen választott K inerciarendszerben:

   $$\partial_t \rho + \text{ div } \vec{j} \quad = \quad 0. \tag{3.2.22}$$

   Integráljuk a kontinuitási egyenlet mindkét oldalát tetszőleges (időtől független) V 3-dimenziós térfogatra, és használjuk fel Gauss-tételét:

   $$\frac{d}{dt} \int_V dV \rho \quad = \quad - \oint_F df j_n, \tag{3.2.23}$$

   ahol F a V térfogatot határoló zárt felület, j_n a 3-dimenziós $\vec{j}$ áramsűrűségnek az F felület külső normálisa irányába mutató komponense. Az egyenlet jelentése az, hogy **tetszőleges V térfogatban levő $\int_V dV \rho$ töltés időegység alatt bekövetkező megváltozása egyenlő a térfogatot határoló zárt felületen időegység alatt átáramlott töltések előjeles összegével.** Beáramló (kiáramló) töltés járuléka pozitív (negatív), mert ekkor $-j_n > 0$ ($-j_n < 0$). **Ez a töltés lokális megmaradásának törvénye.** Az utóbbiból a globális töltésmegmaradás is következik minden olyan rendszerre, amelynek felületén nem áramlik ki és be töltés.

3.3 A Maxwell-egyenletek

Az előző fejezetben megszerkesztettük a szimmetriákat figyelembe véve azt a legegyszerűbb alakú hatásfunkcionált, amely a Lorentz-erő törvényét helyesen írja le, és amely számot ad a töltés lokális megmaradásáról. Most **a legkisebb hatás elve alapján leszármaztatjuk a hatásból az elektromágneses mező mozgásegyenleteit. Eredményül a Maxwell-egyenleteket kapjuk. Miután a Maxwell-egyenleteket ill. azok következményeit a kísérletek teljes mértékben igazolják, ezért igazoltnak vehetjük azt is, hogy a felírt hatás csakugyan az elektromágneses mezőt írja le az azt keltő és benne mozgó ponttöltésekkel együtt.**

3.3.1 Legkisebb hatás elve

A térerősség-tenzorra érvényes azonosságok. Kezdjük azzal, hogy **a térerősség-tenzor definíciójából azonnal következnek az alábbi egyenletek, mint a-zonosságok:**

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} \;=\; 0. \tag{3.3.1}$$

Erről az $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ definíciót behelyettesítve közvetlenül meggyőződhetünk.

A (3.3.1) egyenletek 4 független egyenletet jelentenek, mert a Lorentz-index 4 különböző értéke közül 3 darab, páronként különbözőt 4-féleképpen lehet kiválasztani: $(\rho\mu\nu) = (012), (013), (023), (123)$. Az első három lehetőség a

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} \;=\; 0, \tag{3.3.2}$$

egyenletet, a negyedik lehetőség pedig a

$$\mathrm{div}\ \vec{B} \;=\; 0 \tag{3.3.3}$$

egyenletet jelenti. A kapott (3.3.2) és (3.3.3) egyenletek az elektromágneses térre vonatkozó **Maxwell-egyenletek közül az a kettő, amelyek közvetlenül a térerősségtenzor definíciójából következnek.**

A legkisebb hatás elve. **További két Maxwell-egyenlet érvényes; ezek valóban dinamikai egyenletek, amelyek a legkisebb hatás elvéből vezethetők le:**

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} \;=\; -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \tag{3.3.4}$$

Keressük ehhez a hatás megváltozását a mező „általános koordinátáinak”, azaz a vektorpotenciál különböző téridőpontokban felvett értékeinek elképzelt, infinitezimális $A^\mu \to A^\mu + \delta A^\mu(x)$ megváltozása (variációja) esetén. Követeljük meg, hogy ez a variáció a hatásban szereplő téridőtartományt határoló zárt felületen tűnjön el. A térerősség-tenzor variációja:

$$\delta F^{\mu\nu} \;=\; \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu, \tag{3.3.5}$$

aminek következtében:

$$\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \;=\; 4 F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu. \tag{3.3.6}$$

Így a hatás szabad elektromágneses térre vonatkozó S_{em} tagjának megváltozása:

$$\begin{aligned} \delta S_{\mathrm{em}} &= -\frac{1}{16\pi c}\int d\Omega 4 F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu \\ &= \frac{1}{4\pi c}\int d\Omega \partial^\mu F_{\mu\nu} \cdot \delta A^\nu + \{\text{ felületi integrál }\}, \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

ahol a második sort parciális integrálás és Gauss (matematikai) tételének alkalmazásával kaptuk. A felületi integrál eltűnik, mert a vektorpotenciál variációját úgy választottuk, hogy az a téridőtartományt határoló zárt felületen eltűnjön.

A hatás kölcsönhatási tagjának a variációja:

$$\delta S_{\mathrm{kh}} \;=\; -\frac{1}{c^2}\int d\Omega j^\mu \delta A_\mu. \tag{3.3.8}$$

A töltésrendszerből és annak elektromágneses teréből álló fizikai rendszerre vonatkozó hatás variációja: $\delta S = \delta S_{\rm kh} + \delta S_{\rm em}$. A legkisebb hatás elve értelmében ennek a „valódi mozgás", azaz az elektromágneses mezőt ténylegesen megadó $A^\mu(x)$ térkonfiguráció esetén el kell tűnnie: $\delta S = 0$, azaz

$$\int d\Omega \left(\frac{1}{4\pi c} \partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} j_\nu \right) \delta A^\nu = 0, \tag{3.3.9}$$

ami akkor és csak akkor állhat fenn tetszőleges δA^ν variáció esetén, ha a kerek zárójelben álló kifejezés azonosan zérus. Innen a (3.3.4) mozgásegyenletek adódnak.

A (3.3.1) és a (3.3.4) egyenletek együttesen a kovariáns alakban felírt Maxwell-egyenletek. A (3.3.4) egyenleteket is átírjuk nem kovariáns alakba. A $\mu = 0$ komponenst véve

$$\mathrm{div}\ \vec{E} \;=\; 4\pi\rho \tag{3.3.10}$$

adódik, a $\mu = i = 1, 2, 3$ komponenseket véve pedig az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\mathrm{rot}\ \vec{B} \;=\; \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{3.3.11}$$

Az (3.3.2), (3.3.3), (3.3.10) és (3.3.11) egyenletek a Maxwell-egyenletek nem kovariáns alakban.

Ezeket, mint az elektromágneses mező mozgásegyenleteit, a tapasztalat messzemenően igazolta. Ezért most már biztosak vagyunk, hogy az $S_{\rm em}+S_{\rm kh}$ hatás, amelyet a Lorentz-szimmetriát és az egyszerűséget szem előtt tartva konstruáltunk, helyes.

3.3.2 Integrális alak és fizikai jelentés

A Maxwell-egyenletek fizikai jelentését úgy látjuk a legjobban, ha átírjuk azokat integrális alakba. Az átírás során felhasználjuk a B. függelékben ismertetett Gauss- és Stokes-tételt, amelyek a matematika vektoranalízis c. fejezetéből ismeretesek.

Vegyük sorba az egyes egyenleteket:

1. **Gauss törvénye.** Tekintsük a (3.3.10) Maxwell-egyenletet és integráljuk az egyenlet mindkét oldalát egy tetszőlegesen választott V térfogatú összefüggő, zárt térbeli tartományra:

$$\int_V dV\ \mathrm{div}\ \vec{E} = 4\pi \int_V dV \rho. \tag{3.3.12}$$

Az egyenlet bal oldalán szereplő térfogati integrál Gauss tétele (ld. (B.16)) alapján átírható a térbeli tartományt határoló F zárt felületre vett felületi integrállá:

$$\oint_F df \vec{E}\cdot\vec{n} = 4\pi \int_V dV \rho, \tag{3.3.13}$$

ahol $\vec{n}$ a határfelület külső normálisa (a zárt tartományból kifelé mutató egységvektor), $\vec{E}\cdot\vec{n}$ az elektromos térerősségnek a határfelület külső normálisa irányába mutató komponense, $\vec{E}\cdot\vec{n}df$ **az elektromos térerősségnek a határfelület**

infinitezimális df felületelemén belülről kifelé áthaladó fluxusa, $Q = \int_V dV\rho$ a zárt F felület által határolt V térfogatban található elektromos töltés. A (3.3.13) egyenlőség **a Gauss-törvény, amely kimondja, hogy az elektromos térerősség forrása az elektromos töltés: egy tetszőleges zárt felületen az elektromos térerősség fluxusa arányos a felületen belül található össztöltéssel. Másképpen, tetszőleges zárt felületen annyi elektromos erővonal halad át (a kifelé haladóakat pozitív, a befelé haladóakat negatív előjellel számolva), mint amennyi a zárt felületen belül található össztöltés mennyiségének 4π-szerese.**

2. **A mágneses (indukció)tér forrásmentessége.** Az előzőhöz hasonlóan írhatjuk át a (3.3.3) egyenletet integrális alakba. Azt kapjuk, hogy tetszőleges, V térfogatú, összefüggő, zárt tartomány esetén

$$\int_V dV \ \mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \tag{3.3.14}$$

integrális egyenlet érvényes. A bal oldalt Gauss tétele segítségével felületi integrállá alakítva az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\oint_F df \vec{B} \cdot \vec{n} = 0. \tag{3.3.15}$$

Itt $\vec{n}$ az F határfelület külső normálisa, $\vec{B} \cdot \vec{n}$ a mágneses indukciónak a határfelület külső normálisa irányába mutató komponense, $\vec{B}\cdot\vec{n}df$ **a mágneses indukciónak az F határoló felület infinitezimális df felületelemén belülről kifelé áthaladó fluxusa.** Az (3.3.15) egyenlet **a mágneses Gauss-törvény, amely kimondja, hogy a mágneses indukciótérnek nincsenek forrásai, azaz nincsenek mágneses töltések.** Az (3.3.15) egyenletet az elektromos térerősségre vonatkozó Gauss-törvénnyel összehasonlítva azt látjuk, hogy az egyenlet jobb oldalán, ahol a mágneses indukciótér forrásának kellene állni, valóban nulla szerepel.

3. **Ampère törvénye.** Foglalkozzunk most a (3.3.11) egyenlet átírásával. Először vegyük észre, hogy az egyenlet jobb oldalán a

$$\vec{j}_{\mathrm{el}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{3.3.16}$$

idő szerinti parciális derivált ugyanolyan helyzetben szerepel, mint a töltések $\vec{j}$ áramsűrűsége. Ezért **nevezzük a $\vec{j}_{\mathrm{el}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ vektort az elektromos eltolódási áram sűrűségének. Az időben változó elektromos térerősség ill. az általa létrehozott elektromos eltolódási áramsűrűség tehát a mágneses teret keltő hatásában ugyanolyan szerepet játszik, mint a töltések $\vec{j}$ áramsűrűsége. Az időben változó elektromos tér mágneses teret kelt.**

Integráljuk ezután a (3.3.11) egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges F felületre, amelynek normálisát $\vec{n}$-nel jelöljük:

$$\int_F df\vec{n}\cdot\ \mathrm{rot}\ \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\int_F df\vec{n}\cdot\left(\vec{j}_{\mathrm{el}} + \vec{j}\right). \tag{3.3.17}$$

Legyen g az F felületet határoló zárt görbe olyan körüljárással (a $\vec{t}$ érintő olyan irányításával), amely a felület $\vec{n}$ normálisának irányából nézve az óramutató járásával ellentétes (azaz pozitív értelmű). Ekkor Stokes-tétele alapján az egyenlet bal oldala átírható az F felületet határoló g zárt görbe menti integrállá:

$$\oint_g ds \vec{B} \cdot \vec{t} = \frac{4\pi}{c} \int_F df \vec{n} \cdot \left(\vec{j}_{\mathrm{el}} + \vec{j} \right). \tag{3.3.18}$$

Itt $\vec{B} \cdot \vec{t}$ a mágneses indukciónak a tetszőleges F felületet határoló g zárt görbe $\vec{t}$ érintőjének irányába mutató komponense, $\int_F df \vec{n} \cdot \vec{j}_{\mathrm{el}}$ ill. $\int_F df \vec{n} \cdot \vec{j}$ az F felületen, a görbe körüljárási irányához a jobbkéz szabály szerint illeszkedő irányban áthaladó **elektromos eltolódási áram**, ill. **töltésáram.** A (3.3.18) egyenlet **Ampère törvénye, amelynek értelmében az elektromos áram és az elektromos eltolódási áram, azaz az időben változó elektromos tér mágneses örvényteret kelt.**

4. **Faraday törvénye.** Végezetül vizsgáljuk meg a (3.3.2) egyenletet, amelyet a (3.3.11) egyenlethez hasonlóan írhatunk át integrális alakba. Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges F felületre,

$$\int_F df \vec{n} \cdot \ \mathrm{rot}\ \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F df \vec{B} \cdot \vec{n}. \tag{3.3.19}$$

Legyen g az F felületet határoló zárt görbe, és legyen a felület normálisa és a görbe érintője a jobbkézszabálynak megfelelően irányítva. Ekkor Stokes tételét felhasználva az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\oint_g ds \vec{E} \cdot \vec{t} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{3.3.20}$$

ahol $\vec{E} \cdot \vec{t}$ az elektromos térerősségnek a g görbe $\vec{t}$ érintője irányába mutató komponense,

$$\Phi = \int_F df \vec{B} \cdot \vec{n} \tag{3.3.21}$$

a g zárt görbére illeszkedő F felületen, a görbe irányításához jobbkézszabály szerint illeszkedő normális irányában átmenő **mágneses indukciófluxus.** A (3.3.20) egyenlet **Faraday törvénye, amelynek értelmében az időben változó mágneses indukciótér elektromos örvényteret kelt. Az egyenlet jobb oldalán álló mínusz előjel azt fejezi ki, hogy az időben változó mágneses tér által keltett elektromos tér olyan áramot „akar” indítani (pl. egy próbatöltést olyan mozgásra „akar” késztetni), amely által (Ampère törvénye értelmében) keltett mágneses indukciótér a mágneses indukciófluxus időbeli változását akadályozni igyekszik. Ez Lenz törvénye.**

3.3.3 Az elektromágneses mező állapota*

Az elektromágneses mező állapota. **Az elektromágneses mező állapotát adott inerciarendszerben, adott t időpillanatban az határozza meg, ha a tér minden pontjában adott az $\vec{E}$ elektromos térerősség és a $\vec{B}$ mágneses indukció értéke.**

Adott kezdeti $t = t_k$ időpillanatban az elektromágneses mező állapotának megadása jelenti a szabad elektromágneses mezőre vonatkozó téregyenletek kezdőfeltételét.

A Maxwell-egyenletek megoldásának egyértelmű létezése. Ha nincsenek jelen külső források (töltések és áramok), akkor **szabad elektromágneses mezőről** beszélünk. A szabad elektromágneses mezőre vonatkozó Maxwell-egyenletek ún. homogén, csatolt, elsőrendű, lineáris parciális differenciálegyenletek. Be lehet bizonyítani, hogy (a térbeli végtelenben) rögzített határfeltételek és az egész térben $t = t_k$ pillanatban rögzített kezdőfeltételek esetén a szabad elektromágneses mezőre vonatkozó Maxwell-egyenleteknek egyértelműen létezik a megoldása. Ez azt jelenti, hogy az elektromágneses mező állapota bármely későbbi időpillanatban is egyértelműen meghatározott.

Ha töltések és áramok is vannak jelen, akkor a Maxwell-egyenletek ún. inhomogén, csatolt, elsőrendű, lineáris parciális differenciálegyenletek. Megoldásuk a szabad elektromágneses térre vonatkozó homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy speciális megoldásának a vektori összege. Bizonyítható, hogy ha adottak a külső töltések és áramok, mint az idő függvényei, akkor azok egyértelműen meghatározzák az inhomogén Maxwell-egyenletek speciális megoldását.

Elektromágneses mezők lineáris szuperpozíciója. Mivel az inhomogén Maxwell-egyenletek az ismeretlen $\vec{E}(t,\vec{r})$ és $\vec{B}(t,\vec{r})$ tereket és az adott $\rho(t,\vec{r})$ töltéssűrűséget ill. $\vec{j}(t,\vec{r})$ áramsűrűséget egyaránt lineárisan tartalmazzák, ezért ha több forrás van jelen, azaz

$$\rho(t,\vec{r}) = \rho_1(t,\vec{r}) + \rho_2(t,\vec{r}), \qquad \vec{j}(t,\vec{r}) = \vec{j}_1(t,\vec{r}) + \vec{j}_2(t,\vec{r}), \tag{3.3.22}$$

akkor **az elektromos térerősség és a mágneses indukció az egyes források által külön-külön, függetlenül keltett $\vec{E}_1(t,\vec{r})$ és $\vec{E}_2(t,\vec{r})$ ill. $\vec{B}_1(t,\vec{r})$ és $\vec{B}_2(t,\vec{r})$ terek lineáris szuperpozíciója:**

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_1(t,\vec{r}) + \vec{E}_2(t,\vec{r}), \qquad \vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{B}_1(t,\vec{r}) + \vec{B}_2(t,\vec{r}). \tag{3.3.23}$$

Természetesen a homogén Maxwell-egyenletek is lineárisak az $\vec{E}$ és $\vec{B}$ terekben, ezért ha $\vec{E}_1(t,\vec{r}), \vec{B}_1(t,\vec{r})$ ill. $\vec{E}_2(t,\vec{r}), \vec{B}_2(t,\vec{r})$ a homogén Maxwell-egyenletek két különböző megoldása, azaz a szabad elektromágneses mező két különböző állapota, akkor a vektori összegük,

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_1(t,\vec{r}) + \vec{E}_2(t,\vec{r}), \qquad \vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{B}_1(t,\vec{r}) + \vec{B}_2(t,\vec{r}). \tag{3.3.24}$$

is megoldása a homogén Maxwell-egyenleteknek, azaz az elektromágneses mezőnek egy lehetséges állapota.

Az elektromágneses mezőre érvényes tehát a lineáris szuperpozíció elve. Ennek többek között az a jelentősége, hogy **töltések rendszerének elektromágneses terét mindig megkaphatjuk úgy, mint a töltésrendszert alkotó egyes ponttöltések elektromágneses tereinek lineáris szuperpozícióját.**

Az elektromágneses mező szabadsági fokai. Az elektromágneses mező szabadsági fokainak számbavételekor körültekintően kell eljárnunk. A Maxwell-egyenletek 2 darab skaláris és 2 darab vektoregyenletet jelentenek, utóbbiakat komponensekben kiírva 6 darab egyenletet kapunk. Ebből a 8 darab egyenletből kell meghatározni a két térmennyiség, az elektromos térerősség és a mágneses indukció $3 + 3 = 6$ komponensét, mint a hely és az idő függvényét. A feladat első ránézésre túlhatározottnak látszik. A gondosabb vizsgálat azonban megmutatja, hogy az ismeretlenek és a független egyenletek száma megegyezik.

Állítsuk ehhez elő a térmennyiségeket és a forrásokat (a töltéssűrűséget és az áramsűrűség komponenseit) Fourier-integrál alakjában:

$$\rho(t,\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rho_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \qquad \vec{j}(t,\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{j}_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}},$$

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\vec{E}_{\vec{k}}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \qquad \vec{B}(t,\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\vec{B}_{\vec{k}}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{3.3.25}$$

Mivel az egyes mennyiségek mind valósak, azért a Fourier-amplitúdók $f_{-\vec{k}} = f^*_{\vec{k}}$ tulajdonsággal rendelkeznek, bármelyik mennyiségről legyen is szó. A térmennyiségeket így különböző hullámszámú módusok lineáris szuperpozíciójára bontottuk fel. Ezek amplitúdóira a Maxwell-egyenletekből az

$$i\vec{k}\cdot\vec{E}_{\vec{k}}(t) = -4\pi\rho_{\vec{k}}(t), \qquad i\vec{k}\cdot\vec{B}_{\vec{k}}(t) = 0,$$
$$-i\vec{k}\times\vec{E}_{\vec{k}}(t) = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\vec{B}_{\vec{k}}(t), \qquad -i\vec{k}\times\vec{B}_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\vec{E}_{\vec{k}}(t) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\vec{k}}(t) \tag{3.3.26}$$

egyenleteket kapjuk. Vezessük be egy tetszőleges $\vec{V}$ vektornak a $\vec{k}$-irányú $\vec{V}^{\mathrm{l}}$ longitudinális összetevőre és a $\vec{k}$ vektorra merőleges $\vec{V}^{\mathrm{tr}}$ transzverzális összetevőre való felbontását:

$$\vec{V} = \vec{V}^{\mathrm{l}} + \vec{V}^{\mathrm{tr}}, \qquad \vec{V}^{\mathrm{l}} = \vec{k}\frac{\vec{k}\cdot\vec{V}}{k^2}, \qquad \vec{V}^{\mathrm{tr}} = \vec{V} - \vec{V}^{\mathrm{l}}. \tag{3.3.27}$$

Ekkor az egyes egyenletek bal és jobb oldalát hasonlóan felbontva longitudinális és transzverzális komponensekre, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\vec{E}^{\mathrm{l}}_{\vec{k}}(t) &= 4\pi i\vec{k}\rho_{\vec{k}}(t),\\
\vec{B}^{\mathrm{l}}_{\vec{k}}(t) &= 0,\\
-i\vec{k}\times\vec{E}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}(t) &= -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\vec{B}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}(t),\\
-i\vec{k}\times\vec{B}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}(t) &= \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\vec{E}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}(t) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}(t),\\
0 &= \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\vec{E}^{\mathrm{l}}_{\vec{k}}(t) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\mathrm{l}}_{\vec{k}}(t)
\end{aligned} \tag{3.3.28}$$

egyenletek állnak fenn. Az utolsó ezek közül, az első egyenletet felhasználva,

$$0 = \frac{4\pi}{c}\left(\frac{-i}{k}\frac{d}{dt}\rho_{\vec{k}}(t) + \frac{1}{k}\vec{j}_{\vec{k}}\cdot\vec{k}(t)\right), \tag{3.3.29}$$

azaz

$$\frac{d}{dt}\rho_{\vec{k}}(t) + i\vec{k}\vec{j}_{\vec{k}}(t) = 0 \tag{3.3.30}$$

alakot ölt, amelyben felismerjük a töltésre vonatkozó kontinuitási egyenlet Fourier-transzformált alakját. Ez tehát azonosan teljesül, nem független egyenlet. Az első két egyenlet az elektromos térerősség és a mágneses indukció longitudinális komponensét határozza meg: 2 darab egyenlet 2 darab ismeretlen függvényre. Az elektromos térerősség longitudinális komponensét a töltéssűrűség határozza meg, a mágneses indukció longitudinális komponense azonosan zérus, mert nincsenek mágneses töltések, azaz a mágneses indukciótérnek nincsenek forrásai. A harmadik és a negyedik egyenlet 2 darab vektoregyenlet az elektromos térerősség és a mágneses indukció 2-2 transzverzális komponensére (a $\vec{k}$ vektorra merőleges síkban 2 független irány van). Tehát 4 darab független egyenletet kapunk 4 darab ismeretlen függvény meghatározására. Látjuk, hogy bármely $\vec{k}$ hullámszámhoz tartozó módus esetén ugyannyi az ismeretlenek száma, mint amennyi a független egyenletek száma: 6 darab.

A független egyenletek helyes leszámlálásának lényege tehát azt észrevenni, hogy a rot $\vec{E}$-t és a rot $\vec{B}$-t tartalmazó Maxwell-egyenletek nem 3-3, hanem csak 2-2 darab független egyenletet jelentenek a megfelelő transzverzális komponensekre, mert az egyenletek két oldalának longitudinális komponensei azonosságként egyeznek meg.

3.3.4 Az energiaimpulzus-tenzor

Az elektromágneses mező négyes-impulzusának és energiaimpulzus-tenzorának definíciója. Ha a mozgásegyenleteket ismerjük, akkor minden fizikai rendszer esetén azt szoktuk kérdezni, hogy melyek a megmaradó mennyiségek. Tudjuk, hogy azok megmaradása általános szimmetria-elvek következménye. Az a célunk, hogy keressük meg, **mi a töltésrendszerből és annak elektromágneses teréből álló fizikai rendszerben a megmaradó négyesimpulzus. Mi az a fizikai mennyiség, ami a rendszernek a téridőben végzett konstans eltolásokkal szembeni szimmetriája miatt marad meg? A válasz az, hogy értelmezhetjük a töltésekből és az általuk keltett elektromágneses mezőből álló rendszer teljes $P^\mu_{\rm tot}$ négyesimpulzusát, amely megmaradó. A teljes négyesimpulzus**

$$P^\mu_{\rm tot} = \sum_a p^\mu_a + P^\mu_{\rm em}, \tag{3.3.31}$$

az egyes ponttöltések p^μ_a mechanikai négyesimpulzusainak, és az elektromágneses mező $P^\mu_{\rm em}$ négyesimpulzusának az összege. Az egyes ponttöltések mechanikai négyesimpulzusa $p^\mu_a = m_0 c u^\mu_a$ alakban fejezhető ki a megfelelő ponttöltések u^μ_a négyessebességével. Az elektromágneses mező által hordozott négyesimpulzust az alábbi módon kell meghatározni:

$$P^\mu_{\rm em} = \frac{1}{c}\int dV T^{0\mu}_{\rm em}, \tag{3.3.32}$$

ahol $T^{\mu\nu}_{\rm em}$ az elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzora:

$$T^{\mu\nu}_{\rm em} = \frac{1}{4\pi}\Big(g^{\mu\nu}\frac{1}{4}F^{\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda} - F^{\mu\kappa}F^\nu{}_\kappa\Big). \tag{3.3.33}$$

A négyesimpulzushoz tehát az elektromágneses mező minden térfogateleme függetlenül, additív módon járul hozzá. Az energiaimpulzus-tenzor szimmetrikus másodrendű tenzor, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ és a spurja zérus, $T^\mu_\mu = 0$. A töltések és az általuk keltett elektromágneses mező teljes $P^\mu_{\rm tot}$ négyesimpulzusa mozgásállandó. Ebben a formában teljesül a négyesimpulzus megmaradásának törvénye.

A fenti állításokat a következőképpen láthatjuk be. Külön vizsgáljuk a hatás

$$S_{\rm em} + S_{\rm kh} \;=\; \int d\Omega\left(-\frac{1}{16\pi c}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}A^\mu j_\mu\right) \equiv \int d\Omega\mathcal{L} \tag{3.3.34}$$

tagjainak és a részecskék (töltések) mechanikai mozgásából származó $S_{\rm r}$ tagjának a megváltozását az infinitezimális $x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \delta a^\mu$ eltolás következtében. Az egyszerűbb áttekinthetőség kedvéért bevezettük az $\mathcal{L}$ Lagrange-sűrűséget.

Kezdjük az (3.3.34) tagok megváltozásával:

$$\begin{aligned}&\delta\left(S_{\rm em} + S_{\rm kh}\right) = \\ &= \int d\Omega\left(\delta a^\mu\partial_\mu\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\nu}\delta A^\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\rho A^\nu)}\delta\partial^\rho A^\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial j_\nu}\delta j_\nu\right).\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

Az egyes tagok jelentése és előjele analóg módon adódik, mint a (2.1.15) egyenlet levezetésekor. Az infinitezimális eltolás következtében:

$$\begin{aligned}\delta A^\nu &= \partial_\mu A^\nu\cdot\delta a^\mu,\\ \delta\partial^\rho A^\nu &= \partial^\rho\partial_\mu A^\nu\cdot\delta a^\mu,\\ \delta j^\nu &= \partial_\mu j_\nu\cdot\delta a^\mu.\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

Ezeket behelyettesítve adódik:

$$
\begin{aligned}
&\delta\left(S_{\mathrm{em}}+S_{\mathrm{kh}}\right)= \\
&= \int d\Omega \left[\partial_\mu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu}\partial_\mu A^\nu \right.\\
&\quad \left. -\partial^\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\rho A^\nu)}\partial_\mu A^\nu\right) + \partial^\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\rho A^\nu)}\partial_\mu A^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial j_\nu}\delta j_\nu\right]\delta a^\mu \\
&= \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\rho A^\nu)}\partial_\mu A^\nu\right)\delta a^\mu \\
&\quad + \int d\Omega \left(\partial^\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\rho A^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu}\right)\partial_\mu A^\nu \; \delta a^\mu \\
&\quad - \int d\Omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial j_\nu}\partial_\mu j_\nu \; \delta a^\mu . \qquad (3.3.37)
\end{aligned}
$$

Számoljuk ki most az $\mathcal{L}$ Lagrange-sűrűség parciális deriváltjait:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} &= -\frac{1}{c^2}j_\nu , \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\rho A^\nu)} &= -\frac{1}{4\pi c}F_{\rho\nu} , \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial j_\nu} &= -\frac{1}{c^2}A^\nu . \qquad (3.3.38)
\end{aligned}
$$

Ezeket behelyettesítve a következőket kapjuk:

$$
\begin{aligned}
&\delta\left(S_{\mathrm{em}}+S_{\mathrm{kh}}\right)= \\
&= \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L} + \frac{1}{4\pi c}F_{\rho\nu}\partial_\mu A^\nu\right)\delta a^\mu \\
&\quad + \int d\Omega \left(-\frac{1}{4\pi c}\partial^\rho F_{\rho\nu} + \frac{1}{c^2}j_\nu\right)\delta a^\mu \\
&\quad + \int d\Omega \frac{1}{c^2}A^\nu \partial_\mu j_\nu \; \delta a^\mu . \qquad (3.3.39)
\end{aligned}
$$

Tekintsük ezt a valódi mozgásnak megfelelő térkonfiguráció esetén. A valóságos térkonfiguráció eleget tesz a Maxwell-egyenleteknek, következésképpen a fenti kifejezés jobb oldalán a második integrál zérus. Egészítsük ki az első integrál integrandusának második tagját úgy, hogy abban csak a térerősség-tenzor szerepeljen. Ezután bontsuk fel a Lagrange-sűrűséget a szabad elektromágneses tértől származó $\mathcal{L}_{\mathrm{em}} = -\frac{1}{16\pi c}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ és az $\mathcal{L}_{\mathrm{kh}} = -\frac{1}{c^2}A^\nu j_\nu$ kölcsönhatási tag összegére. Azonos átalakításokkal kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\delta\left(S_{\mathrm{em}}+S_{\mathrm{kh}}\right)= \\
&= \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L} + \frac{1}{4\pi c}F_{\rho\nu}F_\mu{}^\nu + \frac{1}{4\pi c}F_{\rho\nu}\partial^\nu A_\mu\right)\delta a^\mu \\
&\quad + \int d\Omega \frac{1}{c^2}A^\nu \partial_\mu j_\nu \; \delta a^\mu \\
&= \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L}_{em} + \frac{1}{4\pi c}F_{\rho\nu}F_\mu{}^\nu\right)\delta a^\mu \\
&\quad + \int d\Omega \partial^\rho \left(-g_{\rho\mu}\frac{1}{c^2}j_\nu A^\nu\right)\delta a^\mu + \frac{1}{4\pi c}\int d\Omega \left(\partial^\rho F_{\rho\nu}\; \partial^\nu A_\mu + F_{\rho\nu}\partial^\rho\partial^\nu A_\mu\right)\delta a^\mu \\
&\quad + \int d\Omega \frac{1}{c^2}A^\nu \partial_\mu j_\nu \; \delta a^\mu
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L}_{em} + \frac{1}{4\pi c} F_{\rho\nu} F_\mu^{\ \nu} \right) \delta a^\mu \\
&+ \int d\Omega \partial^\rho \left(-g_{\rho\mu} \frac{1}{c^2} j_\nu A^\nu \right) \delta a^\mu + \int d\Omega \left(\frac{1}{c^2} j_\nu \, \partial^\nu A_\mu \right) \delta a^\mu \\
&+ \int d\Omega \frac{1}{c^2} \left[\partial_\mu \left(A^\nu j_\nu \right) - j_\nu \partial_\mu A^\nu \right] \delta a^\mu \\
&= \int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu}\mathcal{L}_{em} + \frac{1}{4\pi c} F_{\rho\nu} F_\mu^{\ \nu} \right) \delta a^\mu + \int d\Omega \frac{1}{c^2} j_\nu F^\nu_{\ \mu} \delta a^\mu . \qquad (3.3.40)
\end{aligned}$$

Ezekután vizsgáljuk meg a hatásnak a ponttöltések szabad mozgását leíró S_r tagját. A szabad pontrészecskére vonatkozó hatás variációját egyetlen pontrészecske esetén már kiszámoltuk. Azt a (1.4.12) kifejezés adja meg a világvonal tetszőleges δx^μ megváltoztatása esetén. Ilyen kifejezéseket kell most összegezni az összes ponttöltésre, $\sum_a \ldots$, valamint el kell végezzük a $\delta x^\mu = \delta a^\mu =$áll. helyettesítést:

$$\delta S_\mathrm{r} = \sum_a \left(\int ds \frac{dp_\mu}{ds} \right)_a \delta a^\mu - \sum_a \left(p_\mu \right)_a \delta a^\mu \Big|_{s_k}^{s_v} . \qquad (3.3.41)$$

Ezt hozzáadjuk a hatás többi tagjának a megváltozásához és az eredményt a valóságos mozgás esetében vesszük. Annak érdekében, hogy a tagok összehasonlíthatók legyenek, a $\delta(S_\mathrm{em} + S_\mathrm{kh})$ kifejezésében az áramsűrűséget tartalmazó tagot átírjuk diszkrét töltésekre:

$$\begin{aligned}
\int d\Omega \frac{1}{c^2} j_\nu F^\nu_{\ \mu} \delta a^\mu &= \frac{1}{c} \int dt \int dV \rho \, \frac{dx^\nu}{dt} F_{\nu\mu} \delta a^\mu \\
&= \sum_a \frac{e_a}{c} \left(\int ds u^\nu F_{\nu\mu} \right)_a \delta a^\mu . \qquad (3.3.42)
\end{aligned}$$

Ezt a kifejezést a (3.3.41) kifejezés első tagjához adva, zérust kapunk a ponttöltések valóságos mozgása esetén, mert akkor a (2.1.3) mozgásegyenlet teljesül minden egyes ponttöltésre:

$$\left(\frac{dp_\mu}{ds} \right)_a = \left(\frac{e}{c} u^\nu F_{\nu\mu} \right)_a . \qquad (3.3.43)$$

Ezt figyelembe véve, a töltésrendszert és az elektromágneses terét együttesen leíró S hatás megváltozása infinitezimális δa^μ téridőbeli eltolás során és a töltésekből és az elektromágneses mezőből álló fizikai rendszer valóságos mozgása esetén:

$$\begin{aligned}
&\delta \left(S_\mathrm{r} + S_\mathrm{em} + S_\mathrm{kh} \right)_{\text{valódi mozgás}} = \\
&= \left[\int d\Omega \partial^\rho \left(g_{\rho\mu} \mathcal{L}_\mathrm{em} + \frac{1}{4\pi c} F_{\rho\nu} F_\mu^{\ \nu} \right) - \sum_a \left(p_\mu \right)_a \Big|_{\text{kezdet}}^{\text{vég}} \right] \delta a^\mu . \qquad (3.3.44)
\end{aligned}$$

Vezessük be a kerekzárójelben álló kifejezés jelölésére a $T^{(\mathrm{em})}_{\rho\mu}$ tenzort:

$$\begin{aligned}
T^{(\mathrm{em})}_{\rho\mu} &= -c g_{\rho\mu} \mathcal{L}_\mathrm{em} - \frac{1}{4\pi} F_{\rho\nu} F_\mu^{\ \nu} \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(g_{\rho\mu} \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} - F_{\rho\nu} F_\mu^{\ \nu} \right) . \qquad (3.3.45)
\end{aligned}$$

Ez a tenzor az elektromágneses teret jellemzi, szimmetrikus másodrendű tenzor.

Ha a töltésrendszerből és az annak elektromágneses teréből álló fizikai rendszernek a téridőbeli eltolások szimmetriái, akkor

$$\delta \left(S_\mathrm{r} + S_\mathrm{em} + S_\mathrm{kh} \right)_{\text{valódi mozgás}} = 0, \qquad (3.3.46)$$

tetszőleges infinitezimális δa^μ eltolás esetén, azaz

$$\left[-\frac{1}{c}\int d\Omega\partial^\rho T^{(\text{em})}_{\rho\mu} - \sum_a (p_\mu)_a\Big|^{\text{vég}}_{\text{kezdet}}\right]\delta a^\mu = 0. \tag{3.3.47}$$

Alkalmazzuk a fenti kifejezésben a négyesdivergencia térfogati integráljára Gauss tételét. Ekkor a $T^{(\text{em})}_{\rho\mu}\delta a^\mu$ vektor felületi integrálját kapjuk az Ω téridőtartományt határoló zárt felületre. Ω az a tartomány, amelyre a hatásban integrálunk. Legyen ez a térirányokban végtelen, akkor ezen irányokban a határfelület végtelen távol van, ahol a térerősség eltűnik, ezért ezek a határfelületek nem adnak járulékot a felületi integrálhoz. Idő (x^0) irányban válasszuk az $x^0 = ct_k$ és az $x^0 = ct_v$ „síkokat" a tartomány határainak. Ezeken a (3-dimenziós) határfelületeken a „felületelem" a dV térfogatelem, és a vektorunk külső normális irányába mutató komponense rendre $-T^{(\text{em})}_{0\mu}\delta a^\mu\Big|_{t_k}$ és $T^{(\text{em})}_{0\mu}\delta a^\mu\Big|_{t_v}$. Az eltolási szimmetria következtében tehát:

$$\left[\frac{1}{c}\int dVT^{(\text{em})}_{0\mu} + \sum_a (p_\mu)_a\right]^{t_v}_{t_k}\delta a^\mu \quad = \quad 0 \tag{3.3.48}$$

tetszőleges δa^μ négyesvektor esetén. Ez azt jelenti, hogy az elektromágneses mező és az azt keltő töltések együttes rendszerének teljes P^μ_{tot} négyesimpulzusa állandó a mozgás során.

Az elektromágneses mező energia- és impulzussűrűsége. Az elektromágneses tér és a töltésrendszer teljes P^μ_{tot} négyes-impulzusa két tagból tevődik össze: a töltések „mechanikai" mozgásából származó négyes-impulzusból és **az elektromágneses mező**

$$P^{(\text{em})\,\mu} \quad = \quad \frac{1}{c}\int dVT^{(\text{em})\,0\mu} \tag{3.3.49}$$

négyes-impulzusából. **Az elektromágneses mező tehát négyes-impulzust, azaz adott K inerciarendszerben energiát és impulzust hordoz.** Mint az a négyes-impulzus kifejezéséből látszik, úgy az energiához, mint az impulzushoz az elektromágneses mező minden egyes térfogateleme ad egy meghatározott járulékot, amelynek nagysága csak attól függ, hogy a mező adott térfogatelemében mekkora a térerősség. Ezért azt kell mondjuk, hogy **az elektromágneses mező minden egyes térfogateleme $\epsilon dV = T^{(\text{em})\,00}dV$ energiával és $g^i dV = \frac{1}{c}T^{(\text{em})\,0i}dV$ impulzussal rendelkezik.** Ekkor $\epsilon = T^{(\text{em})\,00}$ és $g^i = \frac{1}{c}T^{(\text{em})\,0i}$ rendre **az elektromágneses mező energia- és impulzussűrűsége**. **Ezért nevezzük a $T^{(\text{em})\,\rho\mu}$ tenzort az elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzorának.**

Rövid számolás után kapjuk, hogy az energiaimpulzus-tenzor komponensei az elektromos térerősséggel és a mágneses indukcióval kifejezve tetszőleges K inerciarendszerben a következő alakúak:

$$\begin{aligned}
T^{(\text{em})}_{00} &= \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right),\\
T^{(\text{em})}_{0i} &= \frac{1}{4\pi}(\vec{B}\times\vec{E})_i,\\
T^{(\text{em})}_{ij} &= \frac{1}{4\pi}\left[-E_iE_j - B_iB_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.3.50}$$

Az energia és az impulzus lokális megmaradása szabad elektromágneses mezőben. **Olyan téridő-tartomány pontjaiban, amelyben nincsenek jelen töltések és áramok, az elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzora a**

$$\partial_\rho T^{(\mathrm{em})\,\rho\mu} \;=\; 0 \tag{3.3.51}$$

alakú kontinuitási egyenletnek tesz eleget. A szabad elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzorának négyes-divergenciája tehát eltűnik. Az egyenlet fizikai jelentése a szabad elektromágneses mező impulzusának és energiájának lokális megmaradása tetszőleges inerciális vonatkoztatási rendszerben.

