KÖZEGEK ELEKTRODINAMIKÁJA

Elektrosztatika. Stacionárius áram

(Piszkozat)

Sailer K.

2008.

1 A Maxwell-egyenletek közegekben

1.1 Közegek osztályozása

A közegeket az elektrodinamika szempontjából két nagy csoportba sorolhatjuk: vezetőkre és szigetelőkre. Vezetőkben elektromos térerősség hatására makroszkopikusan megfigyelhető áram indul, azaz a vezetőkben vannak olyan töltött részecskék, amelyek az elektromos térerősség hatására makroszkopikus sebességmezővel jellemezhető áramlásba hozhatók. Az áramlási sebesség ezen töltött részecskék átlagos sebessége, az úgynevezett driftsebesség. Ezeket a töltött részecskéket töltéshordozóknak nevezik, a töltéshordozók áramlása jelenti az elektromos áramot a vezetőkben. A szigetelők olyan közegek, amelyekben az elektromos térerősség nem tud makroszkopikus áramot létrehozni, nincsenek bennük töltéshordozók.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor nem vittünk fel töltéseket kívülről a közegre és külső elektromágneses tér sincsen jelen. Ekkor a közeg tetszőleges darabja makroszkopikusan nézve elektromosan semleges. A közegben található pozitív és negatív töltésű részecskék átlagos száma térfogategységenként megegyezik, ha az átlagolást makroszkopikus, azaz az atomok (pontosabban a közeget alkotó, közelítőleg pontszerűnek tekinthető töltött részecskék, az elektronok és az atommagok) átlagos távolságánál jóval nagyobb tartományokra végezzük. Az atomok egyes öltött részecskéinek helyzetét részletesen visszatükröző, mikroszkopikus töltéssűrűség éles (Dirac-deltaszerű) ,,csúcsokkal" rendelkezik a közeget alkotó egyes töltött részecskék helyén. A makroszkopikus anyagdarankákra átlagolt töltéssűrűség azonban a közeg elektromos semlegessége miatt zérus. az egész közegben. A nem azonosan zérus mikroszkopikus töltéssűrűség és az egyes töltések mozgásából származó mikroszkopikus áramsűrűség a vákuumban érvényes Maxwell-egyenletek alapján mikroszkopikus skálán térben és időben változó $\vec{e}$ elektromos térerősséget és $\vec{b}$ mágneses indukciót kelt. Makroszkopikusan ezek átlagát észleljük, $\vec{E} = \overline{\vec{e}}$, $\vec{B} = \overline{\vec{b}}$. A vizsgált esetben a közegben az átlagos elektromos térerősség is, és az átlagos mágneses indukció is zérus, $\vec{E} = \overline{\vec{e}} = 0$, $\vec{B} = \overline{\vec{b}} = 0$.

Természetesen az elektromosan semleges, külső elektromágneses tértől leárnyékolt közeg viselkedése megváltozik, ha a közeget külső elektromágneses térbe helyezzük és, ill. vagy töltéseket viszünk fel rá kívülről, ill. áramot tartunk fenn benne. A Maxwell-egyenleteknek a makroszkopikus méretekben közegekre érvényes általánosítását fogjuk ebben a fejezetben tárgyalni.

1.2 A vákuumban érvényes Maxwell-egyenletek alkalmazása közeg jelenlétében

A Maxwell-egyenletek közegekben némileg módosulnak a vákuumban érvényes alakjukhoz képest. A Maxwell-egyenletek közeg által módosított alakjának megkereséséhez figyelembe kell vegyük a közegben, ill. annak atomi (mikroszkopikus) szerkezetében található töltéseket és áramokat. Abból indulunk ki, hogy a vákuumban érvényes Maxwell-egyenletek helyesen írják le atomi méretekben (mikroszkopikus szinten) a közeg jelenlétében is az elektromágneses mezőt. A mikroszkopikus szinten érvényes Maxwell-egyenletekben azonban explicit módon kell szerepeltetni az atomokban található töltéseket és az azok mozgásából származó áramsűrűségeket, mint a mikroszkopikus elektromágneses mező forrásait. Jelölje $\vec{e}$ és $\vec{b}$ rendre a közeg töltései és a kívülről bevitt, úgynevezett külső töltések keltette elektromágneses mezőben a mikroszkopikus méretekben megfigyelhető elektromos térerősséget és mágneses indukciót. Jelölje továbbá ρ_{med} és $\vec{j}_{med}$ rendre a közeg (,,medium") saját töltéseinek sűrűségét és áramsűrűségét, ρ_{ex}, ill. $\vec{j}_{ex}$ pedig a kívülről bevitt töltések (,,external") sűrűségét, ill. áramsűrűségét. Ekkor az atomi méretekben megfigyelhető elektromágneses mezőt a vákuumban érvényes Maxwell-egyenletek az alábbi alakban írják le:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e} = 4\pi\rho_{med} + 4\pi\rho_{ex}, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{b} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j}_{med} + \vec{j}_{ex}) + \frac{1}{c}\frac{\partial e}{\partial t}. \tag{4}$$

1.3 Töltéssűrűség és áramsűrűség mikroszkopikus értelmezése

A közegek alapvető fontossságú tulajdonsága, hogy elektromosan semlegesek, ha nem viszünk fel rájuk külső töltéseket. Foglalkozzunk szigetelő közegekkel. Használjuk azt a naív modellt, hogy a szigetelő semleges atomokból áll, amelyeknek tömegközéppontja nem tud elmozdulni. Ugyanakkor az atomot alkotó egyes töltések el tudnak mozdulni az atomok tömegközéppontjához képest. Bár ez a modell túlságosan leegyszerűsített ahhoz, hogy elfogadhassuk, mint minden szigetelő helyes mikroszkopikus modelljét, mégis tanulságos, mert segít megérteni, hogy miért és hogyan módosulnak a Maxwell-egyenletek közegekben. Itt nem is fogunk arra törekedni, hogy modelltől független módon is eljussunk ugyanehhez az eredményhez, hanem azt az érdeklődő Hallgató olvasmányaira bízzuk. A fenti egyszerű modellben

$$\begin{aligned} \rho_{med}(t,\vec{r}) &= \sum_a \sum_n e_{a,n}\delta(\vec{r}-\vec{R}_a-\vec{r}_{a,n}(t)), \\ \vec{j}_{med}(t,\vec{r}) &= \sum_a \sum_n e_{a,n}\dot{\vec{r}}_{a,n}\delta(\vec{r}-\vec{R}_a-\vec{r}_{a,n}(t)), \end{aligned} \tag{5}$$

ahol $\vec{R}_a$ az a-adik atom tömegközéppontjának (TKP) helyzetvektora, $\vec{r}_{a,n}$ az a-adik atom TKP-jából annak n-edik ponttöltésébe mutató relatív helyzetvektor, az összegzések az összes atomra és egy-egy atomon belül az össze ponttöltésre vonatkoznak. Megjegyezzük, hogy vezetőben az atomokat alkotó töltések egy része nincsen az atomhoz kötve. Ezek a töltéshordozók, amelyek mozgása hozza létre a $\vec{j}_{ex}$ külső áramsűrűséget. Ezért tulajdonképpen naív modellünk vezetőkre nem alkalmazható. El fogjuk fogadni, hogy a szigetelők fenti naív modelljében a közegekre kapott Maxwell-egyenletek általánosan érvényesek minden közegben.

1.4 A makroszkopikus átlagolás „filozófiája"

A mikroszkopikus méretekben érvényes Maxwell-egyenletekben szereplő $\vec{e}$ és $\vec{b}$ elektromos térerősséget, ill. mágneses indukciót elvileg a szigorúan pontszerű q próbatöltésre ható erő

$$\vec{F} = q\vec{e} + \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{b} \tag{6}$$

Lorentz-féle erőtörvénye alapján lehet mérni. Ezek a térmennyiségek térben és időben is rendkívül gyorsan változnak.

Ha olyan elektromágneses jelenségekre szorítkozunk, amelyek jellegzetes időskálája ill. távolságskálája sokkal nagyobb, mint a közeget alkotó pontszerűnek tekintett töltések (atommagok, elektronok, stb.) közegen belüli mozgásának jellegzetes időtartama, ill. távolsága, akkor az elektromágneses mező atomi időskálákon és méretekben történő változásai közvetlenül nem érdekesek. Célszerű ezért átlagos térmennyiségekkel dolgozni, amelyekben az atomi skálán észlelhető változások térben és időben ki vannak átlagolva. A közegek elektrodinamikája egy olyan fenomenológikus elmélet, amelyben a fenti átlagolást gondolatban elvégezzük, és az átlagolás eredményeként kapott $\vec{E}$, ill. $\vec{B}$

makroszkopikus térmennyiségekkel dolgozunk. Eleve abból indulunk ki, hogy a makroszkopikus megfigyelő a maga „rossz" térbeli és időbeli felbontással rendelkező mérőeszközeivel nem tudja egy q próbatöltés pályájának atomi méretekben és atomi időskálán jelentkező változásait észlelni, ezért a Lorentz-erőtörvény alapján az átlagos, azaz makroszkopikus $\vec{E}$, ill. $\vec{B}$ térmennyiségeket tudja mérni. A vákuumban érvényes, a közeg mikroszkopikus szerkezetét közvetlenül figyelembe vevő Maxwell-egyenletek helyett a közeg leírására olyan Maxwell-egyenleteket fogunk használni, amelyekben már csak a fenti értelemben átlagos, makroszkopikusan megfigyelhető térmennyiségek fognak szerepelni. Az átalgolás pontos utasításával szerencsére nem szükséges foglalkoznunk, az egyenletek alakja így is megtalálható. Mindazt, ami a közeg mikroszkopikus szerkezetére és az átlagolás módjára vonatkozó ismeret, bele fogjuk olvasztani néhány anyagegyenletnek nevezett összefüggésbe. Az anyagegyenleteket azonban nem fogjuk a közeg mikroszkopikus modelljéből levezetni, hanem kísérleti úton megtalált, úgynevezett fenomenológikus összefüggéseket fogunk anyagegyenletekként használni.