Ha az eltolási szimmetria következményét tetszőleges olyan Ω téridő-tartományon nézzük, amelyben nincsenek ponttöltések, (azaz a hatást eleve ilyen téridőtartományon definiáljuk) és újra elismételjük a hatás megváltozásának kiszámolását infinitezimális eltolás esetén, akkor a

$$-\frac{1}{c}\int_\Omega d\Omega \partial^\rho T^{(\mathrm{em})}_{\rho\mu}\delta a^\mu \;=\; 0 \tag{3.3.52}$$

egyenletre jutunk tetszőleges δa^μ eltolás és Ω tartomány esetén. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha fennáll a (3.3.51) kontinuitási egyenlet.

A szabad elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzorára vonatkozó kontinuitási egyenlet fizikai jelentése. A szabad elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzorának divergenciája tehát eltűnik a (3.3.51) egyenlet értelmében. A μ index különböző rögzített értékei esetén ugyanolyan alakú egyenletek állnak fenn, mint amilyen az elektromos töltésre vonatkozó kontinuitási egyenlet. Ezért ezek az egyenletek mind fizikai mennyiségek lokális megmaradását fejezik ki. Miután az energiaimpulzus-tenzor néhány komponensének a jelentését már tisztáztuk, az is nyilvánvaló, hogy mely fizikai mennyiségek kontinuitását, azaz lokális megmaradását fejezi ki a szabad elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzorának divergenciamentessége.

1. Vegyük a $\mu = 0$ esetén az egyenletet: $\partial_\rho T^{(\mathrm{em})\,\rho 0} = 0$. Itt $T^{(\mathrm{em})\,00} = \epsilon$ a mező energiasűrűsége. Az egyenlet,

   $$\frac{\partial}{\partial t}\epsilon + \nabla^i c T^{(\mathrm{em})\,i0} \;=\; 0, \tag{3.3.53}$$

   tehát **az energia lokális megmaradását fejezi ki** és az energiaimpulzus-tenzor $T^{(\mathrm{em})\,i0}$ komponensei az S^i **energiaáramsűrűség**gel állnak

   $$S^i = cT^{(\mathrm{em})\,i0} \tag{3.3.54}$$

   kapcsolatban. Az energiaáramsűrűség $\vec{S}$ vektorát **Poynting-vektor**nak nevezzük. Az energia lokális megmaradását kifejező kontinuitási egyenlet nem Lorentz-kovariáns alakja tehát

   $$\frac{\partial}{\partial t}\epsilon + \operatorname{div}\vec{S} = 0. \tag{3.3.55}$$

2. Vegyük az energiaimpulzus-tenzorra vonatkozó kontinuitási egyenletet $\mu = j = 1,2,3$ esetén: $\frac{1}{c}\partial_\rho T^{(\mathrm{em})\,\rho j} = 0$. Itt

   $$g^j = \frac{1}{c}T^{(\mathrm{em})\,0j} \tag{3.3.56}$$

a mező **impulzussűrűsége.** Következésképpen az egyenlet **az impulzus lokális megmaradását fejezi ki,** és a

$$\sigma^{ij} = T^{(\mathrm{em})\,ij} \tag{3.3.57}$$

mennyiségeket a j irányú **impulzus áramsűsűsége** i irányú komponensének (az i irányú normálissal rendelkező egységfelületen időegység alatt átadott j irányú impulzusnak) kell tekinteni. Ez azt jelenti, hogy **az elektromágneses mező „darabkái" között mechanikai feszültség ébred.** Ezért σ^{ij}-t **Maxwell-féle feszültségtenzornak** szokás nevezni. Az impulzus lokális megmaradását kifejező kontinuitási egyenlet nem kovariáns alakja tehát:

$$\frac{\partial}{\partial t} g^j + \sum_{i=1}^{3} \nabla^i \sigma^{ij} = 0. \tag{3.3.58}$$

A fentiek alapján **a szabad elektromágneses mező energiaáramsűrűsége és impulzussűrűsége között az**

$$\vec{S} = c^2 \vec{g} \tag{3.3.59}$$

összefüggés áll fenn. Az energiaimpulzus-tenzor komponensei jelentésük alapján a következőképpen foglalhatók mátrixalakban össze:

$$T^{(\mathrm{em})\,\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} \epsilon & cg_x & cg_y & cg_z \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{3.3.60}$$

A komponenseket explicit módon kiírva meggyőződhetünk róla, hogy **az elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzorának spúrja zérus:**

$$T_{\mu}^{(\mathrm{em})\,\mu} \;=\; 0. \tag{3.3.61}$$

3.3.5 A tömeg és az energia, ill. a súlyos tömeg és a tehetetlen tömeg ekvivalenciájának következményei*

Korábban megtanultuk, hogy egy test $\mathcal{E}$ energiája és m tehetetlen (mozgási) tömege ekvivalensek, mert közöttük fennáll az Einstein-féle $\mathcal{E} = mc^2$ összefüggés. **Másrészről Eötvös Loránd kísérletileg igazolta nagy pontossággal, hogy a testek súlyos és tehetetlen tömege arányos.** Az arányosság abban nyilvánul meg, hogy bármely test ugyanazzal az a gyorsulással esik szabadon egy adott helyen:

$$a = \frac{m_s}{m} g, \tag{3.3.62}$$

ahol m_s ill. m a test súlyos ill. tehetetlen tömege, g a nehézségi gyorsulás a Föld felszínének közelében, az adott helyen. Ez a gyorsulás akkor és csak akkor lehet minden testre ugyanaz, ha a súlyos és a tehetetlen tömeg hányadosa univerzális, minden testre azonos értékű állandó. A súlyos tömeg egységét ekkor azonosnak választhatjuk a tehetetlen tömeg egységével, úgyhogy a súlyos és a tehetetlen tömeg egyenlőnek adódik, a gyorsulás pedig a nehézségi gyorsulásnak, $a = g$. Újabb kísérletek, amelyeket a fény sebességét megközelítő nagyságú, vízszintes irányú kezdősebességgel indított részecskék szabadesésének megfigyelésére végeztek, azt is megerősítették, hogy **a súlyos tömeg a mozgási tömeggel és nem a nyugalmi tömeggel arányos. A részecske gravitációs töltése, azaz súlyos tömege tehát a részecske energiájával arányos,** ha figyelembe vesszük a mozgási tömeg és az energia $E = mc^2$ ekvivalenciáját.

A fentieket általánosítva, **az Einstein-féle általános relativitáselmélet azt az elvet fogalmazza meg mozgásegyenlet, azaz fizikai törvény alakjában, hogy a kondenzált anyag által keltett gravitációs mezőt a kondenzált anyag energiaimpulzus-tenzora határozza meg.** A fizikai mezők, mint az elektromágneses tér, hasonlítanak a kondenzált anyaghoz azon tulajdonságuk tekintetében, hogy nekik is van energiaimpulzus-tenzoruk, azaz hogy szintén hordoznak energiát és impulzust. Ezért a gravitációs mező kialakításában a fizikai mezők a kondenzált anyaggal egyenrangúan vesznek részt. **A gravitációs mezőt a kondenzált anyag és a fizikai mezők együttes $T^{\mu\nu}$ energiaimpulzus-tenzora határozza meg.** Ez az a fizikai mennyiség, amelytől függ, hogy lokálisan milyen egy szabadon eső kicsiny próbatest, - nevezzük űrhajónak, gyorsulása. Az anyag és a fizikai mezők együttes energiaimpulzus-tenzora határozza meg, hogy lokálisan mi a szabadon eső, (az állócsillagokhoz képest) nem forgó űrhajó, vagyis hogy mi a lokális inerciarendszer. Ha a szabadon eső anyagi pontok ill. fénysugár világvonalait tekintjük a téridőre jellemző geometria egyeneseinek, akkor azt tapasztaljuk, hogy általában nem Minkowski-féle, lapos geometria valósul meg, hanem úgynevezett görbült téridő-geometria. A téridő görbültsége abban nyilvánul meg, hogy egy szabadon eső űrhajóból nézve azt észleljük, hogy egy infinitezimálisan közeli, ugyancsak szabadon eső másik űrhajó hozzánk képest gyorsul. Gyorsulása mértékét a téridő görbülete határozza meg, azt pedig a kondenzált anyag és a fizikai mezők együttes energiaimpulzus-tenzora. Einstein híres egyenletei,

$$G_{\mu\nu} = 4\pi\gamma T_{\mu\nu} \tag{3.3.63}$$

alakban azt jelentik, hogy az anyag és a fizikai mezők együttes energiaimpulzus-tenzora meghatározza a téridő görbületéből geometriai megfontolások alapján képzett, szimmetrikus $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ Einstein-tenzor értékét, és azon keresztül a téridő görbületét. Az Einstein-egyenletek az általános relativitás elméletének alapegyenletei. A tapasztalat számos megfigyelés révén igazolja az általános relativitás Einstein-féle elméletét.

Az általános relativitás elmélete értelmében az anyag és a fizikai mezők együttes energiaimpulzus-tenzora szimmetrikus másodrendű tenzor, mert az Einstein-egyenletek bal oldalán álló, geometriai megfontolásokkal szerkesztett Einstein-tenzor szimmetrikus.

4 ELEKTROMÁGNESES JELENSÉGEK A VÁKUMBAN

A Maxwell-egyenleteket az előző fejezetekben felírt alakban az alábbi tipikus esetekben lehet alkalmazni az elektromágneses jelenségek tárgyalására:

1. Az elektromágneses mezőt adott töltések és áramok keltik, amelyekre elhanyagolható az elektromágneses mezőnek a visszahatása. Ilyenkor „csak" a Maxwell-egyenleteket kell megoldani.
2. Az elektromágneses mezőt mozgó töltések keltik, amelyek egyszerre képviselnek töltéssűrűséget és áramsűrűséget, és amelyekre az elektromágneses mező visszahat. Ilyenkor a Maxwell-egyenleteket és a ponttöltések mozgásegyenleteit egyszerre, ön-konzisztensen kell megoldani.

A jelen előadás kereteit meghaladja a közegek elektrodinamikájának körébe tartozó jelenségek taglalása, vagyis azoké a jelenségeké, amelyek akkor figyelhetők meg, amikor egyszerre van jelen kondenzált anyag és elektromágneses mező a vizsgált fizikai rendszerben. Ilyenkor a jelenségeket általában nem célszerű mikroszkopikusan, a közeg töltött részecskéinek mozgását és azok elektromágneses teret keltő hatását egyenként nyomon követve tárgyalni. Az alkalmazott fenomenológikus tárgyalásmód „az elektromágneses tér közegben" ill. „a közegek elektrodinamikája" elnevezésre hallgat.

Miközben olvassa a fejezetet, tanulmányozza ismételten a vektoranalízisről szóló rövid B. függeléket! Az elektrodinamika Maxwell-féle elmélete nem érthető meg a vektoranalízis alapjainak ismerete nélkül.

4.1 Elektrosztatika

Ha nincsenek jelen áramok, azaz $\vec{j}(t,\vec{r}) \equiv 0$ és az elektromos töltések sűrűsége nem változik időben, $\rho \equiv \rho(\vec{r})$, akkor a Maxwell-egyenleteknek egyértelműen létezik olyan megoldása, hogy a mágneses indukció zérus, $\vec{B}(t,\vec{r}) \equiv 0$ és az elektromos térerősség sztatikus, azaz független az időtől, $\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{r})$ és eleget tesz az alábbi egyenleteknek:

$$\mathrm{div}\, \vec{E} = 4\pi\rho, \qquad \mathrm{rot}\, \vec{E} = 0. \tag{4.1.1}$$

Ez az elektrosztatika esete. A Gauss-törvény értelmében a töltésektől végtelen távoli zárt felületen az elektrosztatikus tér fluxusa véges kell legyen (a zárt felületen belüli véges töltéssel arányos), ami azt a határfeltételt rója ki az elektrosztatikus térerősségre, hogy a töltésektől nagy r távolságokon a térerősség nagyságának legalább olyan gyorsan kell csökkennie, mint $\frac{1}{r^2}$.

A rot $\vec{E} = 0$ egyenletet kielégítő elektrosztatikus térerősséghez, mint örvénymentes vektormezőhöz, **mindig található olyan $\phi(\vec{r})$ időtől független skalárpotenciál, amelynek negatív gradiense a térerősség:**

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\, \phi(\vec{r}). \tag{4.1.2}$$

Az elektrosztatikus mező tehát konzervatív erőtér. Az elektrosztatikus mezőnek az egységnyi próbatöltésen végzett munkája tehát független az úttól. A potenciált a térerősségből

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) - \int_{P_0}^{P} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \tag{4.1.3}$$

összefüggés alapján kapjuk meg. **Az elektrosztatikus potenciál a tér tetszőleges, $\vec{r}$ helyzetvektorú P pontjában az a munka, amit az elektrosztatikus tér ellenében kell végezni, amíg a próbatöltést kvázisztatikusan a tér tetszőlegesen választott $\vec{r}_0$ helyzetvektorú P_0 vonatkoztatási pontjából a tér P pontjába visszük.** Mivel ez az összefüggés csak a $\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$ potenciálkülönbséget értelmezi, azért **a potenciál csak egy additív állandó erejéig van egyértelműen meghatározva.** Az általánosság csorbítása nélkül választhatjuk a potenciált a P_0 vonatkoztatási pontban zérusnak, $\phi(\vec{r}_0) = 0$.

A térerősségnek a potenciállal kifejezett (4.1.2) alakját behelyettesítve a Gauss-törvény differenciális alakjába ((4.1.1) első egyenletébe), az elektrosztatikus potenciálra a

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \tag{4.1.4}$$

Poisson-egyenletet kapjuk. Itt

$$\Delta \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.1.5}$$

az ún. Laplace-operátor (Descartes-koordinátákban kifejezve). Ha a töltéssűrűség csak a tér egy véges tartományában különbözik nullától, akkor az egyenlethez tartozó határfeltétel az, hogy az elektrosztatikus potenciál a töltésektől nagy r távolságban legalább olyan gyorsan csökkenjen, mint $\frac{1}{r}$, és tartson egy tetszőlegesen választott állandó (általában zérusnak választott) értékhez. A Poisson-egyenlet típusú,

$$\Delta f(x, y, z) = g(x, y, z) \tag{4.1.6}$$

alakú parciális differenciálegyenleteket, ahol $f(x, y, z)$ a keresett függvény és $g(x, y, z)$ adott függvény (a forrástag), a matematikában **Laplace-egyenletnek** nevezik. A Laplace-egyenletnek a tér valamely V tartományában akkor és csak akkor létezik egyértelmű megoldása, ha a tartomány határfelületein (lehetnek a végtelenben is) vagy megadjuk a keresett $f(x, y, z)$ függvény értékét, vagy megadjuk a keresett függvény gradiensének a határfelület $\vec{n}$ külső normálisának irányába eső vetülete, $\vec{n} \cdot \operatorname{grad} f$ értékét. Ez azt jelenti, hogy a Poisson-egyenlet által megfogalmazott elektrosztatikai feladat akkor válik egyértelművé, ha megadjuk, hogy mely térbeli tartományban keressük az egyenlet megoldását és annak határfelületein megmondjuk vagy a skalárpotenciálnak az értékét, vagy az elektrosztatikus térerősségnek a határfelület külső normálisa irányába mutató komponense értékét.

4.1.1 Coulomb-potenciál

Inerciarendszerben nyugvó ponttöltés elektrosztatikus tere. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy **egy inerciarendszerben nyugvó e ponttöltés elektrosztatikus tere**

$$\vec{E}(r) = \frac{e}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \phi(r) = \frac{e}{r}, \tag{4.1.7}$$

ahol a koordinátarendszer origóját a ponttöltés helyén választottuk, és $\vec{r}$ a tér tetszőleges P pontjának helyzetvektora. A nyugvó ponttöltés elektrosztatikus tere centrális, gömbszimmetrikus erőtér. Az elektrosztatikus térerősség-mező erővonalai a ponttöltésből (ponttöltésbe) sugárirányban kifutó (befutó) félegyenesek, ha a töltés pozitív, $e > 0$ (negatív, $e < 0$). A térerősség nagysága (és a potenciál) csak a ponttöltéstől mért r távolság függvénye.

A bizonyítást kétféleképpen is elvégezzük.

1. *Bizonyítás a Gauss-törvény alapján.* Használjuk fel, hogy inerciarendszerben nincsenek kitüntetett irányok és az inerciarendszerben nyugvó ponttöltés sem tüntet ki semmilyen irányt. Az inerciarendszerben nyugvó ponttöltés olyan fizikai rendszer, amely a ponttöltés tartozkodási pontja körüli, 3-dimenziós térbeli elforgatásokkal szemben invariáns. Ilyen szimmetriával rendelkező vektormezőt csak egyféleképpen lehet megvalósítani, ha a térerősségnek, – gömbi polárkoordinátarendszerben felbontva, – csak a sugárirányú összetevője nem azonosan zérus, és annak nagysága csak a ponttöltéstől mért távolságtól függ. Vegyük körül a ponttöltést gondolatban egy olyan r sugarú gömbfelülettel, amelynek középpontja a ponttöltés tartózkodási helye és írjuk fel erre a gömbfelületre a Gauss-törvényt. Mivel a térerősségnek a gömbfelület külső normálisa irányába mutató összetevője éppen a térerősség radiális összetevője, és az a gömb felülete mentén állandó nagyságú, azt kapjuk, hogy
$$\oint_F df\ E_r = E_r \oint_F df = 4\pi r^2 E_r = 4\pi e, \tag{4.1.8}$$
ahonnan
$$E_r = \frac{e}{r^2}. \tag{4.1.9}$$
A potenciált innen görbementi integrálással kapjuk meg. A P_0 vonatkoztatási pontot $r_0 \to \infty$ végtelen távolságra választjuk, és ott a potenciál értéket zérusnak vesszük. Az integrálást sugárirányú egyenes mentén végezzük, mert így a legegyszerűbb, és a görbe megválasztásától úgysem függ a görbementi integrál értéke a konzervatív erőtérben:
$$\phi(r) = -\int_{r_0}^{r} dr' E_r(r') = -\int_{r_0}^{r} dr' \frac{e}{r'^2} = \frac{e}{r} - \frac{e}{r_0} \to \frac{e}{r}, \tag{4.1.10}$$
ahol a határértéket az $r_0 \to \infty$ esetben kaptuk.

2. *A Poisson-egyenlet megoldása.* A Poisson-egyenlet jobb oldalán a töltéssűrűség zérus a tér minden pontjában, a koordinátarendszer origóját kivéve:
$$\Delta\phi = 0, \quad r \neq 0. \tag{4.1.11}$$
Előbb megkeressük ennek az egyenletnek a gömbszimmetrikus, azaz csak a radiális r koordinátától függő, általános megoldását. Azután kirójuk a
$$\phi(r_0) \to 0, \quad r_0 \to \infty \tag{4.1.12}$$
határfeltételt a végtelenben, és a ponttöltés jelenlétét az origóban ugyancsak egy határfeltétellel vesszük figyelembe, amelyet az origó körüli, infinitezimális sugarú gömbfelületre rovunk ki. A megoldást $\phi = \phi(r)$ alakban keresve, a Poisson-egyenlet gömbi polárkoordinátákban az
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0, \quad r \neq 0 \tag{4.1.13}$$
alakot ölti. Innen kétszeri, egymás utáni integrálással a megoldásra az alábbi általános alakot kapjuk:
$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} &= C_1, \\ \phi(r) &= -\frac{C_1}{r} + C_2, \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

ahol C_1 és C_2 integrálási állandók, amelyeket a határfeltételekből kell meghatározni. A végtelenben kirótt határfeltételből $C_2 = 0$ adódik.

Az origóban a határfeltételt a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Integráljuk a Poisson-egyenlet mindkét oldalát egy infinitezimális ϵ sugarú gömb térfogatára, amelynek középpontja az origóban van. Ekkor az egyenlet jobb oldalán az $e = \int_{V_\epsilon} dV\rho$ töltés (-4π)-szeresét kapjuk. Az egyenlet bal oldala a (B.16) Gauss-tétel alapján átírható felületi integrállá:

$$\int_{V_\epsilon} dV \Delta\phi = \int_{V_\epsilon} dV \text{ div grad } \phi = \epsilon^2 \int d\Omega \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=\epsilon} = 4\pi\epsilon^2 \frac{C_1}{\epsilon^2} = 4\pi C_1. \tag{4.1.15}$$

Az egyenlet bal és jobb oldalát egyenlővé téve $C_1 = -e$ adódik. A Poisson-egyenletnek a határfeltételeket kielégítő megoldása tehát:

$$\phi(r) = \frac{e}{r}, \tag{4.1.16}$$

ahonnan gradiens-képzéssel kapjuk, hogy az elektrosztatikus térerősségnek csak a radiális komponense nem azonosan nulla:

$$E_r(r) = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{e}{r^2}. \tag{4.1.17}$$

A Coulomb-kölcsönhatás erőtörvénye. A kapott eredményt átírhatjuk olyan alakba, amikor a koordinátarendszer origója és a ponttöltés nem esnek egybe. Legyen az e_1 ponttöltés a K inerciarendszer $\vec{r}_1$ helyzetvektorú pontjában nyugalomban, akkor az általa keltett elektrosztatikus mező a tér tetszőleges $\vec{r}$ pontjában:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{e_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}, \qquad \phi_1(\vec{r}) = \frac{e_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}. \tag{4.1.18}$$

Ebből következik, hogy **az inerciarendszerben az $\vec{r}_1$ helyen nyugvó e_1 ponttöltés az ugyanebben az inerciarendszerben az $\vec{r}_2$ helyen nyugvó e_2 ponttöltésre**

$$\vec{F}_{1\to 2} = e_2\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{e_1 e_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|} \tag{4.1.19}$$

erőt fejt ki. Ez a Coulomb-erő erőtörvénye. Az e_2 töltés

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{e_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}, \qquad \phi_2(\vec{r}) = \frac{e_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}. \tag{4.1.20}$$

elektrosztatikus tere által az e_1 töltésre kifejtett erő ugyanilyen nagyságú, de ellentétes irányú, azaz $\vec{F}_{2\to 1} = e_1\vec{E}_2(\vec{r}_1) = -\vec{F}_{1\to 2}$. A Coulomb-erő centrális és konzervatív erő. Az e_2 töltés potenciális energiája az e_1 töltés elektrosztatikus terében,

$$U(r_{1,2}) \equiv e_2\phi_1(\vec{r}_2) = \frac{e_1 e_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}, \tag{4.1.21}$$

ahol $r_{1,2} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ a töltések távolsága, egyenlő az e_1 töltés potenciális energiájával az e_2 terében, $U(r_{1,2}) \equiv e_2\phi_1(\vec{r}_2) = e_1\phi_2(\vec{r}_1)$. Ez tehát az e_1 és az e_2 nyugvó ponttöltések kölcsönhatásához tartozó potenciális energia.

Kiterjedt, gömbszimmetrikus, töltött test elektrosztatikus tere. **Egy gömb térfogatában, gömbszimmetrikusan elosztott töltésrendszer a gömbön kívül ugyanolyan elektrosztatikus teret kelt, mintha teljes töltése a gömb középpontjában foglalna helyet.**

Ezt az alábbiak szerint láthatjuk be. Legyen $\rho(r)$ a gömbszimmetrikus rendszer töltéssűrűsége, amelyre $\rho(r) = 0$, ha $r > R$. Az elrendezés gömbszimmetrikus, ezért az elektrosztatikus térősségnek csak az E_r radiális összetevője nem azonosan nulla, és $E_r \equiv E_r(r)$ csak a gömb középpontjától mért r távolságtól függ. Írjuk fel a Gauss-törvényt egy r sugarú koncentrikus gömbre. Ha $r \geq R$, akkor azt kapjuk, hogy

$$4\pi r^2 E_r(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') = 4\pi \int_0^R dr' r'^2 \rho(r') = 4\pi Q, \qquad (4.1.22)$$

ahol Q a gömb össztöltése; ha $r < R$, akkor pedig a Gauss-törvény

$$4\pi^2 E_r(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \equiv 4\pi q(r), \qquad (4.1.23)$$

ahol a jobb oldalon az r sugarú gömbön belül helyet foglaló $q(r)$ töltés áll. A fenti egyenletekből kiolvashatjuk az elektrosztatikus térerősség radiális (egyedüli azonosan el nem tűnő) összetevőjének a távolságfüggését:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{r^2}, & \text{ha} \quad r \geq R \\ \frac{q(r)}{r^2}, & \text{ha} \quad 0 \leq r < R \end{cases} \qquad (4.1.24)$$

Innen látjuk, hogy a gömbön kívül az elektrosztatikus mező olyan, mintha a gömb teljes töltése annak origójában helyezkedne el.

Tetszőleges töltésrendszer elektrosztatikus tere. A Coulomb-törvény ismeretében a lineáris szuperpozíció elvének felhasználásával megkaphatjuk **a Poisson-egyenlet megoldását tetszőleges töltésrendszer esetén**, mint az egyes e_a töltések által keltett Coulomb-potenciálok szuperpozícióját:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}, \qquad (4.1.25)$$

ahol $\vec{r}_a$ rendre az egyes e_a ponttöltések helyzetvektorai, $\vec{r}$ pedig annak a tetszőleges térbeli pontnak a helyzetvektora, amelyben a potenciált meghatározzuk. Ha a töltésrendszert a $\rho(\vec{r})$ folytonos töltéssűrűséggel jellemezzük, akkor a potenciált úgy kapjuk meg, mint az egyes $\vec{r}\,'$ pontok dV' térfogatú infinitezimális környezetében található $\rho(\vec{r}\,')dV'$,,ponttöltések" Coulomb-potenciáljainak ,,összegét":

$$\phi(\vec{r}) = \int dV' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}. \qquad (4.1.26)$$

4.1.2 Töltésrendszer elektrosztatikus energiája

Miután értjük, milyen erővel hat egy nyugvó ponttöltés elektrosztatikus tere egy abban elhelyezett próbatöltésre, szeretnénk azt is megérteni, hogy hogyan hat kölcsön két nyugvó elektromos ponttöltés. Mindkét ponttöltés létrehozza a maga saját elektrosztatikus terét, úgyhogy a lineáris szuperpozíció értelmében a két nyugvó ponttöltésből álló rendszer elektrosztatikus tere:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{e_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{e_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|},$$
$$\phi(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) + \phi_2(\vec{r}) = \frac{e_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{e_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}. \qquad (4.1.27)$$

Mind a térerősség, mind a potenciál szinguláris a ponttöltések helyén, ezért a feltett kérdés megválaszolása nem látszik egyszerűnek.

Töltésrendszer energiája a saját elektrosztatikus terében. Először megmutatjuk, hogy **nyugalomban levő, $\rho(\vec{r})$ töltéssűrűségű töltésrendszer elektrosztatikus terének energiája**:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int dV \phi(\vec{r})\rho(\vec{r}), \tag{4.1.28}$$

ahol $\phi(\vec{r})$ a töltésrendszer által létrehozott elektrosztatikus potenciálmező.

Számoljuk ki a nyugvó töltések rendszerének energiáját. Az elektrosztatikus mező energiasűrűségét az energiaimpulzus-tenzor T^{00} komponense jelenti:

$$\epsilon(\vec{r}) = T^{00}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2 = \frac{1}{8\pi}(\text{ grad }\phi)^2. \tag{4.1.29}$$

Az energia az energiasűrűség térfogati integrálja a teljes térre:

$$\mathcal{E} = \int dV \epsilon(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi}\int dV \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\phi}{\partial r_i}\frac{\partial\phi}{\partial r_i} = \frac{1}{8\pi}\int dV \Big[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(\phi\frac{\partial\phi}{\partial r_i}\Big) - \phi\Delta\phi\Big]. \tag{4.1.30}$$

Itt a jobb oldal első tagja eltűnik, mert Gauss-tétele segítségével a teljes teret határoló, végtelenben elhelyezkedő, gömbfelületre vett integrállá alakítható:

$$\int dV \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(\phi\frac{\partial\phi}{\partial r_i}\Big) = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2}\oint df\vec{n}\cdot\frac{\partial\phi^2}{\partial\vec{r}} = 0, \tag{4.1.31}$$

ahol kihasználtuk, hogy $r\to\infty$ esetén a potenciál az $\frac{1}{r}$ törvény szerint csökken, úgyhogy az integrál aszimptotikusan $r^2\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r}$ függést mutat és így $r\to\infty$ esetén eltűnik. Felhasználva a Poisson-egyenletet, a töltésrendszer elektrosztatikus terének energiája:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{8\pi}\int dV \phi(\vec{r})\Delta\phi(\vec{r}) = \frac{1}{2}\int dV \phi(\vec{r})\rho(\vec{r}), \tag{4.1.32}$$

amit be akartunk látni.

Töltésrendszer energiája külső elektrosztatikus térben. Összehasonlítás. Érdemes összehasonlítani az eredményt a $\rho(\vec{r})$ töltéssűrűséggel elosztott próbatöltések potenciális energiájával külső $\phi^{\mathrm{k}}(\vec{r})$ elektrosztatikus potenciálban, aminek értéke

$$V^{\mathrm{k}} = \int dV \phi^{\mathrm{k}}(\vec{r})\rho(\vec{r}). \tag{4.1.33}$$

A külső elektrosztatikus tér azért külső, mert nem a $\rho(\vec{r})$ töltéssűrűség kelti, hanem más, a vizsgált rendszerhez képest külső töltések. Az energia (4.1.33) kifejezésében nem szerepel az $\frac{1}{2}$ szorzótényező. A töltésrendszer $\mathcal{E}$ elektrosztatikus energiájának és külső elektrosztatikus térben elhelyezkedő töltésrendszer V^{k} potenciális energiájának kifejezése azért különbözik, mert az $\mathcal{E}$ energia arra az esetre vonatkozik, amikor a töltésrendszer saját maga kelti azt az elektrosztatikus mezőt, aminek az energiáját meghatározzuk, míg a V^{k} energia arra az esetre vonatkozik, amikor az elektrosztatikus teret más, külső töltések keltik.

Alkalmazzuk a (4.1.28) képletet diszkrét ponttöltések rendszerére. Ekkor a töltéssűrűség

$$\rho(\vec{r}) = \sum_a e_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a), \tag{4.1.34}$$

ahol e_a az egyes ponttöltések nagysága, $\vec{r}_a$ pedig rendre a helyzetvektoruk, $\delta(\vec{r})$ a 3-dimenziós Dirac-delta (ld. a D. függeléket), az összegzés pedig valamennyi ponttöltésre kiterjed. A töltésrendszer által keltett potenciál

$$\phi(\vec{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}, \tag{4.1.35}$$

úgyhogy a diszkrét ponttöltések rendszerének elektrosztatikus energiájára az

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} = \mathcal{E}^{\mathrm{d}} + \sum_a \mathcal{E}_a^{\mathrm{s}} \tag{4.1.36}$$

kifejezést kapjuk, ahol

$$\mathcal{E}^{\mathrm{d}} = \frac{1}{2} \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} \tag{4.1.37}$$

az egyes töltéspárok kölcsönhatási energiájának összege, $\mathcal{E}_a^{\mathrm{s}}$ pedig az egyes töltések saját energiája. A ponttöltések saját energiája végtelennek adódik, mert a ponttöltés által keltett potenciál a ponttöltés tartózkodási helyén végtelen. Diszkrét ponttöltések rendszerének elektrosztatikus energiáján azt az $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}$ energiát értjük (ld. (4.1.37)), amelyet az egyes ponttöltések saját energiáinak formális levonása után kapunk. Ekkor világossá válik az $\frac{1}{2}$ tényező jelentése. A töltésekre vett kétszeres összegzésben minden töltéspár kölcsönhatásának potenciális energiáját kétszer vettük figyelembe és ezt szünteti meg az $\frac{1}{2}$ szorzótényező. Természetesen ilyen célból nincsen szükség az $\frac{1}{2}$ szorzótényezőre a (4.1.33) potenciális energia kifejezésében, ami diszkrét töltésrendszer esetén a

$$V^{\mathrm{k}} = \sum_a e_a \phi^{\mathrm{k}}(\vec{r}_a) \tag{4.1.38}$$

alakot ölti, hiszen itt minden töltés potenciális energiáját pontosan egyszer vesszük figyelembe.

Töltésrendszer saját elektrosztatikus terében az egyes töltésekre ható erő. Az $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}$ energiát úgy értelmezve, mint a diszkrét töltések rendszerének elektrosztatikus energiáját, megadhatjuk a választ arra a kérdésre, hogy milyen erővel hat pl. az a ponttöltés a b ponttöltésre. Képezzük ehhez a töltésrendszerben az a töltésre ható erőt:

$$\vec{F}_a = -\frac{\partial \mathcal{E}^{\mathrm{d}}}{\partial \vec{r}_a} = \sum_{b \neq a} \frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^2} \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} = \sum_{b \neq a} \vec{F}_{b \to a}. \tag{4.1.39}$$

Ez úgy értelmezhető, mint az egyes $b \neq a$ nyugvó ponttöltések által az a ponttöltésre kifejtett $\vec{F}_{b \to a}$ Coulomb-erők vektori összege. Az energia definíciója összhangban van tehát a tapasztalattal.

Az elektron saját energiája. A ponttöltések saját energiájának formális levonása legfeljebb praktikus megoldás, amit a kapott eredmény igazol, de elméletileg nem megalapozott. Bele kell törődjünk, hogy a klasszikus elektrodinamika nem tudja értelmezni egy ponttöltés saját energiáját. Ez közvetlenül is látszik, ha ponttöltés elektrosztatikus terének energiasűrűségét integráljuk a teljes térre, beleértve az origót is, ahol a ponttöltés nyugszik:

$$\mathcal{E}^{\mathrm{s}} = \frac{1}{8\pi} 4\pi \int_\delta^\infty dr\, r^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{2} \int_\delta^\infty dr\, r^2 \frac{e^2}{r^4} = \frac{e^2}{2\delta} \to \infty, \qquad \text{ha } \delta \to 0^+. \tag{4.1.40}$$

Vajon a Természet hogyan gondoskodik róla, hogy az elektron energiája véges maradjon? A saját energia véges értékének az alábbi okai lehetnek (külön-külön vagy együttesen):

1. Az elektron nem pontszerű, hanem kiterjedt objektum, amelynek töltése nem egyetlen pontban van összesűrítve, hanem szét van kenve egy kicsiny, de véges térfogatban. **A tapasztalat szerint azt mindenképpen tudjuk, hogy az elektron valamennyi ezidáig elvégzett részecskefizikai kísérletben pontszerűnek mutatkozott.** Ha van is belső szerkezete, a mérete kisebb mint $3 \cdot 10^{-15}$ m = 3 fm. Azt, hogy a töltés „elkenése” véges térfogatban megoldás lehet a problémára, könnyen beláthatjuk, ha kiszámoljuk pl. egy homogén töltéssűrűségű gömb elektrosztatikus terét. Legyen ρ_0 a gömbön belüli töltéssűrűség. Az előző fejezet eredményét alkalmazva, ennek a gömbnek az elektrosztatikus tere:

$$E_r = \begin{cases} \frac{e}{r^2}, & \text{ha} \quad r > R, \\ \frac{4\pi\rho_0 r}{3}, & \text{ha} \quad r \leq 0 \leq R \end{cases}, \tag{4.1.41}$$

úgyhogy az elektrosztatikus tér energiája

$$\mathcal{E}^s = \frac{1}{8\pi} 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 E_r^2 = \frac{1}{2}\left(\int_0^R \frac{16\pi^2\rho_0^2 r^2}{9} + \int_R^\infty dr\, r^2 \frac{e^2}{r^4} \right) < \infty \tag{4.1.42}$$

végesnek adódik.

2. Az elektron kvantummechanikai objektum, így a nyugvó elektron nem lokalizálható a $\lambda_C = \frac{h}{mc} \approx 4 \cdot 10^{-13}$ m = 400 fm = 0,004 A^o **Compton-hullámhosszánál** kisebb méretű térbeli tartományra, ahol h a Planck-állandó, m az elektron nyugalmi tömege, c a fénysebesség. Sajnos ez önmagában még nem magyarázat. A kvantumelektrodinamika, amely figyelembe veszi az elektron ezen tulajdonságát, szintén nem tudja az elektron saját energiáját értelmezni. A kvantumelektrodinamikában is végtelen nagynak kapjuk az elektron saját energiáját. Ebben az elméletben az elektron eredendően belső szerkezet nélküli, pontszerű objektum.

3. Elképzelhető végül, hogy a Természet az elektron energiáját azáltal teszi végessé, hogy a téridőben nincsen tetszőlegesen kicsiny térfogat, mert a gravitációs mezőnek is kvantumai vannak. Ez valami olyasmit jelentene, hogy az energia kiszámításakor az energiasűrűséget nem szabadna csak egy minimális sugárig integrálni. Mai ismereteink szerint azt sejtjük, hogy ha van ilyen távolság, akkor az a $\lambda_P = \sqrt{\frac{\gamma\hbar}{c^3}} \approx 10^{-35}$ m Planck-hossz nagyságrendjébe esik vagy annál is kisebb (γ a Newton-féle gravitációs állandó). Ezeken a távolságokon ugyanis a téridő geometriáját meghatározó gravitációt már kvantumos jelenségnek kell tekinteni.

Összegezve, egyelőre nyitott kérdés a fizikában, hogy miért véges a nyugvó elektron energiája. Ezt a kérdést, – a tehetetlen tömeg és az energia ekvivalenciáját figyelembe véve, – úgyis átfogalmazhatjuk, hogy **miért véges az elektron nyugalmi tömege?**

4.1.3 Töltésrendszer elektrosztatikus tere nagy távolságban

Megmutatjuk, hogy töltésrendszer elektrosztatikus tere a töltésrendszertől nagy távolságban multipólusok szerint sorba fejthető és, hogy ott az elektrosztatikus teret a legalacsonyabb rendű el nem tűnő multipólmomentum tere dominálja. Ezért pl. a $Q \neq 0$ össztöltéssel rendelkező rendszer elektrosztatikus tere nagy távolságban olyan, mint egy ponttöltés tere.

Tekintsük a K inerciarendszerben nyugvó, e_a töltésű, $\vec{r}_a$ helyzetvektorú ponttöltések rendszerét. Helyezzük a koordinátarendszer origóját a töltésrendszer belsejébe, és vizsgáljuk a töltésrendszer elektrosztatikus potenciálját az origótól nagy r távolságban, azaz legyen $r \gg r_a$ bármely a ponttöltés esetén. A töltésrendszer elektrosztatikus potenciálja a lineáris szuperpozició elve értelmében:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}. \tag{4.1.43}$$

Mivel

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_a|}=\frac{1}{[(\vec{r}-\vec{r}_a)^2]^{1/2}}\approx\frac{1}{r}+\sum_{i=1}^{3}\frac{r_i r_{ai}}{r^3}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3r_i r_j-r^2\delta_{i,j}}{r^5}r_{ai}r_{aj}+\mathcal{O}(\frac{1}{r}\frac{r_a^3}{r^3}), \tag{4.1.44}$$

azért az elektrosztatikus potenciál Taylor-sorának első tagjai:

$$\phi(\vec{r})=\frac{1}{r}Q+\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{d}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3r_i r_j-\delta_{i,j}r^2}{r^5}Q_{i,j}+\mathcal{O}(\frac{1}{r^4}), \tag{4.1.45}$$

ahol $Q=\sum_a e_a$ a töltésrendszer össztöltése,

$$\vec{d}=\sum_a e_a\vec{r}_a \tag{4.1.46}$$

a töltésrendszer elektromos dipólmomentuma,

$$Q_{i,j}=\sum_a e_a r_{ai}r_{aj} \tag{4.1.47}$$

a töltésrendszer elektromos kvadrupólmomentuma. A potenciál (4.1.45) sorfejtését **a potenciál multipólus-kifejtésének nevezzük.** A magasabb rendű tagok magasabb rendű multipólusokat tartalmaznak, amelyek a töltésrendszer magasabb rendű momentumai. Az egyre magasabb rendű elektromos multipólusok az r távolsággal egyre gyorsabban csökkenő potenciált létesítenek. A monopólus (ponttöltés), a dipólus, a kvadrupólus, stb. által létesített elektrosztatikus potenciál rendre $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^3}$, stb. alakú aszimptotikus viselkedést mutat. Ezért **a töltésrendszertől nagy távolságban az elektrosztatikus teret a legalacsonyabb rendű el nem tűnő multipólus tere uralja.**

A monopólus tere. Az elektrosztatikus potenciál (4.1.45) kifejtésében az első tag a monopólus járuléka. Ha a töltésrendszer Q össztöltése nem nulla, akkor ez a tag dominálja a potenciált a töltésrendszertől nagy távolságban, és ennek következtében akkor a potenciál ott olyan, mint az origóban elhelyezett Q ponttöltés elektrosztatikus potenciálja.

Az elektromos dipólus tere. Az elektrosztatikus potenciál (4.1.45) kifejtésében a második tag a dipólus járuléka. Ha az össztöltés zérus, $Q=0$, akkor a dipólus tere uralja a potenciált a töltésrendszertől nagy távolságban. A legegyszerűbb töltésrendszer, amelynek össztöltése nulla, és nem tűnik el az elektromos dipólmomentuma, egy olyan kis „súlyzó”, amelynek egyik végén $+q$, másik végén $-q$ ponttöltés ül. Legyen a negatív töltésből a pozitív töltésbe mutató relatív helyzetvektor $\vec{a}$. Ennek a rendszernek a dipólmomentuma

$$\vec{d}=-q\vec{r}_1+q(\vec{r}_1+\vec{a})=q\vec{a}. \tag{4.1.48}$$

Ha ezt a töltésrendszert nagy távolságból nézzük, akkor az elektrosztatikus tere egy dipólus tere. Ha $\vec{a}\to 0$ esetén a $\vec{d}$ dipólmomentum véges marad, akkor azt mondjuk, hogy a dipólus egy **elemi dipólus**. Az elemi dipólusnak az össztöltése is, és minden magasabb rendű multipólmomentuma is nulla. Ezért **az elemi dipólus tere mindenütt**

$$\phi(\vec{r})=\frac{\vec{d}\vec{r}}{r^3}, \tag{4.1.49}$$

azaz az r távolság négyzetével fordítottan arányosan csökken és anizotróp.

Tetszőleges $\vec{d}$ dipólmomentumot helyettesíthetünk gondolatban egy alkalmasan választott „töltés-súlyzóval”. Ennek egyik módja, hogy meghatározzuk külön-külön a töltésrendszer pozitív e_a^+ és negatív e_a^- töltéseinek töltésközéppontját,

$$\vec{R}^+ = \frac{\sum_a^+ e_a^+ \vec{r}_a}{\sum_a^+ e_a^+}, \qquad \vec{R}^- = \frac{\sum_a^- e_a^- \vec{r}_a}{\sum_a^- e_a^-}, \tag{4.1.50}$$

majd egy olyan töltéssúlyzót képezünk, amelynek végein az $\vec{R}^+$ ill. $\vec{R}^-$ pontokban rendre a teljes pozitív $Q^+ = \sum_a^+ e_a^+$ ill. negatív $Q^- = \sum_a^- e_a^-$ töltést elhelyezzük. A kapott töltéssúlyzó elektromos dipólmomentuma megegyezik az eredeti töltésrendszer elektromos dipólmomentumával:

$$\vec{d} = Q^+ \vec{R}^+ + Q^- \vec{R}^- = \sum_a{}^+ e_a^+ \vec{r}_a + \sum_a{}^- e_a^- \vec{r}_a = \sum_a e_a \vec{r}_a. \tag{4.1.51}$$

Különböző előjelű töltések jelenléte esetén tehát az elektromos dipólmomentum nullától különböző értéke azt jelenti, hogy a pozitív és a negatív töltések töltésközéppontja nem esik egybe. Azonos előjelű töltések origóra vonatkoztatott elektromos dipólusmomentuma akkor nem nulla, ha a töltésközéppont az origóhoz képest el van tolódva.

Az elektromos kvadrupólus tere. A multipól-sor harmadik tagja a kvadrupólus járuléka. Ha a töltésrendszer össztöltése és elektromos dipólmomentuma is nulla, $Q = 0$ és $\vec{d} = 0$, akkor a kvadrupólus járuléka határozza meg a töltésrendszertől nagy távolságban az elektrosztatikus teret, amely ilyenkor az r távolság köbével fordítottan arányosan csökken és anizotróp. A definíciójából következően az elektromos kvadrupólmomentum szimmetrikus, másodrendű tenzor, $Q_{i,j} = Q_{j,i}$. Egy kvadrupólus megvalósítását pl. úgy kaphatjuk, hogy egy a oldalhosszúságú négyzet csúcsaiban, a négyzet mentén körbejárva, felváltva q és $-q$ töltéseket helyezünk el. Legyen a négyzet pl. az (x, y)-síkban, és legyenek $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ az (x, y) Descartes-féle koordinátarendszer tengelyeinek irányát kijelölő egységvektorok. Ekkor

$$\begin{gathered} Q = +q - q + q - q, \qquad \vec{d} = q\vec{0} - qa\vec{e}_x + qa(\vec{e}_x + \vec{e}_y) - qa\vec{e}_y = \vec{0}, \\ \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2q^2 & a^2q^2 & 0 \\ a^2q^2 & 2a^2q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.1.52}$$

4.1.4 Elektromos dipólus külső elektrosztatikus térben

Láttuk, hogy a Q ponttöltésre (elektromos monopólusra) a külső $\vec{E}^{\mathrm{k}}$ elektrosztatikus tér

$$\vec{F} = Q\vec{E}^{\mathrm{k}}(\vec{r}) \tag{4.1.53}$$

erővel hat és, hogy a monopólus potenciális energiája a külső elektrosztatikus térben

$$V(\vec{r}) = Q\phi^{\mathrm{k}}(\vec{r}), \tag{4.1.54}$$

ahol a külső elektrosztatikus tér potenciálja és térerőssége között

$$\vec{E}^{\mathrm{k}}(\vec{r}) = -\ \mathrm{grad}\ \phi^{\mathrm{k}}(\vec{r}) \tag{4.1.55}$$

összefüggés áll fenn. Alább megmutatjuk, hogy **külső elektrosztatikus térben elhelyezett $\vec{d}$ elektromos dipólusra**

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{E}^{\mathrm{k}}(\vec{r}) \tag{4.1.56}$$

forgatónyomaték, és – inhomogén térben –

$$F_i = \sum_{j=1}^{3} d_j \frac{\partial E_i^{\mathrm{k}}(\vec{r})}{\partial r_j} \tag{4.1.57}$$

erő hat. Az elektromos dipólus potenciális energiája elektrosztatikus térben

$$V = -\vec{d} \cdot \vec{E}^{\mathrm{k}}(\vec{r}). \tag{4.1.58}$$

Elektromos dipólus potenciális energiája külső elektrosztatikus térben. Vizsgáljuk az $\vec{E}^{\mathrm{k}}$ külső elektrosztatikus térbe helyezett dipólus esetét. A dipólust képzeljük infinitezimális hosszúságú töltéssúlyzónak, amelynek $-q$ töltése az $\vec{r}$ helyzetvektorú pontban, q töltése az $\vec{r} + \vec{a}$ helyzetvektorú pontban van, a dipólmomentum ekkor $\vec{d} = q\vec{a}$. A dipólus potenciális energiája a $\phi^{\mathrm{k}}(\vec{r})$ elektrosztatikus térben

$$\begin{aligned} V &= -q\phi^{\mathrm{k}}(\vec{r}) + q\phi^{\mathrm{k}}(\vec{r} + \vec{a}) \approx -q\phi^{\mathrm{k}}(\vec{r}) + q\phi^{\mathrm{k}}(\vec{r}) + q\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \phi^{\mathrm{k}}(\vec{r})}{\partial r_j} a_j + \mathcal{O}(a^2) \\ &= -q\vec{a} \cdot [-\ \mathrm{grad}\ \phi^{\mathrm{k}}(\vec{r})] = -\vec{d} \cdot \vec{E}^{\mathrm{k}}(\vec{r}), \end{aligned} \tag{4.1.59}$$

amit meg akartunk mutatni.

Elektromos dipólusra ható erő és forgatónyomaték külső elektrosztatikus térben. Az egyes töltésekre $-q\vec{E}^{\mathrm{k}}(\vec{r})$ ill. $+q\vec{E}^{\mathrm{k}}(\vec{r} + \vec{a})$ erő hat, amelyek eredője $\mathcal{O}(a)$ rendű, nem tűnik el:

$$\begin{aligned} F_i &= -qE_i^{\mathrm{k}}(\vec{r}) + qE_i^{\mathrm{k}}(\vec{r} + \vec{a}) \approx -qE_i^{\mathrm{k}}(\vec{r}) + qE_i^{\mathrm{k}}(\vec{r}) + q\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial E_i^{\mathrm{k}}(\vec{r})}{\partial r_j} a_j \\ &= \sum_{j=1}^{3} d_j \frac{\partial E_i^{\mathrm{k}}(\vec{r})}{\partial r_j}. \end{aligned} \tag{4.1.60}$$

Ez az erő a dipólust a nagyobb térerősségű helyek irányába gyorsítja. A kifejezésből nyilvánvaló, hogy homogén térben elhelyezett dipólusra nem hat erő.

A dipólusra ható erők forgatónyomatéka ugyancsak $\mathcal{O}(a)$ rendű:

$$\vec{M} = -\vec{r} \times q\vec{E}^{\mathrm{k}}(\vec{r}) + (\vec{r} + \vec{a}) \times q\vec{E}^{\mathrm{k}}(\vec{r} + \vec{a}) = \vec{a} \times q\vec{E}^{\mathrm{k}} + \mathcal{O}(a^2) = \vec{d} \times \vec{E}^{\mathrm{k}}(\vec{r}). \tag{4.1.61}$$

Az elektromos dipólmomentumra külső elektrosztatikus térben forgatónyomaték hat, amely merőleges a dipólmomentumra és a külső elektrosztatikus térre, és igyekszik az elektromos dipólust befordítani a külső térrel azonos irányba, amikoris a dipólus potenciális energiája minimális. Ez a forgatónyomaték homogén elektrosztatikus térben is fellép ellentétben az erővel, ami csak inhomogén térben lép fel.

Az elektromos dipólusra ható erő és forgatónyomaték kifejezését a dipólus potenciális energiájából is leszármaztathatjuk. Az elektromos dipólusra ható erő

$$F_i = -\frac{\partial V^{\mathrm{k}}(\vec{r})}{\partial r_i} = \sum_{j=1}^{3} d_j \frac{\partial E_j(\vec{r})}{\partial r_i}. \tag{4.1.62}$$

A forgatónyomatékot úgy kaphatjuk meg, hogy a potenciális energiát, mint a dipólmomentum $\vec{d}$ vektora és az $\vec{E}$ elektromos térerősség által bezárt α szög függvényét vizsgáljuk:

$$V^{\mathrm{k}}(\alpha) = -d\, E \cos\alpha. \tag{4.1.63}$$

A potenciális energiának a kicsiny $d\alpha$ szögváltozásra bekövetkező dV^{k} megváltozása úgy értelmezhető, mint a $(\vec{d}, \vec{E})$-síkra merőleges, a szögelforduláshoz képest jobbkézszabály szerint illeszkedő z-tengely irányába mutató M_z forgatónyomaték munkája:

$$dV^{\mathrm{k}} = d\, E \sin\alpha d\alpha = -M_z d\alpha, \tag{4.1.64}$$

ahonnan $M_z = -d\, E \sin\alpha$, ami a vektorok elmondott irányait is figyelembe véve azt jelenti, hogy a forgatónyomaték vektora $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{E}$ alakba írható.

Elektromos dipólus kisrezgései homogén elektrosztatikus térben. Legyen a dipólmomentum és a külső tér szöge α, és tegyük fel, hogy a dipólust kicsiny α_0 szöggel kitérítettük egyensúlyi helyzetéből, majd magára hagytuk. Ekkor a dipólus az eredeti helyzete és a homogén elektrosztatikus térerősség által meghatározott síkban rezeg az erre a síkra merőleges $M_z = -d\ E \sin\alpha$ forgatónyomaték hatására:

$$\Theta_{zz}\ddot{\alpha} = -d\, E \sin\alpha \approx -d\, E\alpha, \tag{4.1.65}$$

ami kicsiny kezdeti $\alpha_0 \ll \frac{\pi}{2}$ szögkitérés esetén harmonikus rezgőmozgás.

Nyugvó elektromos dipólusok kölcsönhatása. A tér $\vec{r}_1$ helyzetvektorú pontjában nyugvó $\vec{d}_1$ elektromos dipólus

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{\vec{d}_1 \vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{3(\vec{d}_1 \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{d}_1}{r^5} \tag{4.1.66}$$

elektrosztatikus teret hoz létre. Az ebben az elektrosztatikus mezőben, az $\vec{r}_2$ helyzetvektorú pontban elhelyezett másik $\vec{d}_2$ elektromos dipólus potenciális energiája

$$V_{d_1 d_2} = -\vec{d}_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{3(\vec{d}_1 \cdot \vec{r})(\vec{d}_2 \cdot \vec{r}) - r^2(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2)}{r^5}. \tag{4.1.67}$$

Az ebből a potenciális energiából származó erő, $\vec{F}_{d_1 \to d_2} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} V_{d_1 d_2}$, az ún. **tenzorerő**. A tenzorerő nem centrális erő, iránya és nagysága a dipólmomentumok relatív helyzetvektorának nagyságától, ill. annak az egyes dipólmomentumokkal bezárt szögétől is egyaránt függ.

4.1.5 Newton gravitációs törvénye. Hasonlóságok és eltérések*

Ebben a fejezetben rámutatunk, hogy **a Newton gravitációs törvénye és a Coulomb-erő erőtörvénye közötti hasonlóság miatt a gravitáció Newton-i elmélete hasonló az elektrosztatikus mező elméletéhez. Nevezetesen a Newton-i gravitációs potenciál is Poisson-egyenlet megoldása. Az analógia következményei közül kettőt emelünk ki:**

1. **Gömbszimmetrikus tömegeloszlású égitest gravitációs tere gömbszimmetrikus és a gömbön kívül ugyanolyan, mint az égitest tömegével azonos tömegű, a gömbalakú égitest középpontjába képzelt anyagi pont gravitációs tere.**
2. **Gravitáló objektum tömegközépponti rendszerének origójára vonatkoztatott gravitációs dipólmomentum mindig zérus.**

Tegyük fel, hogy adott két nyugvó, rendre m_{s1} ill. m_{s2} súlyos tömegű anyagi pont, relatív helyzetvektoruk $\vec{r}_{12}$. Newton gravitációs törvénye értelmében az m_{s1} (m_{s2}) súlyos tömegű anyagi pont az m_{s2} (m_{s1}) súlyos tömegű anyagi pontra

$$\vec{F}_{\mathrm{g}} = \gamma \frac{m_{s1} m_{s2}}{r_{12}} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \tag{4.1.68}$$

(ill. $-\vec{F}_{\mathrm{g}}$) gravitációs erőt fejt ki. Ezt felfoghatjuk úgy, hogy az m_{s1} súlyos tömegű anyagi pont sztatikus gravitációs mezőt kelt, amely gömbszimmetrikus, centrális és konzervatív erőtér, amelynek térerőssége

$$\vec{E}_{\mathrm{g}}(\vec{r}) = -\gamma \frac{m_{s1}}{r} \frac{\vec{r}}{r} \tag{4.1.69}$$

és a potenciáltere:

$$\phi_{\mathrm{g}}(r) = -\gamma \frac{m_{s1}}{r}. \tag{4.1.70}$$

A különböző anyagi pontoktól származó gravitációs erők az erőhatások függetlenségének elve következtében vektorilag adódnak össze, úgyhogy a Newton-törvényt követő gravitációs mezőre is érvényes a lineáris szuperpozíció elve. Mindez együttvéve azt jelenti, hogy a gravitációs mező és az elektrosztatikus mező között teljes analógia áll fenn. Ezért tetszőleges gravitáló test által létrehozott sztatikus gravitációs mező $\phi_{\mathrm{g}}(\vec{r})$ potenciáljára érvényes a Poisson-egyenlet:

$$\Delta \phi_{\mathrm{g}} = 4\pi\gamma\rho_s, \tag{4.1.71}$$

ahol ρ_s a gravitációs mezőt keltő súlyos tömeg térfogati sűrűsége. Ennek az egyenletnek az általános megoldása az elektrosztatikai analógia alapján:

$$\phi_{\mathrm{g}}(\vec{r}) = -\gamma \int dV' \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{4.1.72}$$

Az elektrosztatika és a Newton-i sztatikus gravitációs mező közti analógia csak annyiban nem teljes, hogy a tapasztalat szerint negatív gravitációs töltések, azaz negatív súlyos tömegű testek nincsenek és, hogy bármely két pozitív gravitációs töltésű, azaz súlyos tömegű anyagi pont között vonzóerő lép fel (és nem taszító erő, mint az elektrosztatikában az azonos előjelű töltések között). Utóbbit azáltal vettük figyelembe, hogy a gravitációs potenciál mindig negatív, ill. hogy a gravitációs potenciálra vonatkozó Poisson-egyenlet jobb oldala pozitív.

A gravitáció Newton-i elméletének és az elektrosztatikának az analógiája lehetővé teszi, hogy olyan tömegelrendezések gravitációs teréről mondjunk kijelentéseket, amelyekkel analóg, pozitív töltéseloszlások elektrosztatikus terét már meghatároztuk. Néhány ilyen fontos állítás:

1. Egy gömbön belül elhelyezkedő, gömbszimmetrikus töltéseloszlás elektrosztatikus tere a gömbön kívül ugyanolyan, mintha a gömb össztöltése a gömb középpontjában helyezkedne el. Hasonlóan, egy gömbszimmetrikus tömegeloszlású gravitáló gömb sztatikus gravitációs tere a gömbön kívül ugyanolyan, mint a gömb középpontjában elhelyezett, a gömb teljes tömegével azonos tömegű anyagi ponté.

2. Pontszerű részecske gravitációs potenciálja a részecske helyén (mínusz) végtelenné válik. Ezért egy pontrészecske saját gravitációs energiája a Newton-i gravitáció szerint mínusz végtelennek adódik. Ez arra enged következtetni, hogy vagy nincsenek valódi pontszerű részecskék, vagy Newton gravitációs elmélete nem lehet igaz nagyon kis távolságokon, esetleg mindkettő.

3. Egy gravitáló objektum tömegközéppontjára vonatkoztatott dipólusmomentuma

$$\vec{d}_{\mathrm{g}} = \sum_a m_{sa} \vec{r}_a = \left(\sum_a m_{sa} \right) \vec{R}_{\mathrm{TKP}} = 0 \tag{4.1.73}$$

ahol $\vec{r}_a$ az egyes, m_{sa} súlyos tömegű anyagi pontok helyzetvektorai az objektum tömegközépponti rendszerében, $\vec{R}_{\mathrm{TKP}} = 0$ a TKP helyzetvektora ugyanebben a vonatkoztatási rendszerben. Gravitáló objektum dipólusmomentuma a TKP-rendszerben mindig nulla. Ebből következik, hogy ha az objektum nem sztatikus, hanem pl. belső mozgást végez, akkor annak olyannak kell lennie, hogy a gravitációs dipólmomentum zérus maradjon a TKP rendszerben. Ez csupán annak az állításnak a megfogalmazása, hogy egy magára hagyott rendszer tömegközéppontja a rendszer belső mozgása során helyben marad bármely olyan vonatkoztatási rendszerben, amelyben a TKP kezdetben nyugalomban volt. Mindez különbözik az elektromos dipólus viselkedésétől. Egy töltésrendszernek a TKP-ra vonatkoztatott elektromos dipólmomentuma a belső mozgás során változhat, ha a pozitív töltések töltésközéppontja, és a negatív töltések töltésközéppontja egymáshoz és a tömegközépponthoz képest elmozdulhat, mert megmaradási törvény csak a TKP-ra vonatkozóan áll fenn. Pl. a kb. azonos számú, semleges neutronból és $+e$ töltésű protonból álló atommagok végezhetnek olyan rezgéseket, amikor a protonok tömeg- és töltésközéppontja eltolódik a semleges neutronok tömegközéppontjához képest. A TKP megmaradása értelmében az atommag TKP-ja helyben marad, azaz a gravitációs dipólusmomentum zérus marad, de az atommagnak a TKP-ra vonatkoztatott elektromos dipólusmomentuma időben periodikusan változik. Az érdekes jelenség **az atommagok óriás rezonancia gerjesztéseinek** egy speciális esete.

4. Gravitáló objektum gravitációs potenciálját az objektumtól távol multipólus-járulékok szerint sorbafejthetjük és a sorfejtés első néhány tagjával közelíthetjük. A monopólus-tag itt sosem nulla, hanem arányos az objektum teljes M tömegével. Ha az origót a TKP-ban választottuk, akkor a dipólus-járulék azonosan zérus. Az első el nem tűnő korrekció a monopólus-taghoz az objektum gravitációs kvadrupólmomentumának járuléka.

4.1.6 A részecskék töltéseloszlása. Szóráskísérletek*

1. *Rutherford-szórás.* Pontszerű, m_e nyugalmi tömegű, $-|e|$ töltésű részecskének a szóródása egy végtelen nyugalmi tömegű, $M \gg m_e$, $Q = Z|e|$ töltésű részecskén, azaz **a ponttöltés szóródása Coulomb-potenciálon**, fontos kísérlet. Rutherford elektronokkal bombázott atomot, és a (rugalmas) szórási hatáskeresztmetszetet mérte az elektron α eltérülési szögének függvényében. Az atommag $Am_{nukleon}$ nyugalmi tömege az elektron nyugalmi tömegének kb. $1830A$-szorosa, ahol A a tömegszám, az atommagban a protonok és a neutronok együttes száma. Az atommag nyugalmi tömege első közelítésben végtelennek tekinthető az elektron nyugalmi tömegéhez képest, úgyhogy közelítőleg a fent leírt potenciál-szórás esete valósul meg. Ha csak az atommag töltését vesszük figyelembe, és azt pontszerűnek tekintjük, akkor a differenciális szórási hatáskeresztmetszet nem relativisztikus, azaz $|\vec{p}_{\rm be}| \ll m_e c$ bejövő impulzusú elektron esetén
$$d\sigma \approx \left(\frac{Ze}{4\mathcal{E}}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}, \tag{4.1.74}$$
ahol $\mathcal{E}$ az elektron megmaradó energiája, $\mathcal{E} = \sqrt{m_e^2 c^4 + |\vec{p}_{\rm be}|^2 c^2}$, $d\Omega$ az az infinitezimális térszög, amelyben a szóródott, a kimenő elektron impulzusát észleljük. Megjegyezzük, hogy az elektron kimenő impulzusának nagysága megegyezik a bejövő impulzus nagyságával az energia megmaradásának következtében, ha elhanyagoljuk az atommag visszalökődését. A tényleges kísérlettel való összehasonlítás érdekében a fenti képletet még módosítani kell, hogy figyelembe vegyük az atommag töltését leárnyékoló elektronfelhő hatását, és azt, hogy az atommag nyugalmi tömege véges.

   A differenciális szórási hatáskeresztmetszetet meghatározhatjuk olyan elméleti modellben is, hogy az atommag töltését és az elektronfelhő töltését az egész atom térfogatában egyenletesen elosztottnak tekintjük. Rutherford mérései azt igazolták, hogy az a modell ad helyes eredményt, amikor az atommagot az atom középpontjában elhelyezkedő ponttöltésnek tekintjük. A Rutherford-kísérlet így döntő jelentőségű volt az atomok helyes modelljének megalkotásában.

2. *Mott-szórás.* Később a ponttöltésnek a Coulomb-potenciálon való szóródására Mott a relativisztikus tartományban is érvényes képletet adott meg. Az elektromágneses mező kvantumelméletének kidolgozása után ez a képlet tovább volt pontosítható a mező kvantumfizikai tulajdonságainak figyelembevételével.

3. *Az atom kvantummechanikai modellje* is abból indul ki, hogy a középpontban a $Z|e|$ töltésű atommag található, az elektronokat pedig egy ψ hullámfüggvény írja le. A hullámfüggvényből

a kvantummechanika törvényei szerint meghatározható az elektronfelhő töltéssűrűsége: $\rho \propto |\psi|^2$. Az atommagot körülvevő töltésfelhő jelenléte azt eredményezi, hogy a Rutherford-féle szóráskeresztmetszet módosul:

$$d\sigma \approx \left(\frac{Ze}{4\mathcal{E}}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}} |F(\vec{s})|^2, \qquad (4.1.75)$$

megszorzódik az úgynevezett $F(\vec{s})$ **alaktényező** abszolút értékének a négyzetével. Ez gömbszimmetrikus töltésrendszeren való szóródás esetén csak az elektron által az atomnak átadott $\vec{s} = \vec{p}_{\rm be} - \vec{p}_{\rm ki}$ impulzus $s = 2p \sin \frac{\alpha}{2}$ nagyságától függ.

4. *Hoffstadter-féle szóráskísérlet.* Az elektronok rugalmas szórása felhasználható arra is, hogy az atommagok töltéseloszlását kísérletileg meghatározzuk. Hoffstadter végezte el ezen az úton az atommagok töltéseloszlásának meghatározását. Az elektron energiáját elegendően nagynak kell választani ahhoz, hogy az atom méretéhez képest nagyon kicsiny atommag belső szerkezetét, azaz töltéseloszlását észrevegyük, és azt többé ne pontszerűnek lássuk, mint a Rutherford-kísérletben. Azt használhatjuk ki, hogy az elektron a szórás során, mint kvantumfizikai objektum hullámszerű viselkedést mutat. A hullámhossza

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad (4.1.76)$$

ahol h a Planck-állandó és p az elektron impulzusának nagysága. Az elektronszórást ezért úgy használhatjuk, mint egy mikroszkópot, amelynek a térbeli felbontását az elektron impulzusának növelésével javíthatjuk. Legyen R_{atom}, ill. $R_{atommag}$, rendre az atom, ill. az atommag sugara! Ha $p \sim \mathcal{O}(h/R_{atom})$, akkor az atom szerkezetét tudjuk felbontani, ha $p \sim \mathcal{O}(h/R_{atommag})$, akkor az atommag szerkezetét is láthatjuk. A tapasztalat az volt, hogy az atommag egy nagyjából egyenletesen töltött gömb, amelynek sugara $R_{atommag} \approx rA^{1/3}$, ahol A az atommagot alkotó neutronok és protonok együttes száma, és $r \approx 1$ fm. A stabil atommagok sugarai így kb. az 1-10 fm nagyságrendbe esnek.

5. *Mélyen rugalmatlan elektronszórás.* Hasonló kísérletek a részecskefizikában is rendkívül fontos szerepet játszanak abban, hogy az atommagot alkotó részecskék, a neutronok és a protonok töltéseloszlását, és ezen keresztül a szerkezetét megismerjük. Ehhez az elektronok impulzusát $p \sim \mathcal{O}(h/R_{nukleon})$ nagyságrendűnek kell legalább választani, ahol $R_{nukleon}$ a neutron és a proton (közös néven nukleon) sugara. Az elektronok energiája ezekben a kísérletekben már olyan nagy, hogy az elektron a neutront, ill. a protont felépítő elektromosan töltött részecskékkel ütközik. Ugyanakkor az elektron csak elektromágnesesen hat kölcsön velük és nem vesz részt az erős kölcsönhatásban, amely a neutron ill. a proton alkatrészeit összetartja. Az elektronszórás, az ún. **mélyen rugalmatlan elektronszórás** kiváló mikroszkópnak bizonyult ebben az esetben is. Segítségével sikerült kísérletileg bebizonyítani, hogy a neutron is és a proton is 3 darab, **törttöltést hordozó,** pontszerű részecskét tartalmaz, ezek a **kvarkok**. A tapasztalat másrészről azt mutatja, hogy minden szabad állapotban megfigyelhető részecske, ill. test töltése az elektron töltésének egész számú többszöröse. Ezekután megérthetjük, hogy milyen hordereje van a fenti kísérletnek.

4.2 Stacionárius áram mágneses tere

Miután a mágneses indukciótér forrásmentes, azaz nincsenek mágneses töltések, azért valamely inerciarendszerben mágneses indukcióteret csak az ebben az inerciarendszerben mozgó elektromos töltések ill. az inerciarendszerben jelenlevő áramok tudnak kelteni. A gyakorlati alkalmazások és az anyagszerkezet megértése szempontjából egyaránt fontos speciális eset az, amikor az áramok időtől függetlenek, ill. amikor eltekinthetünk egy átlagos érték körüli időbeli változásuktól. Utóbbi eset akkor áll fenn, ha az áram időbeli ingadozásainak karakterisztikus frekvenciája sokkal nagyobb, mint amilyen frekvenciájú ingadozásokat a mágneses indukciót mérő műszer észlelni képes. Pl. makroszkopikus mérőberendezéssel mérjük egy atom mágneses terét, amely az elektronok keltette áramtól származik.

Ha az áramsűrűség független az időtől, akkor az áramot stacionáriusnak nevezzük. A stacionárius áram mágneses indukciótere nem függ az időtől.

Ebben a fejezetben megismerkedünk a Biot-Savart-törvénnyel, amely megmondja, hogy stacionárius áramok milyen törvényszerűség szerint keltenek mágneses indukcióteret. Megmutatjuk továbbá, hogy korlátos mozgást végző töltések rendszere nagy távolságból nézve általában olyan, mint egy mágneses dipólus tere. A mágneses dipólus legegyszerűbb megvalósítása egy infinitezimális áramhurok. Meghatározzuk a külső, homogén mágneses térben elhelyezkedő mágneses dipólus potenciális energiáját és azt a forgatónyomatékot, amelyet a külső homogén mágneses tér fejt ki a mágneses dipólusra.

4.2.1 Biot-Savart-törvény

Tegyük fel, hogy valamely K inerciarendszerben a töltéssűrűség azonosan zérus, $\rho(t,\vec{r}) \equiv 0$ és el nem tűnő, időtől független, azaz stacionárius áramsűrűség van jelen, $\vec{j} \equiv \vec{j}(\vec{r})$. Ekkor a Maxwell-egyenleteknek olyan a megoldása, hogy az elektromos térerősség azonosan zérus, $\vec{E}(t,\vec{r}) = 0$, a mágneses indukció sztatikus, azaz független az időtől, $\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{r}) = 0$, és eleget tesz a nem triviálisan kielégülő,

$$\mathrm{div}\ \vec{B}(\vec{r}) = 0, \qquad \mathrm{rot}\ \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}) \tag{4.2.1}$$

Maxwell-egyenleteknek. Azt mondjuk, hogy ekkor **a K inerciarendszerben a $\vec{j}(\vec{r})$ sűrűségű stacionárius áram által keltett mágneses tér van jelen.** Alább megmutatjuk, hogy **a stacionárius áram mágneses tere,** mint a fenti (4.2.1) egyenletek speciális megoldása,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}. \tag{4.2.2}$$

Ez a képlet lehetővé teszi, hogy tetszőleges stacionárius áram mágneses indukcióterét meghatározzuk. Azt mondja, hogy **tetszőleges $\vec{r}$ helyzetvektorú pontban a stacionárius mágneses mező indukciója a tér egyes $\vec{r}\,'$ pontjainak kicsiny dV' térfogatú környezeteiben jelenlevő $\vec{j}(\vec{r}\,')dV'$ áramelemek által egymástól függetlenül keltett**

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')dV' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \tag{4.2.3}$$

mágneses indukcióterek vektori összege. Az egyes áramelemek mágneses indukcióterei tehát lineárisan szuperponálódnak.

Még némi magyarázatot kell fűzni ahhoz, hogy az azonosan zérus töltéssűrűség hogyan egyeztethető össze az el nem tűnő áramsűrűséggel. A gyakorlatban ez vezetőkben folyó áram esetén úgy valósul meg, hogy a K inerciarendszerben nyugvó pozitív töltések $\rho_+(\vec{r})$ sűrűségű hátterén mozognak $\rho_-(\vec{r}) = -\rho_+(\vec{r})$ sűrűségű negatív töltések $\vec{u}(\vec{r})$ sebességgel. Így mindenütt semleges a vezető,

$$\rho(\vec{r}) = \rho_+(\vec{r}) + \rho_-(\vec{r}) = \rho_+(\vec{r}) + [-\rho_+(\vec{r})] = 0, \tag{4.2.4}$$

ugyanakkor van jelen csak a mozgó, negatív töltésektől származó

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho_-(\vec{r})\vec{u}(\vec{r}) \tag{4.2.5}$$

áramsűrűség.

Ahelyett, hogy közvetlenül oldanánk meg a stacionárius áram mágneses terére vonatkozó (4.2.1) egyenleteket, azokat először átfogalmazzuk az $\vec{A}$ vektorpotenciálra vonatkozó egyenletekké. A fenti feltételek mellett mindig létezik olyan, csak a helytől függő vektorpotenciál, $\vec{A} \equiv \vec{A}(\vec{r})$, hogy $\vec{B}(\vec{r}) = \text{ rot } \vec{A}(\vec{r})$, és amelyre

$$\text{rot } \text{ rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}). \tag{4.2.6}$$

Írjuk fel ezt az egyenletet Descartes-komponensekben:

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{c}j_i &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial r_j}[\text{ rot } \vec{A}]_k = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_l}A_m \\ &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}A_j - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_j}A_i,\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \tag{4.2.8}$$

Az egyenletet újra vektoriális alakba írva,

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial\vec{r}}(\text{ div } \vec{A}) \tag{4.2.9}$$

adódik. A vektorpotenciál nincsen egyértelműen meghatározva még akkor sem, ha kikötjük, - mint fentebb, - hogy független az időtől. Mindig találhatunk ugyanis olyan, csak a helytől függő $f(\vec{r})$ függvényt, hogy az időtől független mértéktranszformációval kapott, transzformált vektorpotenciál,

$$\vec{A}' = \vec{A} + \frac{\partial}{\partial\vec{r}}f(\vec{r}) \tag{4.2.10}$$

divergenciája eltűnik, és ugyanazt a mágneses indukciót adja, mint az eredeti $\vec{A}$ vektorpotenciál:

$$\text{div } \vec{A}' = 0, \qquad \vec{B}' = \text{ rot } \vec{A}' = \vec{B}. \tag{4.2.11}$$

Nyilvánvaló, hogy $\vec{B}' = \vec{B}$, mert rot grad $f = 0$. Másrészt, tetszőleges $\vec{A}(\vec{r})$ esetén az az $f(\vec{r})$ függvény, amellyel kapott $\vec{A}'$ divergenciája eltűnik, a

$$\text{div } \vec{A} + \text{ div } \text{ grad } f(\vec{r}) = 0, \tag{4.2.12}$$

azaz a

$$\Delta f(\vec{r}) = -\text{div } \vec{A} \tag{4.2.13}$$

egyenlet megoldása kell legyen. Ez ugyanolyan alakú egyenlet, mint a Poisson-egyenlet és egyértelműen létezik a megoldása:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int dV'\frac{(\text{ div } \vec{A})(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}. \tag{4.2.14}$$

Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük tehát, hogy a vektorpotenciált időtől független alakban, a

$$\mathrm{div}\ \vec{A}' = 0 \tag{4.2.15}$$

ún. **Coulomb-féle mértékfeltételnek** eleget tevő vektorpotenciálok között keressük.

Coulomb-mértékben a stacionárius áram mágneses terének vektorpotenciálja a

$$\Delta\vec{A}' = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{4.2.16}$$

egyenletnek tesz eleget. Ez a vektorpotenciál valamennyi Descartes-komponensére egy Poisson-egyenlet alakú egyenlet, ahol a forrástagok az áramsűrűség megfelelő komponenseivel arányosak. A megoldást tehát rögtön felírhatjuk:

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{4.2.17}$$

Parciálisan integrálva és felhasználva a lokális töltésmegmaradást kifejező $\mathrm{div}\ \vec{j} = 0$ egyenletet, meggyőződhetünk róla, hogy ez a megoldás kielégíti a $\mathrm{div}\ \vec{A}' = 0$ Coulomb-feltételt.

A $\vec{B}' = \mathrm{rot}\ \vec{A}'$ mágneses indukciót közvetlenül megkapjuk, ha felhasználjuk, hogy

$$\left[\mathrm{rot}\ \Big(f(\vec{r})\vec{b}\Big)\right]_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial r_j}\Big(f(\vec{r})b_k\Big) = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial r_j}b_k = [\ \mathrm{grad}\ f \times \vec{b}]_i, \tag{4.2.18}$$

ahol $f(\vec{r})$ tetszőleges függvény, $\vec{b}$ tetszőleges konstans vektor, és hogy

$$\mathrm{grad}\ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}. \tag{4.2.19}$$

Az eredmény:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c}\int dV' \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\times\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \frac{1}{c}\int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}, \tag{4.2.20}$$

amit be akartunk látni.

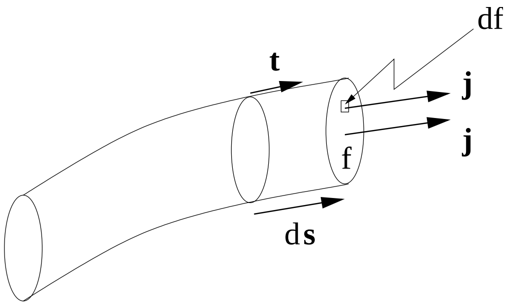

Figure 4: A végtelen vékony ($f \to 0$ keresztmetszetű) vezető ds hosszúságú darabkájának $i\ d\vec{s}$ áramelemét a vezető $\vec{t}$ érintőjének irányába mutató vektorként értelmezzük; $\vec{j}$ az áramsűrűség a vezetőben.

Végtelen vékony vezető stacionárius mágneses tere. A stacionárius áram mágneses indukcióterére kapott formulát alkalmazhatjuk arra a speciális esetre, amikor az áram egy végtelen vékony g görbe mentén folyik. Ez az eset gyakorlatban akkor valósul meg, ha végtelen vékony vezetőben folyik az áram. Ilyenkor a töltéssűrűség zérus, mert a vezetőben jelenlevő (nyugvó) pozitív töltések sűrűsége éppen kompenzálja a vezetőben áramló negatív töltések sűrűségét. Legyen $\vec{t}$ a görbe érintőjének irányába mutató egységvektor és mutasson az áramsűrűség irányába. A vezető egyik jellemzője, hogy az áramló töltések nem tudnak kilépni a vezetőből, ezért kénytelenek a végtelen vékony vezető érintője irányában mozogni. Legyen df a vezető infinitezimális keresztmetszete. Ekkor bevezethetjük a vezető keresztmetszetén átfolyó áramot, $i = \vec{j} \cdot \vec{t} \int_f df$ és írhatjuk az áramelem kifejezését

$$\int_f \vec{j} dV' = \int_f \vec{j} df ds = i d\vec{s}, \qquad d\vec{s} = \vec{t} ds \tag{4.2.21}$$

alakba (ld. 4. ábra).