Az itt megfogalmazott program végrehajtása alakjukban nem módosítja azokat a Maxwell- egyenleteket, amelyekben nem szerepelnek töltések és áramok. Ezekben csupán a mikroszkopikus $\vec{e}$ és $\vec{b}$ térmennyiségeket kell rendre lecserélni átlagolás után a makroszkopikus $\vec{E}$, ill. $\vec{B}$ térmennyiségekre:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \tag{7}$$

(Hallgatólagosan elfogadtuk, hogy a mikroszkopikus térmennyiségek parciális deriváltjainak átlaga azonos a megfelelő átlagos térmennyiségek megfelelő parciális deriváltjaival. Ennek a feltevésnek a helyességét, érvényességi határait csak akkor diszkutálhatjuk, ha többet tudunk az átlagolás módjáról. Az átlagolás módjára a fizika statisztikus fizikának nevezett fejezete szolgáltat eljárást, amivel azonban itt nem foglalkozhatunk.)

1.5 A Gauss-törvény közegben

Vizsgáljuk meg az átalgolás eredményét a másik két Maxwell-egyenlet esetében. Használjuk fel, hogy az atomok kicsiny méretűek és az egyes töltéseknek az atom TKP-jához képesti elmozdulásai nagyon kicsinyek az atomok átlagos távolságához képest. Ekkor a közeg töltéseinek mikroszkopikus töltéssűrűsége és áramsűrűsége sorbafejthető az $\vec{r}_{a,n} = 0$ értékek körül:

$$
\begin{aligned}
\rho_{med}(t,\vec{r}) &= \sum_a \sum_n e_{a,n} \Big[1 - (\vec{r}_{a,n}(t) \cdot \vec{\nabla}) + \frac{1}{2} (\vec{r}_{a,n}(t) \cdot \vec{\nabla})^2 + \mathcal{O}\left(r_{a,n}^3 \right) \Big] \delta(\vec{r} - \vec{R}_a) \\
\vec{j}_{med}(t,\vec{r}) &= \sum_a \sum_n e_{a,n} \dot{\vec{r}}_{a,n}(t) \Big[1 - (\vec{r}_{a,n}(t) \cdot \vec{\nabla}) + \mathcal{O}\left(r_{a,n}^2 \right) \Big] \delta(\vec{r} - \vec{R}_a). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Itt a $\vec{\nabla}$ gradiens-operátor a $\vec{r}$ változó függvényeire hat, azaz mindig csak a kifejezések jobb oldalán álló Dirac-deltára. Vezessük be a

$$
\vec{p}(t,\vec{r}) = \sum_a \sum_n e_{a,n} \Big[\vec{r}_{a,n}(t) - \frac{1}{2} \vec{r}_{a,n}(t) (\vec{r}_{a,n}(t) \cdot \vec{\nabla}) + \mathcal{O}\left(r_{a,n}^3 \right) \Big] \delta(\vec{r} - \vec{R}_a) \qquad (9)
$$

mikroszkopikus polarizációt. Ha az $\vec{r}_{a,n}$ elmozdulások kicsinyek, akkor ennek első tagja a vezető rendű tag, amelynek jelentése az elektromos dipólmomentum sűrűsége. Valóban az atomi elektromos dipólmomentumok

$$
\vec{d}_a(t) = \sum_n e_{a,n} \vec{r}_{a,n}(t) \qquad (10)
$$

amelyek segítségével a polarizáció vezető rendben a

$$
\vec{p}(t,\vec{r}) = \sum_a \vec{d}_a(t) \delta(\vec{r} - \vec{R}_a) + \mathcal{O}\left(r_{an}^2 \right) \qquad (11)
$$

mikroszkopikus, térfogati elektromos dipólmomentumsűrűség. A mikroszkopikus töltéssűrűség:

$$
\rho_{med}(t,\vec{r}) = \sum_a \sum_n e_{a,n} \delta(\vec{r} - \vec{R}_a) - \vec{\nabla} \cdot \vec{p}(t,\vec{r}) \qquad (12)
$$

alakot ölt. Ezt behelyettesítsük a mikroszkopikus Gauss-törvénybe:

$$
\vec{\nabla} \cdot (\vec{e} + 4\pi \vec{p}) = 4\pi \rho_{ex} + 4\pi \sum_a \sum_n e_{a,n} \delta(\vec{r} - \vec{R}_a) \qquad (13)
$$

adódik. Ezt kicsiny, de makroszkopikus térfogatra átlagoljuk. Mivel a közeg minden makroszkopikus darabkája elektromosan semleges, ezért a jobb oldalon az első tag átlagolás után zérust ad. A mikroszkopikus polarizáció várható értékét pedig $\vec{P}(t,\vec{r})$ polarizáció vektornak fogjuk nevezni, ez lényegében a közeg térfogategységének elektromos dipólmomentuma. Egyúttal az is látszik, hogy $\rho_P = \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ töltéssűrűséget jelent, ezt a közegben a polarizáció miatt megjelenő térfogati polarizációs töltéssűrűségnek nevezzük. Az átlagolás után a Gauss-törvény

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}+4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho \tag{14}$$

alakot ölt, ahol ρ a külső töltések sűrűsége (ρ_{ex} átlaga). A külső töltések most nem az $\vec{E}$ térerősség forrásai, hanem a

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \tag{15}$$

vektormező forrásai, amelyet elektromos eltolódási vektormezőnek nevezünk.

1.6 Az Ampère-törvény közegben

Fordítsuk most figyelmünket a mikroszkopikus Ampère-törvényre. A mikroszkopikus polarizáció idő szerinti első deriváltja

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{p}(t,\vec{r})}{\partial t} &= \sum_a\sum_n e_{a,n}\Big[\dot{\vec{r}}_{a,n}(t) - \frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_{a,n}(t)(\vec{r}_{a,n}(t)\cdot\vec{\nabla}) \\ &\quad -\frac{1}{2}\vec{r}_{a,n}(t)(\dot{\vec{r}}_{a,n}(t)\cdot\vec{\nabla}) + \mathcal{O}\left(r^3_{a,n}\right)\Big]\delta(\vec{r}-\vec{R}_a)\end{aligned} \tag{16}$$

amit felhasználva a közeg saját töltéseinek mikroszkopikus áramsűrűségét átírhatjuk

$$\begin{aligned}\vec{j}_{med}(t,\vec{r}) &= \frac{\partial\vec{p}(t,\vec{r})}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_a\sum_n e_{a,n}[\vec{r}_{a,n}(t)(\dot{\vec{r}}_{a,n}(t)\cdot\vec{\nabla}) \\ &\quad -\dot{\vec{r}}_{a,n}(t)(\vec{r}_{a,n}(t)\cdot\vec{\nabla})]\delta(\vec{r}-\vec{R}_a) \\ &= \frac{\partial\vec{p}(t,\vec{r})}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_a\sum_n e_{a,n}[\vec{\nabla}\times(\vec{r}_{a,n}(t)\times\dot{\vec{r}}_{a,n}(t))]\delta(\vec{r}-\vec{R}_a)\end{aligned} \tag{17}$$

alakba. Vezessük be az atomi áramok keltette atomi mágneses dipólmomentumot,

$$\vec{\mu}_a(t) = \frac{1}{2c}\sum_n e_{a,n}\vec{r}_{a,n}(t)\times\dot{\vec{r}}_{a,n}(t), \tag{18}$$

amelynek segítségével

$$\vec{j}_{med}(t,\vec{r}) = \frac{\partial \vec{p}(t,\vec{r})}{\partial t} + c\sum_a \vec{\nabla} \times \mu_a \delta(\vec{r}-\vec{R}_a) \tag{19}$$

Bevezethetjük a közegben a mágneses dipólmomentum térfogati sűrűségének mikroszkopikus kifejezését,

$$\vec{m}(t,\vec{r}) = \sum_a \vec{\mu}_a \delta(\vec{r}-\vec{R}_a) \tag{20}$$

s akkor

$$\vec{j}_{med}(t,\vec{r}) = \frac{\partial \vec{p}(t,\vec{r})}{\partial t} + c\vec{\nabla} \times \vec{m}(t,\vec{r}) \tag{21}$$

adódik. Ezt behelyettesítve a mikroszkopikus Ampère-törvénybe, az

$$\vec{\nabla} \times \vec{b} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + 4\pi\vec{\nabla} \times \vec{m} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{ex} \tag{22}$$

alakot ölt, amelynek mindkét oldalán elvégezve az átlagolást, megkapjuk az Ampére-törvény közegekben, makroszkopikus skálán érvényes alakját:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + 4\pi\vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{23}$$

ahol $\vec{M}$ a közeg mágnesezettsége, a makroszkopikus mágneses dipólmomentumsűrűség, $\vec{j}$ pedig a töltéshordozók makroszkopikus áramsűrűsége. Az egyeneltből látjuk egyrészt, hogy nem az elektromos térerősség fluxusának időbeli változása, hanem az elektromos eltolódási vektor fluxusának időbeli változása kelt a közegben mágneses örvényteret,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 4\pi\vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{24}$$

Másrészt azt is látjuk, hogy közegben az áramok (a külső, ill. a töltéshordozók által képviselt) áramok nem közvetlenül a mágneses indukcióteret keltik, hanem valójában az örvényes mágneses térerősségmezőt, amelyet

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \tag{25}$$

definiál. Az Ampère-törvény végleges alakja tehát

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{26}$$

1.7 Az anyagegyenletek

A közeg töltéseire az elektromágneses mező jelenlétében a Lorentz-erőtörvénynek megfelelő erő hat. Ezért azok mozgását az elektromágneses mező alapvetően befolyásolja. Ugyanakkor az adott külső töltések és áramok azt jelentik, hogy ezek mesterséges fenntartásáról gondoskodunk. Az elmondottakból következik, hogy az el nem tűnő elektromágneses mező jelenléte befolyásolja a közeg polarizációját, ill. mágnesezettségét. Általában a polarizáció és a mágnesezettség függ az elektromágneses mezőtől. Ha az elektromágneses mezők frekvenciája kicsiny az atomi mozgások frekvenciájához képest, ill. térbeli változásainak karakterisztikus távolsága jóval nagyobb az atomi méreteknél, azaz $\vec{E}$ és $\vec{B}$ időben és térben eléggé lassan változó mezők, akkor a polarizáció és a mágnesezettség adott helyen és adott pillanatban csak az adott helyen és időpillanatban uralkodó $\vec{E}$ és $\vec{B}$ térmennyiségek függvénye. Ezt a függést a tapasztalat szerint $\vec{P}(\vec{E})$, ill. $\vec{M}(\vec{H})$ alakban lehet figyelembe venni. Gyenge elektromágneses mezőben és ha az anyag $\vec{E} = 0$, ill. $\vec{H} = 0$ esetén nem rendelkezik polarizációval, ill. mágnesezettséggel, akkor a függvénykapcsolat tiszta tagot nem tartalmazó lineáris függvénnyel közelíthető. Izotróp közeg esetén $\vec{P}$ és $\vec{E}$, ill. $\vec{M}$ és $\vec{H}$ egyirányúak,

$$\vec{P} = \chi\vec{E}, \quad \vec{M} = \chi_m\vec{H} \tag{27}$$

ahol χ, ill. χ_m rendre a közeg elektromos, ill. mágneses szuszceptibilitása. Ilyen esetben fennállnak a

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \epsilon\vec{E}, \\ \vec{B} &= \vec{H} + 4\pi\vec{M} = \mu\vec{H} \end{aligned} \tag{28}$$

anyagegyenletek, ahol

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_m \tag{29}$$

rendre a közeg relatív (vákuumhoz képesti) elektromos dielektromos állandója ill. mágneses permeabilitása. Térben és időben gyorsan változó elektromágneses mezőben a közeg polarizációja, ill. mágnesezettsége adott helyen és időpillanatban függhet a közeg más helyein uralkodó elektromágneses mezőtől, ill. annak korábbi időpillanatokban felvett állapotaitól is. Ilyen esettel mi nem fogunk foglalkozni.

Hasonlóan elmondható, hogy vezetőben az áramsűrűség függ a vezetőben uralkodó elektromos térerősségtől. Időben és térben elég lassan változó és gyenge elektromos térerőséget feltételezve a vezetőben, ez lineáris függvénykapcsolattal közelíthető, ami izotróp közegben egyszerű arányosságot jelent,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \tag{30}$$

A tiszta tag zérus, ami kifejezi, hogy elektromos térerősség hiányában a vezetőben nem indul áram. Aktív áramköri elemekben (galvánelemek, akkumulátorok) bonyolult fizikai folyamatok töltésszétválasztást tudnak eredményezni, amelynek eredményeképpen makroszkopikus áram indulhat. Ezeket a folyamatokat effektív módon egy nem elektrosztatikai természetű, egységtöltésre ható töltésszétválasztó erő $\vec{E}'$ bevezetésével vehetjük figyelembe, és általánosan írhatjuk, hogy

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}'). \tag{31}$$

1.8 Lokális energiamegmaradás

Tekintsünk olyan közeget, amelyben az anyagegyenletek

$$\vec{D}(t,\vec{r}) = \epsilon(\vec{r})\vec{E}(t,\vec{r}), \quad \vec{B}(t,\vec{r}) = \mu(\vec{r})\vec{H}(t,\vec{r}), \tag{32}$$

azaz amelynek a relativ dielektromos állandója, ill. relatív mágneses permeabilitása csak a helytől függ. A lokális energiamegmaradás törvényét úgy kapjuk, hogy a Faraday-törvény differenciális alakját szorozzuk skalárisan $\vec{H}$-val, az Ampère-törvény differenciális alakját pedig skalárisan szorozzuk $\vec{E}$-vel és azután a két egyenlet megfelelő oldalait kivonjuk egymásból:

$$\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) - \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) \;=\; \frac{4\pi}{c}\vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \tag{33}$$

Felhasználva az anyagegyenleteket és szorozva az egyenlet mindkét oldalát $\frac{c}{4\pi}$-vel,

$$\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) - \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})] - \vec{j}\cdot\vec{E} \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{8\pi}(\epsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2)\Big]. \tag{34}$$

Felhasználva, hogy

$$[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) - \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})] = -\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}), \tag{35}$$

az egyenlet az energiára vonatkozó kontinuitási egyenlet alakját ölti:

$$\frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \;=\; -\vec{j} \cdot \vec{E}, \tag{36}$$

ahol az energiasűrűség

$$\rho_\epsilon = \frac{1}{8\pi}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}), \tag{37}$$

az energiaáramsűrűség pedig

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}. \tag{38}$$

Vezetőben $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ anyagegyenlet érvényes, amiből következik, hogy az elektromos térerősségnek az egységtérfogatban levő töltéshordozókon időegység alatt végzett munkája, az úgynevezett Joule-hő

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2 = \frac{1}{\sigma} \vec{j}^2. \tag{39}$$

2 Vezetők és szigetelők elektrosztatikája

2.1 Az elektrosztatika egyenletei és határfeltételek

Az elektrosztatika egyenletei vezetők jelenlétében, ha a vezetők közti térrészt szigetelő (dielektrikum tölti ki):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \end{aligned} \tag{40}$$

mivel $\vec{j} \equiv 0$ és $\vec{B} = 0$, $\vec{H} = 0$. Tegyük fel a továbbiakban, hogy a vezetők közti dielektrikum homogén, vagy legalábbis határfelületekkel érintkező homogén darabokból áll. Ekkor minden ilyen homogén szigetelődarabban $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ áll fenn, ahol ϵ az adott darabban állandó dielektromos állandó.

A vezetők közti térrészben természetesen $\rho = 0$, úgyhogy ott az elektrosztatika egyenletei (minden egyes homogén anyagdarabban)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \tag{41}$$

Ez azt jelenti, hogy a vezetők közti térrészben értelmezhető a ϕ elektrosztatikus potenciál, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, amelyre a

$$\Delta\phi = 0 \tag{42}$$

Poisson-egyenlet érvényes.

Mi a helyzet a vezetők belsejében, ill. felületén, azaz vezető és szigetelő határfelületén? Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a vezető homogén. Ha a vezető belsejében $\rho \neq 0$ lenne, akkor az a vezetőben elektromos eltolódási vektor forrása lenne Gauss törvénye értelmében, de akkor a $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ anyagegyenlet következtében a vezetőben az elektromos térerősség nem lenne zérus. A nem azonosan zérus elektromos térerősség a töltéshordozókat áramlásba hozná, azaz nem lenne sztatikus a helyzet. Az elektrosztatikában ezért a vezetők belsejében a makroszkopikus töltéssűrűség is és a térerősség is zérus. A vezetőkre felvitt töltésnek ezért a vezetők felületén kell elhelyezkednie.

Tegyük fel, hogy a vezető felületén a felületi töltéssűrűség η, ami általában a vezető felülete mentén pontról pontra más lehet. Először is meg kell állapítsuk, hogy a felületi töltéssűrűségnek olyannak kell lennie, hogy az elektromos térerősségnek a felülethez képest érintő irányú komponense a vákuum felől jövet a vezető felületénél folytonosan tűnjön el. Ha ugyanis nem így lenne, akkor a felület mentén mozognának a töltések (áram folyna a felületen), ami megint nem sztatikus helyzet. (A felülethez képest érintő irányú, más szóval tangenciális térerősség komponens eltűnését, $\vec{E}_t = 0$ úgy kaphatjuk meg, hogy a $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ egyenlet mindkét oldalát integráljuk egy olyan infinitezimális zárt görbe által határolt téglalapra, amelynek két oldala a vezető és a szigetelő határfelületével párhuzamosan fut, egyik a vezetőben, másik a vákuumban, és a téglalap másik két oldala pedig a határfelületre merőleges, és feltesszük, hogy a térerősség rotációja a felület környezetében véges, majd Stokes tételét alkalmazzuk.)

Írjuk fel ezután Gauss törvényét egy olyan infinitezimális, merőleges hasábra, amelynek alap- és fedlapjai Δf területűek és párhuzamosak a felület érintősíkjával:

$$\vec{D} \cdot \vec{n}\Delta f = 4\pi\eta\delta f, \quad \Rightarrow \quad \vec{D} \cdot \vec{n} = 4\pi\eta, \tag{43}$$

ahol $\vec{n}$ a vezető felületének külső normálisa. Az elektromos eltolódási vektor tehát a vezető felületénél merőleges a vezető felületére és a vezető külső normálisának irányába eső komponense arányos a felületi töltéssűrűséggel,

$D_n = 4\pi\eta$. Megállapodás szerint a vezető felületének normálisát mindig a vezetőből kifelé irányítjuk.