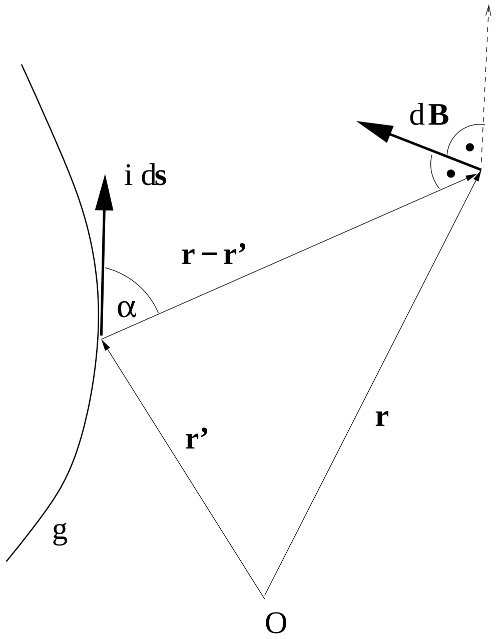

Figure 5: A g végtelen vékony vezető, $\vec{r}\,'$ helyzetvektorú pontban található, $id\vec{s}$ árameleme által a Biot-Savart-törvény értelmében a tér $\vec{r}$ helyzetvektorú pontjában keltett $d\vec{B}$ infinitezimális mágneses indukció. (O a koordinátarendszer origóját jelöli.)

A mágneses indukcióra ekkor a

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int_g ds \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \times \int_f df \vec{j}(\vec{r}\,') = \frac{1}{c} \int_g \frac{id\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}. \tag{4.2.22}$$

összefüggést kapjuk (ld. 5. ábra). Ez **a Biot-Savart-törvény, amely végtelen vékony vezetőben folyó stacionárius áram mágneses terének meghatározására szolgál. A mágneses indukció az egyes áramelemek által keltett mágneses indukcióterek lineáris szuperpozíciója. Egyetlen $id\vec{s}$ áramelem által keltett $d\vec{B}(\vec{r})$ mágneses indukció nagysága arányos az áramelemmel, az áramelem és az áramelem helyétől a megfigyelési pontba mutató $\vec{r} - \vec{r}\,'$**

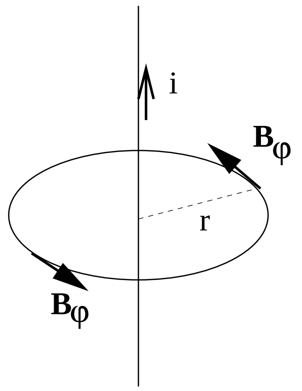

Figure 6: Egyenes vezető mágneses indukciótere.

relatív helyzetvektor szögének szinuszával és fordítva arányos az áramelem és a megfigyelési pont távolságának négyzetével. Az áramelem által keltett $d\vec{B}(\vec{r})$ mágneses indukció iránya merőleges az $id\vec{s}$ áramelemre és az áramelemtől a megfigyelési pontba mutató $\vec{r}-\vec{r}\,'$ relatív helyzetvektorra és a vektorok az $id\vec{s}$, $\vec{r}-\vec{r}\,'$ és $d\vec{B}(\vec{r})$ sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.

Egyenes vezető mágneses tere. Speciális esetekben, ha az áramvezetők elrendezése megfelelően magasfokú szimmetriával rendelkezik, akkor a differenciális jellegű Biot-Savart-törvény helyett Ampère integrális törvénye is felhasználható a stacionárius áram mágneses terének kiszámolására. Erre példa egy végtelen hosszú, áramjárta egyenes vezető mágneses tere. Az elrendezés hengerszimmetrikus. Olyan forrásmentes vektormezőt kell keresnünk, amely hengerszimmetrikus. Ilyen csak egyféle létezik, amelynek az erővonalai a vezetőre merőleges síkban fekvő koncentrikus körök, melyeknek középpontja a vezetőn helyezkedik el. Ekkor, - hengerkoordinátákat használva, – a mágneses indukció egyetlen el nem tűnő komponense B_φ, és az is csak a vezetőtől mért r merőleges távolságtól függ, $B_\varphi = B_\varphi(r)$. Írjuk fel Ampère törvényét egy r sugarú erővonalra. Ha az áramirányt a z-tengely pozitív irányának választjuk, akkor

$$\oint d\vec{s}\cdot\vec{B} = 2r\pi B_\varphi(r) = \frac{4\pi}{c}i, \tag{4.2.23}$$

ahonnan

$$B_\varphi(r) = \frac{2i}{cr}. \tag{4.2.24}$$

4.2.2 Mágneses dipólus. Elemi köráram

Korlátos mozgást végző töltések mágneses tere. Tegyük fel, hogy egy töltésrendszer térben korlátos mozgást végez, és a töltések impulzusai is végesek maradnak. Az ilyen töltésrendszer időátlagban olyan stacionárius mágneses teret kelt, mint amilyet az a stacionárius áram keltene, amelyet a töltésrendszer áramának idő szerinti átlagolása révén kapunk. Ez azt jelenti, hogy ha $\overline{\vec{j}}(\vec{r})$ az áramsűrűség időátlaga, akkor a töltésrendszer mágneses terének időátlagát a Biot-Savart-törvény értelmében az

$$\overline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int dV' \frac{\overline{\vec{j}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{4.2.25}$$

időben átlagolt vektorpotenciál határozza meg a mágneses indukció $\overline{\vec{B}}(\vec{r}) = \text{ rot } \overline{\vec{A}}(\vec{r})$ kifejezése alapján.

A fentiek belátásához fel kell használnunk, hogy bármely korlátos fizikai mennyiség idő szerinti első deriváltjának időátlaga végtelen hosszú időtartamra zérus. Valóban, ha $f(t)$ egy korlátos fizikai mennyiség, akkor a $\frac{df(t)}{dt}$ idő szerinti első derivált $T \to \infty$ időtartamra vett időátlaga

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt \frac{df(t)}{dt} = \frac{f(T)-f(0)}{T} \to 0 \tag{4.2.26}$$

zérushoz tart, mert a számláló korlátos.

A töltésrendszer elektromos térerőssége korlátos, mert ha nem lenne az, akkor végtelen lenne az elektromágneses tér energiasűrűsége. Ezért az elektromos eltolódási áramsűrűség időátlaga,

$$\overline{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} = 0. \tag{4.2.27}$$

Ezt felhasználva, képezzük a mágneses indukció divergenciájára és rotációjára vonatkozó Maxwell-egyenletek időátlagát:

$$\text{div } \overline{\vec{B}} = 0, \qquad \text{rot } \overline{\vec{B}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\vec{j}}. \tag{4.2.28}$$

Ezek az egyenletek pontosan megegyeznek a $\overline{\vec{j}}$ sűrűségű stacionárius áram mágneses terére vonatkozó Maxwell-egyenletekkel. Ezért, - az előző fejezet eredményeit felhasználva, - megoldásuk olyan idő szerint átlagos $\overline{\vec{B}}(\vec{r})$ mágneses indukciótér, amely az

$$\overline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int dV' \frac{\overline{\vec{j}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{4.2.29}$$

vektorpotenciálból rotációképzéssel kapható,

$$\overline{\vec{B}}(\vec{r}) = \text{ rot } \overline{\vec{A}}(\vec{r}). \tag{4.2.30}$$

Mivel a rotáció képzése olyan differenciálási művelet, amely az $\overline{\vec{A}}(\vec{r})$ vektormezőben lineáris, és amely csak a helyváltozókat érinti, azért az idő szerinti átlagolás és a rotációképzés felcserélhető. Következésképpen a $\overline{\vec{A}}(\vec{r})$ vektorpotenciált értelmezhetjük, mint egy időtől függő vektorpotenciál idő szerinti átlagát.

Töltésrendszer mágneses dipólmomentuma. Tegyük fel, hogy egy töltésrendszer korlátos mozgást végez, a töltések impulzusai is korlátosak. Legyen e_a az egyes részecskék töltése, $\vec{r}_a(t)$ a pályájuk, $\vec{v}_a(t)$ a sebességük. Ekkor a töltésrendszer áramsűrűsége:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_a e_a \vec{v}_a(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t)). \tag{4.2.31}$$

Ezt behelyettesítve, az idő szerint átlagos mágneses tér vektorpotenciáljára Coulomb-mértékben az

$$\overline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\sum_a \frac{e_a\vec{v}_a(t)}{|\vec{r}-\vec{r}_a(t)|} \tag{4.2.32}$$

kifejezés adódik.

Vizsgáljuk a töltésrendszer időben átlagolt mágneses terét a töltésrendszertől nagy távolságban. Helyezzük a koordinátarendszerünk origóját a töltésrendszer belsejébe. Ekkor az $r \gg r_a$ (minden a-ra) feltételeknek eleget tevő, aszimptotikus távolságokon jó közelítés az alábbi sorfejtés:

$$\overline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{r^3}), \tag{4.2.33}$$

ahol

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_a e_a \overline{\vec{r}_a(t) \times \vec{v}_a(t)}, \tag{4.2.34}$$

a **töltésrendszer mágneses dipólusmomentuma. Töltésrendszer mágneses tere nagy távolságban olyan, mint egy mágneses dipólus tere: a vektorpotenciál nagysága a távolság négyzetével fordítottan arányosan csökken, továbbá arányos a dipólmomentum és a töltésrendszerből a megfigyelési pontba mutató relatív helyzetvektor által bezárt szög szinuszával, iránya pedig merőleges a mágneses momentum vektorára és a relatív helyzetvektorra és velük $\vec{\mu}$, $\vec{r}$, $\overline{\vec{A}}(\vec{r})$ sorrendben jobbsodrású rendszert alkot.**

Aszimptotikus r távolságok esetén jó közelítés az

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_a}{r^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{r}\left(\frac{r_a}{r}\right)^2) \tag{4.2.35}$$

sorfejtés első tagjaira szorítkozni. Behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\overline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{1}{cr} \sum_a e_a \overline{\vec{v}_a(t)} + \frac{1}{cr^3} \overline{[\vec{r} \cdot \sum_a e_a \vec{r}_a(t)]\vec{v}_a(t)} + \mathcal{O}(\frac{1}{r^3}). \tag{4.2.36}$$

A jobb oldal első tagja eltűnik, mert a térben korlátos $\vec{r}_a(t)$ helyzetvektorok idő szerinti első deriváltjainak, a $\vec{v}_a(t)$ sebességeknek az idő szerinti átlagát tartalmazza. A jobb oldal második tagjában szereplő kifejezést az alábbiak szerint alakíthatjuk át:

$$(\vec{r} \cdot \vec{r}_a)\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(\vec{r} \cdot \vec{r}_a)\vec{r}_a\right] + \frac{1}{2}\left[(\vec{r} \cdot \vec{r}_a)\vec{v}_a - (\vec{r} \cdot \vec{v}_a)\vec{r}_a\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(\vec{r} \cdot \vec{r}_a)\vec{r}_a\right] - \frac{1}{2}\vec{r} \times (\vec{r}_a \times \vec{v}_a). \tag{4.2.37}$$

A második egyenletben a jobb oldalon a második tagot a vektori szorzatokra vonatkozó

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{4.2.38}$$

azonosság felhasználásával kaptuk. A jobb oldal első tagjának idő szerinti átlaga zérus (korlátos mennyiség idő szerinti első deriváltjának időátlaga). Az idő szerint átlagolt mágneses tér vektorpotenciálja tehát:

$$\overline{\vec{A}}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{2cr^3} \times \overline{\sum_a e_a(\vec{r}_a(t) \times \vec{v}_a(t))} = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}, \tag{4.2.39}$$

amit be akartunk látni.

A mágneses momentum és a pályaimpulzusmomentum kapcsolata. Legyen valamennyi ponttöltés e töltése és m nyugalmi tömege azonos. Ekkor a töltésrendszer mágneses dipólusmomentumát az alábbi alakban írhatjuk az egyes részecskék $\vec{p}_a = m\vec{v}_a$ impulzusa, ill. $\vec{l}_a = \vec{r}_a \times \vec{p}_a$ pályaimpulzusmomentuma segítségével:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\overline{\sum_a e_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a} = \frac{e}{2mc}\overline{\sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a} = \frac{e}{2mc}\overline{\sum_a \vec{l}_a} = \frac{e}{2mc}\overline{\vec{L}}, \tag{4.2.40}$$

ahol $\overline{\vec{L}}$ a töltésrendszer pályaimpulzusmomentumának az időátlaga. Korlátos mozgást végző töltésrendszer mágneses dipólusmomentuma arányos tehát a töltésrendszer pályaimpulzusmomentumának idő szerinti átlagával. Az egyes töltések pályamozgásából mágneses dipólusmomentum származik.

Elemi köráram. Tegyük fel, hogy a mágneses teret egyetlen, infinitezimális R sugarú körpályán, állandó nagyságú v kerületi sebességgel mozgó e ponttöltés hozza létre. Ekkor a mágneses dipólmomentum vektora merőleges a körpálya síkjára és a töltés haladási irányához a jobbkéz-szabály szerint illeszkedik. A mágneses momentum nagysága:

$$\mu = \frac{e}{2c} R v = \frac{e\omega}{2c} R^2, \tag{4.2.41}$$

ahol $\omega = \frac{v}{R}$ a ponttöltés szögsebessége. A körpályán mozgó töltés

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} \tag{4.2.42}$$

áramnak felel meg, ahol T a körmozgás periódusideje. **Az elemi köráram mágneses dipólmomentumának nagysága tehát**

$$\mu = iR^2\pi = iF, \tag{4.2.43}$$

az áramerősség és az áramhurok felületének szorzata.

4.2.3 Töltésrendszer külső homogén, sztatikus mágneses térben

Megmutatjuk az alábbiakat:

1. **A homogén, sztatikus külső $\vec{B}^{\mathrm{k}}$ mágneses térbe helyezett, állandó $\vec{\mu}$ mágneses dipólmomentummal rendelkező töltésrendszernek a potenciális energiája**

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}^{\mathrm{k}}. \tag{4.2.44}$$

2. **A homogén, sztatikus külső mágneses térbe helyezett mágneses dipólusra ható erő nulla,**
3. **ugyanakkor**

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}^{\mathrm{k}} \tag{4.2.45}$$

forgatónyomaték hat rá,

4. **amelynek következtében a mágneses dipólmomentum**

$$\vec{\omega} = \frac{e}{2mc} \vec{B} \tag{4.2.46}$$

szögsebességgel Larmor-precessziót végez a külső mágneses tér iránya körül.

A fenti állítások bizonyítása rendre az alábbiak szerint történik.

1. Homogén külső mágneses tér

$$\vec{B}^{\mathrm{k}} = \text{ rot } \vec{A}^{\mathrm{k}}(\vec{r}) = \text{ áll.} \tag{4.2.47}$$

összefüggésnek eleget tevő vektorpotenciálja Coulomb-mértékben (div $\vec{A}^{\mathrm{k}} = 0$)

$$\vec{A}^{\mathrm{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B}^{\mathrm{k}} \times \vec{r} \tag{4.2.48}$$

alakban adható meg, hiszen ekkor

$$\begin{aligned}[\text{ rot } \vec{A}^{\mathrm{k}}(\vec{r})]_i &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial r_j}A_k^{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\sum_{j,k,l,m=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial r_j}(\epsilon_{klm}B_l r_m) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j,k,l,m=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}B_l\delta_{mj} = \frac{1}{2}\sum_{j,k,l=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk}B_l = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}B_l\delta_{il} = B_i. \end{aligned}\tag{4.2.49}$$

Itt felhasználtuk az

$$\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \tag{4.2.50}$$

azonosságot.
A mágneses dipólmomentummal rendelkező töltésrendszer Lagrange-függvénye tartalmazza az L_B kölcsönhatási tagot, amely leírja a $\vec{v}_a$ sebességgel mozgó e_a töltéseknek a külső mágneses térrel való kölcsönhatását. ennek idő szerinti átlaga:

$$\begin{aligned}\overline{L}_B &= \overline{\sum_a \frac{e_a}{c}\vec{A}^{\mathrm{k}}(\vec{r}_a)\cdot\vec{v}_a} = \overline{\sum_a \frac{e_a}{2c}(\vec{B}^{\mathrm{k}} \times \vec{r}_a)\cdot\vec{v}_a} \\ &= \overline{\sum_a \frac{e_a}{2c}(\vec{r}_a \times \vec{v}_a)\cdot\vec{B}^{\mathrm{k}}} = \vec{\mu}\cdot\vec{B}^{\mathrm{k}}. \end{aligned}\tag{4.2.51}$$

Ez a tag független az időtől, csak a mágneses dipólmomentum és a külső mágneses tér indukciója által bezárt szögtől függ. A keresett potenciális energia tehát:

$$V = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}^{\mathrm{k}}. \tag{4.2.52}$$

2. A korlátos mozgást végző töltésrendszerre homogén külső mágneses térben ható erő az egyes, mozgó töltésekre ható Lorentz-erők vektori eredőjének időátlaga:

$$\overline{\vec{F}} = \overline{\sum_a \frac{e_a}{c}\vec{v}_a \times \vec{B}^{\mathrm{k}}} = \overline{\frac{d}{dt}\sum_a \frac{e_a}{c}\vec{r}_a \times \vec{B}^{\mathrm{k}}} = 0, \tag{4.2.53}$$

mert tetszőleges függvény idő szerinti első deriváltjának időátlaga zérus.

3. A korlátos mozgást végző töltésrendszerre ható forgatónyomaték az egyes, mozgó töltésekre ható Lorentz-erők forgatónyomatékainak vektori összege. Az eredő forgatónyomaték idő szerinti átlaga:

$$\begin{aligned}\overline{\vec{M}} &= \overline{\sum_a \frac{e_a}{c}\vec{r}_a \times (\vec{v}_a \times \vec{B}^{\mathrm{k}})} = -\overline{\sum_a \frac{e_a}{c}(\vec{v}_a \times \vec{B}^{\mathrm{k}}) \times \vec{r}_a} = -\overline{\sum_a \frac{e_a}{c}[(\vec{v}_a\cdot\vec{r}_a)\vec{B}^{\mathrm{k}} - (\vec{B}^{\mathrm{k}}\cdot\vec{r}_a)\vec{v}_a]} \\ &= -\overline{\sum_a \frac{e_a}{c}[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r}_a^2\vec{B}^{\mathrm{k}}) - (\vec{B}^{\mathrm{k}}\cdot\vec{r}_a)\vec{v}_a]} = \overline{\sum_a \frac{e_a}{c}(\vec{B}^{\mathrm{k}}\cdot\vec{r}_a)\vec{v}_a} \\ &= \sum_a \frac{e_a}{2c}\left[\overline{\frac{d}{dt}[(\vec{B}^{\mathrm{k}}\cdot\vec{r}_a)\vec{r}_a]} - \overline{(\vec{B}^{\mathrm{k}}\cdot\vec{r}_a)\vec{v}_a - (\vec{B}^{\mathrm{k}}\cdot\vec{v}_a)\vec{r}_a}\right] \\ &= -\overline{\sum_a \frac{e_a}{2c}(\vec{v}_a \times \vec{r}_a)} \times \vec{B}^{\mathrm{k}} = \vec{\mu}\times\vec{B}^{\mathrm{k}}. \end{aligned}\tag{4.2.54}$$

4. Tegyük fel, hogy valamennyi töltés azonos $e_a = e$ és a töltött részecskék $m_a = m$ tehetetlen tömege is azonos. Ekkor a töltésrendszer $\vec{\mu}$ mágneses dipólmomentum és a töltésrendszer $\vec{L}$ teljes pályaimpulzusmomentuma arányosak,

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2mc}\vec{L}. \tag{4.2.55}$$

Alkalmazzuk az impulzusmomentum-tételt a töltésrendszerre:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}^{\mathrm{k}} = \vec{L} \times \frac{e}{2mc}\vec{B}^{\mathrm{k}} = -\vec{\omega} \times \vec{L}. \tag{4.2.56}$$

A kapott mozgásegyenlet egy súlyos pörgettyű mozgásegyenlete, ahol

$$\vec{\omega} = \frac{e}{2mc}\vec{B}^{\mathrm{k}} \tag{4.2.57}$$

a Larmor-féle körfrekvencia. A töltésrendszer teljes impulzusmomentumának megváltozása mindig merőleges a külső mágneses tér és az impulzusmomentum vektorára. Ez azt jelenti, hogy a külső mágneses indukció és az impulzusmomentum (a mágneses momentum) szöge időben állandó, miközben az impulzusmomentum, ill. a vele párhuzamos mágneses momentum vektora a külső mágneses indukció iránya körül állandó ω szögsebességgel körbejár. Ez a Larmor-precesszió.

4.3 Elektromágneses hullámok terjedése

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a Maxwell-egyenletekből inhomogén hullámegyenleteket lehet leszármaztatni. Ezek általános megoldása a homogén hullámegyenlet megoldásának és az inhomogén hullámegyenlet partikuláris megoldásának az összege. A homogén egyenlet megoldását úgy kell megválasztani, hogy az általános megoldás kielégítse a feladatban megszabott határfeltételeket a vizsgált téridőtartomány határain. A homogén hullámegyenletek független megoldásai megfelelnek a szabad elektromágneses térben terjedő hullámoknak. Megmutatjuk, hogy az elektromágneses síkhullámok a homogén téregyenletek független megoldásainak teljes rendszerét alkotják. Bármely, a szabad elektromágneses térben haladó hullám előállítható ilyen síkhullámok lineáris szuperpozíciójaként.

A fényt, azaz a szabadon terjedő elektromágneses hullámokat használjuk a tér geometriájának fizikai mérések útján történő felderítésére. Részletesen taglaljuk, hogy hogyan lehet a fényt a tér egyeneseinek értelmezésére felhasználni. Rámutatunk arra, hogy a térben lokalizált, klasszikus elektromágneses hullámcsomag terjedése és a pontrészecskék terjedése között analógia található. Végezetül megfogalmazzuk a Huygens-elvet, és rámutatunk, hogy az elektromágneses hullámok úgy terjednek a vákumban, hogy eleget tesznek a Huygens-elvnek. Utalunk a Huygens-elv jelentőségére a fizikában.

4.3.1 Hullámegyenlet

A hullámegyenlet Lorentz-kovariáns alakja. Tekintsük a Lorentz-kovariáns alakban felírt Maxwell-egyenleteket, mint a négyes-vektorpotenciálra vonatkozó parciális differenciálegyenleteket. A térerősség-tenzor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{4.3.1}$$

definíciója következtében a (3.3.1) egyenletek azonosságként elégülnek ki. Ezért adott j^μ négyes-áramsűrűség esetén csak a (3.3.4) egyenleteket kell megoldani, amelyek részletes alakja:

$$\partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \tag{4.3.2}$$

Az egyenlet alakjának egyszerűsítéséhez felhasználhatjuk, hogy az A^μ vektorpotenciál csak tetszőleges $f(x)$ skalárfüggvénnyel adott

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f \tag{4.3.3}$$

mértéktranszformáció erejéig van meghatározva, $F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$. Mindig találhatunk olyan $f(x)$ függvényt, hogy az általa megadott mértéktranszformáció olyan A'^μ vektorpotenciált állít elő, amelynek négyes-divergenciája azonosan zérus:

$$\partial_\mu A'^\mu = 0. \tag{4.3.4}$$

Ezt a feltételt **Lorentz-feltételnek** nevezzük és azt mondjuk, hogy a vektorpotenciált **Lorentz-mértékben** adtuk meg, ha az eleget tesz a Lorentz-feltételnek.

Behelyettesítéssel beláthatjuk, hogy mindig létezik olyan $f(x)$ függvény, amelynek segítségével

$$0 = \partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \Box f \tag{4.3.5}$$

azonosan teljesül. Az egyenlet partikuláris megoldása:

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{fénykúp}} (t^\kappa dS_\kappa) \frac{\partial_\mu A^\mu(x')}{|x - x'|}, \tag{4.3.6}$$

ahol $|x - x'| = \sqrt{(x^\mu - x^{\mu\,\prime})(x_\mu - x'_\mu)}$ az x^μ és $x^{\mu\,\prime}$ téridő-pontok Lorentz-invariáns távolsága, az integrálás az x^μ téridő-pont múltbeli fénykúpjának a felületén történik, $t^\kappa(x')$ a fénykúp felületének x' pontjában az idő-tengely irányába mutató egységvektor,

$$(t^\kappa dS_\kappa)(x') = r'^2 dr' d\Omega' \tag{4.3.7}$$

a fénykúp felületelemének időirányú vetülete, azaz a megfelelő hármas-térfogatelem.

Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük tehát, hogy a vektorpotenciált a Lorentz-mértékben választjuk. Ekkor a (4.3.2) Maxwell-egyenlet **a négyes-vektorpotenciálra vonatkozó inhomogén hullámegyenlet** alakját ölti:

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \tag{4.3.8}$$

ahol

$$\Box = \partial_\nu \partial^\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial r_j^2} \tag{4.3.9}$$

a d'Alambert-operátor ($x^0 = ct$, $x^j = r_j$, $j = 1, 2, 3$). Az inhomogén (4.3.8) hullámegyenletnek a (4.3.4) Lorentz-feltételt kielégítő megoldását kell tehát megkeresnünk.

A hullámegyenletek nem-kovariáns alakja. Az inerciális vonatkoztatási rendszer megválasztása után kétféleképpen is megtalálhatjuk az abban érvényes hullámegyenleteket:

1. A (3.3.2) és (3.3.10) ill. a (3.3.3) és (3.3.11) egyenletek segítségével **az elektromos térerősségre és a mágneses indukcióra vonatkozó inhomogén hullámegyenleteket** kaphatunk:

$$\Box\vec{E} \equiv \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E} - \Delta\vec{E} = -4\pi\left(\text{ grad } \rho + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{j}\right), \tag{4.3.10}$$

$$\Box\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\text{ rot } \vec{j}. \tag{4.3.11}$$

Vegyük a (3.3.2) egyenlet,

$$\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_j E_k = -\frac{1}{c}\partial_t B_i, \tag{4.3.12}$$

rotációját:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} \epsilon_{mli}\partial_l(\epsilon_{ijk}\partial_j E_k) = -\frac{1}{c}\partial_t \sum_{i,l=1}^{3} \epsilon_{mli}\partial_l B_i,$$

$$\sum_{j,k,l=1}^{3} (\delta_{mj}\delta_{lk} - \delta_{mk}\delta_{lj})\partial_l\partial_j E_k = -\frac{1}{c}\partial_t\left(\frac{1}{c}\partial_t E_m + \frac{4\pi}{c}j_m\right), \tag{4.3.13}$$

ahol a jobb oldalba behelyettesítettük a (3.3.11) egyenletből rot $\vec{B}$ kifejezését és felhasználtuk az

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{iml} = \delta_{mj}\delta_{lk} - \delta_{mk}\delta_{lj} \tag{4.3.14}$$

azonosságot. A bal oldalon összevonva és oda behelyettesítve a (3.3.10) egyenletből div $\vec{E}$ kifejezését, átrendezés után a

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 E_m - \Delta E_m = -4\pi\left(\partial_m\rho + \frac{1}{c^2}\partial_t j_m\right) \tag{4.3.15}$$

egyenletet kapjuk. Ez pontosan a (4.3.10) egyenlet.

Képezzük most a (3.3.11) egyenlet,

$$\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_j B_k = \frac{1}{c}\partial_t E_i + \frac{4\pi}{c}j_i, \tag{4.3.16}$$

rotációját:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} \epsilon_{mli}\epsilon_{ijk}\partial_l\partial_j B_k = \frac{1}{c}\sum_{i.l=1}^{3} \partial_t\epsilon_{mli}\partial_l E_i + \frac{4\pi}{c}\sum_{i,l=1}^{3} \epsilon_{mli}\partial_l j_i,$$

$$\sum_{j,k,l=1}^{3} (\delta_{mj}\delta_{lk} - \delta_{mk}\delta_{lj})\partial_l\partial_j B_k = -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 B_m + \frac{4\pi}{c}\sum_{i,l=1}^{3} \epsilon_{mli}\partial_l j_i, \tag{4.3.17}$$

ahol a bal oldalon a (4.3.14) azonosságot használtuk fel, a jobb oldalba pedig behelyettesítettük rot $\vec{E}$ kifejezését a (3.3.2) egyenletből. A bal oldalon összevonva és felhasználva a (3.3.3) egyenletet, átrendezés után a

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 B_m - \Delta B_m = \frac{4\pi}{c}\sum_{i,l=1}^{3} \epsilon_{mli}\partial_l j_i \tag{4.3.18}$$

egyenletet kapjuk, ami a (4.3.11) inhomogén hullámegyenlet Descartes-komponensekben kiírt alakja.

2. A (4.3.8) egyenletet átírjuk **a (hármas-)vektorpotenciálra és a skalárpotenciálra vonatkozó inhomogén hullámegyenletek** alakjába:

$$\Box\phi = 4\pi\rho,$$
$$\Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{4.3.19}$$

ahol a skalár- és vektorpotenciál eleget tesz **a Lorentz-feltételnek:**

$$\frac{1}{c}\partial_t\phi - \partial_j A_j = 0. \tag{4.3.20}$$

4.3.2 A hullámegyenletek fizikai jelentése

Az elektrodinamika Maxwell-egyenleteiből az előző fejezetben az elektromos térerősségre és a mágneses indukcióra vonatkozó inhomogén hullámegyenleteket származtattunk le. Gondoljuk át, hogy mit fejez ki az egyenleteknek ez az alakja. **Az inhomogén parciális differenciálegyenletek (adott kezdő- és peremfeltételekhez tartozó) általános megoldása előállítható, mint a megfelelő homogén differenciálegyenletek (azonos kezdő- és peremfeltételekhez tartozó) megoldásai lineáris kombinációjának és az inhomogén probléma partikuláris megoldásának összege.** Ez az elektrodinamika hullámegyenleteinek következő fizikai értelmezését teszi lehetővé.

1. **A homogén hullámegyenletek az elektromágneses mezőt olyan téridőtartományban írják le, amelyben nincsenek jelen töltések és áramok.** Alább látni fogjuk, hogy az egyenleteknek van ekkor is nem azonosan eltűnő, azaz nem triviális megoldása. **A szabad (azaz töltések és áramok nélkül megvalósuló) klasszikus elektromágneses mezőnek tehát vannak gerjesztett állapotai, amikor elektromágneses hullámok terjednek szabadon a térben.** Terjedésüket kizárólag az elektromágneses mező dinamikája határozza meg, azaz a homogén hullámegyenletek; nem „emlékeznek” arra, hogy a tér más tartományában milyen forrásaik voltak. Azt szoktuk mondani, hogy ezek a hullámok „leszakadtak” azokról a forrásokról, amelyek keltették őket.
2. **Az inhomogén hullámegyenletek azt írják le, hogy adott töltések és áramok milyen elektromágneses teret keltenek. Ebbe beletartozik az elektromágneses sugárzás jelensége is, azaz az a mechanizmus is, ahogyan a gyorsuló elektromos töltésekről elektromágneses hullámok „szakadnak” le, hogy szabadon terjedjenek tova a térben.**

Fontos tisztázni, hogy a szabad elektromágneses mező gerjesztett állapotai, amelyeket a homogén téregyenletek megoldásai írnak le, valamilyen fizikai folyamat során kellett, hogy létrejöjjenek. Ez azt jelenti, hogy azon a téridő-tartományon kívül, amelyben a homogén téregyenletek megoldásai jó közelítést jelentenek, jelen kell lenni olyan időben változó áramoknak, amelyek az elektromágneses mezőben hullámokat keltettek. Ennek alapján azt várjuk, hogy az inhomogén egyenletek partikuláris megoldásainak a forrásoktól „távoli” téridő-tartományban közelítőleg előállíthatóaknak kell lenniük, mint a homogén egyenletek megoldásainak lineáris kombinációi. Erre a kérdésre az elektromágneses sugárzás tárgyalása során térünk vissza.

Csak a klasszikus elektromágneses mező alapállapotában érvényes, hogy az elektromos térerősség és a mágneses indukció értéke azonosan zérus. Az elektromágneses mező azonban kvantumfizikai objektum, ami energiát és impulzust csak jól meghatározott, összetartozó diszkrét adagokban tud felvenni ill. leadni. A klasszikus elektrodinamika keretein túlmutató kvantumfizikai tárgyalás kimutatja, hogy az elektromágneses mező alapállapotának is van „dinamikája". A mező alapállapotában az elektromos térerősség ill. a mágneses indukció véletlenszerű, kvantumfizikai természetű ingadozásokat mutat. Ezek az elektromágneses mező zérusponti kvantumfluktuációi. Az elektromos térerősség és a mágneses indukció alapállapotban csak várható értékben nulla, a négyzetes szórásuk azonban nullától különböző.

4.3.3 Síkhullámok. Monokromatikus síkhullám

Ebben a fejezetben a szabad elektromágneses mezőre vonatkozó, homogén hullámegyenletek síkhullámmegoldásait keressük meg.

Síkhullámok. Tegyük fel, hogy az f térmennyiség, amely lehet az elektromos térerősség vagy a mágneses indukció bármely Descartes-komponense, csak az $r_1 = x$ koordinátától és az időtől függ. Ekkor az $f(t,x)$ mennyiségre **egy-dimenziós homogén hullámegyenletet** kapunk:

$$\Box f(t,x) \equiv \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) f(t,x) = 0. \tag{4.3.21}$$

Az egy-dimenziós homogén hullámegyenlet általános megoldása

$$f(t,x) = f_+(ct-x) + f_-(ct+x) \tag{4.3.22}$$

alakú, ahol $f_\pm(\xi)$ tetszőleges függvények. A jobb oldalon álló első ill. második tag rendre az x-tengellyel párhuzamosan, pozitív ill. negatív irányban, a c vákumbeli fénysebességgel azonos nagyságú fázissebességgel haladó síkhullámot ír le. Azt, hogy itt $f_+(ct-x)$ az x-tengely pozitív irányában, $f_-(ct+x)$ pedig az x-tengely negatív irányában haladó síkhullámot ír le, onnan látjuk, hogy a hullám $x_\mp = ct \mp x$ fázisának az állandó értékéhez tartozó pontok mértani helye az

$$x = ct + \text{ áll. }, \qquad \text{ill. } x = -ct + \text{ áll. }, \tag{4.3.23}$$

egyenletű sík a 3-dimenziós térben. A fázisfelületeket jelentő síkok tehát rendre $v_x = c$ ill. $v_x = -c$ fázissebességgel mozognak.

Az egyenlet megoldását könnyen megtalálhatjuk, ha bevezetjük az $x_\pm = ct \pm x$ fénykúp-koordinátákat. Ekkor ugyanis $f(t,x) \equiv \tilde f(x_+, x_-)$ és a hullámegyenlet

$$\frac{\partial^2}{\partial x_+ \partial x_-} \tilde f(x_+, x_-) = 0 \tag{4.3.24}$$

alakot ölt. A differenciáloperátorok az alábbiak szerint alakíthatók át a közvetett deriválás szabályai szerint:

$$\begin{aligned}
&\partial_t f(t,x) = \partial_t \tilde f(x_+(t,x), x_-(t,x)) = \partial_t x_+ \, \partial_{x_+} \tilde f + \partial_t x_- \, \partial_{x_-} \tilde f = c\partial_{x_+} \tilde f + c\partial_{x_-} \tilde f,\\
&\partial_x f(t,x) = \partial_x \tilde f(x_+(t,x), x_-(t,x)) = \partial_x x_+ \, \partial_{x_+} \tilde f + \partial_x x_- \, \partial_{x_-} \tilde f = \partial_{x_+} \tilde f - \partial_{x_-} \tilde f,\\
&\partial_t^2 f(t,x) = c\partial_t \partial_{x_+} \tilde f + c\partial_t \partial_{x_-} \tilde f = c^2(\partial_{x_+}^2 + 2\partial_{x_+}\partial_{x_-} + \partial_{x_-}^2)\tilde f,\\
&\partial_x^2 f(t,x) = \partial_x \partial_{x_+} \tilde f - \partial_x \partial_{x_-} \tilde f = (\partial_{x_+}^2 - 2\partial_{x_+}\partial_{x_-} + \partial_{x_-}^2)\tilde f,\\
&\Box f = 4\partial_{x_+}\partial_{x_-} \tilde f.
\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

A (4.3.24) egyenlet általános megoldása nyilvánvalóan

$$\tilde{f}(x_+, x_-) = f_+(x_-) + f_-(x_+) = f_+(ct - x) + f_-(ct + x) = f(t, x), \tag{4.3.26}$$

ahol $f_\pm(x_\mp)$ változóik tetszőleges függvényei.

Monokromatikus síkhullámok. A síkhullámok speciális esetei a harmonikus síkhullámok, vagy más nevükön **monokromatikus síkhullámok,** amelyek

$$f_\pm = f_{0\pm} \cos\Big(k(\pm ct - x) \mp \alpha_\pm\Big) \equiv f_{0\pm} \cos\Big(\omega t \mp kx + \alpha_\pm\Big) \tag{4.3.27}$$

alakúak, ahol k a **hullámszám,** $\omega = kc$ **a hullám körfrekvenciája,** $f_{0\pm}$ és $\alpha_\pm$ **az állandó amplitudó és fáziseltolódás. A monokromatikus síkhullámok tehát adott frekvenciájú síkhullámok.**

Monokromatikus síkhullám kifejezésének komplex alakja. Amíg lineáris műveleteket hajtunk végre a hullámmennyiségeken, addig tekinthetjük azokat a megfelelő komplex mennyiségek valós részének és az írásmódot egyszerűsíthetjük azáltal, hogy a valós rész jelölését elhagyjuk:

$$f_\pm = f_{0\pm} e^{i\alpha_\pm} e^{i(\omega t \mp kx)} = F_{0\pm} e^{i(\omega t \mp kx)}, \tag{4.3.28}$$

ahol a második alakban az $\alpha_\pm$ =áll. fáziseltolódást beleolvasztottuk a komplex $F_{0\pm}$ amplitudóba. Ha kvadratikus kifejezéseket kell kiszámolnunk, mint pl. az elektromágneses mező energiasűrűségét, akkor természetesen ehhez előbb le kell választani a valós részt a komplex térmennyiségekről. Ugyanakkor, ha az f és g térmennyiségekből képezett kvadratikus mennyiségek $\mathrm{Re}\ f\ \mathrm{Re}\ g$ alakúak és csak az időátlagukat, $\overline{\mathrm{Re}\ f\ \mathrm{Re}\ g}$ akarjuk kiszámolni, akkor használhatjuk a

$$\overline{\mathrm{Re}\ f\ \mathrm{Re}\ g} = \frac{1}{2}\ \mathrm{Re}\ (f^* g) \tag{4.3.29}$$

azonosságot.