Mivel $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, azért a vezető felületénél a szigetelőben érvényes $D_n = \epsilon E_n = 4\pi\eta$, $\vec{E}_t = 0$ feltételek a Poisson-egyenlet számára az alábbi határfeltételeket jelentik:

1. A vezető felülete ekvipotenciális felület, azaz a vezető felületén $\phi =$áll. Természetesen akkor a vezető belsejében is ugyanez a potenciál érték, hiszen a vezetőben az elektromos térerősség zérus.

2. A vezető felületén $E_n = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{4\pi\eta}{\epsilon}$, ahol ϵ a szigetelő relatív dielektromos állandója. Itt $\partial\phi/\partial n$ a normális irányában vett úgynevezett iránymenti derivált, ami definíció szerint a normális vektor és a gradiensvektor skalárszorzata.

A vezető töltése

$$Q = \oint \eta df = \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint E_n df = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \oint \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{df} \tag{44}$$

A másik tisztázandó kérdés, hogy hogyan változik az $\vec{E}$ elektromos térerősség és a $\vec{D}$ elektromos eltolódási vektor két szigetelő közeg határán, amelyek egyikének ϵ_1, másikának ϵ_2 a relatív dielektromos állandója. Gauss törvényét, $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$, ill. a $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ törvényeket hasonlóképpen alkalmazva, mint vezető és szigetelő határán, kapjuk a

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1t} = E_{2t} \tag{45}$$

határfeltételeket. Az elektromos eltolódási vektor normális komponense és az elektromos térerősség vektor tangenciális komponense folytonosan változnak két szigetelő határán. Ebből természetesen következik, hogy az elektromos térerősség normális komponense, ill. az elektromos eltolódási vektor tangenciális komponense pedig ugrást szenved. A polarizációs töltéssűrűség, $\rho_P = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ zérus mindkét homogén közeg belsejében. A két közeg határfelületén azonban kompenzálatlan η_P felületi polarizációs töltéssűrűség jelenik meg. Ennek meghatározásához integráljuk a $\rho_P = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ egyenletet olyan, infinitezimális merőleges hasábra, amelynek alap- és fedlapja párhuzamos a határfelülettel és annak két oldalán helyezkedik el,

$$P_{1n} - P_{2n} = \eta_P \tag{46}$$

Ha $\vec{n}$ az 1-es közegből a 2-es közegbe mutató normális, akkor $\eta_{P1} = P_{1n} = \frac{1}{\Delta f}\int_{\Delta f}\vec{P}_1\cdot\vec{n}df$ az 1-es közeg felületén megjelenő felületi polarizációs töltéssűrűség (mert $\vec{n}$ az 1-es közeg külsőnormálisa), $\eta_2 = -P_{2n} = -\frac{1}{\Delta f}\int_{\Delta f}\vec{P}_2\cdot\vec{n}df$ pedig a 2-es közeg felületén megjelenő felületi polarizációs töltéssűrűség. Tehát a határfelületen a polarizćiós töltéssűrűség $\eta_P = \eta_{P1} + \eta_{P2}$.

2.2 Töltött vezetők elektrosztatikus terének energiája

A vezetők közti Ω térrészben uralkodó elektrosztatikus tér energiája

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\int_{\Omega} dV\vec{D}\cdot\vec{E} = -\frac{1}{8\pi}\int_{\Omega} dV\vec{D}\cdot\vec{\nabla}\phi \tag{47}$$

Az integrandus itt

$$\vec{D}\cdot\vec{\nabla}\phi = D_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(D_i\phi) - \phi\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{D}) - \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{D}), \tag{48}$$

amit beírva az elektrosztatikus mező energiájának kifejezésébe és Gauss tételét felhasználva,

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{8\pi}\int_{\Omega} dV\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{D}) = -\frac{1}{8\pi}\oint_{\partial\Omega}\phi\vec{D}d\vec{f} \tag{49}$$

adódik. Itt az integrálást az Ω tartományt határoló $\partial\Omega$ felületekre, azaz a vezetők felületeire kell elvégezni, és a $d\vec{f}$ vektor a vezetők belseje felé mutat. Ezt átírhatjuk az egyes vezetők F_a felelületeire vett integrálok összegévé, az $\vec{n}$ felületi normálist a vezetőkből kifelé irányítva

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\sum_a\oint_{F_a}\phi D_n df = \frac{1}{8\pi}\sum_a\phi_a\oint_{F_a}D_n df = \frac{1}{2}\sum_a Q_a\phi_a, \tag{50}$$

ahol a az egyes vezetőket indexeli, felhasználtuk, hogy a vezetők felülete ekvipotenciális, és bevezettük a vezetők Q_a össztöltéseit (a vezetőkre kívülről felvitt töltéseket).

Vezetők elektrosztatikus terének

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\sum_a Q_a\phi_a \tag{51}$$

energiáját más alakokba is átírhatjuk. Mivel az elektrosztatikus térre vonatkozó Gauss-törvényben a $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ anyagegyenlet miatt a térerősség és a töltéssűrűség is lineárisan szerepel, azért a vezetők potenciáljai és töltései között is lineáris kapcsolatnak kell fennállnia:

$$Q_a = \sum_b C_{a,b}\phi_b, \quad \phi_a = C^{-1}_{a,b}Q_b, \tag{52}$$

ahol a latin indexek az egyes vezetőket indexelik, $C_{a,b} = C_{b,a}$ az úgynevezett kapacitás-együtthatók. Ezeket az összefüggéseket felhasználva a vezetők elektrosztatikus terének energiája a potenciáljaik, ill. a töltéseik kvadratikus alakjaként egyaránt felírható:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\sum_{a,b} C_{a,b}\phi_a\phi_b = \frac{1}{2}\sum_{a,b} C^{-1}_{a,b}Q_aQ_b \tag{53}$$

Ennek alapján könnyen kiszámíthatjuk azt az elemi mechanikai munkát, amit ahhoz kell végezni, hogy a vezetők töltéseit rendre infinitezimálisan Q_a-ról $(Q_a + \delta Q_a)$-ra változtassuk,

$$\delta' W = \delta\mathcal{E} = \sum_{a,b} C^{-1}_{a,b}Q_a\delta Q_b = \sum_b \phi_b\delta Q_b, \tag{54}$$

ill. amit ahhoz kell végezni, hogy a vezetők potenciáljait infinitezimálisan megváltoztassuk ϕ_a-ról $(\phi_a + \delta\phi_a)$-ra,

$$\delta' W = \delta\mathcal{E} = \sum_{a,b} C_{a,b}\phi_a\delta\phi_b = \sum_b Q_b\delta\phi_b. \tag{55}$$

2.3 Síkkondenzátor

Töltött vezetők elektrosztatikus terének legszokásosabb elrendezése a síkkondenzátor esete. Idealizált esetben két végtelen kiterjedésű párhuzamos fémlap, amelyek egymástól d távolságra vannak, és amelyekre rendre Q, ill. $-Q$ töltést vittünk fel.

1. Vizsgáljuk ezért először azt az idealizált esetet, amikor egyetlen síkra viszünk fel töltést egyenletes η felületi töltéssűrűséggel és keressük ezen töltésréteg elektrosztatikus terét. Helyezkedjen el a töltésréteg az (x, y) síkban. A geometriai elrendezés eltolási és elforgatási szimmetriát mutat az (x, y) síkban, továbbá tükrözési szimmetriát mutat a $z = 0$ síkra nézve. Ezért a kialakuló elektrosztatikus tér az x- és y-irányú

eltolásokkal, a vezető síkjára merőleges z-tengely körüli elforgatásokkal szemben, valamint a vezető síkjára történő tükrözéssel szemben szimmetrikus kell legyen. Ez csak úgy teljesülhet, ha a térerősségnek (ill. izotróp, homogén dielektrikumban az elektromos eltolódási vektornak) az x- és y-irányú komponensei azonosan eltűnnek, $E_x = E_y \equiv 0$, és a térerősségnek a z-irányú komponense sem függ az x és y koordinátáktól. A Gauss-törvényt alkalmazzuk tetszőleges olyan merőleges, hengeres hasábra, amelynek alap- és fedlapja Δf felületű és párhuzamos a töltésréteg síkjával, helyzetük rendre $z_1 = \frac{1}{2}h$, $z_2 = -\frac{1}{2}h$ és előbb a henger magasságával, majd az alaplap Δf felületével is zérushoz tartunk, $h \to 0$ és $\Delta f \to 0$. Ekkor a paláston a véges nagyságú elekromos eltolódási vektor fluxusa zérus (a palást felülete zérushoz tart), az alap- és fedlapok fluxusai adnak csak járulékot:

$$4\pi\eta\Delta f = \oint \vec{D}\cdot d\vec{f} = -D_z(-\frac{1}{2}h)\Delta f + D_z(\frac{1}{2}h)\Delta f = 2D_z(\frac{1}{2}h)\Delta f \quad (56)$$

úgyhogy a töltésréteg felületén

$$D_z(z = 0^{\pm}) = \pm 2\pi\eta \quad (57)$$

Alkalmazzuk Gauss törvényét ezután pl. egy tetszőleges olyan merőleges, hengeres hasábra, amelynek alap- és fedlapja Δf felületű és párhuzamos a vezető síkjával, helyzetük rendre $z = z_1 > 0$, $z = z_2 > z_1$. Ekkor a paláston az elektromos eltolódási vektor fluxusa zérus, az alap- és fedlapok fluxusai adnak csak járulékot:

$$0 = \oint \vec{D}\cdot d\vec{f} = -D_z(z_1)\Delta f + D_z(z_2)\Delta f \quad (58)$$

azaz a $z > 0$ féltér bármely pontjában D_z =áll.= $2\pi\eta$. Hasonlóan láthatjuk be, hogy a töltésréteg másik oldalán, azaz $z < 0$ esetén is D_z =áll.= $-2\pi\eta$:

$$D_z(z) = \begin{cases} 2\pi\eta, & \text{ha} \quad z > 0 \\ -2\pi\eta, & \text{ha} \quad z < 0 \end{cases} . \quad (59)$$

Az elektrosztatikus tér energiasűrűsége

$$\rho_\epsilon = \frac{1}{8\pi}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2\epsilon}\eta^2 = \text{áll.} \quad (60)$$

ami végtelen térenergiát jelent a végtelen térben. Ez természetesen azért nem realisztikus, mert csak véges méretű töltésréteget tudunk megvalósítani, és a fentebb kapott megoldás csak a töltésréteg széleitől távoli és a réteg síkjához elég közeli pontokban tekinthető a valóságos viszonyok jó közelítésének.

2. Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor két párhuzamos vezetősík helyezkedik el a $z = 0$ és a $z = d$ síkokban, amelyek belső, ill. külső felületén rendre η_1 és η_2, ill. η_1' és η_2' a felületi töltéssűrűség. A vezetőelrendezés x- és y-irányú eltolási szimmetriája és a z-tengely körüli elforgatási szimmetriája következményeképpen a felületi töltéssűrűségeknek most is állandóknak kell lenni az egyes vezetőfelületeken, noha különbözhetnek a vezetők külső és belső felületein. A térerősségmezőt legegyszerűbben úgy határozhatjuk meg mint négy darab, rendre a vezető lemezek külső és belső felületein elhelyezkedő töltésrétegek elektromos térerősség mezőinek lineáris szuperpozícióját.

   Számozzuk meg a szomszédos vezető felületek által határolt egyes térrészeket: 1. térrész a $z = 0$ vezető belseje (mikroszkopikusan ez egy véges vastagságú tartomány), 2. térrész a $z = d$ vezető belseje, 3. térrész a két vezető közti térrész, 1.′ térrészben $z < 0$, 2.′ térrészben $z > d$. Az elektrosztatikus tér felfogható, mint állandó felületi töltéssűrűségű síkok tereinek lineáris szuperpozíciója:

$$D_z = 2\pi \begin{cases} -\eta_1' - \eta_1 - \eta_2 - \eta_2', & 1'.\ \text{tartományban} \\ \eta_1' - \eta_1 - \eta_2 - \eta_2' = 0, & 1.\ \text{tartományban} \\ \eta_1' + \eta_1 - \eta_2 - \eta_2', & 3.\ \text{tartományban} \\ \eta_1' + \eta_1 + \eta_2 - \eta_2' = 0, & 2.\ \text{tartományban} \\ \eta_1' + \eta_1 + \eta_2 + \eta_2', & 2.'\ \text{tartományban} \end{cases} \tag{61}$$

   A vezetőkön belüli tartományokra vonatkozó egyenleteket összeadva, ill. kivonva kapjuk rendre, hogy

$$\eta_1' = \eta_2', \quad \eta_2 = -\eta_1 \tag{62}$$

   azaz, hogy a vezetőkön kívüli térben

$$D_z = 4\pi \begin{cases} -\eta_1', & 1'.\ \text{tartományban} \\ \eta_1, & 3.\ \text{tartományban} \\ \eta_1', & 2'.\ \text{tartományban} \end{cases} \tag{63}$$

Ha a lemezek felülete A véges, akkor

$$(\eta_1 + \eta_1')A = Q_1, \quad (\eta_2 + \eta_2')A = (\eta_1' - \eta_1)A = Q_2 \tag{64}$$

áll fenn a vezetők össztöltésére, ahonnan

$$\eta_1' = \frac{1}{2A}(Q_1 + Q_2), \quad \eta_1 = \frac{1}{2A}(Q_1 - Q_2). \tag{65}$$

A potenciál megint csak a z koordinátától függ. Válasszuk az értékét zérusnak a $z = \xi d$ síkban ($0 < \xi < 1$):

$$\begin{aligned} \phi(z) - \phi(\xi d) &= \phi(z) = -\int_{\xi d}^{z} E_z dz' \\ &= \frac{1}{\epsilon}\begin{cases} 4\pi\eta_1' z + 4\pi\eta_1\xi d, & \text{ha} \quad z < 0 \\ -4\pi\eta_1(z - \xi d), & \text{ha} \quad 0 < z < d \\ -4\pi[(1-\xi)\eta_1 d + \eta_1'(z - d)], & \text{ha} \quad d < z \end{cases} \end{aligned} \tag{66}$$

Legyen $\phi_1 = \phi(0) = 4\pi\eta_1\xi d = 2\pi\xi d(Q_1 - Q_2)/\epsilon A$ az 1. vezető potenciálja, továbbá a 2. vezető potenciálja $\phi_2 = \phi(d) = -4\pi\eta_1(1-\xi)d = -2\pi(1-\xi)d(Q_1 - Q_2)/\epsilon A$, ahonnan a $\phi_a = \sum_a C^{-1}_{a,b} Q_b$ összefüggés alapján

$$C^{-1}_{1,1} = \frac{2\pi\xi d}{\epsilon A}, \quad C^{-1}_{1,2} = -\frac{2\pi\xi d}{\epsilon A}, C^{-1}_{2,1} = -\frac{2\pi(1-\xi)d}{\epsilon A}, \quad C^{-1}_{2,2} = \frac{2\pi(1-\xi)d}{\epsilon A} \tag{67}$$

A $C^{-1}_{a,b}$ együtthatók mátrixa szimmetrikusnak adódik, ha $\xi = \frac{1}{2}$ választással élünk. Ugyanakkor ebben a speciális elrendezésben a mátrix nem invertálható.

A gyakorlat számára érdekes síkkondenzátor esetében $Q_1 = -Q_2 = Q$, úgyhogy a kondenzátorlemezek belső oldalán $\eta = Q/\epsilon A$, a külső oldalán pedig $\eta' = 0$ a felületi töltéssűrűség. A vezetőlemezek közt a térerősség $E_z = 4\pi Q/\epsilon A$, a kondenzátoron kívüli térrészekben pedig $E_z = 0$. A kondenzátorlemezek közti feszültség (potenciálkülönbség)

$$U = |\phi(d) - \phi(0)| = |-\int_0^d E_z dz'| = 4\pi\frac{|Q|}{\epsilon A d}, \quad \Rightarrow \quad |Q| = CU \tag{68}$$

ahol a kondenzátor kapacitása

$$C = \frac{\epsilon A}{4\pi d}. \tag{69}$$

A kondenzátor töltésének infinitezimális megváltoztatásához szükséges munka (amit akkor végzünk az elektrosztatikus tér ellenében, amikor dQ' töltést kvázisztatikusan viszünk át az eredetileg $-Q'$ töltésű lemezről az eredetileg Q' töltésű lemezre),

$$\delta' W = U dQ' = \frac{Q' dQ'}{C} = \delta\mathcal{E} \tag{70}$$

megváltoztatja $\delta\mathcal{E}$-vel a kondenzátor, pontosabban a kondenzátor elektrosztatikus terének energiáját. Ezért a kondenzátor energiája, amikor a lemezik fel vannak töltve Q, ill. $-Q$ töltéssel,

$$\mathcal{E} = \int_0^Q \frac{Q' dQ'}{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2 \tag{71}$$

Az ellentétes töltésű kondenzátorlemezek vonzzák egymást, az erő annak a munkának a révén határozható meg, ami ahhoz szükséges, hogy mondjuk a 2. $-Q$ töltésű lemezt δz-vel odább vigyük a z irányban, $d \to d + \delta z$. A Q tölt 'esű lemez által a $-Q$ töltésű lemezre kifejtett erő ellenében végzett elemi munka:

$$-F_{2\leftarrow 1\ z} \delta z = \delta\mathcal{E} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial d}\delta z = \frac{Q^2}{2}\frac{\partial(1/C)}{\partial d}\delta z = \frac{2\pi Q^2}{\epsilon A}\delta z. \tag{72}$$

Ezért

$$F_{2\leftarrow 1\ z} = -\frac{2\pi Q^2}{\epsilon A} \tag{73}$$

A klasszikus elektrodinamika értelmében a kondenzátorlemezre ható erő eltűnik, ha a kondenzátor töltése zérus.

Érdekességként említjük meg a következőt. A kvantumfizika egyik kísérleti bizonyítéka, hogy valójában a nem töltött kondenzátorlemezek közt is fellép erőhatás a lemezek között mindig jelenlevő elektromágneses mező kvantumos természete miatt. Ez az úgynevezett Casimir-effektus, amelyet kísérletileg is kimutattak.

3 Stacionárius áram mágneses tere közegben

3.1 Alapegyenletek

A stacionárius áram mágneses terére vonatkozó Maxwell-egyenletek a vezetők belsejében, ahol a stacionárius áram folyik,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \end{aligned} \tag{74}$$

továbbá a vezető belsejében $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$ anyagegyenletek érvényesek, a vezetők közti szigetelő közegben pedig $\rho = 0$ miatt a Gauss-törvény differenciális alakja és a $\vec{j} = 0$ miatt Ampère törvényének differenciális alakja módosul,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= 0. \end{aligned} \tag{75}$$

Érdemes szót ejteni vezető belsejében a Gauss-törvényről. Általában az áramvezetés során stacionárius áramról csak addig beszélhetünk, amíg a vezetőben folyó áram nem okoz szerkezeti változást a vezető belsejében. Az anyagi minőségtől függő, maximálisan megengedhető áramsűrűségek is meglehetősen gyenge elektromos térerősségek létesítését feltételezik. Ezek a terek általában annyira gyengék, hogy lényegében nem tudják polarizálni sem a vezetőt, sem a környezetében található szigetelőt. Ekkor jó közelítéssel a relatív dielektromos állandó $\epsilon = 1$-nek vehető.