Az azonosságot a helytől tetszőlegesen függő $\phi_1(x)$ ill. $\phi_2(x)$ fázisok esetén az alábbiak szerint igazolhatjuk:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Re}\ f\ \mathrm{Re}\ g} &= \frac{1}{T}\int_0^T dt f_0 \cos(\omega t - \phi_1(x)) g_0 \cos(\omega t - \phi_2(x)) \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{T}\int_0^T dt f_0 g_0 \Big(e^{i(\omega t - \phi_1(x))} + e^{-i(\omega t - \phi_1(x))}\Big)\Big(e^{i(\omega t - \phi_2(x))} + e^{-i(\omega t - \phi_2(x))}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{T}\int_0^T dt f_0 g_0 \Big[e^{i[-\phi_1(x)+\phi_2(x)]} + e^{-i[-\phi_1(x)+\phi_2(x)]}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\ \mathrm{Re}\ \Big(f_0 g_0 e^{i[-\phi_1(x)+\phi_2(x)]}\Big).
\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

Innen a számunkra érdekes $\phi_1(x) = \phi_2(x) = kx$ esetben azt kapjuk, hogy

$$\overline{\mathrm{Re}\ f\ \mathrm{Re}\ g} = \frac{1}{2}\ \mathrm{Re}\ (F_0^* G_0). \tag{4.3.31}$$

Síkhullám általános alakja komplex írásmódban. A monokromatikus síkhullám (4.3.28) alakját általánosíthajuk arra az esetre, amikor a fázisfelületek nem az x-tengellyel párhuzamos fázissebességgel, hanem tetszőleges $\vec{n}$ egységvektor által kijelölt irányban mozognak. Ezt az esetet a fentiből úgy kapjuk, hogy elforgatjuk térben a Descartes-koordinátarendszert. Vezessük be ekkor a $\vec{k} = k\vec{n}$ hullámvektort, ahol $k = \omega/c$, és **a síkhullám általános (komplex) alakja:**

$$f(t, \vec{r}) = F_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \tag{4.3.32}$$

Monokromatikus síkhullámok szabad elektromágneses térben. A homogén

$$\Box \vec{E} = 0, \qquad \Box \vec{B} = 0 \tag{4.3.33}$$

hullámegyenletek monokromatikus síkhullám-megoldásait kereshetjük tehát

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \tag{4.3.34}$$

alakban. Behelyettesítéssel az elektromos térerősségre

$$-\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2\right)\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = 0 \tag{4.3.35}$$

egyenletet kapunk, ami akkor és csak akkor állhat fenn azonosságként, ha

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} \tag{4.3.36}$$

kapcsolat teljesül a hullámvektor nagysága és a körfrekvencia között. A kapott megoldások még nem feltétlenül megoldásai az eredeti Maxwell-egyenleteknek. Ahhoz, hogy azok legyenek, szükséges, hogy a Maxwell-egyenletekbe behelyettesítve a fenti síkhullámokat, azok is azonosan kielégüljenek. A

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{4.3.37}$$

egyenletekből az amplitúdóvektorokra

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \tag{4.3.38}$$

transzverzalitási feltételek adódnak. Ez azt jelenti, **hogy az elektromágneses síkhullámban mind az elektromos térerősség vektora, mind a mágneses indukció vektora merőleges a $\vec{k}$ hullámvektor által meghatározott terjedési irányra.** A (3.3.2) és (3.3.11) Maxwell-egyenletekből a

$$-i\vec{k} \times \vec{E}_0 = -i\frac{\omega}{c}\vec{B}_0, \qquad -i\vec{k} \times \vec{B}_0 = i\frac{\omega}{c}\vec{E}_0 \tag{4.3.39}$$

egyenletek adódnak. Ezekből egyrészt látszik, hogy **az elektromos térerősség és a mágneses indukció vektora merőlegesek egymásra az elektromágneses síkhullámban.** Másrészt az elektromos térerősség és a mágneses indukció nagyságára és egymáshoz képesti állandó fáziseltolódására nézve olvashatunk le összefüggést:

$$\vec{B}_0 = \vec{n} \times \vec{E}_0. \tag{4.3.40}$$

Az elektromágneses síkhullámban az elektromos térerősség és a mágneses indukció azonos fázisban „rezeg”, egymáshoz képesti állandó fáziseltolódásuk nulla. Az elektromágneses síkhullám $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$ terjedési iránya, $\vec{E}$ elektromos térősség-vektora és $\vec{B}$ mágneses indukcióvektora mindig és mindenütt páronként ortogonálisak egymásra és a fenti sorrendben jobbsodrású vektorrendszert alkotnak. Az elektromos térerősség és a mágneses indukció amplitudója pedig egyenlő nagyságú:

$$|\vec{E}_0| = |\vec{B}_0|. \tag{4.3.41}$$

Energiaáramsűrűség és energiasűrűség síkhullámban. Az elektromágneses síkhullámban energia áramlik. Az energiaáramsűrűség időátlaga monokromatikus síkhullámban:

$$\overline{\vec{S}} = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,\vec{E}^* \times \vec{B} = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,\vec{E}_0^* \times (\vec{n} \times \vec{E}_0) = \frac{c}{8\pi}\vec{n}|\vec{E}_0|^2 = \frac{c|\vec{E}|^2}{8\pi}\vec{n}. \tag{4.3.42}$$

Az elektromágneses energia tehát a hullám terjedési irányában áramlik. A monokromatikus elektromágneses síkhullám energiasűrűségének az időátlaga:

$$\overline{\epsilon_{\mathrm{em}}} = \frac{1}{16\pi}(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) = \frac{1}{8\pi}|\vec{E}|^2 = \frac{1}{8\pi}|\vec{B}|^2. \tag{4.3.43}$$

Tehát **az elektromos tér és a mágneses tér egyenlő mértékben járulnak hozzá a monokromatikus elektromágneses síkhullám energiasűrűségéhez.** A fenti megfontolások monokromatikus síkhullámokra vonatkoznak, de hasonló összefüggéseket lehet tetszőleges elektromágneses síkhullámra belátni.

4.3.4 Az elektromágneses spektrum

Az elektromágneses hullámokat frekvenciájuk szerint szokás külön elnevezéssel illetni. Az elektromágneses hullámok $\nu = \frac{2\pi}{\omega}$ frekvencia (ill. $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ hullámhossz) szerinti osztályozását az alábbi táblázat foglalja össze:

Közös elnevezés	Elnevezés	ν (Hz)	λ(m)
Rádióhullámok	Hosszúhullám	0-$3 \cdot 10^5$	$\infty - 10^3$
	Középhullám	$3 \cdot 10^5$-$1,5 \cdot 10^6$	$10^3 - 10^2$
	Rövidhullám	$1,5 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^7$	$10^2 - 10$
	Ultrarövid hullám	$3 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^8$	$10 - 1$
Mikrohullám		$3 \cdot 10^8 - 10^{12}$	$1 - 3 \cdot 10^{-3}$
Fény	Infravörös (IR) sugárzás	$3 \cdot 10^{10} - 3 \cdot 10^{14}$	$10^{-2} - 10^{-6}$
	Látható fény	$4 \cdot 10^{14} - 8 \cdot 10^{14}$	$7 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$
	Ultraibolya (UV) fény	$7,5 \cdot 10^{14} - 1,5 \cdot 10^{17}$	$4 \cdot 10^{-7} - 2 \cdot 10^{-9}$
Röntgen-sugárzás (karakterisztikus)		$1,5 \cdot 10^{17} - 0,5 \cdot 10^{17}$	$2 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$
Gamma-sugárzás		$> 3 \cdot 10^{18}$	$< 10^{-10}$

4.3.5 Az elektromágneses mező spektrális felbontása*

Ebben a fejezetben azt mutatjuk meg, **hogyan lehet tetszőleges elektromágneses hullámokat ill. általában az elektromágneses mezőt különböző frekvenciájú, monokromatikus hullámok lineáris szuperpozíciójaként előállítani.**

Az elektromágneses mező szabadsági fokainak leszámlálása során, az 3.3.3. fejezetben láttuk, hogy a térmennyiségeket fel tudtuk bontani különböző $\vec{k}$ „hullámvektorú" módusok lineáris szuperpozíciójára. Amennyiben a forrásmentes elektromágneses térre vonatkozó hullámegyenleteket véges térbeli tartományban oldjuk meg, akkor a hullámvektor komponensei csak diszkrét értékeket vehetnek fel, hogy a tartomány határain a határfeltételek kielégüljenek. A végtelen térfogat határesetében folytonosan, minden hullámvektor megengedett. Az egyes módusok $f_{\vec{k}}(t)$ amplitúdói ebben a felbontásban általában az idő függvényei.

Most a térmennyiségek időtől függő $f_{\vec{k}}(t)$ amplitúdóit is felbontjuk, mégpedig különböző frekvenciájú harmonikus „rezgések" lineáris szuperpozíciójára. Ezt a felbontást **az elektromágneses térmennyiségek, ill. hullámok spektrális felbontásának** nevezzük, a lehetséges frekvenciaértékek halmazát pedig az adott fizikai mennyiség, ill. **hullám spektrumának.** Alapvetően kétféle spektrumot különböztethetünk meg.

1. *Folytonos spektrum esete.* Ha a töltéssűrűség és az áramsűrűség a $t \to \pm\infty$ határesetben eltűnik, akkor az elektromágneses mező térmennyiségeire vonatkozó inhomogén hullámegyenletek partikuláris megoldása is el kell tűnjön ebben a határesetben. Ilyenkor az elektromos térerősség és a mágneses indukció időtől függő $f_{\vec{k}}(t)$ amplitúdói Fourier-integrál alakjában állíthatók elő:

$$f_{\vec{k}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}_{\vec{k}}(\omega) e^{i\omega t}. \tag{4.3.44}$$

Itt minden ω körfrekvencia folytonosan fordul elő. Az ω körfrekvenciájú komponens $\tilde{f}_{\vec{k}}(\omega)$ amplitúdója,

$$\tilde{f}_{\vec{k}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f_{\vec{k}}(t) e^{-i\omega t} \tag{4.3.45}$$

alakban állítható elő és általában komplex. Mivel $f_{-\vec{k}}(t) = f_{\vec{k}}^*(t)$, azért az

$$\tilde{f}_{-\vec{k}}(-\omega) = \tilde{f}_{\vec{k}}^*(\omega) \tag{4.3.46}$$

összefüggésnek kell fennállni minden $\vec{k}$ és ω esetén. A (valós) térmennyiségekben kvadratikus mennyiségek, mint az energiasűrűség idő szerinti integráljának kiszámolása során gyakran fel kell használni a következő fontos azonosságot:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f_{\vec{k}}(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\tilde{f}_{\vec{k}}(\omega)|^2. \tag{4.3.47}$$

2. *Diszkrét spektrum esete.* Ha az elektromágneses mező T periódusidővel az idő szerint periodikus, vagyis az időfüggés tekintetében periodikus határfeltételek teljesülnek, azaz a töltéssűrűség, az áramsűrűség és a térmennyiségek Descartes-komponensei az időnek periodikus függvényei T periódusidővel, akkor ezek Fourier-sorba fejthetők, amelynek alakja:

$$f_{\vec{k}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{\vec{k}\, n} e^{i\omega_0 n t}, \tag{4.3.48}$$

ahol $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ az alapfrekvencia és $\tilde{f}_{\vec{k}\ n}$ a spektrális felbontásban az $\omega = n\omega_0$ frekvenciájú komponens amplitudója, amely

$$\tilde{f}_{\vec{k}\ n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt f_{\vec{k}}(t) e^{-i\omega_0 n t} \tag{4.3.49}$$

alakban adható meg. Mivel $f_{-\vec{k}}(t) = f^*_{\vec{k}}(t)$, azért fennáll a Fourier-amplitudókra az

$$\tilde{f}_{-\vec{k}\ -n} = \tilde{f}^*_{\vec{k}\ n} \tag{4.3.50}$$

reláció, továbbá a kvadratikus kifejezések idő szerinti integrálja:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt |f_{\vec{k}}(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{f}_{\vec{k}\ n}|^2. \tag{4.3.51}$$

A térmennyiségek spektrális felbontását felhasználva a (3.3.28) egyenletek tovább egyszerűsödnek algebrai egyenletekké:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\vec{E}}^{\mathrm{l}}_{\vec{k}}(\omega) = 4\pi i\vec{k}\tilde{\rho}_{\vec{k}}(\omega),\\
&\tilde{\vec{B}}^{\mathrm{l}}_{\vec{k}}(\omega) = 0,\\
&\vec{k}\times\tilde{\vec{E}}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}(\omega) = \frac{\omega}{c}\tilde{\vec{B}}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}(\omega),\\
&\vec{k}\times\vec{B}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}} = -\frac{\omega}{c}\tilde{\vec{E}}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}(\omega) + \frac{4\pi i}{c}\tilde{\vec{j}}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}(\omega),\\
&0 = \frac{\omega}{c}\tilde{\vec{E}}^{\mathrm{l}}_{\vec{k}}(\omega) - \frac{4\pi i}{c}\tilde{\vec{j}}^{\mathrm{l}}_{\vec{k}}(\omega),
\end{aligned} \tag{4.3.52}$$

ahol ω ill. $\vec{k}$ a határfeltételeknek megfelelően vagy diszkrét, vagy folytonos értékeket vesznek fel. Az inhomogén algebrai egyenletrendszer megoldása a megfelelő homogén egyenletrendszer általános $\vec{E}_{\mathrm{s}}$, $\vec{B}_{\mathrm{s}}$ megoldásának és az inhomogén egyenletek partikuláris $\vec{E}_{\mathrm{p}}$, $\vec{B}_{\mathrm{p}}$ megoldásának az összege.

A szabad elektromágneses mező. **A homogén egyenletrendszer általános megoldása a szabad, forrásoktól mentes elektromágneses mezőt írja le. Az elektromos térerősség és a mágneses indukció longitudinális komponense ilyenkor azonosan zérus:**

$$\tilde{\vec{E}}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{s}\vec{k}}(\omega) = 0, \qquad \tilde{\vec{B}}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{s}\vec{k}}(\omega) = 0. \tag{4.3.53}$$

Nem triviális szabad megoldást akkor és csak akkor kapunk, ha a térmennyiségek transzverzális komponenseire vonatkozó homogén lineáris egyenletrendszer determinánsa eltűnik, ahonnan a síkhullámokra jellemző

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{4.3.54}$$

feltétel adódik. **A szabad elektromágneses mező adott $\vec{k}$ hullámszámú elektromágneses rezgéseinek frekvenciaspektrumában tehát nem szerepelhetnek tetszőleges frekvenciák, hanem csak az $\omega = \pm ck$ értékek.** A transzverzális komponensekre vonatkozó homogén lineáris egyenletrendszerből ezek után a síkhullámokat jellemző

$$\tilde{\vec{B}}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{s}\vec{k}}(\omega) = \frac{\vec{k}}{k}\times\tilde{\vec{E}}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{s}\vec{k}}(\omega) \tag{4.3.55}$$

összefüggés is kiolvasható. **A szabad elektromágneses mező gerjesztéseinek spektrális felbontása tehát egyúttal síkhullámok szerinti felbontást is jelent. A szabad elektromágneses mező energiasűrűségének időátlagához valamennyi síkhullámmódus additív módon, azonos alakú járulékot ad:**

$$\overline{\epsilon}_{\rm s} = \frac{1}{16\pi}\sum_{\vec{k}}\left(|\tilde{\vec{E}}^{\rm tr}_{{\rm s}\vec{k}}(\omega)|^2 + |\tilde{\vec{B}}^{\rm tr}_{{\rm s}\vec{k}}(\omega)|^2\right), \tag{4.3.56}$$

ahol $\omega = ck$. (A komplex Descartes-komponensekkel rendelkező $\vec{V}$ vektor abszolútértékén a

$$|\vec{V}| = \left(\sum_{i=1}^{3} V^{i\,\star} V^i\right)^{1/2} \tag{4.3.57}$$

valós kifejezést értjük.) **A szabad elektromágneses mező szabadsági fokai tisztán transzverzálisak.**

A források által keltett elektromágneses mező. Az inhomogén egyenletek partikuláris megoldása írja le a források által keltett elektromágneses mezőt. Az elektromos térerősség longitudinális komponensének Fourier-amplitudóit a töltéssűrűség megfelelő Fourier-amplitudói határozzák meg a

$$\tilde{\vec{E}}^{\rm l}_{\vec{k}}(\omega) = 4\pi i\vec{k}\tilde{\rho}_{\vec{k}}(\omega) \tag{4.3.58}$$

összefüggés szerint. A mágneses indukció longitudinális komponensének Fourier-amplitudói pedig eltűnnek,

$$\tilde{\vec{B}}^{\rm l}_{\vec{k}}(\omega) = 0. \tag{4.3.59}$$

Az elektromos térerősség és a mágneses indukció transzverzális komponensének Fourier-amplitudóit az áramsűrűség transzverzális komponensének megfelelő Fourier-amplitudója határozza meg:

$$\begin{aligned}
\tilde{\vec{E}}^{\rm tr}_{{\rm p}\vec{k}}(\omega) &= -4\pi ic\,\frac{\tilde{\vec{j}}^{\rm tr}_{\vec{k}}(\omega)}{\omega^2 - c^2\vec{k}^2}, \\
\tilde{\vec{B}}^{\rm tr}_{{\rm p}\vec{k}}(\omega) &= \frac{c}{\omega}\vec{k}\times\tilde{\vec{E}}^{\rm tr}_{{\rm p}\vec{k}}(\omega) = -\frac{4\pi ic^2}{\omega}\,\frac{\vec{k}\times\tilde{\vec{j}}^{\rm tr}_{\vec{k}}(\omega)}{\omega^2 - c^2\vec{k}^2}.
\end{aligned} \tag{4.3.60}$$

Ilyenkor a határfeltételek által megengedett valamennyi $\vec{k}$ hullámvektorhoz és ω körfrekvenciához tartozó elektromágneses módus jelen van.

4.3.6 Az elektromágneses hullámok polarizációja

A szabad elektromágneses mező gerjesztéseinek spektrális felbontása monokromatikus síkhullámok szerinti felbontás. A monokromatikus síkhullámok Fourier-amplitudói homogén lineáris algebrai egyenletrendszert elégítenek ki. A Fourier-amplitudók általában komplexek. Vegyük az elektromos térerősség vektorát. Adott $\vec{k}$ hullámvektorú módus esetén ez tisztán transzverzális, $\vec{E}_{\vec{k}}(\omega) = \vec{E}^{\rm tr}_{\vec{k}}(\omega)$, és felbontható a hullámvektorra merőleges síkban tetszőlegesen választott, $\vec{e}^{(1)}(\vec{k})$ és $\vec{e}^{(2)}(\vec{k})$ ortonormált bázisvektorok szerint. Válasszuk ezeket úgy, hogy $\vec{e}^{(1)}(\vec{k})$, $\vec{e}^{(2)}(\vec{k})$, $\vec{e}^{(3)} = \frac{\vec{k}}{k}$

ebben a sorrendben jobbsodrású vektorrendszert alkossanak. Ekkor

$$\vec{e}^{(\lambda)} \cdot \vec{e}^{(\lambda')} = \delta_{\lambda,\lambda'}, \qquad \lambda, \lambda' = 1, 2, 3,$$
$$\vec{e}^{(3)} \times \vec{e}^{(1)} = \vec{e}^{(2)}, \qquad \vec{e}^{(3)} \times \vec{e}^{(2)} = -\vec{e}^{(1)}. \tag{4.3.61}$$

Az adott $(\vec{k}, \omega = c|\vec{k}|)$ módus tehát felbontható két transzverzális összetevőre:

$$\tilde{\vec{E}}_{\vec{k}}^{\mathrm{tr}}(\omega) = \sum_{\lambda=1,2} \vec{e}^{(\lambda)}(\vec{k}) \tilde{E}_{\vec{k}}^{(\lambda)}(\omega),$$
$$\tilde{\vec{B}}_{\vec{k}}^{\mathrm{tr}}(\omega) = \vec{e}^{(3)} \times \tilde{\vec{E}}_{\vec{k}}^{\mathrm{tr}}(\omega) = \sum_{\lambda=1,2} \vec{e}^{(\lambda)}(\vec{k}) \tilde{B}_{\vec{k}}^{(\lambda)}(\omega), \tag{4.3.62}$$

ahol $\tilde{B}_{\vec{k}}^{(1)}(\omega) = -\tilde{E}_{\vec{k}}^{(2)}(\omega)$, és $\tilde{B}_{\vec{k}}^{(2)}(\omega) = \tilde{E}_{\vec{k}}^{(1)}(\omega)$. Itt a két transzverzális összetevő amplitudója, $\tilde{E}_{\vec{k}}^{(\lambda)}(\omega)$, $(\lambda = 1, 2)$ tetszőleges lehet. Miután ezek komplex amplitudók, ezért a relatív fázisuk általában nem nulla:

$$\tilde{\vec{E}}_{\vec{k}}^{\mathrm{tr}}(\omega) = \sum_{\lambda=1,2} \vec{e}^{(\lambda)}(\vec{k}) |\tilde{E}_{\vec{k}}^{(\lambda)}(\omega)| e^{i\alpha^{(\lambda)}}, \tag{4.3.63}$$

ahol $\alpha = \alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}$ a relatív fázis. Az elektromos térerősség tehát két egymásra merőleges, különböző amplitudójú és egymáshoz képest állandó fáziskülönbséggel rendelkező transzverzális rezgés szuperpozíciója a tér tetszőleges pontjában:

$$\vec{E}_{\vec{k}}(t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}_{\vec{k}}^{\mathrm{tr}}(\omega) e^{i\omega t}\right) = \sum_{\lambda=1,2} \vec{e}^{(\lambda)}(\vec{k}) |\tilde{E}_{\vec{k}}^{(\lambda)}(\omega)| \cos(\omega t + \alpha^{(\lambda)}). \tag{4.3.64}$$

A mechanikában megtanultuk, hogy két egymásra merőleges, ω körfrekvenciájú rezgő mozgás összetétele általában ω körfrekvenciájú mozgás egy ellipszis mentén. Ez azt jelenti, hogy **az idő függvényében az adott $\vec{k}$ hullámszámú módus térerősségvektorának hegye a hullámvektorra merőleges síkban általában ellipszist ír le. Az elektromágneses síkhullám általában elliptikusan poláros.**

Ennek speciális esetei,

1. **a lineárisan poláros síkhullám**, amikor az $\vec{e}^{(1)}(\vec{k})$ és $\vec{e}^{(2)}(\vec{k})$ irányú rezgések azonos fázisúak, úgyhogy **az elektromos térerősség vektora a hullámvektorra merőleges síkban, egy egyenes mentén rezeg;**
2. **a balra (ill. jobbra) cirkulárisan poláris síkhullám,** amikor a két transzverzális térősség-komponenens nagysága azonos, de köztük $\pi/2$ fáziseltolódás van, úgyhogy **az elektromos térerősség vektora a hullámvektorra merőleges síkban - a hullámvektor hegye felől nézve - az óramutató járásával ellentétes (ill. megegyező) irányban kört ír le.**

4.3.7 Elektromágneses tér sajátrezgései*

Ebben a fejezetben a szabad, azaz a forrásoktól mentes elektromágneses mező sajátrezgéseivel foglalkozunk. Először átírjuk az elektromos térerősség és a mágneses indukció transzverzális és longitudinális komponenseinek időfüggését meghatározó (3.3.28) egyenleteket a skalár- ill. a hármas-vektorpotenciál

$$\phi(t,\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \qquad \vec{A}(t,\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{4.3.65}$$

$\phi_{\vec{k}}(t)$, ill. $\vec{A}_{\vec{k}}(t)$ amplitudóira vonatkozó közönséges differenciálegyenletekké. Ezt követően pedig megmutatjuk, hogy **a szabad elektromágneses mező energiája, az egyes síkhullámmódusok energiáinak az összege.**

Az elektromos térerősség és a mágneses indukció

$$\vec{E}_{\vec{k}} = i\vec{k}\phi_{\vec{k}} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}_{\vec{k}} = \vec{E}^{\mathrm{l}}_{\vec{k}} + \vec{E}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}, \quad E^{\mathrm{l}}_{\vec{k}} = ik\phi_{\vec{k}} - \frac{1}{c}\partial_t A^{\mathrm{l}}_{\vec{k}}, \quad \vec{E}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}},$$
$$\vec{B}_{\vec{k}} = \text{ rot } \vec{A}_{\vec{k}} = -i\vec{k}\times\vec{A}_{\vec{k}} = -i\vec{k}\times\vec{A}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}} = \vec{B}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}} \tag{4.3.66}$$

alakban bontható fel transzverzális és longitudinális komponensekre. A négyes-vektorpotenciálra kirótt Lorentz-feltétel a hármas-vektorpotenciál longitudinális komponense és a skalárpotenciál között jelent összefüggést:

$$A^{\mathrm{l}}_{\vec{k}} = \frac{i}{ck}\partial_t\phi_{\vec{k}}. \tag{4.3.67}$$

Ezért az elektromos térerősség longitudinális komponensére vonatkozó egyenletből a skalárpotenciálra a

$$\partial_t^2\phi_{\vec{k}} - k^2c^2\phi_{\vec{k}} = -4\pi\rho_{\vec{k}}c^2 \tag{4.3.68}$$

egyenletet kapjuk. **A töltéssűrűség meghatározza tehát a skalárpotenciált és a vektorpotenciál longitudinális komponensét, legalábbis a $\phi_{\vec{k}}$-ra vonatkozó homogén egyenlet megoldása erejéig.** A vektorpotenciál transzverzális komponenseire a

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + k^2\right)\vec{A}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}} \tag{4.3.69}$$

egyenletet kapjuk.

Szabad elektromágneses mező esetén az elektromos térerősség longitudinális komponense zérus. Ez - az általánosság csorbítása nélkül – megengedi a $\phi_{\vec{k}} \equiv 0$ választást, aminek következtében div $\vec{A} = 0$, azaz a vektorpotenciál tisztán transzverzális, $\vec{A}_{\vec{k}} = \vec{A}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}$. Ez az ún. **Coulomb-mérték.** A szabad elektromágneses mező módusait Coulomb-mértékben

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + k^2\right)\vec{A}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}} = 0 \tag{4.3.70}$$

homogén egyenletek megoldásaiként kapjuk meg. A különböző $\vec{k}$ hullámszámokkal jellemzett megoldások egymástól függetlenek, mert a megfelelő $\vec{A}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}(t)$ amplitudókra vonatkozó egyenletek szétcsatolódnak. Véges térfogatban kereshetünk állóhullámú megoldásokat, amelyek A $\vec{k}$ és a $-\vec{k}$ hullámszámú módust azonos amplitudóval tartalmazzák. Ezekre

$$\vec{A}^{\mathrm{tr}}_{\vec{k}}(t) = \vec{A}^{\mathrm{tr}\,*}_{\vec{k}}(t) \tag{4.3.71}$$

valós, úgyhogy valóban $\vec{A}^{\rm tr}_{-\vec{k}}(t) = \vec{A}^{\rm tr}_{\vec{k}}{}^*(t) = \vec{A}^{\rm tr}_{\vec{k}}(t)$ teljesül. Másrészről a (4.3.70) egyenleteknek olyan transzverzális rezgések a sajátmegoldásai, amelyek $e^{i\omega t}$ alakú időfüggést mutatnak és amelyeknek a frekvenciái $\omega = \pm\omega_{\vec{k}}$, ahol $\omega_{\vec{k}} = kc$. Ezért a megoldás általános alakja,

$$\vec{A}^{\rm tr}_{\vec{k}}(t) = \vec{a}_{\vec{k}} e^{i\omega_{\vec{k}} t} + \vec{b}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t}, \tag{4.3.72}$$

pozitív és negatív frekvenciás megoldások lineáris kombinációja. Az egyébként tetszőleges, időtől független lineárkombinációs együtthatókra a (4.3.71) valóssági feltétel $\vec{b}_{\vec{k}} = \vec{a}^*_{\vec{k}}$ megszorítást jelenti. **A szabad elektromágneses mező módusai tehát**

$$\textbf{Re}\ \vec{A}_{\vec{k}}(t,\vec{r}) = \ \textbf{Re}\ \left[\vec{A}_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right] = 2|\vec{a}_{\vec{k}}| \cos(\omega_{\vec{k}} t + \alpha_{\vec{k}}) \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}) \tag{4.3.73}$$

alakú elektromágneses állóhullámok.

A vektorpotenciál és annak idő szerinti első deriváltja:

$$\begin{aligned} \vec{A}^{\rm tr}_{\vec{k}}(t) &= \vec{a}_{\vec{k}} e^{i\omega_{\vec{k}} t} + \vec{a}^*_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t}, \\ \partial_t \vec{A}^{\rm tr}_{\vec{k}}(t) &= i\omega_{\vec{k}} \Big(\vec{a}_{\vec{k}} e^{i\omega_{\vec{k}} t} - \vec{a}^*_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t}\Big). \end{aligned} \tag{4.3.74}$$

Miután $\vec{A}^{\rm tr}_{\vec{k}}(t)$ valós, azért $\vec{E}^{\rm tr}_{\vec{k}}(t)$ valós, $\vec{B}^{\rm tr}_{\vec{k}}(t)$ pedig tiszta képzetes. Válasszuk le az utóbbiból az imaginárius egységet, $\vec{B}^{\rm tr}_{\vec{k}}(t) \Longrightarrow i\vec{B}^{\rm tr}_{\vec{k}}(t)$. Ekkor a most már valós mennyiségek segítségével **a szabad elektromágneses mező energiája:**

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{8\pi}\sum_{\vec{k}}\left[\Big(\vec{E}^{\rm tr}_{\vec{k}}\Big)^2 + \Big(\vec{B}^{\rm tr}_{\vec{k}}\Big)^2\right] = \frac{1}{8\pi}\sum_{\vec{k}}\left[|\frac{1}{c}\partial_t \vec{A}^{\rm tr}_{\vec{k}}|^2 + k^2|\vec{A}^{\rm tr}_{\vec{k}}|^2\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\sum_{\vec{k}} k^2\Big(|\vec{a}_{\vec{k}}|^2 + |\vec{a}_{\vec{k}}|^2\Big) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\vec{k}} k^2 \vec{a}^*_{\vec{k}}\vec{a}_{\vec{k}} \end{aligned} \tag{4.3.75}$$

alakban írható. Ez nem más, mint **az egyes síkhullámmódusok energiáinak az összege.**

Az energia kifejezéséből kitalálhatjuk **a szabad elektromágneses mező Hamilton-függvényének** az alakját. Vezessük be az alábbi általános koordinátákat és impulzusokat:

$$\vec{Q}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi c^2}}\vec{A}^{\rm tr}_{\vec{k}}, \qquad \vec{P}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi c^2}}\partial_t \vec{A}^{\rm tr}_{\vec{k}} = \dot{\vec{Q}}_{\vec{k}}, \tag{4.3.76}$$

és fejezzük ki ezekkel az energia kifejezését:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\sum_{\vec{k}}\left[|\frac{1}{c}\partial_t \vec{A}^{\rm tr}_{\vec{k}}|^2 + k^2|\vec{A}^{\rm tr}_{\vec{k}}|^2\right] = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\Big(\vec{P}^2_{\vec{k}} + \omega^2_{\vec{k}}\vec{Q}^2_{\vec{k}}\Big) \equiv H(\vec{P}_{\vec{k}}, \vec{Q}_{\vec{k}}). \tag{4.3.77}$$

Ha ezt Hamilton-függvénynek tekintjük, akkor a Hamilton-egyenletek egyrészt visszaadják a

$$\dot{\vec{Q}}_{\vec{k}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{P}_{\vec{k}}} = \vec{P}_{\vec{k}} \tag{4.3.78}$$

relációt, másrészt a

$$\dot{\vec{P}}_{\vec{k}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{Q}_{\vec{k}}} = -\omega_{\vec{k}}^2 \vec{Q}_{\vec{k}},$$

azaz

$$\ddot{\vec{Q}}_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}}^2 \vec{Q}_{\vec{k}} = 0 \qquad (4.3.79)$$

egyenletekre vezetnek, amelyek pontosan azonosak az $\vec{A}_{\vec{k}}^{\mathrm{tr}}(t)$ amplitudókra vonatkozó differenciálegyenletekkel. **A (4.3.77) kifejezéssel adott $H(\vec{P}_{\vec{k}}, \vec{Q}_{\vec{k}})$ függvényt tehát tekinthetjük a szabad elektromágneses mező Hamilton-függvényének a $\phi = 0$, div $\vec{A} = 0$ Coulomb-mértékben.**

4.3.8 A fény terjedésének fundamentális jelentősége

A látható fény terjedésének törvényszerűségei a fizika alapjainak megértése és a gyakorlat számára is annyira fontosak, hogy azokkal egy külön tudományterület, az **optika** foglalkozik. Az optika a fény terjedését írja le olyan ún. optikai rendszerekben, amelyekben vákum és közegekkel kitöltött tartományok egyaránt vannak jelen. A leírás az elektrodinamika alapegyenletei, a Maxwell-egyenletek alapján történik.

Ennek a rendkívül sok, érdekes részletet tartalmazó tudományterületnek az ismertetése messze meghaladja jelen lehetőségeinket. Itt csak néhány olyan vonatkozást szeretnék kiemelni, amelyek a fizika alapjainak megértése szempontjából különösen fontosak:

1. **A tér geometriájának kísérleti vizsgálata szempontjából alapvető fontosságú a fény.** A mechanikában (akár a klasszikus Newton-i mechanikában, akár a speciális relativitás Einstein-féle elméletében) a fényjelek terjedésének „pályájaként” definiáltuk az egyenest. Tisztázni kell tehát, hogy ha a fény elektromágneses hullám, akkor van-e az egyenes fenti, fizikai definíciójának értelme. Másképpen fogalmazva, **melyek azok a feltételek, amikor beszélhetünk a fényhullámok terjedésének „pályájáról”, ún. fénysugarakról? A választ a geometriai optika határesete adja.**

2. **A geometriai optika törvényei szerinti fényterjedésben a pontrészecskék terjedéséhez hasonló vonásokat lehet találni. Ezért az a sejtésünk fogalmazódik meg, hogy a klasszikus mechanika pontrészecske-fogalma és a klasszikus hullámfogalom egyazon dolog különböző körülmények között mutatott viselkedésének lehetnek a közelítő leírásai.** Ma már tudjuk, hogy ez a sejtés igazolódott. **A Természetben a kvantummechanika törvényei uralkodnak és a részecskék bizonyos körülmények között a klasszikus pontrészecskére emlékeztető, más körülmények között pedig a klasszikus hullámokra emlékeztető tulajdonságokat mutatnak.** Ezt a tulajdonságukat nevezik **részecske - hullám kettősségnek**. **Az elektromágneses mezőről is kiderült, hogy kvantumos tulajdonságú.** A körülményektől függően tud klasszikus hullámra emlékeztető tulajdonságokat mutatni, ill. tud úgy viselkedni, mintha részecskékből, az ún. **fotonokból** állna.

3. A fény, mint elektromágneses hullám általában nem fénysugarak mentén terjed. **A fény terjedésének általános törvényszerűségét az ún. Huygens-elv fejezi ki. Ez azt mondja, hogy a hullámfelület minden pontja**

elemi gömbhullámok kiinduló pontja, és az új hullámfelület ezen elemi gömbhullámok lineáris szuperpozíciójaként jön létre. Megmutatjuk, hogy a Maxwell-egyenletekből következik a fény (ill. általában az elektromágneses hullámok) terjedésére vonatkozóan a Huygens-elv. **A Huygens-elv jelentősége azért nem hangsúlyozható eléggé, mert az általánosítása olyan első elvként szolgál a kvantumelmélet Feynman-féle, pályaintegrálos megfogalmazása során, amely egységes keretét adja a klasszikus mechanikának és elektrodinamikának, és a kvantummechanikának továbbá a kvantált fizikai mezők elméletének, az ún. kvantumtérelméletnek.**

Nem foglalkozunk a fényinterferencia és a fényelhajlás jelenségeivel, amelyek azokat a kérdéseket feszegetik, amikor az optikai rendszerekben terjedő fényre nem teljesülnek teljes mértékben vagy egyáltalán sem a geometriai terjedés feltételei. Ez olyankor következik be, amikor az optikai rendszer a fény hullámhosszával összemérhető méretű elemeket tartalmaz, vagy amikor a geometriai optika szellemében vett fénysugarak a fény hullámhosszával összemérhető távolságra haladnak el az optikai rendszer valamely elemének szélétől.

4.3.9 Geometriai optika*

Ebben a fejezetben annak a feltételeit adjuk meg, hogy a fényhullám mikor terjed fénysugarak mentén.

A síkhullám terjedési iránya és amplitudója mindenütt azonos és időben állandó. Ez természetesen tetszőleges fényhullámra nem érvényes. **A geometriai optika a fény terjedését abban az esetben írja le helyesen, amikor a fény hullámhosszával összemérhető távolságokon a fény terjedési iránya és amplitudója, azaz az elektromos térerősség vektorának nagysága keveset változik.** Ekkor a fényhullám minden térbeli pont kicsiny, hullámhossznyi méretű környezetében síkhullámmal közelíthető. Természetesen pontról pontra haladva más-más hullámvektorú (terjedési irányú) és amplitudójú síkhullámmal kell közelíteni a fényhullámot. A geometriai optika törvényei a Maxwell-egyenletek alapján azt határozzák meg, hogy hogyan változik a térben a közelítő síkhullám $\vec{k}(\vec{r})$ hullámvektora és $f_0(\vec{r})$ amplitudója. Jelölésünkben f az elektromos térerősség és a mágneses indukció bármelyik Descartes-komponense lehet. Az f hullámmennyiség egy monokromatikus síkhullámban

$$f(t,\vec{r}) = f_0 e^{i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \tag{4.3.80}$$

alakú, ill. ennek a kifejezésnek a valós része, aminek jelölését most elhagyjuk. Egy, a geometriai optika feltételeinek eleget tevő elektromágneses hullám esetén bármelyik hullámmennyiség:

$$f(t,\vec{r}) = f_0(\vec{r}) e^{i\psi(t,\vec{r})} \tag{4.3.81}$$

alakú, ahol az $f_0(\vec{r})$ amplitudó csak elhanyagolható mértékben változik a hely függvényében, a hullám fázisa, a $\psi(t,\vec{r})$ **eikonál** pedig közelítőleg olyan, mint egy sík hullám fázisa, azaz lineárisan közelíthető bármely $(t_0,\vec{r}_0)$ téridő-pont olyan környezetében, amelynek méretei

$$\Delta t = \mathcal{O}(\frac{1}{\omega}), \qquad \Delta|\vec{r}| = \mathcal{O}(\lambda), \tag{4.3.82}$$

ahol ω és λ a fényhullám átlagos frekvenciája és hullámhossza. Az eikonál ebben a téridő-tartományban tehát jó közelítéssel

$$\psi(t,\vec{r}) = \psi_0 + (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{k}(\vec{r}_0,t_0) - (t-t_0)\omega(\vec{r}_0,t_0) + \mathcal{O}(|\vec{r}-\vec{r}_0|^2, (t-t_0)^2, |\vec{r}-\vec{r}_0|(t-t_0)) \tag{4.3.83}$$

alakú, ahol a közelítő síkhullám hullámvektora és körfrekvenciája, rendre

$$\vec{k}(t_0,\vec{r}_0) \equiv \left.\frac{\partial\psi(t,\vec{r})}{\partial\vec{r}}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_0,t=t_0}, \quad \omega(t_0,\vec{r}_0) \equiv -\left.\frac{\partial\psi(t,\vec{r})}{\partial t}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_0,t=t_0}. \tag{4.3.84}$$

Értelmezhetünk tehát hullámfelületeket, mint azon pontok mértani helyét, amelyekben a hullám fázisa, az eikonál állandó adott t időpillanatban. Mivel a $\vec{k}(t,\vec{r})$ hullámvektor az eikonál gradiense, ezért - a gradiens geometriai jelentését figyelembe véve, - **a hullámvektor a hullámfelület normálisa. Fénysugaraknak nevezzük azokat a térgörbéket, amelyeknek minden pontjukban az ottani hullámvektorok érintői. Szemléletesen, a fénysugarak olyan görbék, amelyke minden pontjukban merőlegesek az adott ponton áthaladó fázisfelületre.** Bármely fénysugár környezetében fenn kell állnia a

$$\frac{\omega^2(t,\vec{r})}{c^2} - \vec{k}^2(t,\vec{r}) = 0, \tag{4.3.85}$$

azaz

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi(t,\vec{r}) - \sum_{i=1}^{3}\partial_{r_i}^2\psi(t,\vec{r}) = 0 \tag{4.3.86}$$

egyenletnek, amelyet **eikonál-egyenletnek** nevezünk. **Az eikonál-egyenlet azt fejezi ki, hogy a fény négyes-hullámvektora zérus hosszúságú, fényszerű négyesvektor.**

Tekintsük adott ω frekvenciájú, tehát monokromatikus fény terjedését olyan feltétellel, hogy a terjedési irány és az amplitudó a hullámhosszal összemérhető távolságokon keveset változik. Ekkor a hullámmennyiség időfüggése $f \propto e^{-i\omega t}$ alakú, úgyhogy az eikonál

$$\psi(t,\vec{r}) = -\omega t + \phi(\vec{r}) \tag{4.3.87}$$

alakú, ahol a $\phi(\vec{r})$ függvény csak a hely függvénye, és az eikonál-egyenlet értelmében a

$$\vec{k}^2(\vec{r}) \equiv (\text{ grad } \phi)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{4.3.88}$$

egyenletnek tesz eleget. Tegyük fel, hogy a tér valamely a pontjából valamely másik b pontjába tartó fénysugár egyenlete $\vec{r} = \vec{r}(s)$, ahol s az ívhossz-paraméter. Meg lehet mutatni, hogy a fény egy tetszőleges optikai rendszerben olyan sugár mentén terjed két tetszőleges pont között, hogy az ún. **optikai úthossz**,

$$\frac{c}{\omega}\int_{s_a}^{s_b} ds\ \vec{k}(\vec{r}(s)) \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \tag{4.3.89}$$

szélsőértéket, pontosabban minimális értéket vegyen fel. **A fénysugár tehát a két pontot összekötő, minimális optikai úthosszal rendelkező görbe. Ez Fermat elve.**

A geometriai optika feltételeinek eleget tevő monokromatikus fény tehát időben állandó fénysugarak mentén terjed, amelyek mindenütt ortogonálisak a hullámfelületekre. Ezek a fénysugarak használhatók fel a tér egyeneseinek fizikai módszerrel történő kijelölésére.

Mint azt a szabad elektromágneses mezőre vonatkozó Maxwell-egyenletek megoldásaiból kiolvastuk, vákumban $\vec{k} =$ grad $\phi(\vec{r})$ állandó vektor, úgyhogy a hullámfelületek (adott t időpillanatban) a

$$\phi(\vec{r}) = \vec{k}\cdot\vec{r} = \text{ áll.} \tag{4.3.90}$$

egyenletű síkok. A fénysugarak a rájuk merőleges, $\vec{k}$ hullámvektorral párhuzamos egyenesek. Két tetszőleges pont között a fénysugár vákumban a két pontot összekötő legrövidebb görbeszakasz, az egyenes szakasz.

Megjegyezzük, hogy az általános relativitáselmélet az „egyeneseket” gravitációs mező jelenlétében is a fénysugarak segítségével definiálja.

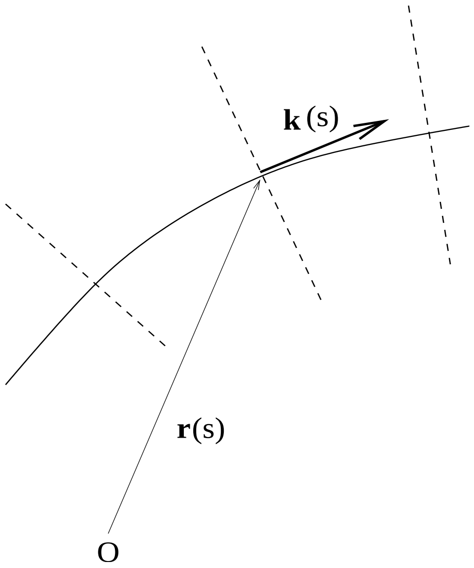

Figure 7: Az $\vec{r}(s)$ fénysugár szemléltetése; $\vec{k}(s)$ a fénysugár érintője a s ívhossz-paraméterű pontban; a szaggatott vonalak a fénysugár lassan változó hullámvektorára merőleges hullámfelületeket illusztrálják.

4.3.10 Klasszikus hullám és részecske*

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy **a geometriai optika szabályai szerint terjedő klasszikus elektromágneses hullám és a részecske mozgása között hasonlóság van.**

Kezdjük azzal, hogy számoljuk ki egy pontrészecske mozgásának $\vec{r}(t)$ pályájára a hatás értékét rögzített kezdőpont és t_k kezdőpillanat esetén. Tekintsük az így kapott hatást, mint a t_v végső időpillanat és a részecske ezen pillanatban elfoglalt $\vec{r}_v \equiv \vec{r}(t_v)$ helyzetének függvényét:

$$S(t_v, \vec{r}_v) = \int_{t_k}^{t_v} dt \left[\vec{p}(t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} - H(\vec{p}(t), \vec{r}(t))\right]. \tag{4.3.91}$$

Az integrálás végpontját tetszőleges infinitezimális dt_v idővel és $d\vec{r}_v$ elmozdulással megváltoztatva, a hatás értékének megváltozása innen:

$$\begin{aligned} dS &= \vec{p}(t_v) \cdot \frac{d\vec{r}(t_v)}{dt_v} dt_v - H(\vec{p}(t_v), \vec{r}(t_v)) dt_v \\ &= \vec{p}_v \cdot d\vec{r}_v - H(\vec{p}_v, \vec{r}_v) dt_v, \end{aligned} \tag{4.3.92}$$

ahol $\vec{p}_v = \vec{p}(t_v)$ a részecske impulzusa a végpontban. Innen leolvashatjuk, hogy a hatásnak, mint az integrálás felső határa függvényének a parciális deriváltjai adják éppen a részecske impulzusát és energiáját a (pálya mentén tetszőlegesen választott) végpontban:

$$\vec{p}_v = \frac{\partial S(t_v, \vec{r}_v)}{\partial \vec{r}_v}, \qquad H(\vec{p}_v, \vec{r}_v) = -\frac{\partial S(t_v, \vec{r}_v)}{\partial t_v}. \tag{4.3.93}$$

Hasonlítsuk össze ezeket az egyenleteket a geometriai optika szabályai szerint terjedő fényre vonatkozó

$$\vec{k} = \frac{\partial \psi(t, \vec{r})}{\partial \vec{r}}, \qquad \omega = -\frac{\partial \psi(t, \vec{r})}{\partial t} \tag{4.3.94}$$

egyenletekkel. Nyilvánvaló, hogy **a részecskére vonatkozó $S(t, \vec{r})$ hatásfüggvény analogonja az eikonál, az impulzus analogonja a hullámvektor és az energia analogonja**

a körfrekvencia. A fény hullámvektorának nagyságára érvényes egyenlet és analogonja:

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\mathcal{E}}{c}. \tag{4.3.95}$$

Itt az analógia alapján felállított egyenlet olyan részecske energiája és impulzusa közötti összefüggésnek felel meg, amelynek nulla, $m_0 = 0$ a nyugalmi tömege. Valóban a szabad részecskére érvényes

$$\mathcal{E} = \sqrt{m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \tag{4.3.96}$$

Einstein-féle összefüggésből $\mathcal{E} = pc$ adódik, ha $m_0 = 0$. **Az a sejtésünk támad** ezek alapján, **hogy a fényt kapcsolatba lehet hozni zérus nyugalmi tömegű részecskékkel.**

Ez a sejtés még megalapozottabbá válik, ha észrevesszük, hogy egy kicsiny térbeli tartományra lokalizált, monokromatikus elektromágneses hullámokból összerakott hullámcsomag energiája és impulzusa arányosak a hullámcsomag átlagos ω_0 körfrekvenciájával és átlagos $\vec{k}_0$ hullámvektorával. Az itt nem részletezett bizonyítás úgy történik, hogy kiszámoljuk az energiaimpulzus-tenzor $T^{0\mu}$ $\mu = 0, 1, 2, 3$ komponenseit és ezeknek a teljes térre vett térfogati integráljai adják a hullámcsomag energiáját és impulzusának Descartes-komponenseit. Az eredmény tanulságos:

$$\mathcal{E}_{\text{h.cs.}} = b\omega_0, \qquad \vec{P}_{\text{h.cs.}} = b\vec{k}, \tag{4.3.97}$$

ahol a $b =$áll. arányossági tényező Lorentz-skalár. Ez azt is jelenti, hogy **Lorentz-transzformációk során az ω körfrekvencia és a $\vec{k}$ hullámvektor ugyanúgy transzformálódnak, mint egy részecske $\mathcal{E}$ energiája és $\vec{p}$ impulzusa.** Az egymásnak megfelelő $P^{\mu}_{\text{h.cs.}}$ négyesimpulzus és k^{μ} négyes-hullámvektor komponensei

$$P^{\mu}_{\text{h.cs.}} = \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{h.cs.}}}{c}, \vec{P}_{\text{h.cs.}}\right), \qquad k^{\mu} = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right). \tag{4.3.98}$$

A klasszikus fizika (a Newton-i és a relativisztikus mechanika, továbbá a klasszikus elektrodinamika) nem képes ezeknek a hasonlóságoknak mélyebb magyarázatát adni. A fenti hasonlóságok ugyanakkor azt sugallják, hogy a klasszikus részecskeszerű viselkedés és a klasszikus hullámszerű viselkedés esetleg olyan dolog kétféle megnyilvánulása lehet, amely valójában sem nem klasszikus részecske, sem nem klasszikus hullám. Mivel azonban ugyanazon dolog kétféle megnyilvánulásáról van szó, azért állhat fenn kapcsolat és analógia a kétféle viselkedésben megnyilvánuló tulajdonságok között. A kvantummechanika bebizonyította, hogy egy pontszerű, a Természetben a kvantummechanika törvényei szerint viselkedő részecske a megfigyelés körülményeitől függően mutathat a klasszikus részecskékre emlékeztető és a klasszikus hullámokra emlékeztető viselkedést is.

4.3.11 Huygens-elv*

Az inhomogén hullámegyenlet megoldásának Helmholtz-féle előállítása. Tekintsünk egy S fényforrás által keltett elektromágneses mezőt. A fény terjedését (a forráson kívüli térrészben) a szabad elektromágneses mezőre vonatkozó homogén hullámegyenletek írják le. A hullámegyenletek megoldásának létezik egy olyan előállítása, amikor az $f(t, \vec{r})$ térmennyiséget a tér egy tetszőleges $\vec{r}$ helyzetvektorú P pontjában előállítjuk a térmennyiségnek és deriváltjainak a forrást körülvevő tetszőleges F zárt felületen felvett értékei segítségével, feltéve, hogy a P pont az F zárt felület által határolt tartományon kívül helyezkedik el. Ez **a hullámegyenlet megoldásának Helmholtz-féle előállítása.** Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a fényforrás pontszerű és monokromatikus hullámokat sugároz gömbszimmetrikusan. Válasszuk a koordinátarendszer origóját a fényforrás S tartózkodási pontjában (ld. 8. ábra). Ha speciálisan az F zárt felületet egy S középpontú, r_0 sugarú gömbnek választjuk és a Helmholtz-féle előállítást monokromatikus $f(t, \vec{r}) = f_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$ fényre alkalmazzuk, akkor a gömbön kívüli tetszőleges P pontban a térmennyiség értéke

$$f_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_F dF \frac{e^{ik(r_0 + r_{PQ})}}{r_0 r_{PQ}} \left[\left(ik - \frac{1}{r_0}\right) + \left(ik - \frac{1}{r_{PQ}}\right)\cos(\vec{n}, \vec{r}_{PQ})\right], \tag{4.3.99}$$

ahol $k=\frac{\omega}{c}$ és $\vec{r}_{PQ}$ az F gömbfelület tetszőleges Q pontjából a P pontba mutató relatív helyzetvektor, $\vec{n}$ pedig az F felület külső normálisa a Q pontban, $\cos(\vec{n},\vec{r}_{PQ})$ a külső normális és az $\vec{r}_{PQ}$ relatív helyzetvektor szögének koszinusza.

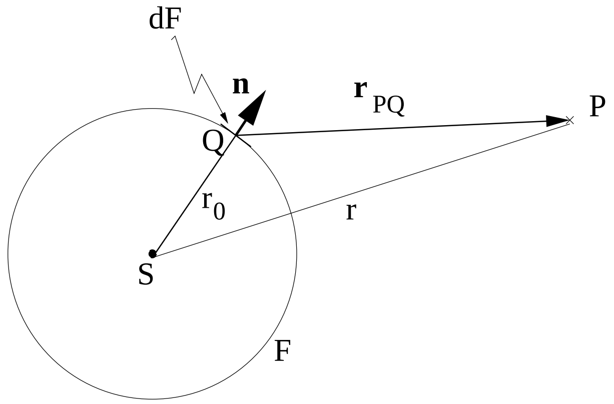

Figure 8: A Huygens-elv értelmében a hullám a P pontban úgy alakul ki, hogy az S hullámforrást körülvevő F zárt felület minden Q pontjához tartozó $\vec{n}\ dF$ felületeleméből elemi gömbhullámok indulnak ki, amelyek a P pontban szuperponálódnak.

A Huygens-elv. A hullámegyenlet megoldásának a (4.3.99) alakban történő előállítása a következőképpen interpretálható. A hullámtér F felületének minden dF felületeleme additív módon járul hozzá a hullámmennyiség P pontban felvett értékéhez. A P pontban kialakuló hullám tehát az egyes dF felületelemektől származó hullámok lineáris szuperpozíciója. A gömbfelület tetszőleges Q pontjában felvett dF felületelem járuléka arányos a fényforrásból kiinduló gömbhullám amplitudójával a Q pontban,

$$f_0(r_0)=\frac{e^{ikr_0}}{r_0}, \tag{4.3.100}$$

és a dF felületelem nagyságával. A felületelem minden pontjából

$$\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\left[\left(ik-\frac{1}{r_0}\right)+\left(ik-\frac{1}{r_{PQ}}\right)\cos(\vec{n},\vec{r}_{PQ})\right] \tag{4.3.101}$$

alakú, anizotróp gömbhullámok indulnak ki. **A hullámtér a P pontban a forrást körülvevő felület pontjaiból kiinduló elemi gömbhullámok lineáris szuperpozíciója.** A hullámmennyiség (4.3.99) alakban történő előállítása **a Huygens-elv** érvényességét mutatja: **A hullámforrást körülvevő tetszőleges zárt felület (speciálisan tetszőleges hullámfelület) elemi gömbhullámok kiindulópontja, amelyek lineáris szuperpozíciója hozza létre a hullámteret a tér egy tetszőleges, a felületen kívüli pontjában.**

A Huygens-elv és a geometriai optika. Érdemes megvizsgálni, hogyan adja vissza a Huygens-elv a geometriai optika határesetét. Általában, tetszőleges monokromatikus, $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi c}{\omega}$ hullámhosszú fény esetén tudjuk, hogy a fenti speciális esetben a megoldás a P pontban

$$f_0(\vec{r})\propto\frac{e^{ikr}}{r} \tag{4.3.102}$$

alakú gömbhullám. Ha leválasztjuk az ennek megfelelő e^{ikr} fázisfaktort az egyes elemi gömbhullámok fázisfaktoraiból, akkor megkapjuk azokat az

$$e^{ik(r_0+r_{PQ}-r)} \tag{4.3.103}$$

relatív fázisfaktorokat, amelyek leírják a gömbfelület különböző pontjaiból a P pontba érkező elemi gömbhullámok relatív fázisait az SP sugárirányú terjedéshez képest. Ezektől függ, hogy a szuperponálódó hullámok interferenciája a P pontban milyen hullámteret hoz létre. Ha a hullámhossz tetszőleges, akkor nem lehet kitüntetni semelyik dF felületelemet, hogy a hullámterjedés szempontjából meghatározóbb szerepe lenne, mint a többinek. Ha azonban $\lambda \to 0$, akkor a k hullámszám nagyon nagy és a (4.3.103) fázisfaktor nagyon gyorsan oszcillál, ahogy a felületi integrálás során az egyik SQP terjedési „úttól" a szomszédosak felé haladunk. Ezért a szomszédos felületelemektől származó elemi gömhullámok kioltják egymást. Nem így van ez azonban azokra az elemi gömbhullámokra, amelyek a gömbfelület olyan Q pontjaiból indulnak, amelyek az SP egyenestől a hullámhosszal összemérhető $d \sim \mathcal{O}(\lambda)$ távolságban vannak. Ezekre az útkülönbség $r_0 + r_{PQ} - r \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$ rendű, a fáziskülönbség pedig $k(r_0 + r_{PQ} - r) \sim \mathcal{O}(\lambda)$ rendű, úgyhogy eltűnik a $\lambda \to 0$ határesetben. A geometriai optika határesetét kis hullámhosszú fényre azért kapjuk tehát meg a Huygens-elv alapján, mert ekkor a (4.3.99) integrálhoz azok a sugármenetek, amelyek a geometriai optikai fénysugár (az SP egyenes szakasz) λ hullámhosszal összemérhető közelségében helyezkednek el, azonos fázisban interferálva adnak járulékot, míg a többi sugármenet járuléka a különböző fázisok miatt kioltja egymást.

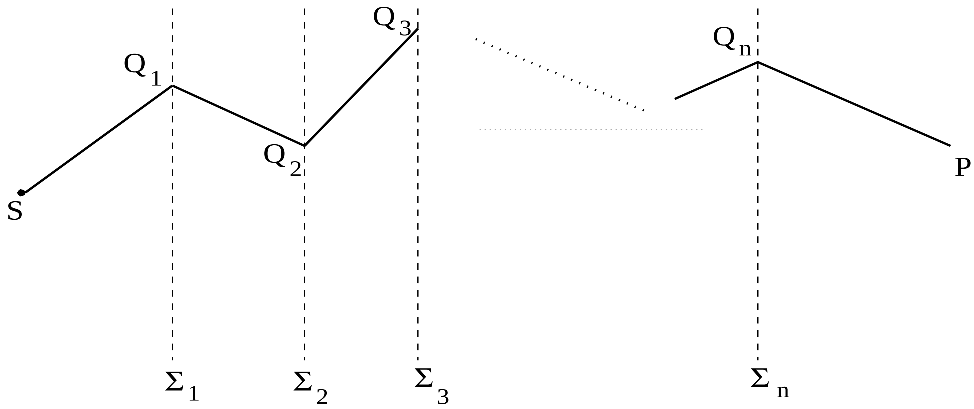

Figure 9: A Huygens-elv egymás utáni alkalmazása a Σ_1, Σ_2, ..., Σ_n síkokra azt eredményezi, hogy a P pontban a hullámkép a összes, $SQ_1Q_2\ldots Q_nP$ törtvonal alakú „fényutak" járulékainak szuperpozíciójaként jön létre, ahol Q_i a Σ_i sík összes pontját befutja. Ez a pálya-integrál alakban történő előállítás alapgondolata.

A Huygens-elv, mint pályaintegrál. A következő érdekes megállapítást tehetjük. Vegyük körül a hullámforrást olyan zárt felülettel, amely egy a hullámforrás és a P pontban tartózkodó megfigyelő között elhelyezett Σ_1 síkból és az arra illeszkedő, végtelen sugarú félgömbből áll. A Huygens-elv alkalmazása azt jelenti, hogy a fény az S pontból a P pontba általában nem egyenes mentén terjed, hanem a Σ_1 sík minden egyes Q_1 pontján keresztül vezetett lehetséges SQ_1P törtvonal alakú „fényút" a neki megfelelő ϕ_{SQ_1P} fázist hordozó $A_{SQ_1P}e^{i\phi_{SQ_1P}}$ komplex amplitudóval ad járulékot a P pontban uralkodó hullámtérhez. A teljes hullámmennyiség a P pontban az összes ilyen komplex amplitudó szuperpozíciója. A zárt felület végtelenben levő része nem ad járulékot, mert a végtelenben eltűnnek a térmennyiségek. A különböző elemi gömbhullámok fázisai különbözőek, úgyhogy a szuperpozíció következtében a különböző komplex amplitudók interferálnak. A térmennyiség a P pontban

$$f(P) = \sum_{Q_1 \in \Sigma_1} A_{SQ_1P} e^{i\phi_{SQ_1P}} \tag{4.3.104}$$

alakú. Képzeljünk most el egy tetszőleges másik Σ_2 síkot a Σ_1 sík és a P megfigyelési pont között. Ekkor Huygens elvét ismételten alkalmazva a térmennyiség az összes lehetséges SQ_1Q_2P törtvonal alakú fényutakhoz tartozó amplitudók összege:

$$f(P) = \sum_{Q_1 \in \Sigma_1} \sum_{Q_2 \in \Sigma_2} A_{SQ_1Q_2P} e^{i\phi_{SQ_1Q_2P}}. \tag{4.3.105}$$

Ezt a gondolatmenetet tovább általánosíthatjuk úgy, hogy a fényforrás és a megfigyelési pont között N darab, párhuzamos Σ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ síkot veszünk fel és az összes lehetséges $SQ_1Q_2\ldots Q_NP$

törtvonal alakú fényutakhoz tartozó amplitudókat összegezzük. Végül a síkok számával végtelenhez, $N \to \infty$ és közben bármely két szomszédos sík Δl távolságával nullához tartva $\Delta l \to 0$, a P pontbeli térmennyiséget elő tudjuk állítani, mint az S forráspontból a P megfigyelési pontba menő összes lehetséges, tetszőleges alakú fényúthoz tartozó amplitudók összegét:

$$f(P) = \lim_{N\to\infty, \Delta l \to 0} \prod_{i=1}^{N} \left(\sum_{Q_i \in \Sigma_i} \right) A_{SQ_1Q_2\ldots Q_NP} e^{i\phi_{SQ_1Q_2\cdots Q_NP}}. \tag{4.3.106}$$

Feynman a kvantummechanika pályaintegrálos átfogalmazása során a Huygens-elv ilyen alakjából indult ki és azt általánosította. Azt mondta, hogy annak a ψ_{SP} „amplitudója”, hogy egy elektron az S pontból eljut a P pontba, egyenlő a részecske összes elképzelhető $SQ_1Q_2\ldots Q_NP$ utakon való terjedése $e^{i\phi_{SQ_1Q_2\cdots Q_NP}}$ komplex amplitudóinak szuperpozíciójával. Az összegzést valamennyi elképzelhető, S-ből P-be vezető, fiktív részecske-pályára el kell végezni. A fázist Feynman szerint az S klasszikus hatásfunkcionálnak az elképzelt pályán felvett értéke adja, $\phi = S$, és minden pályához tartozó komplex e^{iS} fázisfaktor azonos súllyal van jelen:

$$\psi_{SP} = \sum_{\text{pályák } S\text{-ből} P\text{-be}} e^{iS[\text{pálya} S\text{-ből} P\text{-be}]}. \tag{4.3.107}$$

Sikerült megmutatnia, hogy az így megfogalmazott elmélet ugyanaz a kvantummechanika, mint amelyet korábban Schrödinger, Heisenberg, és sokan mások kidolgoztak.

4.4 Elektromágneses sugárzás

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy adott források, azaz töltések és áramok milyen feltételek között keltenek elektromágneses sugárzást. Azt találjuk, hogy a gyorsuló töltések keltik az elektromágneses sugárzást. Rámutatunk arra is, hogy az alapállapotában található atom nem lehet klasszikus fizikai rendszer, azaz nem képzelhető el úgy, mint a pozitív töltésű atommag és körülötte a klasszikus mechanika törvényei szerint, a Coulomb-erő hatására keringő elektronok rendszere. Ha így lenne, akkor az elektronok gyorsulnának, és ennek következtében az atom elektromágneses sugárzást bocsátana ki mindaddig, amíg az elektronok belezuhannának az atommagba. Az atom nem lehetne tehát egyensúlyi állapotban az a véges sugarú képződmény, aminek pl. a Rutherford-szórás mutatja.

Végül röviden beszélünk az elektromágneses hullámok szóródásáról és a fékezési sugárzás jelenségéről.

4.4.1 Retardált potenciálok

Az elektromágneses hullámok keletkezését az inhomogén Maxwell-egyenletek, ill. a belőlük nyert inhomogén hullámegyenletek alapján elemezhetjük. Ezek írják le általános formában, hogy a töltések és az áramok milyen elektromágneses teret keltenek. A megoldásban kell azonosítanunk azt az elektromágneses teret, amelyet **sugárzásnak** nevezünk. Az azonosítás annak az alapján történik, hogy **a teljes elektromágneses teret elő tudjuk állítani olyan szuperpozíció formájában, amelyben az egyik komponens energiát szállít el a forrástól a tér minden irányában. Ezt a komponenst nevezzük sugárzásnak.**

Ahelyett, hogy közvetlenül az inhomogén Maxwell-egyenletek partikuláris megoldását keresnénk meg, a skalár- és vektorpotenciálokra vonatkozó (4.3.19) hullámegyenleteket oldjuk meg a (4.3.20) Lorentz-mértékben. Az elektromos térerősséget és a mágneses indukciót utána a potenciálokból közvetlenül meghatározhatjuk. Megmutatjuk, hogy **az inhomogén hullámegyenletek partikuláris megoldása kifejezhető a töltésekből és áramokból kiinduló retardált hullámok lineáris szuperpozíciójaként:**

$$\phi(t,\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}, \vec{r}\,'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \tag{4.4.1}$$

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \int dV' \frac{\vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}, \vec{r}\,'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{4.4.2}$$

A fenti kifejezések jobb oldalán álló integrálok **retardált hullámok** szuperpozícióit írják le. **A t pillanatban az $\vec{r}$ helyen az elektromágneses mezőt azok a hullámok határozzák meg, amelyek a tér összes más $\vec{r}\,'$ pontjait körülvevő dV' térfogatból indultak a korábbi ún. retardált**

$$t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} \tag{4.4.3}$$

időpillanatban. Ezek, c sebességgel terjedve éppen a t pillanatban jutnak el az egyes $\vec{r}\,'$ pontokból az $\vec{r}$ megfigyelési pontba. Ezek a hullámok aszerint járulnak hozzá a skalárpotenciálhoz ill. a vektorpotenciálhoz, hogy mennyi volt a retardált t' pillanatban az egyes $\vec{r}\,'$ helyeken az elektromágneses mezőt keltő $\rho(t',\vec{r}\,')$ töltéssűrűség, ill. a $\vec{j}(t',\vec{r}\,')$ áramsűrűség. Ha a hullámok végtelen sebességgel terjednének, azaz $c \to \infty$ lenne, akkor $t' \to t$ kerülne az integrandusokban t' helyére. Olyan skalár- ill. vektorpotenciált keltenének a töltések, mint amit a Coulomb-törvény ill. a Biot-Savart-törvény alapján kapnánk, ha azokban a töltéssűrűséget, ill. az áramsűrűséget t-függőnek tekintenénk. Ez azt jelentené, hogy a t pillanatban az $\vec{r}$ helyen az elektromágneses mezőt a térben az ugyanebben a t pillanatban jelenlevő töltés- és áramsűrűség határozná meg. A retardált megoldás azonban azt mondja, hogy ez nem így van. **A retardált megoldás értelmében a tér egyes $\vec{r}\,'$ helyein található dV' térfogatelemek töltése és „árama" a Coulomb-, ill. a Biot-Savart-törvénynek megfelelő módon járul hozzá a skalár- ill. vektorpotenciálhoz az $\vec{r}$ helyen a t pillanatban, de a töltés- és áramsűrűségnek nem a t pillanatban felvett értékei számítanak, hanem az egyes $\vec{r}\,'$ helyeknek megfelelő retardált $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$ időpillanatban felvett értékeik. Ezekről az értékekről tud a c sebességgel terjedő sugárzás az $\vec{r}$ pontba az egyes $\vec{r}\,'$ pontokból pontosan a t pillanatban „hírt hozni".**

1. *A vektorpotenciálra és a skalárpotenciálra vonatkozó egyenletek megoldásainak analógiája.* Miután a skalárpotenciál és a vektorpotenciál Descartes-komponensei hasonló alakú inhomogén hullámegyenletek megoldásai, ezért elegendő pl. a skalárpotenciálra vonatkozó egyenlet partikuláris megoldását megtalálnunk. Annak mintájára aztán a vektorpotenciál Descartes-komponenseire vonatkozó egyenletek partikuláris megoldásait is fel tudjuk írni.
2. *A hullámegyenlet Green-függvénye.* A skalárpotenciálra vonatkozó

$$\Box\phi = 4\pi\rho \tag{4.4.4}$$

hullámegyenlet megoldását elő tudjuk állítani a pontszerű, egyetlen időpillanat „tartamára" felvillanó forrásra vonatkozó $G(t-t',\vec{r}-\vec{r}\,')$ megoldásból, azaz a

$$\Box G(t-t',\vec{r}-\vec{r}\,') \equiv \left[\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta_{\vec{r}}\right] G(t-t',\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(t-t')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{4.4.5}$$

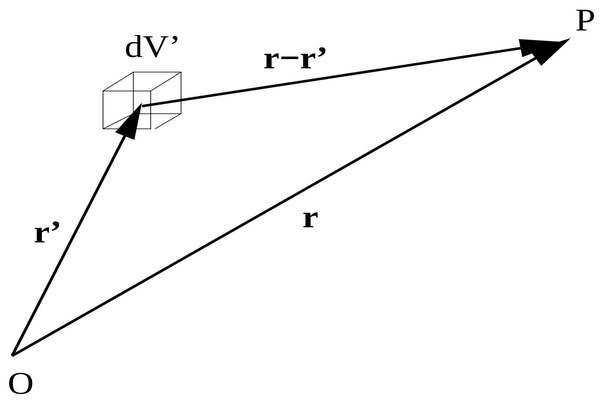

Figure 10: A retardált potenciálok a tér P pontjában a t pillanatban azon elemi hullámok szuperpozíciói, amelyeket az $\vec{r}\,'$ helyzetvektorú dV' térfogatelemekben a korábbi $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$ időpillanatokban uralkodó források keltettek.

egyenlet megoldásából. Ezt a megoldást **a hullámegyenlet Green-függvényének** nevezzük, és **ez olyan forráshoz tartozó megoldás, amely a $t = t'$ pillanatban ,,villant fel" és egyetlen pontban, az $\vec{r} = \vec{r}\,'$ helyen.** A (4.4.4) egyenlet megoldása a Green-függvény segítségével

$$\phi(t,\vec{r}) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int dV' G(t-t', \vec{r}-\vec{r}\,')\rho(t', \vec{r}\,') \tag{4.4.6}$$

alakban adható meg. Ezt triviális belátni, hiszen a vesszőtlen változók függvényeire ható $\Box$ differenciáloperátor átemelhető a vesszős változókra vonatkozó integrálokon és akkor a (4.4.5) egyenlet felhasználása rögtön a (4.4.4) egyenletet eredményezi.

3. *A Green-függvény egyértelműsítése.* Keressük a (4.4.5) egyenlet megoldását Fourier-integrál alakjában:

$$G(\tau,\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{G}(\omega,\vec{k}) e^{-i\omega\tau + i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \tag{4.4.7}$$

ahol $\tilde{G}(\omega,\vec{k})$ a Green-függvény Fourier-transzformáltja, $\tau = t - t'$, $\vec{x} = \vec{r} - \vec{r}\,'$. Használjuk fel, hogy a Dirac-delták Fourier-előállítása:

$$\delta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\tau}, \qquad \delta(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \tag{4.4.8}$$

A (4.4.5) egyenlet a Fourier-transzformáltra vonatkozó algebrai egyenletté redukálódik:

$$\left[-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2\right] \tilde{G}(\omega,\vec{k}) = 1, \tag{4.4.9}$$

ahonnan

$$\tilde{G}(\omega,\vec{k}) = -\frac{c^2}{\omega^2 - c^2k^2}. \tag{4.4.10}$$

Formálisan innen

$$G(\tau,\vec{x}) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{c^2}{\omega^2 - c^2k^2} e^{-i\omega\tau + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{4.4.11}$$

alakban kapjuk a hullámegyenlet Green-függvényét. A baj az, hogy ez az integrál így értelmetlen, mert az ω szerinti integrál integrandusának az ω komplex síkon, a valós tengelyen, az $\omega = \pm ck$ helyeken egyszeres pólusai vannak. Ha megadjuk a komplex síkon, hogy a valós tengelyről „lelépve”, hogyan járjuk körül az egyes pólusokat, akkor egyértelmüsíthetjük az ω szerinti integrált. A pólusok körüljárására vonatkozó különböző utasítások más és más Green-függvényeket eredményeznek. Ez azzal kapcsolatos, hogy a hullámegyenletnek nincsen egyértelműen meghatározott Green-függvénye. A Green-függvény akkor válik egyértelművé, ha megmondjuk, hogy milyen határfeltételeket írunk elő a hullámegyenlethez (a vizsgált téridő-tartomány határain). Egy lehetséges határfeltétel, hogy **megköveteljük a Green-függvény azonosan nulla voltát mindaddig, amíg fel nem villan a $t = t'$ pillanatban a forrás,**

$$G(\tau, \vec{x}) \equiv 0, \quad \text{ha} \quad \tau < 0. \tag{4.4.12}$$

Az így kapott megoldást retardált Green-függvénynek nevezzük.

Megmutatjuk, hogy **a retardált Green-függvényre előírt (4.4.12) határfeltétel annak felel meg, hogy a Fourier-transzformált Green-függvény pólusait az integrálás során „fölülről”, a komplex sík felső $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ félsíkjának oldaláról kerüljük meg. Utóbbi egyenértékű azzal, hogy az integrálás útját meghagyjuk a valós tengelyen, de a pólusokat infinitezimálisan eltoljuk a $\mathrm{Im}\,\omega < 0$ félsík irányába:**

$$\tilde{G}_{\mathrm{ret}}(\omega, \vec{k}) = -\frac{c^2}{(\omega + i\epsilon)^2 - c^2 k^2}, \tag{4.4.13}$$

ahol $\epsilon \to 0^+$ infinitezimális valós szám, amelynek értékével a számolások elvégzése után nullához tartunk pozitív értékeken keresztül. Valóban, ezután el tudjuk végezni az ω szerinti integrálást a

$$G_{\mathrm{ret}}(\tau, \vec{x}) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{c^2}{(\omega + i\epsilon)^2 - c^2 k^2} e^{-i\omega\tau} \tag{4.4.14}$$

integrálban. Az ω komplex síkon egy végtelen sugarú félkörrel zárjuk be az integrálás útját, ahol az integrandus eltűnik feltéve, hogy $\tau > 0$ esetén az alsó -, $\tau < 0$ esetén a felső félsíkon vesszük fel a félkört. Miután mindkét pólus az alsó félsíkon található, ezért $\tau < 0$ esetben azonosan eltűnik az integrál. Pontosan ez a kívánt határfeltétel.

Az eredmény tehát arányos lesz a $\Theta(\tau)$ Heaviside-féle függvénnyel. A $\tau > 0$ esetben a reziduum-tételt felhasználva:

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{ret}}(\tau, \vec{x}) &= -\Theta(\tau) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{-2\pi i}{2\pi} c^2 \left[\frac{e^{-i\omega_{\vec{k}}\tau}}{2\omega_{\vec{k}}} - \frac{e^{+i\omega_{\vec{k}}\tau}}{2\omega_{\vec{k}}} \right] \\ &= ic^2 \Theta(\tau) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left(e^{-i\omega_{\vec{k}}\tau} - e^{i\omega_{\vec{k}}\tau} \right). \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

Végezzük el a térszög szerinti integrálást felhasználva, hogy

$$2\pi \int_{-1}^{1} d\xi e^{-ikx\xi} = \frac{2\pi}{-ikx} \left(e^{-ikx} - e^{ikx} \right). \tag{4.4.16}$$

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{ret}}(\tau, \vec{x}) &= \frac{2\pi i c}{2(2\pi)^3 x} \Theta(\tau) \int_0^{\infty} \frac{dk\, k^2}{k^2} \left(e^{-ikx} - e^{ikx} \right) \left(e^{-ikc\tau} - e^{ikc\tau} \right) \\ &= -\frac{c}{4(2\pi)^2 x} \Theta(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[e^{-ik(x+c\tau)} - e^{-ik(x-c\tau)} + e^{ik(x+c\tau)} - e^{ik(x-c\tau)} \right] \\ &= \frac{c}{4\pi x} \Theta(\tau) \left[\delta(x - c\tau) - \delta(x + c\tau) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi x} \Theta(\tau) \delta\left(\frac{x}{c} - \tau \right), \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

ahol a második egyenlet felírásakor felhasználtuk, hogy az integrandus k-nak páros függvénye, a harmadik egyenlet felírásakor pedig a Dirac-delta Fourier-előállítását használtuk, és végül, hogy $\Theta(\tau)\delta(x + c\tau) = 0$.

4. *A retardált megoldás.* A hullámegyenlet partikuláris megoldásának előállítására sokféle lehetőség van, aszerint hogy melyik Green-függvényt használjuk. A retardált Green-függvény segítségével történő előállítás azért kényelmes, mert jól tükrözi a töltések, áramok és az általuk keltett elektromágneses mező közötti kapcsolatot. A megoldás alakja:

$$\begin{aligned}\phi(t,\vec{r}) &= 4\pi\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int dV' G_{\rm ret}(t-t',\vec{r}-\vec{r}\,')\rho(t',\vec{r}\,')\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}dt'\Theta(t-t')\int dV'\frac{\rho(t',\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)\\ &= \int dV'\frac{\rho\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c},\vec{r}\,'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \qquad (4.4.18)\end{aligned}$$

Ezt akartuk belátni.

5. *A retardált Green-függvény síkhullám-felbontása.* Érdekességképpen megjegyezzük, hogy a (4.4.15) egyenlőség mutatja, hogy a retardált Green-függvény pozitív- és negatív- frekvenciás hullámok szuperpozíciója, amelyek időben előre terjednek (utóbbira nézve ld. a $\Theta(\tau)$ tényezőt).

4.4.2 Gyorsuló töltés elektromágneses sugárzása

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy **egy gyorsuló ponttöltés elektromágneses hullámok révén energiát sugároz ki a környező térbe. Energiakisugárzáson azt értjük, hogy a ponttöltést körülvevő valamely zárt felületen időegység alatt pozitív elektromágneses energia áramlik át a felület által határolt tartományból a felületen kívüli térrészbe.**

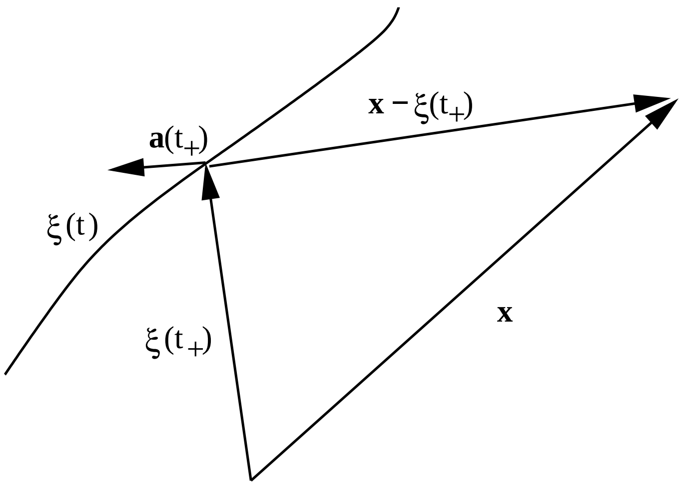

Figure 11: A retardált t_+ időpillanatban $\vec{a}(t_+)$ gyorsulással mozgó ponttöltés a t pillanatban az $\vec{x}$ helyen sugárzást kelt.