3.2 Áramsűrűség, töltéssűrűség és elektromos térerősség a vezetőben

Vezető belsejében a stacionárius esetben érvényes $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ összefüggés miatt a lokális töltésmegmaradást kifejező kontinuitási egyenletből

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{76}$$

adódik, ami azt jelenti, hogy az áramsűrűség vektormező forrásmentes. Az áramvonalak tehát vagy a végtelenből indulnak és a végtelenbe távoznak, vagy önmagukba záródnak. Ez azt is jelenti, hogy nem lehet a vezetőben forrásuk, tehát $\rho = 0$ kell teljesüljön a vezető belsejében.

Homogén, vagy tartományonként homogén vezetőben $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ következik akár az áramsűrűség divergenciamentességéből, akár az elektromos eltolódási vektor divergenciamentességéből. Az elektromos térerősségre vonatkozó egyenletek tehát ekkor pontosan olyanok, mint az elektrosztatika egyenletei. Ezért a stacionárius áram fenntartásához szükséges elektromos térerősség örvénymentes, a ϕ skalárpotenciálból

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \tag{77}$$

módon származtatható, és eleget tesz a vezetőben a

$$\Delta\phi = 0 \tag{78}$$

Poisson-egyenletnek. Ehhez a határfeltételeket úgy kajuk meg, hogy egyrészt megvizsgáljuk az elektromos térerősség viselkedését két érintkező vezető határán, részben vezető és szigetelő határán.

Két érintkező vezető határán az áramsűrűség forrásmentességének feltételéből, ill. az elektromos térerősség örvénymentességének feltételéből rendre

$$j_{1n} = j_{2n}, \quad \vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2} \tag{79}$$

adódik, azaz az áramsűrűség normális komponense és az elektromos térerősség tangenciális komponense folytonosak két vezető érintkezésénél. Ezt a potenciál nyelvére lefordítva a

$$\sigma_1\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi\Big|_1 = \sigma_2\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi\Big|_2, \quad \vec{t}\cdot\vec{\nabla}\phi\Big|_1 = \vec{t}\cdot\vec{\nabla}\phi\Big|_2 \tag{80}$$

határfeltételek adódnak, ahol $\vec{n}$, ill. $\vec{t}$ rendre az érintkezési felület normálisa, ill. tetszőleges érintővektora. Miután az áramsűrűség normális irányú komponense $j_{n1} = j_{n2} = j_n$ folytonos, az $\vec{E} = \vec{D}$ ($\epsilon \approx 1$ miatt) vektor normális komponensének véges ugrása van a felületen. Gauss törvénye értelmében ez azt jelenti, hogy az érintkezési felületen

$$\eta = \frac{1}{4\pi}(D_{2n} - D_{1n}) = \frac{j_n}{4\pi}\left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}\right) \tag{81}$$

felületi töltéssűrűség van jelen, ahol $\vec{n}$ az 1-es vezetőből a 2-es vezetőbe mutató felületi normális.

Vezető és szigetelő határán az áramsűrűség divergenciamentessége a vezetőben és eltűnése a szigetelőben a

$$\vec{j}_n = 0 \tag{82}$$

összefüggést eredményezi, ahol $\vec{n}$ a vezető külső normálisa. Az áramsűrűség normális irányú komponense a vezető felőli oldalon eltűnik a vezető és a szigetelő határán. Az elektromos térerősség örvénymentességéből most is az adódik, hogy az elektromos térerősség tangenciális komponense folytonos a vezetőés a szigetelő határán,

$$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}. \tag{83}$$

Ha az 1-es közeg a vezető, akkor $\vec{E}_{t1} = \frac{1}{\sigma_1}\vec{j}_t$. Az áram normális komponensének eltűnése a vezető felőli oldalon azt is jelenti, hogy $E_n = D_n$ ($\epsilon = 1$ miatt) is eltűnik a vezető felőli oldalon,így Gaus törvénye ugyanakkor azt eredményezi, hogy felületi töltések hiányában (az áramsűrűségnek a vezetőben nincs forrása, a szigetelőben meg zérusa külső töltések sűrűsége) D_n folytonos a vezető-szigetelő határfelületen, úgyhogy $D_n = E_n = 0$ a szigetelő felőli oldalon is.

Még érdemes itt elmondani az áramsűrűség forrásmentességének azon fontos következményét, hogy vezetőben folyó stacionárius áram I erőssége a vezető bármely keresztmetszetén azonos. Képzeljünk el egy vezetőt, amelyben $\vec{j}$ áramsűrűségű stacionárius áram folyik. Legyen F_1 és F_2 a vezető két tetszőleges keresztmetszete, és integráljuk a $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ egyenletet a vezetőnek az F_1 és F_2 felületek által határolt darabja V térfogatára. Gauss tételét felhasználva:

$$0 = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{f}. \tag{84}$$

A vezető darab külső felületén $\vec{j}_n = 0$, úgyhogy ez a felület nem ad járulékot a jobb oldalon álló felületi integrálhoz. Ha $\vec{n}_1$, ill. $\vec{n}_2$ rendre az F_1, ill. F_2 keresztmetszeteken jelöli a vezetődarab külső normálisát, akkor

$$0 = \int_{F_1} \vec{j} \cdot \vec{n}_1 df + \int_{F_2} \vec{j} \cdot \vec{n}_2 df \tag{85}$$

Tegyük fel, hogy $\vec{n}_2$ és $\vec{j}$ az F_2 felületen hegyesszöget zárnak be, akkor az áramerősség innen

$$I_2 = \int_{F_2} \vec{j} \cdot \vec{n}_2 df = \int_{F_1} \vec{j} \cdot (-\vec{n}_1) df = I_1 \tag{86}$$

valóban azonosnak adódik a vezető bármely keresztmetszetén. Ez más alakban fejezi ki azt a tényt, hogy az áramsűrűség forrásmentessége miatt a stacionárius áram a vezető semelyik darabjában nem halmozhat fel $\rho \neq 0$ sűrűségű töltést.

3.3 Ohm törvénye

Az izotróp vezető belsejében érvényes

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{87}$$

anyagegyenletet szokás mikroszkopikus Ohm-törvénynek is nevezni. Ez kifejezi, hogy a vezető belsejében stacionárius, makroszkopikus áram fenntartásához időben állandó elektromos térerősséget kell létrehozni.

A mikroszkopikus Ohm-törvényből könnyen megkaphatjuk a végtelen vékony, homogén vezetőben folyó stacionárius áramra érvényes (makroszkopikus) Ohm-törvényt. Tegyük fel, hogy $\vec{j}$ stacionárius áram folyik végtelen vékony, homogén vezetőben, amelynek térbeli helyzetét az $\vec{r}(s)$ görbe írja le, s a görbe ívhossz-paramétere. Az áramsűrűségvektort és az elektromos térerősség vektorát mindenütt állandónak vehetjük a vezető kicsiny Δf keresztmetszete mentén, és egyúttal a vezetőszál érintőjével párhuzamosnak. Inetgráljuk a differenciális Ohm-törvény mindkét oldaált a vezető s_1 és s_2 ívhossz paraméterű kicsiny keresztmetszetei közötti térfogatára:

$$\int_{\Delta f} df \int_{s_1}^{s_2} \vec{j} \cdot d\vec{s} = \sigma \int_{\Delta f} df \int_{s_1}^{s_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{88}$$

Ha $\vec{n}$ jeöli a vezetőszál érintő egységvektorát, ami egyúttal a vezető keresztmetszetének normálisa, akkor felhasználva, hogy

$$I = \int_{\Delta f} df \vec{j} \cdot \vec{n} \tag{89}$$

a vezetőben folyó stacionárius áram erőssége,

$$U_{1,2} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{90}$$

a vezető s_1 és s_2 ívhossz-paraméterű pontjai közötti feszültség, a (**??**) egyenletből

$$\begin{aligned}\int_{\Delta f} df \int_{s_1}^{s_2} \vec{j} \cdot d\vec{s} &= \int_{s_1}^{s_2} ds \int_{\Delta f} df \vec{j} \cdot \vec{n} = I \int_{s_1}^{s_2} ds = I\ell_{1,2} \\ &= \sigma \int_{\Delta f} df \int_{s_1}^{s_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \sigma U_{1,2} \int_{\Delta f} df = \sigma U_{1,2} \Delta f \qquad (91)\end{aligned}$$

adódik, ahonnan Ohm törvényét kapjuk

$$U_{1,2} = IR \qquad (92)$$

alakban, az (ohmos) ellenállás

$$R = \frac{\ell}{\sigma \Delta f} = \frac{\rho \ell}{\Delta f} \qquad (93)$$

ahol $\ell = \int_{s_1}^{s_2} ds$, ill. Δf a vezető hossza, ill. keresztmeszete, $\rho = 1/\sigma$ a fajlagos vezetőképesség. Ohm törvénye amellett, hogy megadja a vezetőben folyó áram erőssége és a vezető két pontja közötti feszültség közötti kapcsolatot, azt is kifejezi, hogy a vezető végei közt időben állandó feszültséget kell létrehozni ahhoz, hogy a vezetőben stacionárius áramot tartsunk fenn.

Az elektromos térerősségnek az áramon (a töltéshordozókon) a dV térfogatelemben δt idő alatt végzett munkája:

$$\vec{j} \cdot \vec{E} \delta t \; dV = \sigma \vec{E}^2 \delta t \; dV = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} \delta t \; dV > 0. \qquad (94)$$

Ez a rendezett munkavégzés állandó nyomáson és hőmérsékleten a vezető dV térfogatelemének szabad entalpiáját növeli

$$dG_{p,T=\text{const.}} = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} \delta t \; dV > 0. \qquad (95)$$

Ez a Joule-Lenz-törvény.

Feltéve, hogy a vezetőszál hőszigetelt és V térfogata állandó, az áram munkája a termodinamika I. főtétele értelmében a vezető belső energiáját növeli,

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \int_V \sigma \vec{E}^2 dV = \int_V \frac{\vec{j}^2}{\sigma} dV = \frac{I^2 \Delta f}{\sigma (\Delta f)^2} \int_{s_1}^{s_2} ds = RI^2 = \frac{U^2}{R} > 0. \qquad (96)$$

A vezető darab az áram munkája révén az 1-es kezdeti (termodinamikai egyensúlyi) állapotból eljutott a 2-es (termodinamikai egyensúlyi) állapotba. Ugyanezt az állapotváltozást előidézhettük volna reverzibilis , rendezetlen munkavégzéssel, azaz

$$d'Q = TdS = d\mathcal{U} = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} dV \delta t \tag{97}$$

hőközléssel. A $d'Q$ hőt nevezzük Joule-hőnek. Mivel az S entrópia is állapotfüggvény, innen látszik, hogy ha a vezetőben δt ideig stacionárius áram folyik, akkor a vezető dV térfogatelemének entrópiája

$$dS = \frac{\vec{j}^2}{\sigma T} dV \delta t > 0 \tag{98}$$

értékkel nő.

Tekintsünk egy vezetőből és egy telepből álló zárt rendszert. Az egyszerűség kedvéért helyettesítsük a telepet egy feltöltött kondenzátorral, a vezető ellenállása meg legyen olyan nagy, hogy a δt idő alatt az egyik elektródáról a másikra átáramló töltés sokkal kisebb legyen , mint az elektródák töltése. Ekkor a telep állapotának, s így entrópiájának megváltozása elhanyagolható. Mivel ugyanakkor a vezető entrópiája nő, ezért a vezetőből és a telepből álló zárt rendszer entrópiája is nő. Következésből a vezetőből és a telepből álló zárt rendszerben irreverzibilis folyamat játszódik le. Ez azt is jelenti, hogy a vezető belső energiájának rovására nem fog áram indulni, hogy példánkban feltöltse a kondenzátort.

Tanulságos még azt a kvalitatív megfontolást is megtenni, hogy a elektromos tér munkája fémekben a szabadelektrongázon végzett munka, vagyis a szabad elektrongáz belső energiájának megváltozása

$$dU^{[e]} = \vec{j} \cdot \vec{E} dV \delta t + d'Q_{e \leftarrow r}, \tag{99}$$

ahol $d'Q_{e \leftarrow r}$ a fémrács által a szabad elektrongáznak átadott hő. Ugyanakkor a fémrács belsőenergiájának megváltozása

$$dU^{[r]} = d'Q_{r \leftarrow e} = -d'Q_{e \leftarrow r}, \tag{100}$$

mert a vezetőben $\epsilon \approx 1$ azt fejezi ki, hogy a tér munkája a fémrácson elhanyagolható (a fémrács nem polarizálódik). Az elektrongáz hőkapacitása azonban elhanyagolható a fémrácséhoz képest, úgyhogy $dU^{[e]} \approx 0$, tehát a Joule-hő végső soron a fémrács belsőenergiáját növeli:

$$dU^{[r]} = -d'Q_{e \leftarrow r} = \vec{j} \cdot \vec{E} dV \delta t. \tag{101}$$

3.4 Kirchhoff csomóponti törvénye.

Vizsgáljuk végtelen vékony vezetőszálakból álló, stacionárius árammal átját hálózatot. A stacionárius áram sűrűségének forrásmentességéből következik az áramkörökre vonatkozóan Kirchhoff csomóponti törvénye. Tegyük fel, hogy egy pontban több vezető szál találkozik. Vegyük körül a csomópontot egy infinitezimális sugarú gönbfelülettel, amelynek felületi normálisát kifelé irányítjuk. Jelölje $I_k = \int_{\Delta f_k} df \vec{j} \cdot \vec{n}$ a k-adik vezető szálban folyó előjeles áramerősséget. Aszerint, hogy az áram kifelé, ill. befelé folyik $I_k > 0$, ill. $I_k < 0$. Integráljuk a kontinuitási egyenlet mindkét oldalát a csomópontot körülvevő infiniezimális sugarú gömb térfogatára,

$$0 = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \oint \vec{j} \cdot \vec{n} = \sum_k \int_{\Delta f_k} df \vec{j} \cdot \vec{n} = \sum_k I_k, \tag{102}$$

vagyis a csomópontba befutó áramerősségek előjeles összege zérus.

3.5 Kontaktpotenciál

Különböző vezetők érintkezésekor a vezetők között potenciálkülönbség jön létre. A töltéshordozók sűrűsége ugyanis különböző bennük és termodinamikai egyensúly akkor jön létre közöttük, ha a töltéshordozók kémiai potenciálja azonossá válik bennük. Fémes vezetők esetén a töltéshordozók elektronok, kémiai potenciáljuk az úgynevezett Fermi-energia. A vezető belsejében a vezető $\Phi = 0$ potenciálú felszínéhez képest rendre $\Phi_1 > 0$ ill. $\Phi_2 > 0$ potenciált éreznek az elektronok. Egy elektront legkönnyebben, azaz legkevesebb munkavégzés árán a Fermi-szintről tudunk eltávolítani a fémből. Ehhez a Fermi-szinten levő elektronon annyi W_1 ill. W_2 munkát kell végezni, hogy az a Fermi-szintről, azaz a $-|e|\Phi_1 + E_{F1}$, ill. $-|e|\Phi_2 + E_{F2}$ energiaszintről a $\Phi = 0$ potenciálnak megfelelő nulla energiaszintre kerüljön, azaz

$$|e|\Phi_a = E_{Fa} + W_a. \tag{103}$$

Azt a minimális W_a munkát, ami ahhoz szükséges, hogy egy elektront eltávolítsunk a fémből, kilépési munkának nevezzük. Amíg a két fém nem érintkezik, a Fermi-szinteken elhelyezkedő elektronok energiája különbözik, a kémiai potenciálok különböznek. Tegyük fel, hogy a 2-es fémben magasabb a Fermi-szinten levő elektron energiája, mint az egyes fémben. A két fém érintkezésekor annyi töltés lép át a 2-es fémből az 1-es fémbe, hogy a Fermi-szinteken található elektronok energiái azonosak legyenek a két vezetőben, ekkor a kémiai potenciálok kiegyenlítődnek. A töltésátlépés átlagosan megszűnik, mert energiabefektetés nélkül léphetnek át oda-vissza töltéshordozók egyik vezetőből a másikba. Ekkor a 2-es vezető felülete pozitívabb potenciálú (φ_2) lesz, mint az 1-es vezető felszíne ($\varphi_1 < \varphi_2$), azaz az elektron potenciális energiája kisebb lesz az 2-es vezető felszínén, mint az 1-es vezető felszínén,

$$-|e|\varphi_1 - (-|e|\varphi_2) = |e|(\varphi_2 - \varphi_1) = W_1 - W_2 > 0 \tag{104}$$

Tehát a kisebb kilépési munkájú fém felszíne lesz a magasabb potenciálú.

Az érintkezési potenciál létrejötte nem elektrosztatikai jelenség, hanem az anyag mikroszkopikus szerkezetéből adódó bonyolult dinamikai folyamatok következménye. Ezek a két fém érintkezésénél kialakuló vékony határrétegben mennek végbe. Az érintkezési potenciálhoz gondolatban társíthatunk egy olyan fiktív, pozitív egységtöltésre ható erőt, $\vec{E}'$, amelynek az

$$\mathcal{E} = \int_1^2 \vec{E}' \cdot d\vec{s} \tag{105}$$

munkája révén kerül át a negatívabbá váló fémről a pozitívabbá váló fémre egységnyi pozitív töltés. Itt az integrálást a határrétegen áthaladó, az 1-es fém belsejéből a 2-es fém belsejébe vezető görbe mentén kell integrálni. A nem elektrosztatikus természetű $\vec{E}'$ töltésszétválasztó erő egységnyi pozitív töltésen végzett munkáját nevezzük elektromotoros erőnek. $\vec{E}'$ definíció szerint a határréteg negatív oldala felől a pozitív oldala felé (a negatív pólustól a pozitív pólus felé) mutat. A töltésszétválasztás megszűnik, amikor éppen akkor potenciálkülönbség jön létre az érintkező két fém között, hogy a Fermi-szintjeiken található elektronok azonos energiaszintre kerülnek. Ekkor

$$\mathcal{E} = \int_1^2 \vec{E}' \cdot d\vec{s} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{106}$$

azaz ekkor a kialakuló $\vec{E}$ elektrosztatikus térerősség a határrétegben éppen azonos nagyságú és ellentétes irányú a nem elektrosztatikus természetű töltészétválasztó erővel, és ekkor az áramsűrűség

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}') = 0. \tag{107}$$

3.6 Kirchhoff huroktörvénye

Ha a kétféle vezetőből zárt kört készítünk úgy, hogy a két szabad vezetővéget összeérintjük, akkor a potenciálkülönbségnek meg kell szűnnie. Ez csak úgy lehetséges, ha stacionárius áram folyik a vezetőkörben, amely annak R ohmikus ellenállásán akkora IR feszültséget hoz létr, ami éppen kompenzálja a vezetők különbözőségéből származó érintkezési potenciált. Tehát különböző vezetőkből álló áramkörben

$$\sum_a(\varphi_{a+1} - \varphi_a) - \sum_a I_a R_a = 0, \tag{108}$$

azaz az elektromotoros erők és a feszültségesések összege egyenlő:

$$\sum_a \mathcal{E}_a = \sum_a I_a R_a. \tag{109}$$

Ez Kirchhoff huroktörvénye, amely tetszőleges, stacionárius áram járta áramhurokra érvényes.