Mozogjon a ponttöltés a $\vec{\xi}(t)$ pályán, és figyeljük meg az általa keltett elektromágneses mezőt a tetszőleges $\vec{x}$ helyen és t időpillanatban. Legyen t_+ az a korábbi, retardált $t_+ < t$ időpillanat, amelyre

$$c(t-t_+) = |\vec{x}-\vec{\xi}(t_+)|, \qquad (4.4.19)$$

és legyen a ponttöltés gyorsulása a retardált időpillanatban $\vec{a}$, a ponttöltés retardált helyzetéből a megfigyelési pontba mutató relatív helyzetvektor pedig

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{\xi}(t_+) \tag{4.4.20}$$

(ld. a 11. ábrát). Ezekkel a jelölésekkel, a kis $v \ll c$ sebességgel mozgó ponttöltés elektromágneses tere:

$$\vec{E}(t,\vec{x}) \approx \frac{e}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} + e\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{a})}{r^3} + \mathcal{O}(\frac{v}{c}), \qquad \vec{B}(t,\vec{x}) = \frac{\vec{r}\times\vec{E}(t,\vec{x})}{r}. \tag{4.4.21}$$

Az elektromos térerősség első tagja Coulomb-teret ír le, amelyhez nem tartozik mágneses tér (olyan, mint a nyugvó ponttöltés elektromágneses tere). Az elektromos térerősség második tagja, és a neki megfelelő, el nem tűnő mágneses indukciótér az elektromágneses sugárzást írják le.

A fenti összefüggések belátása hosszadalmas, de lényegében elemi számolás eredménye. Ennek fontosabb lépései:

1. *A retardált Green-függvényt átírjuk Lorentz-kovariáns alakba.* Felhasználva, hogy

$$\frac{c}{2|\vec{x}|}\delta(|\vec{x}| - c\tau)\Theta(\tau) = c\delta(x^\mu x_\mu), \qquad x^\mu = (c\tau, \vec{x}), \tag{4.4.22}$$

a Green-függvényt

$$G_{\mathrm{ret}}(x-y) = \frac{c}{2\pi}\delta((x-y)_\mu(x-y)^\mu)\Theta(x^0 - y^0) \tag{4.4.23}$$

alakba írjuk.

2. *Meghatározzuk a mozgó ponttöltés négyes-áramsűrűségét.* Legyen adott a ponttöltés világvonala, $\xi^\mu(\tau)$, ahol τ a sajátidő, és a

$$ct = \xi^0(\tau) \tag{4.4.24}$$

összefüggés határozza meg a sajátidő és a koordinátaidő közötti kapcsolatot: $\tau = \tau(t)$. A négyes áramsűrűség definíciója szerint:

$$\begin{aligned} j^\mu(y) \equiv j^\mu(\vec{y},t) &= \rho(\vec{y},t)\left.\frac{d\xi^\mu}{dt}\right|_{t,\vec{y}} = e\delta(\vec{y} - \vec{\xi}(\tau(t)))\frac{d\xi^\mu(\tau(t))}{dt} \\ &= e\int_{-\infty}^{\infty} dt'\delta(\vec{y} - \vec{\xi}(\tau))\delta\Big(t' - \frac{\xi^0(\tau)}{c}\Big)\frac{d\xi^\mu(\tau(t'))}{dt'} = ec\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y^\nu - \xi^\nu(\tau))\frac{d\xi^\mu(\tau(t'))}{dt'} \\ &= ec^2\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\delta(y^\nu - \xi^\nu(\tau))u^\mu(\tau), \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

ahol

$$u^\mu(\tau) = \frac{d\xi^\mu(\tau)}{cd\tau} \tag{4.4.26}$$

a ponttöltés négyes-sebessége.

3. *A retardált négyes-vektorpotenciál meghatározása.* A skalár- és vektorpotenciálra vonatkozó összefüggéseinket összefoglalhatjuk egyetlen, a retardált négyes-vektorpotenciálra vonatkozó

formulában a retardált Green-függvény kovariáns alakjának felhasználásával:

$$\begin{aligned}
A^\mu(x) &= \frac{4\pi}{c}\int d^4y G_{\mathrm{ret}}(x-y)j^\mu(y) \\
&= 2\int d^4y \Theta(x^0-y^0)\delta((x-y)_\nu(x-y)^\nu)j^\mu(y) \\
&= 2ec^2\int_{-\infty}^{\infty} d\tau u^\mu(\tau)\int d^4y\Theta(x^0-y^0)\delta((x-y)_\nu(x-y)^\nu)\delta(y^\rho-\xi^\rho(\tau)) \\
&= 2ec^2\int_{-\infty}^{\infty} d\tau u^\mu(\tau)\Theta(x^0-\xi^0(\tau))\delta([x-\xi(\tau)]_\nu[x-\xi(\tau)]^\nu). \qquad (4.4.27)
\end{aligned}$$

Ezt az integrált explicit módon kiértékelhetjük, ha felhasználjuk a következő integrált:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau)\Theta(x^0-\xi^0(\tau))\delta([x-\xi(\tau)]_\nu[x-\xi(\tau)]^\nu) = \frac{f(\tau_+)}{2cu_+^\mu(x-\xi_+)_\mu}, \qquad (4.4.28)$$

ahol $f(\tau)$ a sajátidő tetszőleges függvénye, τ_+ az az egyértelműen meghatározott sajátidőpillanat, amikor a részecske világvonala metszi a téridő x^μ pontjához tartozó, múltbeli fénykúpot, azaz amelyre:

$$[x-\xi(\tau_+)]_\nu[x-\xi(\tau_+)]^\nu = 0, \quad \xi_+^0 < x^0, \qquad (4.4.29)$$

és végül $\xi_+ \equiv \xi(\tau_+)$, ill. $u_+^\mu \equiv u^\mu(\tau_+)$ a ponttöltés helyzetvektora ill. négyes-sebessége a τ_+ sajátidő-pillanatban. Az összefüggés bizonyítása a Dirac-delta

$$\delta([x-\xi(\tau)]_\nu[x-\xi(\tau)]^\nu)\Theta(x^0-\xi^0(\tau)) = \frac{\delta(\tau-\tau_+)}{2[x-\xi(\tau_+)]_\nu\frac{d\xi^\nu(\tau)}{d\tau}} \qquad (4.4.30)$$

azonos átalakítása után nyilvánvaló. A fenti (4.4.28) integrál segítségével a retardált négyesvektorpotenciálra az alábbi kifejezést kapjuk:

$$A^\mu(x) = \frac{eu_+^\mu}{(x-\xi_+)_\nu u_+^\nu}. \qquad (4.4.31)$$

Vegyük észre, hogy nyugvó ponttöltés esetén $u_+^\mu = (1,\vec{0})$ és ezért csak a vektorpotenciál

$$A^0 = \frac{e}{c(x^0-t_+)} = \frac{e}{|\vec{x}-\vec{\xi}_+|} \qquad (4.4.32)$$

komponense, a skalárpotenciál különbözik nullától és éppen megegyezik a Coulomb-potenciállal, ahogyan annak lennie kell.

Vezessük be az

$$\vec{r} = \vec{x}-\vec{\xi}_+, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{\xi}}{dt}(\tau_+), \quad c(t-t_+) = r \qquad (4.4.33)$$

egyszerűsítő jelöléseket. A fenti (4.4.31) négyes-vektor komponenseit kiírva kapjuk az adott mozgást végző ponttöltés elektromágneses terének skalárpotenciálját és a vektorpotenciálját a Lorentz-mértékben (a retardált potenciál felhasznált általános képlete ebben a mértékben érvényes):

$$\begin{aligned}
A^0(t,\vec{x}) &= \frac{e\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{c(t-t_+)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{e}{r-\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c}}, \\
\vec{A}(t,\vec{x}) &= \frac{e\frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{c(t-t_+)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{\vec{v}}{c}A^0(t,\vec{x}). \qquad (4.4.34)
\end{aligned}$$

4. *Az elektromos térerősség és a mágneses indukció kiszámítása.* Ezek deriválással adódnak:

$$\vec{E} = -\partial_{\vec{x}} A^0 - \frac{1}{c^2} A^0 \partial_t \vec{v} - \frac{\vec{v}}{c^2} \partial_t A^0,$$
$$\vec{B} = \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{A} = A^0 \operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v} + \partial_{\vec{x}} A^0 \times \vec{v}. \tag{4.4.35}$$

A kijelölt deriválásokat az $\vec{x}$ és a $t_+ \equiv t_+(t, \vec{x})$ szerinti deriválásokra vezetjük vissza. Ekkor a közvetett deriválás szabályai szerint:

$$\partial_{\vec{x}} A^0 = \partial_{\vec{x}} A^0\big|_{t_+} + \partial_{t_+} A^0 \, \partial_{\vec{x}} t_+,$$
$$\partial_{\vec{x}} A^0 + \frac{\vec{v}}{c^2} \partial_t A^0 = \partial_{\vec{x}} A^0\big|_{t_+} + \partial_{t_+} A^0 \left(\partial_{\vec{x}} t_+ + \frac{\vec{v}}{c^2} \partial_t t_+ \right),$$
$$\operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v} = \partial_{\vec{x}} \times \vec{a}, \tag{4.4.36}$$

ahol $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{\xi}}{dt^2}(t_+)$ a ponttöltés gyorsulása a t_+ időpillanatban.

A továbbiakban kényelmesebb a pontrészecske pályaegyenletét a koordinátaidővel paraméterezni. A retardált t_+ időpillanatot a

$$ct - |\vec{x} - \vec{\xi}(t_+)| = ct_+ \tag{4.4.37}$$

egyenlet határozza meg, mint az elektromágneses mező megfigyelése $\vec{x}$ helyének és t idejének függvényét. Az egyenlet mindkét oldalát egyszer t, másszor $\vec{x}$ szerint deriválva és kifejezve a $\partial_t t_+$, ill. a $\partial_{\vec{x}} t_+$ deriváltakat, azokra az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\partial_t t_+ = \frac{1}{r} \frac{1}{r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c}}, \qquad \partial_{\vec{x}} t_+ = -\frac{1}{c} \frac{1}{r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c}}. \tag{4.4.38}$$

Ezeket behelyettesítve a (4.4.36), ill. azokat a (4.4.35) kifejezésekbe, hosszadalmas, de elemi számolással az alábbi eredményt kapjuk:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{e}{\left(r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c} \right)^3} \left\{ \left(\vec{r} - \frac{r \vec{v}}{c} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \vec{r} \times \left[\left(\vec{r} - \frac{r \vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right] \right\},$$
$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \frac{\vec{r} \times \vec{E}}{r}. \tag{4.4.39}$$

A sugárzási tér. Első megállapításunk, hogy **felléphet energia-kisugárzás.** A ponttöltés elektromágneses terének általános tulajdonsága, hogy

$$\vec{B} = \frac{\vec{r} \times \vec{E}}{r}, \tag{4.4.40}$$

aminek következtében az elektromágneses tér energiaáramsűrűségének, az $\vec{S}$ Poynting-vektornak a radiális komponense

$$S_r = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r} \cdot [\vec{E} \times \vec{B}] == \frac{1}{r^2} [\vec{r} \times \vec{E}]^2 \geq 0. \tag{4.4.41}$$

Ez a képlet adott t pillanatban annak az r sugarú gömbnek a felületén érvényes, amelyen az elektromágneses mező megfigyelésének $\vec{x}$ helye is rajta van és középpontja a ponttöltés tartózkodási helye a korábbi t_+ retardált időpontban. Az egyenlőtlenség értelmében a ponttöltéstől energia áramolhat el az elektromágneses térben. A gömb felületén dt idő alatt kiáramlott energia:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int d\Omega r^2 S_r = \int d\Omega [\vec{r} \times \vec{E}]^2 \geq 0, \tag{4.4.42}$$

ahol az integrálás a teljes 4π térszögre történik.

A (4.4.21) kifejezések mutatják, hogy a tér $\mathcal{O}(\frac{1}{r^2})$ távolságfüggést mutató komponense nem járul hozzá az energiaáramsűrűséghez. Ezért **az elektromágneses sugárzásért teljes egészében az $\mathcal{O}(\frac{1}{r})$ távolságfüggést mutató komponens a felelős.** A lassan ($v \ll c$) mozgó ponttöltés sugárzási tere tehát:

$$\vec{E}_{\text{sug}}(t, \vec{x}) \approx e \frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{a})}{r^3} + \mathcal{O}(\frac{v}{c}), \qquad \vec{B}(t, \vec{x}) = -\frac{e}{r^2} \vec{r} \times \vec{a}, \tag{4.4.43}$$

az energiaáramsűrűség radiális komponense pedig:

$$S_r = \frac{c}{4\pi} [\vec{r} \times \vec{E}]^2 = \frac{e^2 c}{4\pi r^2} [\vec{r} \times \vec{a}]^2. \tag{4.4.44}$$

Az időegység alatt kisugárzott energia,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \int d\Omega r^2 S_r = \frac{e^2 c}{4\pi} \int d\Omega [\vec{r} \times \vec{a}]^2 \\ &= \frac{2\pi e^2 c}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \, \sin^2\theta \, \vec{a}^{\,2} = \frac{2e^2 c}{3} \vec{a}^{\,2} \end{aligned} \tag{4.4.45}$$

arányos a ponttöltés retardált időpillanatban vett gyorsulása négyzetével. Elektromágneses sugárzás tehát akkor és csak akkor lép fel, ha a ponttöltés gyorsul.

4.4.3 Töltésrendszer sugárzása. Az atomok stabilitásának kérdése

Korlátos mozgást végző töltés elektromágneses sugárzása. **A gyakorlatban érdekes esetekben az elektromágneses sugárzás nagyon sokszor olyan ponttöltéstől származik, amely kicsiny térbeli tartományban végez korlátos mozgást. Ilyenkor biztosan nem azonosan nulla a ponttöltés gyorsulása, tehát elektromágneses hullámokat sugároz. Ettől a korlátos tartománytól nagy R távolságban csak a sugárzási teret látjuk, mert a távolsággal ez a térkomponens csökken a leglassabban: fordítva arányosan, azaz $\mathcal{O}(\frac{1}{R})$ rendben.** Helyezzük a koordinátarendszer origóját a korlátos tartomány belsejébe. Ekkor – az előző fejezet jelöléseit használva, – nulladik közelítésben $\vec{R} \approx \vec{x}$ a töltéstől nagy távolságban, és a retardált időpillanat $t_+ = t - \frac{R}{c}$, ahol $R = |\vec{R}| \approx |\vec{x}|$. A sugárzási tér térmennyiségei pedig a töltéstől távol:

$$\vec{E}(t, \vec{R}) = \frac{\vec{R} \times [\vec{R} \times e\vec{a}(t_+)]}{R^3}, \qquad \vec{B}(t, \vec{R}) = \frac{\vec{R} \times \vec{E}(t, \vec{R})}{R}. \tag{4.4.46}$$

Írjuk a ponttöltés gyorsulását, mint a retardált idő függvényét a frekvencia szerint Fourier-integrál alakjába:

$$\vec{a}(t_+) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \vec{a}_\omega e^{i\omega t_+} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \vec{a}_\omega e^{i(\omega t - kR)}, \tag{4.4.47}$$

ahol bevezettük a $k = \frac{\omega}{c}$ hullámszámot. A gyorsulás (4.4.47) alakját behelyettesítve az elektromos térerősség és a mágneses indukció kifejezésébe, látjuk, hogy **a gyorsuló ponttöltés által keltett sugárzás gömbhullámok alakjában „szállítja" az energiát. Az elektromágneses gömbhullámban a terjedési irány** (a gömb alakú fázisfelületek $\frac{\vec{R}}{R}$ külső normálisa), **az elektromos térerősség $\vec{E}$ vektora és a mágneses indukció $\vec{B}$ vektora ebben a sorrendben jobbsodrású vektorrendszert alkotnak, páronként merőlegesek egymásra, és az elektromos térerősség és a mágneses indukció azonos fázisban rezegnek.**

Az inhomogén és a homogén hullámegyenlet megoldásainak kapcsolata. **A ponttöltés által kisugárzott elektromágneses hullámokban a hullámszám és a körfrekvencia között ugyanaz az összefüggés, mint amit a szabad elektromágneses tér síkhullám megoldásai esetében találtunk.** Az elektromágneses sugárzási tér fenti tulajdonságai is ugyanazok, mint szabadon terjedő síkhullámok esetén. Ezért **a homogén hullámegyenlet síkhullám-megoldásait úgy tekinthetjük, mint a korlátos tartományban mozgó töltés által kisugárzott hullámok fázisfelületei kis darabkájának közelítő leírását, amikor távol vagyunk a sugárzás forrásától.**

Antennák. Az elektromágneses sugárzás fenti tulajdonságai akkor is érvényben maradnak, ha a sugárzás nem egyetlen, hanem tetszőleges számú, korlátos mozgást végző ponttöltéstől származik. Ilyenkor **az egyes ponttöltések sugárzási terei lineárisan szuperponálódnak egymásra,** mert a Maxwell-egyenletek lineárisak a forrásokban és a térmennyiségekben egyaránt. Ezt az esetet valósítják meg pl. az **antennák,** amelyekben általában makroszkopikus számú elektront kényszerítünk valamilyen módszerrel az antennán belüli, korlátos és gyorsuló mozgásra. A fenti képletek értelmében **az antennától távol a sugárzás gömbhullámokban terjed és az energiaáram sűrűsége arányos a töltésrendszer (antenna) $\vec{d} = e\vec{\xi}$ elektromos dipólmomentuma idő szerinti második deriváltjának a négyzetével,**

$$S_r \propto \frac{\ddot{\vec{d}}^{\,2}}{R^2}, \tag{4.4.48}$$

feltéve, hogy az antenna elektromos dipólmomentuma nem azonosan nulla. Ha ez lenne a helyzet, akkor az antenna (ill. a benne ide-oda mozgó töltések rendszerének) magasabb rendű momentumai adnak járulékot, ugyancsak gömbhullámok alakjában az elektromágneses sugárzáshoz, pl. az elektromos kvadrupólmomentum idő szerinti harmadik és a mágneses dipólmomentum idő szerinti második deriváltja, stb. **Az antennákat aszerint nevezzük elektromos dipólantennának, mágneses dipólantennának, stb, hogy melyik a legalacsonyabb rendű, el nem tűnő momentumuk, amelyik a sugárzási térhez a legnagyobb (a vezető rendű) járulékot adja.**

Az atomok stabilitása. Az atomok $Ze > 0$ pozitív töltésű atommagból és az azokat körülvevő Z darab, $-e < 0$ töltésű elektronból álló kötött rendszerek, ahol Z az atom rendszáma. A Rutherford-kísérlet azt mutatta ki, hogy az atommag pozitív töltése az atom középpontjában helyezkedik el, mint egy pontszerű töltés, míg az elektronok felhője kb. 100 nm sugarú. A Hoffstadter-féle kísérletekből azt is tudjuk, hogy az atommagok sugara, kb. 1 - 10 fm, azaz 10^{-6} -10^{-5} nm, ami 7-8 nagyságrenddel kisebb, mint az elektronfelhő lineáris kiterjedése. A tapasztalat szerint számos atomot ismerünk, amelyek stabil kötött rendszerek. **A klasszikus fizikai elképzelésünk egy atomról az lehetne, hogy a pontszerű atommag Ze pozitív töltése olyan Coulomb-teret kelt, amely vonzza az elektronokat és azok ebben a térben keringenek. A Coulomb-erő biztosítja a zárt pályán maradáshoz szükséges centripetális gyorsulást. Ha eközben az elektronoknak nem lenne nullától különböző gyorsulásuk, akkor ez a modell akár helyes is lehetne. Mivel azonban ebben a klasszikus fizikai modellben az elektronok gyorsulása nem nulla, azért az atomnak ezen modell szerint elektromágneses sugárzást kell kibocsátania. Ha az elektronok energiát veszítenek, akkor azonban fokozatosan egyre közelebb kerülnek az atommaghoz, míg végül belezuhannak. Az atomok a klasszikus fizikai modell értelmében nem lehetnek stabil képződmények. A klasszikus mechanika és elektrodinamika nem ad magyarázatot tehát arra, hogy az atomok miért stabil képződmények.**

Az atomok alapállapotának stabilitására a választ a kvantummechanika adja meg. A kvantummechanika értelmében az atomokban, alapállapotban az elektronok nem keringenek az atommag körül, hanem azt körülveszik, mint egy elkent töltésfelhő, állóhullámszerűen. Az elektron hullámfüggvénye, pontosabban a hullámfüggvény abszolút értékének a négyzete megszorozva az infinitezimális dV térfogatelemmel, adja meg annak a valószínűségét, hogy az elektron a kiszemelt dV térfogatelemben található. Ezek a megtalálási valószínűségek a tér különböző pontjaiban nem függenek azonban az időtől. Az így elhelyezkedő elektronnak zérus a gyorsulása (és a sebessége), ezért nem is sugároz. Ugyanakkor érvényes rá a Heisenberg-féle határozatlansági elv, azaz hogy az elektron Δr helybizonytalanságának és Δp impulzusbizonytalanságának szorzata nem kisebb, mint a h Planck-állandó nagyságrendjébe eső alsó korlát. Ha tehát az elektron a Coulomb-erő hatására túl erősen ,,akarna" lokalizálódni az atommag körül (bele ,,akarna" esni az atommagba), azaz Δr csökkenne, akkor megnőne az elektron impulzus-bizonytalansága, aminek következtében újra nagyobb sugarú tartományban kenődne szét. **A határozatlansági elv tehát megakadályozza az elektront, hogy belezuhanjon az atommagba.**

4.4.4 Elektromágneses hullámok szóródása*

Az elektromágneses hullámok töltött részecskén szóródnak. Ennek a jelenségnek az az oka, hogy a bejövő (primér) elektromágneses hullám $\vec{E}_{\rm p}$ elektromos térerősségvektora $e\vec{E}_{\rm p}$ erővel hat az útjába kerülő elektronra és azt gyorsulásra kényszeríti. A gyorsuló elektron pedig szórt $\vec{E}_{\rm s}$ (szekundér) elektromágneses hullámot sugároz ki. Ha pl. a bejövő hullám monokromatikus, véges keresztmetszetű nyaláb, amelynek fázisfelületei jó közelítéssel síkok, akkor a szórt hullámot a következőképpen észlelhetjük. Detektort helyezünk el az elektrontól R távolságra, a nyaláb irányához képest θ szög alatt és mérjük a szórt hullám $S_{\rm s}$ energiaáramsűrűségét, ami sugárirányú. A mechanikában a differenciális szórási hatáskeresztmetszetet úgy értelmeztük, mint az időegység alatt a detektor $R^2 d\Omega$ nagyságú felületére beérkező szórt részecskék számának és a bejövő részecskék áramsűrűségének a hányadosát. Mivel a klasszikus elektromágneses hullám esetén nincsen értelme részecskékről beszélni, kézenfekvő most az energiaáramsűrűség alapján értelmezni a differenciális szórási hatáskeresztmetszetet. A differenciális szórási hatáskeresztmetszeten a szórt hullám által időegység alatt a detektor felületére szállított $S_{\rm s}R^2 d\Omega$ energiának és a bejövő hullám $S_{\rm p}$ energiaáramsűrűségének a hányadosát értjük:

$$d\sigma = \frac{S_{\rm s}R^2 d\Omega}{S_{\rm p}}. \tag{4.4.49}$$

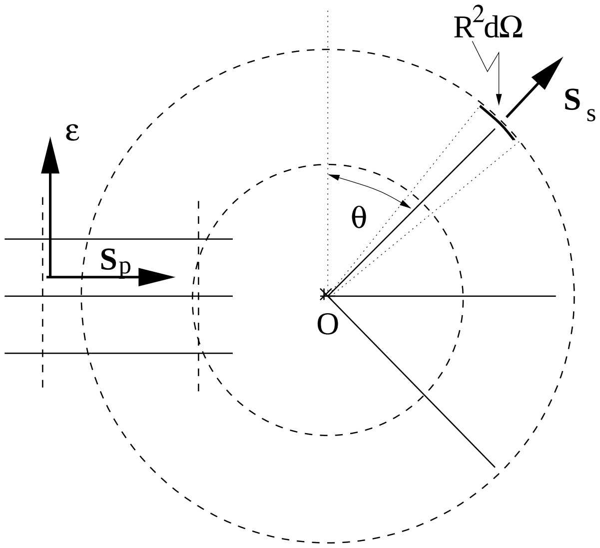

Figure 12: Az O pontban elhelyezkedő e töltésű részecskén elektromágneses hullám szóródik; $\vec{S}_{\mathrm{p}}$ ill. $\vec{S}_{\mathrm{s}}$ rendre a bejövő ill. az ábrán feltüntetett $d\Omega$ infinitezimális térszögbe szórt elektromágneses hullám energiaáramsűrűsége (Poynting-vektora), $\vec{\epsilon}$ a bejövő elektromágneses hullám polarizációs vektora.

Ha a detektor makroszkopikus, akkor az elektromágneses hullám frekvenciájának megfelelő időtartamoknál sokkal hosszabb időtartamokra átlagol, ezért a fenti képletben az időben átlagos energiaáramsűrűségeket kell használni.

Legyen a bejövő monokromatikus síkhullámban az elektromos térerősség

$$\vec{E}_{\mathrm{p}} = \vec{\epsilon} E_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \tag{4.4.50}$$

Itt $\vec{\epsilon}$ a primér elektromágneses hullám polarizációja, a $\vec{k}$ hullámvektorra merőleges egységvektor. Anélkül, hogy a számolást részleteznénk, átlátható, hogy meg lehet határozni, hogy egy atomi elektron pl. ilyen elektromos térerősség hatására milyen kényszerrezgést végez. Fel kell tenni, hogy az elektron maximális elmozdulásának abszolút értéke sokkal kisebb, mint a primér hullám hullámhossza, és hogy a kvantumeffektusok elhanyagolhatók. Ha ismert az elektron gyorsulása, akkor az előző fejezet eredményei alapján meghatározható a szórt hullám (az elektron által kisugárzott hullám). Az energiaáramsűrűségek időátlagait is kiszámolva, a differenciális szórási hatáskeresztmetszetre

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2\theta \tag{4.4.51}$$

adódik, ahol θ a primér hullám $\vec{\epsilon}$ polarizációja és a megfigyelés iránya által bezárt szög, r_e pedig az ún. **klasszikus elektron-sugár:**

$$r_e = \lambda_C \alpha \approx 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \tag{4.4.52}$$

Itt

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad \text{ill.} \quad \lambda_C = \frac{\hbar}{mc} \approx 3,86 \cdot 10^{-13} \text{ m} \tag{4.4.53}$$

rendre az ún. **finomszerkezeti állandó**, ill. **az elektron Compton-hullámhossza;** m az elektron nyugalmi tömege. Ha a fenti differenciális szórási hatáskeresztmetszetet integráljuk a teljes térszögre, akkor megkapjuk **a monokromatikus elektromágneses hullám szabad elektronon való szóródásának teljes hatáskeresztmetszetét,**

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \approx 0,66 \cdot 10^{-28} \text{m}^2. \tag{4.4.54}$$

Ez a Thomson-féle szórási hatáskeresztmetszet. Megjegyezzük még, hogy **ez a képlet csak kis frekvenciák és gyenge terek esetén érvényes. Más esetben fontosak úgy a relativisztikus, mind a kvantumeffektusok.** Utóbbiaknak köszönhetően a hatáskeresztmetszet frekvencia-függővé válik és a szórt hullám frekvenciája is megváltozik a bejövő hullám frekvenciájához képest. **A szórási folyamatot ilyenkor Compton-szórásnak nevezzük.** Értelmezése csak a relativisztikus és kvantumfizikai effektusokat egyaránt figyelembe vevő kvantumelektrodinamika keretében lehetséges.

4.4.5 Fékezési sugárzás*

Fékezési sugárzást akkor észlelünk, ha adott kezdősebességű elektront lövünk rá pl. egy nehézfémből készült síklemezre. Az elektron a fém szilárdtest-rácsában található $Ze \gg e$ töltésű valamelyik rácsatom Coulomb-terében szóródik, eredeti irányától eltérül és eközben gyorsulást szenved. A gyorsuló töltés sugároz, ez a fékezési sugárzás. A fékezési sugárzásban – a klasszikus elektrodinamika szerint –

1. minden frekvenciájú sugárzásnak jelen kellene lennie;
2. a sugárzás intenzitása pedig alacsony frekvenciákon a frekvencia logaritmusával arányos, míg nagy frekvenciákon függetlennek adódik a frekvenciától.

A tapasztalat szerint azonban ez nem így van, mert **a fékezési sugárzás spektruma egy maximális frekvenciával rendelkezik, amelynél nagyobb frekvenciájú sugárzást nem észlelünk. Ezt a tényt a klasszikus elektrodinamika alapján nem lehet értelmezni.** Nyilvánvaló, hogy a klasszikus értelmezés a nagy frekvenciájú hullámok esetén semmiképpen sem lehet helyes, mert ha igaz lenne, akkor az intenzitás frekvencia-függetlensége ebben a tartományban azt jelentené, hogy időegység alatt végtelen nagy energia sugárzódna ki fékezési sugárzás révén. A jelenség helyes érelmezése csak a kvantumfizika keretében lehetséges. Az elektromágneses mező csak $\hbar\omega$ energiaadagokban tud energiát felvenni. A kisugárzott energiaadag legfeljebb akkora lehet, mint amekkora a bejövő elektron kinetikus energiája. Ez a frekvenciaspektrumban levágást eredményez a nagy frekvenciák oldaláról. Ez megmenti a rendszert az „ultraibolya” katasztrófától.

FÜGGELÉK

A. Tenzorok a három-dimenziós térben

A.1. Skalárok, vektorok

A Newton-i fizikában megtanultuk, hogy a geometriai tér, amelyben a fizikai történések lezajlanak, három-dimenziós és euklideszi geometriájú. Inerciarendszerből nézve a három-dimenziós tér izotróp. Ennek az a következménye, hogy inerciarendszerekben a mechanika törvényei a térbeli elforgatásokkal szemben invariánsak, azaz a törvények ugyanazok a térbeli K koordinátarendszerben és a hozzá képest tetszőlegesen elforgatott K' koordinátarendszerben. A legegyszerűbb fizikai mennyiségeket, mint pl. út, elmozdulás, sebesség, gyorsulás, energia, stb. olyan matematikai objektumokkal írtuk le, amelyek vagy (hármas-)skalárok, vagy (hármas-)vektorok.

Az f (hármas-)skalároknak nincsenek komponenseik, értékük valós szám, s ez a koordinátarendszer térbeli elforgatása során nem változik: $f' = f$. Ilyen (hármas-) skalár a Newton-i mechanikában a geometriai távolság, a tehetetlen és a súlyos tömeg, a hatás, az energia, és különkülön a kinetikus és a potenciális energia is.

Jelölje V a $\vec{v}$ (hármas-)vektorok lineáris vektorterét! (Az origóból induló vektorok terét és egy tetszőleges másik térbeli pontból induló vektorok vektorterét itt nem fogjuk megkülönböztetni, hiszen ezek egymásra kölcsönösen egyértelműen, lineárisan leképezhetők a vektorok párhuzamos eltolása révén.) A $\vec{v} \in V$ (hármas-)vektoroknak három Descartes-komponensük van, mint az elmozdulás, a sebesség, a gyorsulás vektorának. Ezeket úgy kapjuk meg, hogy a K Descartes-koordinátarendszert kijelölő $\vec{E}_i \in V$ $(i = 1, 2, 3)$ ortonormált bázisvektorok szerint felbontjuk az adott $\vec{v}$ vektort:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \vec{E}_i, \qquad v^i = \vec{E}_i \cdot \vec{v}. \tag{1.1.55}$$

A koordinátarendszer térbeli elforgatása során a $\vec{v}$ vektor ugyanaz a vektor marad. Csupán annyi történik, hogy az $\vec{E}_i$ ortonormált bázis helyett választunk egy másik, $\vec{E}'_i$ ortonormált bázist, amely a K' koordinátarendszer tengelyeinek az irányát jelöli ki. Ami változik, azok a $\vec{v}$ vektornak a Descartes-komponensei:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v^{i\prime} \vec{E}'_i, \qquad v^{i\prime} = \vec{E}'_i \cdot \vec{v}. \tag{1.1.56}$$

A.2. Vektorkomponensek transzformációja

Keressük meg a $\vec{v}$ vektor K rendszerbeli Descartes-komponensei és a K-hoz képest tetszőlegesen elforgatott K' rendszerbeli Descartes-komponensei közötti összefüggést. Bontsuk fel ehhez az eredeti bázisvektorokat az újak szerint,

$$\vec{E}_i = \sum_{j=1}^{3} (\vec{E}'_j \cdot \vec{E}_i) \vec{E}'_j, \tag{1.2.57}$$

ekkor

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \vec{E}_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} v^i (\vec{E}'_j \cdot \vec{E}_i) \vec{E}'_j = \sum_{j=1}^{3} v^{j\prime} \vec{E}'_j, \tag{1.2.58}$$

ahol

$$v^{j\prime} = \sum_{i=1}^{3} (\vec{E}'_j \cdot \vec{E}_i) v^i = \sum_{j=1}^{3} O_{j,i} v^i \tag{1.2.59}$$

adja meg a vektorkomponensek transzformációját. Az elforgatásnak a vektorkomponensekre gyakorolt hatását lineáris transzformáció írja le, amelynek mátrixa az elforgatás

$$O_{j,i} = \vec{E}'_j \cdot \vec{E}_i \tag{1.2.60}$$

mátrixa. Az elforgatások mátrixai 3×3-as, valós elemű mátrixok, az $O^{\mathrm{T}}_{i,j} = O_{j,i}$ transzponáltjuk éppen az inverzük:

$$\sum_{j=1}^{3} O_{i,j} O^{\mathrm{T}}_{j,k} = \sum_{j=1}^{3} (\vec{E}'_i \cdot \vec{E}_j)(\vec{E}'_k \cdot \vec{E}_j) = \sum_{j=1}^{3} (\vec{E}'_i)^j (\vec{E}'_k)^j = \vec{E}'_i \cdot \vec{E}'_k = \delta_{i,k}. \tag{1.2.61}$$

Az ilyen 3×3-as mátrixokat ortogonális mátrixoknak nevezzük. A vektorok tehát olyan háromkomponensű matematikai objektumok, amelyek a koordinátarendszer elforgatásakor változatlanok, de három komponensük ortogonális transzformáció szerint transzformálódik, amelynek mátrixát az új koordinátarendszer bázisvektorainak a régi koordinátarendszer bázisvektoraival képzett skalárszorzataiból alkotott mátrixelemek alkotják.

Ha bevezetjük a tetszőleges $\vec{v}$ vektor Descartes-komponenseiből alkotott

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \tag{1.2.62}$$

oszlopvektort és a forgatás $\mathbf{O}$ mátrixát, akkor a koordinátarendszer elforgatása során a $\mathbf{v}$ oszlopvektor transzformációja

$$\mathbf{v}\,' = \mathbf{O}\mathbf{v}, \tag{1.2.63}$$

ahol $\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{1}$.

Két tetszőleges vektor, $\vec{u}$ és $\vec{v}$ skaláris szorzata az eredeti és az elforgatott koordinátarendszerben azonos kell legyen, hiszen ha a vektorok az elforgatáskor nem változnak, akkor a hosszuk és bármely kettő által bezárt szög is ugyanaz marad. Ez azt jelenti, hogy a vektorok komponenseinek fenti transzformációjától elvárjuk, hogy eleget tegyen az

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} u^i v^i = \sum_{i=1}^{3} u^{i\prime} v^{i\prime} = \mathbf{u}'\,^T\mathbf{v}' \tag{1.2.64}$$

követelménynek. Ezt könnyen beláthatjuk, hiszen

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \mathbf{u}'\,^T\mathbf{v}' \\
&= \sum_{i=1}^{3} u^{i\prime} v^{i\prime} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} O_{i,j} u^j O_{i,k} v^k \\
&= \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} u^j v^k \sum_{i=1}^{3} O^{\mathrm{T}}_{j,i} O_{i,k} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} u^j v^k \delta_{j,k} \\
&= \sum_{i=1}^{3} u^i v^i.
\end{aligned} \tag{1.2.65}$$

A.3. Másodrendű tenzorok

Matematikai szempontból bonyolultabb fizikai mennyiségekkel is találkoztunk a Newton-i mechanikában, mint pl. a tehetetlenségi tenzor, a deformáció tenzora, a mechanikai feszültség tenzora, stb. Ezek ún. másodrendű (hármas-)tenzorok, olyan $\mathbf{t}$ matematikai objektumok, amelyek a koordinátarendszer elforgatása során változatlanok, de $3 \times 3 = 9$ darab $t^{i,j}$ komponensük a koordinátarendszer elforgatásai során a

$$t^{i,j\,\prime} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} O_{i,k} O_{j,l} t^{k,l} \tag{1.3.66}$$

szabály szerint transzformálódik. (A lényeges különbség egy tetszőleges $A_{i,j}$ 3×3-as mátrixszal összehasonlítva az, hogy utóbbinak az elemei változatlanok a koordinátarendszer elforgatása során!) Ha $t^{i,j} = t^{j,i}$ valamely koordinátarendszerben, akkor ez a tulajdonság minden elforgatott koordinátarendszerben is fennáll, és a $\mathbf{t}$ tenzort szimmetrikus másodrendű tenzornak nevezzük. Ha $t^{i,j} = -t^{j,i}$ valamely koordinátarendszerben, akkor ez a tulajdonság minden elforgatott koordinátarendszerben is fennáll, és a $\mathbf{t}$ tenzort antiszimmetrikus másodrendű tenzornak nevezzük. Bármely $\mathbf{t}$ másodrendű tenzor egyértelműen felbontható egy szimmetrikus $\mathbf{t}^{\mathrm{s}}$ és egy antiszimmetrikus $\mathbf{t}^{\mathrm{a}}$ tenzor összegére, amelyeknek komponensei tetszőleges koordinátarendszerben:

$$t^{\mathrm{s}\ i,j} = \frac{1}{2}(t^{i,j} + t^{j,i}), \qquad t^{\mathrm{a}\ i,j} = \frac{1}{2}(t^{i,j} - t^{j,i}). \tag{1.3.67}$$

A szimmetrikus másodrendű tenzornak $3 + 2 + 1 = 6$ darab, az antiszimmetrikus másodrendű tenzornak $2 + 1 = 3$ darab független (valós) komponense van. A szimmetrikus másodrendű tenzort egyértelműen fel lehet bontani egy diagonális rész és egy zérus spúrral rendelkező rész összegére:

$$t^{\mathrm{s}\ i,j} = \frac{1}{3}\delta_{i,j} \sum_{k=1}^{3} t^{\mathrm{s}\ k,k} + \left(t^{\mathrm{s}\ i,j} - \frac{1}{3}\delta_{i,j} \sum_{k=1}^{3} t^{\mathrm{s}\ k,k} \right). \tag{1.3.68}$$

Mindig létezik olyan bázis (koordinátarendszer), amelyben a tenzor szimmetrikus része diagonális. Azt mondjuk, hogy a tenzort ebben a bázisban főtengelyre transzformáltuk. A megfelelő bázisvektorok irányát nevezzük a főtengelyek irányainak.

A másodrendű (hármas-)tenzor elemeiből invariánsokat lehet szerkeszteni:

1. A tenzor spúrja (a szimmetrikus részének a spúrja) skalár, amelynek értéke az elforgatások során nem változik.
2. Az antiszimmetrikus rész 3 darab független komponenséből axiálvektort lehet szerkeszteni:

$$a_1 = t^{\mathrm{a}\ 2,3}, \quad a_2 = -t^{\mathrm{a}\ 1,3}, \quad a_3 = t^{\mathrm{a}\ 1,2}. \tag{1.3.69}$$

A.4. A tenzorok, mint multilineáris leképezések

A fenti, a fizikus ,,gyakorlati" szemléletén alapuló értelmezés a tenzoroknak azt a tulajdonságát hangsúlyozza, hogy komponenseik koordinátatranszformációk (pontosabban az egyik koordinátarendszerről a másikra történő áttérés) során meghatározott módon transzformálódnak. A tenzoroknak, mint matematikai objektumoknak a koordinátarendszer (a bázis) megválasztásától való függetlenségét jobban tükrözi az a matematikusi szemlélet, amely a tenzorokat, mint lineáris vektorterek fölötti lineáris leképezéseket értelmezi. Vegyük pl. az $\vec{u}$ vektorok lineáris V terét. A korábbi értelmezésünk szerinti $\vec{v}$ vektornak olyan $\mathbf{t}_{\vec{v}}$ lineáris leképezést feleltethetünk meg, amelyre

$$\mathbf{t}_{\vec{v}} : \forall \vec{u} \in V \;\mapsto\; \mathbf{t}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u} \in R, \tag{1.4.70}$$

azaz, amely bármely $\vec{u} \in V$ vektorhoz a $\vec{v} \cdot \vec{u}$ skalárszorzattal meghatározott valós számot rendeli hozzá. Meg lehet mutatni, hogy a V vektortér fölött értelmezett $\mathbf{t}_{\vec{v}}$ lineáris leképezések is egy V^* lineáris vektorteret alkotnak, amelyet az eredeti V vektortér duálisterének szokás nevezni, ennek $\mathbf{t}_{\vec{v}}$ elemeit pedig duális vektoroknak. A $\mathbf{t}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$ egyenlőséget úgy is olvashatjuk, hogy minden $\mathbf{t}_{\vec{v}} \in V^*$ duális vektorhoz megkereshetjük az egyenlőséget tetszőleges $\vec{u} \in V$ esetén azonosságként kielégítő $\vec{v} \in V$ vektort. Be lehet látni, hogy a V^* duális vektortér ilyen módon kölcsönösen egyértelműen leképezhető az eredeti V vektortérre. Az eredeti V vektortérben értelmezett $\vec{E}_i \in V$

$(i = 1,2,3)$ bázishoz a V vektortér és duálisa közötti kölcsönösen egyértelmű leképezés (egy-egyértelműen) hozzárendeli az $\vec{E}^{\star\, i} \equiv \mathbf{t}_{\vec{E}_i} \in V^*$ $(i = 1,2,3)$ duális bázist:

$$\vec{E}^{\star\, i}(\vec{E}_j) \equiv \mathbf{t}_{\vec{E}_i}(\vec{E}_j) = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = \delta_{i,j}. \tag{1.4.71}$$

A $\mathbf{t}$ másodrendű tenzor kicsit bonyolultabb objektum, az $(\vec{u},\vec{v}) \in V \otimes V$ rendezett vektorpárokat képezi le mind $\vec{u}$-ban, mind $\vec{v}$-ben lineárisan a valós számok halmazába. Ha V-ben bázist választottunk, akkor a leképezést

$$\mathbf{t}(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^{3} t_{i,j} u^i v^j \tag{1.4.72}$$

alakban adhatjuk meg. A korábban megbeszélt transzformációs tulajdonság alapján, ha áttérünk a másik K' koordinátarendszerre, akkor

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{3} t'_{i,j} u^{i\prime} v^{j\prime} &= \sum_{i',j'=1}^{3} \sum_{i,j=1}^{3} t'_{i,j} O_{i,i'} O_{j,j'} u^{i'} v^{j'} \\
&= \sum_{i',j'=1}^{3} \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,l=1}^{3} O_{i,k} O_{j,l} t_{k,l} (O^T)_{i',i} (O^T)_{j',j} u^{i'} v_{j'} \\
&= \sum_{i',j'=1}^{3} \sum_{k,l=1}^{3} \delta_{i',k} \delta_{j',l} t_{k,l} u^{i'} v^{j'} \\
&= \sum_{k,l=1}^{3} t_{k,l} u^k v^l.
\end{aligned} \tag{1.4.73}$$

Ez mutatja, hogy a tenzorkomponensek korábban megkövetelt transzformációs tulajdonsága éppen azt biztosítja, hogy maga a tenzor, mint a

$$\mathbf{t} : (\vec{u},\vec{v}) \in V \otimes V \ \mapsto \ \mathbf{t}(\vec{u},\vec{v}) \in R, \tag{1.4.74}$$

mindkét vektorváltozójában lineáris leképezés a koordinátarendszer, azaz a V vektortéren belüli bázis megválasztásától független matematikai objektum legyen.

A tenzorokat általában úgy értelmezik, mint olyan multi-lineáris leképezéseket, amelyek a

$$\underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{m} \ \otimes \ \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{n} \tag{1.4.75}$$

direktszorzat vektorteret képezik le a valós számok halmazára. A három-dimenziós euklideszi tér elforgatásaival szemben invariáns skalárokat úgy tekinthetjük, mint nulladrendű tenzorokat.

A.5. A duális vektorok komponenseinek geometriai jelentése

Válasszunk a V euklideszi vektortérben egységvektorokból egy nem ortogonális bázist (ferdeszögű koordinátarendszert), $\vec{E}_i \in V$ $(i = 1,2)$. [Az egyszerűség kedvéért két-dimenziós vektorteret (egy sík vektorait) vizsgáljuk.] Tetszőleges $\vec{v} \in V$ vektor felbontása ekkor

$$\vec{v} = v^1 \vec{E}_1 + v^2 \vec{E}_2. \tag{1.5.76}$$

A v^1 és v^2 komponensek geometriai jelentése megkapható, ha a $\vec{v}$ vektort ábrázoló nyíl hegyét a (ferdeszögű) koordinátatengelyekkel párhuzamosan vetítjük a bázisvektorokra. Vetítsük most a $\vec{v}$ vektort ábrázoló nyíl hegyét merőlegesen a bázisvektorok által meghatározott koordinátatengelyekre. Legyenek rendre az $\vec{E}_1$ és $\vec{E}_2$ vektorokra a merőleges vetületek v_1 és v_2 (ld. a 13. ábrát).

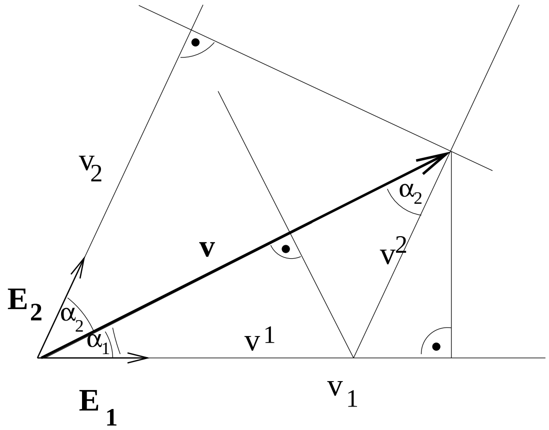

Figure 13: A $\vec{v}$ vektor kontravariáns v^1 és v^2 komponenseinek, ill. kovariáns v_1 és v_2 komponenseinek geometriai jelentése.

Ekkor írhatjuk, hogy

$$v = v^1 \cos\alpha_1 + v^2 \cos\alpha_2. \tag{1.5.77}$$

Másrészt, mivel

$$\cos\alpha_1 = \frac{v_1}{v}, \qquad \cos\alpha_2 = \frac{v_1}{v}, \tag{1.5.78}$$

azt kapjuk behelyettesítéssel, hogy

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = v^1 v_1 + v^2 v_2. \tag{1.5.79}$$

Szokás a vektor v^i komponenseit kontravariáns komponenseknek, a v_i komponenseit kovariáns komponenseknek nevezni. Ha ortogonális bázist (koordinátarendszert) használunk, akkor a kontra- és kovariáns komponensek azonosaknak adódnak.

Most megmutatjuk, hogy ha a kovariáns komponenseket a $\mathbf{t}_{\vec{v}} \in V^*$ duális vektor komponenseinek tekintjük, akkor tetszőleges két vektor skalárszorzata

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = v_1 u^1 + v_2 u^2 \tag{1.5.80}$$

alakú, ha az $\vec{E}_i \in V$ tetszőleges (nem feltétlenül ortogonális) bázishoz olyan $\vec{E}^{\star\ i} \in V^*$ $(i = 1,2)$ duális bázist választunk a duális vektortérben, amelyre

$$\vec{E}^{\star\ i}(\vec{E}_j) = \delta_{i,j}. \tag{1.5.81}$$

Ekkor tetszőleges vektorok skaláris szorzata:

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{u} &= \mathbf{t}_{\vec{v}}(\vec{u}) = (v_1\vec{E}^{\star\ 1} + v_2\vec{E}^{\star\ 2})(\vec{u}) \\
&= v_1\vec{E}^{\star\ 1}(\vec{u}) + v_2\vec{E}^{\star\ 2}(\vec{u}) \\
&= v_1\vec{E}^{\star\ 1}(u^1\vec{E}_1 + u^2\vec{E}_2) + v_2\vec{E}^{\star\ 2}(u^1\vec{E}_1 + u^2\vec{E}_2) \\
&= v_1u^1\vec{E}^{\star\ 1}(\vec{E}_1) + v_1u^2\vec{E}^{\star\ 1}(\vec{E}_2) + v_2u^1\vec{E}^{\star\ 2}(\vec{E}_1) + v_2u^2\vec{E}^{\star\ 2}(\vec{E}_2) \\
&= v_1u^1 + v_2u^2.
\end{aligned} \tag{1.5.82}$$

B. Vektoranalízis

Ebben a fejezetben ismertetjük a vektoranalízis néhány fontos fogalmát és tételét, amelyeket az elektrodinamikában gyakran kell felhasználnunk.

B.1. Skalármező és vektormező fogalma.

Ebben a fejezetben a skalár ill. vektor megjelölés a 3-dimenziós térben végzett forgatásokkal szembeni transzformációs tulajdonságot jelent. **Skalármezőn a 3-dimenziós euklideszi tér $\vec{r}$ helyzetvektorú pontjaiban értelmezett $f(\vec{r})$, skalárértékű függvényt értünk.** Ha a helyzetvektorokat Descartes-komponenseikkel adjuk meg, akkor ez az $f(x,y,z)$ három-változós függvényt jelenti. **Vektormezőn a 3-dimenziós euklideszi tér $\vec{r}$ helyzetvektorú pontjaiban értelmezett $\vec{v}(\vec{r})$, vektorértékű függvényt értünk.** Ha a helyzetvektorokat és a $\vec{v}$ vektort is Descartes-komponenseikkel adjuk meg, akkor ez olyan három, $v_x(x,y,z)$, $v_y(x,y,z)$ és $v_z(x,y,z)$ függvényt jelent, amelyeknek a tér adott pontjában felvett értékei térbeli forgatások során úgy transzformálódnak, mint egy hármasvektor Descartes-komponensei. (Szigorúan véve a $\vec{v}(\vec{r})$ vektor adott $\vec{r}$ esetén az adott, $\vec{r}$ helyzetvektorú pontból kiinduló vektorok terében van értelmezve. Hallgatólagosan feltesszük, hogy a lokális bázisokat úgy választjuk a különböző $\vec{r}$ helyzetvektorú pontokhoz tartozó vektorterekben, hogy azokat párhuzamos eltolással kaphassuk meg egymásból. A térbeli elforgatásokról pedig feltesszük, hogy globálisak, azaz minden $\vec{r}$ helyzetvektorú pontban, az onnan kiinduló vektorok terében azonos módon forgatják a bázisvektorokat.)

B.2. Skalármező geometriai szemléltetése

A skalármezőt ún. **nívófelületekkel** lehet szemléltetni. A nívófelület olyan felület, amelynek pontjaiban a skalármező értéke állandó, azaz az

$$f(x,y,z) = \text{áll.} \tag{B.1}$$

egyenletet kielégítő pontok mértani helye az állandó rögzített értéke esetén.

B.3. Vektormező szemléltetése. Erővonalak.

A $\vec{v}(\vec{r})$ vektormezőt úgy szemléltethetjük, hogy az euklideszi tér minden $\vec{r}$ pontjában lerajzoljuk a vektormező ott felvett értékének megfelelő $\vec{v}(\vec{r})$ vektort ábrázoló nyilat. **A vektormező erővanalainak nevezzük azokat a görbéket, amelyeknek a vektormező vektorai mindenütt érintői. Az erővonalak sűrűségét arányosnak választjuk az $\vec{r}$ pontban a vektormező $|\vec{v}(\vec{r})|$ nagyságával.** Ez azt jelenti, hogy az $\vec{r}$ pontban felvett, infinitezimális df nagyságú és $\vec{n}$ normálisú felületelemen a normális irányában $\vec{v}(\vec{r})\cdot\vec{n}df$ számú erővonal lép át. Ennek integrálja tetszőleges F felületre, **a $\vec{v}$ vektormezőnek az adott F felületre vett fluxusa:**

$$\Phi = \int_F df \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}. \tag{B.2}$$

B.4. Differenciálási műveletek

Alább nem adunk meg koordinátarendszertől független definíciókat, hanem csak a Descartes-koordinátarendszerben érvényes számolási szabályokat. A legfontosabb differenciális operátorok, a gradiens (grad), a divergencia (div) és a rotáció (rot) az alábbi lineáris leképezéseket jelentik:

1. **Skalármező gradiense:** Legyen $f(\vec{r})$ a 3-dimenziós euklideszi téren értelmezett skalármező (minden változójában differenciálható, skalárértékű függvény). A skalármező gradiense,

$$\text{grad } f \equiv \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla} f : \text{ skalármező } \rightarrow \text{ vektormező} \tag{B.3}$$

olyan leképezés, amely az $f(\vec{r})$ skalármezőhöz olyan vektormezőt (vektorértékű függvényt) rendel, amelynek Descartes-komponensei

$$\text{grad } f \equiv \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \equiv \sum_{i=1}^{3} \vec{E}_i \frac{\partial f}{\partial r_i}. \tag{B.4}$$

Itt bevezettük a ,,nabla" vektor-operátort, mint vektorkomponensekkel rendelkező differenciál-operátort:

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \vec{E}_i \frac{\partial}{\partial r_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{B.5}$$

Skalármező gradiense olyan vektormező, amelynek vektorai a tér minden pontjában merőlegesek a skalármezőnek az adott pontra illeszkedő nívófelületére és irányuk a nívófelületek állandójának növekedési irányába mutat.

2. **Vektormező divergenciája:** Legyen $\vec{v}(\vec{r})$ a 3-dimenziós euklideszi téren értelmezett vektormező (vektorértékű függvény, amelynek Descartes-komponensei minden változóban differenciálhatóak). A vektormező divergenciája,

$$\text{div } \vec{v} \equiv \frac{\partial \vec{v}(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} : \text{ vektormező } \rightarrow \text{ skalármező} \tag{B.6}$$

olyan leképezés, amely a $\vec{v}(\vec{r})$ vektormezőhöz skalármezőt rendel az alábbi utasítás szerint:

$$\text{div } \vec{v} \equiv \frac{\partial \vec{v}(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i(\vec{r})}{\partial r_i} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{B.7}$$

3. **Vektormező rotációja:** Legyen $\vec{v}(\vec{r})$ a 3-dimenziós euklideszi téren értelmezett vektormező (vektorértékű függvény, amelynek minden komponense minden változóban differenciálható). A vektormező rotációja,

$$\text{rot } \vec{v} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{v}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} : \text{ vektormező } \rightarrow \text{ vektormező} \tag{B.8}$$

olyan leképezés, amely a $\vec{v}(\vec{r})$ vektormezőhöz olyan vektormezőt rendel, amelynek Descartes-komponensei

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{v}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \sum_{i=1}^{3} \vec{E}_i \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} v_k \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{B.9}$$

Néhány fontos tulajdonság:

1. **Vektormező rotációjának divergenciája mindig zérus:**

$$\text{div}\ \ \text{rot}\ \vec{v} \equiv 0. \tag{B.10}$$

Ezt a következőképpen láthatjuk be:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i}[\ \text{rot}\vec{v}]_i = \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial r_j}v_k = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}v_k = 0, \tag{B.11}$$

ahol az utolsó egyenlőség azért áll fenn, mert ϵ_{ijk} az ij összegző indexekben antiszimmetrikus, míg a második parciális derivált ugyanezekben az indexekben szimmetrikus.

2. **Skalármező gradiensének rotációja azonosan zérus:**

$$\text{rot}\ \ \text{grad}\ f = 0 \tag{B.12}$$

Ezt az alábbiak szerint látjuk be:

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial r_j}[\ \text{grad}\ f]_k &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial r_j}\frac{\partial}{\partial r_k}f \\ &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_k}f = 0,\end{aligned} \tag{B.13}$$

ahol az utolsó egyenlőség ismét egy antiszimmetrikus és egy szimmetrikus tenzor kontrakciója miatt áll fenn.

A fenti differenciáloperátorokból képezhetjük a kétszeres deriválást jelentő Δ **Laplace-operátort,** amely tetszőleges (változóiban legalább kétszer differenciálható) skalármezőre hatva, abból ismét skalármezőt állít elő:

$$\Delta\phi \equiv\ \text{div}\ \ \text{grad}\ \phi \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial r_i^2} = \frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}. \tag{B.14}$$

Értelmezhetjük a **(vektor-)Laplace-operátort**, mint olyan operátort, amely tetszőleges (kétszer differenciálható) $\vec{v}(\vec{r})$ vektormezőből olyan $\Delta\vec{v}(\vec{r})$ vektormezőt állít elő, amelynek Descartes-komponensei:

$$[\Delta\vec{v}]_i = \Delta v_i, \tag{B.15}$$

ahol Δ a jobb oldalon a skalárfüggvényekre ható Laplace-operátor.

Alább táblázatban foglaljuk össze a differenciáloperátorok hatásának kiszámítási módját hengerkoordinátarendszerben (HKR) és gömbi polárkoordinátarendszerben (GPKR):

Derivált mező	HKR
grad $\phi =$	$\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z$
div $\vec{v} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$
rot $\vec{v} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z$
$\Delta\phi =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

Derivált mező	GPKR
grad $\phi =$	$\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$
div $\vec{v} =$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta}$
rot $\vec{v} =$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta v_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta$
$\Delta\phi =$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$

B.5. Integráltételek

A fizikai alkalmazásokban gyakran felhasználjuk az alábbi két, fontos integráltételt. (Feltesszük, hogy a tételekben szereplő vektormező ,,kellően jó tulajdonságú”, hogy az előforduló integrálok létezzenek.)

1. **Gauss tétele: Egy $\vec{v}$ vektormező divergenciájának egy tetszőleges V térfogatra vett térfogati integrálja egyenlő a vektormezőnek a térfogatot határoló zárt F felületre vett integráljával:**

$$\int_V dV \quad \text{div}\ \vec{v} = \oint_F df\ \vec{v}\cdot\vec{n}, \tag{B.16}$$

ahol $\vec{n}$ az F felület külső normálisa.

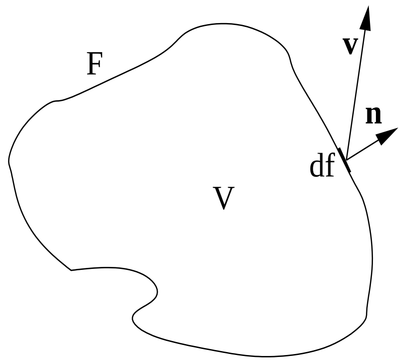

Figure 14: A V térfogatot határoló zárt F felület, $\vec{n}$ a külső normális, $\vec{v}$ a vektormező értéke a df felületelemen.

Ha a bal oldalon a V térfogatot összehúzzuk egyetlen P pontra, akkor

$$\mathrm{div}\ \vec{v}(P) = \lim_{V\to P} \frac{1}{V} \oint_F df\ \vec{v}\cdot\vec{n} \tag{B.17}$$

adódik, ahol a jobb oldalon az integrál a P pontból kiinduló erővonalak száma. **Ezért div $\vec{v}(P)$ a P pontban a $\vec{v}(\vec{r})$ vektormező erővanalainak forrássűrűsége. Ha a vektormező divergenciája zérus, akkor azt mondjuk, hogy a vektormező forrásmentes.** Forrásmentes vektormezőben az erővonalak nem végződhetnek el valamely pontban, azaz vagy a végtelenből a végtelenbe kell futniuk, vagy önmagukba kell záródniuk. Ezek szerint a vektormező rotációja forrásmentes vektormező. Minden forrásmentes $\vec{v}_{\mathrm{f.m.}}(\vec{r})$ vektormező előállítható egy $\vec{a}(\vec{r})$ vektormező rotációjaként: $\vec{v}_{\mathrm{f.m.}}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\ \vec{a}(\vec{r})$.

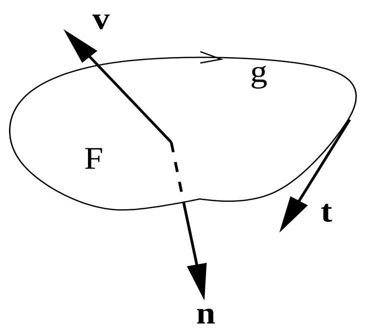

Figure 15: Az F felületet határoló g zárt görbe, $\vec{n}$ a felület normálisa, $\vec{t}$ a görbe érintője (a normálishoz a jobbkéz-szabály szerint irányítva).

2. **Stokes tétele: Vektormező rotációjának az F felületre vett integrálja egyenlő a vektormezőnek a felületet határoló zárt g görbére vett integráljával:**

$$\int_F df\ \vec{n}\cdot\ \mathrm{rot}\ \vec{v} = \oint_g ds\ \vec{t}\cdot\vec{v}, \tag{B.18}$$

ahol az F felület $\vec{n}$ normálisa és a felületet határoló g görbe $\vec{t}$ érintője a jobbkézszabálynak megfelelően vannak irányítva. (A geometriai viszonyokat a 15. ábra mutatja.)

Ha a g görbét egyetlen P pontba húzzuk össze, akkor

$$\text{rot } \vec{v} = \lim_{g \to P} \frac{1}{F} \oint_g ds\ \vec{t} \cdot \vec{v}, \tag{B.19}$$

ahol a jobb oldalon az integrál a $\vec{v}$ vektormező ún. **örvényerőssége. Ha a vektormező rotációja zérus, akkor azt mondjuk, hogy a vektormező örvénymentes.** Örvénymentes vektormezőnek nincsenek önmagába záródó erővonalai. Minden örvénymentes $\vec{v}_{\text{o.m.}}(\vec{r})$ vektormező előállítható egy $f(\vec{r})$ skalármező gradienseként: $\vec{v}_{\text{o.m.}}(\vec{r}) = \text{ grad } f(\vec{r})$.

Meg lehet mutatni, hogy tetszőleges $\vec{v}(\vec{r})$ vektormező felbontható egyértelműen egy forrásmentes $\vec{v}_{\text{f.m.}}(\vec{r})$ és egy $\vec{v}_{\text{o.m.}}(\vec{r})$ örvénymentes vektormező összegére: $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_{\text{f.m.}}(\vec{r}) + \vec{v}_{\text{o.m.}}(\vec{r})$, ahol tehát $\text{div } \vec{v}_{\text{f.m.}}(\vec{r}) = 0$ és $\text{rot } \vec{v}_{\text{o.m.}}(\vec{r}) = 0$. Ekkor mindig létezik olyan skalár-, ill. vektormező, hogy $\vec{v}_{\text{f.m.}}(\vec{r}) = \text{ rot } \vec{a}(\vec{r})$ és $\vec{v}_{\text{o.m.}}(\vec{r}) = \text{ grad } f(\vec{r})$, úgyhogy

$$\vec{v}(\vec{r}) = \text{ grad } f(\vec{r}) + \text{ rot } \vec{a}(\vec{r}). \tag{B.20}$$

Itt az $f(\vec{r})$ skalármező egy additív állandó erejéig van csak egyértelműen meghatározva.

A $\vec{v}_{\text{f.m.}}(\vec{r})$ vektormező akkor és csak akkor forrásmentes, ha tetszőleges g zárt görbére illeszkedő F felületre vett fluxusa, $\int_F df\ \vec{n} \cdot \vec{v}_{\text{f.m.}}(\vec{r})$ független a görbére illeszkedő F felület megválasztásától.

A $\vec{v}_{\text{o.m.}}(\vec{r})$ vektormező akkor és csak akkor örvénymentes, ha tetszőleges két P_1 és P_2 pontot összekötő görbementi integrálja, $\int_g ds\ \vec{t} \cdot \vec{v}_{\text{o.m.}}(\vec{r})$ független a pontokat összekötő g görbe megválasztásától.

C. Négyes-tenzorok

C.1. Tenzoralgebra

A téridő négy-dimenziós Minkowski-tér, amelynek pontjait a négyes-helyzetvektorok jelölik ki. **A négyestenzorok olyan matematikai objektumok, amelyek a Lorentz-transzformációk során változatlanok maradnak.** A tenzorok a Minkowski-térben választott tetszőleges bázisban (koordinátarendszerben) egyértelműen felbonthatók komponensekre. A tenzorkomponensek a Lorentz-transzformációk (bázistranszformációk) során jól meghatározott módon transzformálódnak. Ahelyett, hogy megadnánk a tenzoroknak, mint a koordinátarendszer megválasztásától független matematikai objektumoknak a pontos, matematikai definícióját, itt a tenzorokat a komponenseik transzformációs tulajdonságai alapján azonosítjuk.

C.1.1. Négyes-helyzetvektor

Az elemi események sokaságának inerciarendszertől független geometriai struktúrája a téridő. Ha valamely K inerciarendszerben Descartes-féle térkoordinátarendszert jelölünk ki és a K-ban nyugvó órákat szinkronizáljuk, akkor minden elemi eseményhez, azaz a téridő minden pontjához 4 darab x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) koordinátát rendelhetünk hozzá, amelyek a Lorentz-transzformáció szerint transzformálódnak. Ilymódon a téridő pontjaihoz

$$(x^\mu) \quad = \quad \begin{pmatrix} x^0 = ct \\ x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \tag{C.1.1}$$

4-komponensű mennyiségeket rendelhetünk hozzá. A három térkoordináta természetesen a háromdimenziós térben az esemény helyzetvektorát határozza meg. (A továbbiakban a görög indexek a 0, 1, 2, 3 értékeket futják be, a latin indexek pedig a hármasvektorok Descartes-komponenseinek 1, 2, 3 értékeket befutó indexei.) A téridő, ill. a választott koordinátarendszer $4 = 3 + 1$ dimenziós, 3 térbeli és 1 idődimenziója van. Ez a négy-komponensű mennyiség azért tartozik a koordinátarendszertől független négyes-tenzorok családjába, mert az invariáns ívhossznégyzet,

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{C.1.2}$$

segítségével értelmezhetjük ezen négy-komponensű matematikai objektum invariáns hosszát. Az x^μ komponenseket a **négyes-helyzetvektor kontravariáns komponenseinek** nevezzük.

A négyes-helyzetvektor hossza az $s^2 = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2$ ívhossznégyzet, ami a 4-dimenziós koordinátarendszer origójának és az x^μ komponensekkel adott négyes-helyzetvektor hegye által kijelölt eseménynek az invariáns távolsága. A négyes-helyzetvektor hosszát egyszerű alakban írhatjuk, ha bevezetjük a **négyes-helyzetvektor kovariáns komponenseit**:

$$(x_\mu) \quad \equiv \quad (ct, -x^i) = (ct, -\vec{r}), \tag{C.1.3}$$

ezzel ugyanis

$$s^2 = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu. \tag{C.1.4}$$

A továbbiakban **használni fogjuk azt az Einstein-féle konvenciót, hogy az egyező kontra- és kovariáns indexekre a képletekben összegezni kell.** Ekkor azt kapjuk, hogy

$$s^2 = x^\mu x_\mu, \qquad ds^2 = dx^\mu dx_\mu. \tag{C.1.5}$$

C.1.2. Négyesvektorok

Minden olyan A^μ kontravariáns komponensekkel adott mennyiséget, amelynek komponensei Lorentz-transzformáció során ugyanúgy transzformálódnak, mint a dx^μ koordinátanövekmények, négyesvektornak nevezünk. A négyesvektor A^0 komponense skalár a 3-dimenziós forgatásokkal

szemben, a hármas-térbeli A^i komponensek pedig egy 3-dimenziós $\vec{A}$ vektort alkotnak: $A^\mu = (A^0, \vec{A})$. A négyesvektor megfelelő **kovariáns komponensei**, $A_\mu = (A^0, -\vec{A})$ Lorentz-transzformáció hatására úgy transzformálódnak, mint a dx_μ kovariáns koordinátanövekmények. A négyesvektor hossza invariáns a Lorentz-transzformációkkal szemben: $A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - \vec{A}^{\,2}$. Pl. az (1.2.44) Lorentz-lökés hatására az A^μ négyesvektor komponenseinek transzformációja:

$$A^0 = \frac{A^{0'} + (V/c)A^{1'}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad A^1 = \frac{A^{1'} + (V/c)A^{0'}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad A^2 = A^{2'}, \quad A^3 = A^{3'}. \tag{C.1.6}$$

Az A^μ és a B^μ vektorok skalárszorzata,

$$A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \sum_{i=1}^{3} A^i B^i \tag{C.1.7}$$

alakban van értelmezve és Lorentz-invariáns.

C.1.3. Lorentz-skalár

Minden olyan Φ mennyiséget, amely a Lorentz-transzformációkkal szemben invariáns marad, Lorentz-skalárnak nevezünk. Ilyen például a ds ívhosszelem és általában két tetszőleges négyesvektor skalárszorzata.

C.1.4. Négyestenzorok

Azokat a T mennyiségeket, amelyeknek a $T^{\mu\nu\rho\dots}{}_{\kappa\lambda\sigma\dots}$ komponensei Lorentz-transzformációk során úgy transzformálódnak egymás között, mint a

$$dx^\mu dx^\nu dx^\rho \cdots dx_\kappa dx_\lambda dx_\sigma \cdots \tag{C.1.8}$$

rendezett szorzat, $n+m$-edrendű négyestenzornak nevezzük, a $T^{\mu\nu\rho\dots}{}_{\kappa\lambda\sigma\dots}$ komponenseket pedig a tenzor a n-szer kontravariáns és m-szer kovariáns komponenseinek. A Lorentz-skalárokat nulladrendű tenzoroknak tekinthetjük. Az elsőrendű tenzorok a négyes-vektorok.

Pl. a T másodrendű tenzor kétszer kontravariáns $T^{\mu\nu}$ komponenseinek transzformációját a következő séma szerint találhatjuk meg:

$$dx^0 dx^0 = \frac{dx^{0'}dx^{0'} + (V/c)dx^{1'}dx^{0'} + (V/c)dx^{0'}dx^{1'} + (V^2/c^2)dx^{1'}dx^{1'}}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}\sqrt{1-(V^2/c^2)}} \tag{C.1.9}$$

mintájára

$$T^{00} = \frac{T^{00'} + (V/c)T^{10'} + (V/c)T^{01'} + (V^2/c^2)T^{11'}}{1-(V^2/c^2)}, \tag{C.1.10}$$

stb.

C.1.5. Kontrakció

Tenzor rendjét csökkenthetjük 2-vel, ha egy kontravariáns és egy kovariáns indexét összeejtjük és összegzünk rá; ezt nevezzük **kontrakciónak**. Pl. a $T^{\mu}{}_{\mu}$ kontrakció a $T^{\mu}{}_{\nu}$ másodrendű tenzorból skalárt állít elő.

C.1.6. Egységtenzor

Az **egységtenzor** tetszőleges négyesvektorral szorozva azt önmagába viszi át: $\delta^{\mu}_{\rho} A^{\rho} = A^{\mu}$. Az egységtenzor elemei a

$$(\delta^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{C.1.11}$$

alakba rendezhetők. Az egységtenzor spúrja $\delta^{\mu}_{\mu} = 4$. Az egységtenzor inverze önmaga: $\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\rho}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$. Az egységtenzor komponenseinek mátrixa Lorentz-transzformáció során önmagába megy át.

C.1.7. A metrikus tenzor

Bevezetjük a $g^{\mu\nu}$ **metrikus tenzor**t azzal a definícióval, hogy tetszőleges kovariáns vektorból kovariáns komponenseiből állítsa elő a vektor kontravariáns komponenseit: $A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}$. A metrikus tenzor 2-szer kovariáns $g_{\mu\nu}$ komponensei segítségével $g_{\mu\nu} A^{\nu} = A_{\mu}$. **A metrikus tenzor tehát a tenzorindexek fel és lehúzására szolgál.**

A metrikus tenzor komponenseit mátrixalakba rendezve:

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{C.1.12}$$

A metrikus tenzor komponensei Lorentz-transzformáció során nem változnak.

A metrikus tenzor kovariáns, ill. a kontravariáns komponenseiből képezett mátrixok egymás inverzei: $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}$. A metrikus tenzor determinánsa $g = \det(g^{\mu\nu}) = -1$.

A metrikus tenzor segítségével az ívhosszelem négyzete

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g^{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu} \tag{C.1.13}$$

alakot ölt. **A metrikus tenzor tehát azt az utasítást tartalmazza, hogy hogyan kell kiszámítani az ívhosszelem négyzetét a koordináta-differenciálokból.** A metrikus tenzor komponenseinek (C.1.12) értékei az úgynevezett

Minkowski-tér metrikájára jellemzőek. A Természet a téridő olyan tartományaiban, ahol nincsen jelen számottevő gravitációs mező, a Minkowski-metrikájú téridőt, azaz a pszeudo-euklideszi geometriát valósítja meg a tapasztalat szerint. A metrikus tenzor $(+,-,-,-)$ szignatúrája fejezi ki, hogy a téridő pszeudo-euklideszi geometriájú.

(A 3-dimenziós euklideszi térben a metrikus tenzor Descartes-komponenseiből alkotott 3×3-as mátrix egy egységmátrix, a megfelelő négy-dimenziós euklideszi tér metrikus tenzorának Descartes-komponenseiből alkotott mátrix egy 4×4-es egységmátrix. Az euklideszi geometriát a $(+,+,+)$ ill. $(+,+,+,+)$ szignatúra jellemzi.)

Tetszőleges A^μ és B^μ négyesvektorok skalárszorzata

$$A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu \tag{C.1.14}$$

alakba írható.

C.1.8. Másodrendű antiszimmetrikus négyestenzor

Az $F_{\mu\nu}$ másodrendű antiszimmetrikus négyestenzor F_{0i} komponensei egy $\vec{E}$ 3-dimenziós térbeli polárvektor E^i komponenseinek tekinthetők, ugyanakkor az F_{ij} komponensekből egy 3-dimenziós $\vec{B}$ axiálvektor alkotható: $B_z = -F_{12}$, $B_y = F_{13}$, $B_x = -F_{23}$. Az antiszimmetrikus négyestenzor Descartes-komponenseit mátrixalakba rendezve:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.1.15}$$

C.2. Tenzoranalízis

C.2.1. Skalárfüggvény négyesgradiense

Legyen $\varphi(x)$ skalármező, azaz a téridő (a Minkowski-tér) pontjaiban értelmezett Lorentz-skalár értékű függvény. Ekkor $\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}$ egy vektor kovariáns komponenseiként, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$ pedig a vektor kontravariáns komponenseiként transzformálódik. Ezt a vektort nevezzük a $\varphi(x)$ skalármező négyesgradiensének. Skalármező négyes-gradiense egy négyes-vektormező. (Ez rögtön következik abból, hogy $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} dx^\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} dx_\mu$ skalár.) Formálisan a $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, ill. a $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ operátorokat egy „négyes-vektor" kovariáns ill. kontravariáns komponenseinek kell tekintenünk.

C.2.2. Vektormező négyesdivergenciája

Legyen $A^\mu(x)$ tetszőleges, a Minkowski-téren értelmezett vektormező. Ennek négyesdivergenciája, $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A^\mu$ Lorentz-skalár.

Megjegyezzük, hogy tenzormező divergenciáját képezve, 2-vel alacsonyabb rendű tenzor az eredmény.

C.2.3. Térfogati integrál. Gauss tétele

A Lorentz-lökések (1.2.44) képletéből látszik, hogy a négyes-térfogatelem,

$$d\Omega \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = cdtdV \tag{C.2.1}$$

Lorentz-invariáns.

A négydimenziós Minkowski-térben is érvényes **Gauss tétele**: négyesvektor négyes-divergenciájának tetszőleges véges Ω négyes-térfogatra vett integrálja egyenlő ezen négyes-vektor érintőirányú komponensének a négyes-térfogatot határoló zárt felületre vett integráljával. Jelölje dS_μ a felületelem vektorát (a felületelem területével arányos nagyságú, a felület külső normálisának irányába mutató vektort), akkor

$$\int_\Omega \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} d\Omega \quad = \quad \oint A^\mu dS_\mu. \tag{C.2.2}$$

D. Dirac-delta

Egy-dimenziós Dirac-delta. A $\delta(x-x_0)$ Dirac-delta „függvény" úgy képzelhető el, mint egy olyan függvény, amelynek értéke mindenütt zérus a valós tengelyen, kivéve az $x=x_0$ pontot, ahol az értéke végtelen, de úgy, hogy tetszőleges („jó viselkedésű") $f(x)$ függvénnyel képezett szorzatának integrálja az x_0 pontot belsejében tartalmazó tetszőleges $[a,b]$ zárt intervallumon,

$$\int_a^b dx\delta(x-x_0)f(x) = f(x_0), \qquad a < x_0 < b \tag{D.1}$$

a függvény x_0 pontban felvett értékét adja. Speciálisan, ha $f(x) \equiv 1$, akkor

$$\int_a^b dx\delta(x-x_0) = 1, \qquad a < x_0 < b \tag{D.2}$$

azaz „a Dirac-delta olyan függvény, amelynek integrálja 1". A (D.1) egyenlőségben az integrálás határait „kitolhatjuk" a végtelenbe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x-x_0)f(x) = f(x_0). \tag{D.3}$$

A Dirac-delta előállítható integrál alakjában, mint

$$\delta(x-x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} e^{ik_x(x-x_0)}, \tag{D.4}$$

ahol i az imaginárus egység.

A Dirac-delta néhány fontos tulajdonsága:

$$\begin{aligned} \delta(\alpha x) &= \frac{1}{|\alpha|}\delta(x), \qquad \alpha \text{ valós} \\ \delta(f(x)) &= \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_i}\right|}, \qquad f(x_i)=0 \end{aligned} \tag{D.5}$$

ahol a második összefüggés jobb oldalán az $f(x)$ függvény valamennyi x_i zérushelyére összegezni kell. A Dirac-delta, $\delta(x)$ páros „függvény”, ezért

$$x\delta(x) \equiv 0. \tag{D.6}$$

3-dimenziós Dirac-delta. A Dirac-delta 3-dimenziós általánosítását olyan 3-változós (x, y, z) ill. egy darab vektorváltozós $(\vec{r})$ „függvénynek” tekintjük, amelynek értéke a tér minden pontjában nulla, kivéve az $\vec{r}_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ helyzetvektorú pontot, ahol olyan módon van végtelen szingularitása, hogy tetszőleges „jó viselkedésű” $f(\vec{r}) \equiv f(x, y, z)$ függvényt vele szorozva és integrálva a szinguláris pontot tartalmazó V tartományra,

$$\begin{aligned} f(\vec{r}_0) &= \int_V dV\ \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)f(\vec{r}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)f(x,y,z). \end{aligned} \tag{D.7}$$

A 3-dimenziós Dirac-deltát is előállíthatjuk integrál alakjában:

$$\begin{aligned} \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) &= \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} e^{ik_x(x-x_0)+ik_y(y-y_0)+ik_z(z-z_0)} \\ &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}. \end{aligned} \tag{D.8}$$

References

[1] L.D. Landau, E.M. Lifsic, *Elméleti fizika II.*, *Klasszikus erőterek.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976)

[2] Dede M., Demény A., *Kísérleti fizika II.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1979)

[3] Novobátzky K., *A relativitás elmélete* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1963)

[4] Nagy K., *Elektrodinamika*

[5] Horváth J., *Optika. Elektromágneses fényelmélet* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1966)

[6] G. Galilei, *Párbeszédek* (Kritérion, Bukarest, 1983)

[7] A. Einstein, *A mozgó testek elektrodinamikájáról*, Ann. der Phys. **18** (1906) 639; (magyar fordításban más munkáival együtt olvasható A. Einstein, *Válogatott tanulmányok* kötetben (Gondolat, Budapest, 1971))