Léteznek más, aktív áramköri elemek is, amelyek elektromosan vezető közeget tartalmaznak és amelyek elektromotoros erő létrehozására alkalmasak, mint pl. a galvánelemek. Ezekben a differenciális Ohm törvény

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}') \tag{110}$$

alakba írható. Általában egy valóságos áramkörben a fajlagos vezetőképesség szakaszonként változik, és vannak olyan szakaszok, amelyeken a töltésszétválasztó erő nem zérus. Ezek hozzák létre azt az elektromotoros erőt, amelynek segítségével tudunk elektromos térerősséget és stacionárius áramot fenntartani az áramkörben.

Kirchhoff huroktörvényeének általános levezetéséhez induljunk ki abból, hogy az elektromos térerősségmező a vezetők belsejében örvénymentes, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Integráljuk ezt arra a F felületre, amelyet egy olyan G zárt görbe határol, amely az áramhurok végtelen vékony vezetőszálaiból ($a = 1, 2, \dots$) áll, amelyek között aktív elemek ($b = 1, 2, \dots,$) találhatók. Az aktív elemekben tetszőleges görbe mentén haladunk az adott vezetőhurokhoz tartozó egyik vezető érintkezéstől a másikig.

$$0 = \int_F d\vec{f} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{E}'\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \oint_G \left(\frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{E}' \right) \cdot d\vec{s} \\
&= \sum_a \int_a \frac{\vec{j}}{\sigma_a} \cdot d\vec{s} + \sum_b \int_b \frac{\vec{j}}{\sigma_b} \cdot d\vec{s} - \sum_b \int_b \vec{E}' \cdot d\vec{s} \\
&= \sum_a I_a R_a + \sum_b r_b I_b - \sum_b \mathcal{E}_b
\end{aligned} \tag{111}
$$

Itt $I_a R_a$ az egyes ohmos ellenállásokon eső feszültségek, $I_b r_b$ az egyes telepeken belül, azok r_b belső ellenállásán eső feszültségek, $\mathcal{E}_b$ pedig a telepek elektromotoros erői. A huroktörvényt úgy kell alkalmazni, hogy a hurokban felveszünk egy körüljárási irányt, a G görbe irányát, valamint az I áramok (a megfelelő áramsűrűségvektorok) hipotetikus irányát. Ezután az IR feszültségeséseket pozitív, ill. negatív előjellel adjuk össze rendre aszerint, hogy a hipotetikus áramirány egyezik, ill. ellentétes a görbe irányával. A telepek $\mathcal{E}$ elektromotoros erejét negatív, ill. pozitív előjellel adjuk a feszültségesésekhez aszerint, hogy a pólusok rendre $-$, $+$, ill. $+$, $-$ sorrendben következnek a görbe körüljárási irányában. Ekkor a huroktörvény

$$
\sum_a (IR)_a + \sum_b (Ir)_b + \sum_b \mathcal{E}_b = 0 \tag{112}
$$

alakot ölt, azaz a feszültségesések és az elektromotoros erők összege zérus.

3.7 Stacionárius áram mágneses tere

Tegyük fel hogy kiterjedt vezetőben adott a $\vec{j}(\vec{r})$ áramsűrűség. A mágneses indukció forrásmentessége,

$$
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{113}
$$

és a mágneses térerősség és az ármasűrűség

$$
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \tag{114}
$$

kapcsolata alapján a vezető és a szigetelő határán $B_{n\ vez} = B_{n\ szig}$ és

$$
\vec{H}_{t\ vez} - \vec{H}_{t\ koz} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{t\ vez} \tag{115}
$$

határfeltételek adódnak. Ugyanakkor, ha a vezetőt körülvevő szigetelő darabonként homogén, akkor a szigetelők határán

$$
B_{1n} = B_{2n}, \quad \vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t} \tag{116}
$$

határfeltételek adódnak, azaz a mágneses indukció normális komponense és a mágneses térerősség tangenciális komponense folytonos. A mágneses térerősség tangenciális komponensének folytonosságából következik, hogy a mágneses indukcióvektor tangenciális komponense ugrást szenved két közeg határfelületén. Ez azzal magyarázható, hogy a mágnesezett közeg felületén kompenzálatlan felületi áramsűrűség van jelen, amelyet a mágnesezett közeg saját töltéseinek mikroszkopikus árama létesít. Stacionárius áramok esetén, amikor $\partial\vec{P}/\partial t = 0$, a mágnesezettségből származó áramsűrűség

$$\vec{j}_m = c\vec{\nabla} \times \vec{M} \tag{117}$$

a mágnesezés definíciója alapján. Ha ez a közeg egy vékony felületi rétegében nem nulla, akkor értelmezhetjük

$$\vec{g}_m = \lim_{\Delta\ell\to 0} \int_{\Delta f} \vec{j}_m df \tag{118}$$

vonalmenti áramsűrűséget, ahol az integrálás az áramsűrűségre és a határfelületre merőleges, infinitezimális, téglalap alakú kicsiny felületre történik, amelynek kicsiny $\Delta\ell$ hosszúságú, a határfelülettel párhuzamos oldalai éppen közrefogják a határréteget.

Vizsgáljuk előbb mágnesezett szigetelő és vákuum határfelületét. Integráljuk a $\vec{j}_m$ áramot egy rá merőleges kicsiny felületre, amelyet olyan kicsiny téglalap kerülete határol, melynek két $\Delta\ell$ hosszúságú oldala a felület különböző oldalain helyezkedik el, az arra merőleges élek pedig infinitezimálisak:

$$\int_{\Delta f} \vec{j}_m df = \vec{g}_m \Delta\ell = -c\vec{n} \times \vec{M}_t \Delta\ell, \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi}{c}\vec{g}_m = -4\pi\vec{n} \times \vec{M}_t = -\vec{B}_t \tag{119}$$

Itt $\vec{n}$ a szigetelőből a vákuum felé mutató normálisvektor, és felhasználtuk a $\vec{H}_t$ folytonossgát. Hasonlóan két szigetelő határán, ha $\vec{n}$ az 1-es szigetelőből a 2-esbe mutató felületi normális, akkor

$$\frac{4\pi}{c}\vec{g}_m = \frac{4\pi}{c}(\vec{g}_{m1} + \vec{g}_{m2}) = 4\pi\vec{n} \times [\vec{M}_{t\ 2} - \vec{M}_{t\ 1}] = \vec{n} \times [\vec{B}_{t\ 2} - \vec{B}_{t\ 1}]. \tag{120}$$

Homogén közeget feltételezve a vezetőn kívül,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{B}(\vec{r})}{\mu} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}), \tag{121}$$

adódik. A mágneses indukcióra vonatkozó téregyenletek lényegében ugyanolyan alakúak, mint a vákuumban, azzal a különbséggel, hogy az Ampère-törvényben a mágneses indukció helyett $\vec{B}/\mu$ szerepel. A vektorpotenciál most is bevezethető $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ miatt a $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ definícióval. Ekkor homogén közegben a vektorpotenciálra vonatkozó egyenlet a $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ Coulomb-mértékben

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}(\vec{r}), \tag{122}$$

azaz homogén szigetelőben

$$\Delta\vec{A}(\vec{r})=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}(\vec{r}) \tag{123}$$

alakot ölt. A megoldás a vektorpotenciálra vonatkozó Biot-Savart törvény:

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{c}\int dV'\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{124}$$

Értelemszerűen, ha az $\vec{r}$ helyzetvektorú pont a vezető belsejében van, akkor ugyanez a képlet úgy alkalmazható, μ a vezető relatív mágneses permeabilitása. (Ha a vezető nem ferromágneses, akkor $\mu\approx 1$ jó közelítés.)

Egyenes vezető mágneses tere. Példaként határozzuk meg végtelen hosszú, hengeres vezető mágneses terét, ha benne stacionárius áram folyik. Válasszunk egy hengerkoordinátarendszert úgy, hogy z-tengelye a hengeres vezető szimmetriatengelye legyen. Az egyszerűség kedvéért vegyünk egy olyan $L\to\infty$ hosszúságú, R sugarú hengeres vezetőt, amelynek két vége egye-egy vezető síkkal érintkezik, amelyek potenciálját $\varphi(L)$, ill. $\varphi(0)$ állandó értéken tarjuk. Ekkor a vezető síkok között az elektromos térerősség homogén, z-irányú,

$$E_zL=-[\varphi(L)-\varphi(0)]. \tag{125}$$

A vezető hengerben ekkor $j_z=\sigma E_z$ állandó sűrűségű, $I=j_zR^2\pi$ áram folyik (a pozitív töltések árama a vezető henger pozitívabb (nagyobb potenciálú) vége felől a negatívabb (alacsonyabb potenciálú) vége felé folyik). Az elrendezés hengerszimmetriája miatt a mágneses tererőss
eg mező erővonalai a szimmetriatengelyre merőleges síkokban elhelyezkedő koncentrikus körök, amelyek origója a szimmetriatengelyen van, és amelyek Ampère törvénye értelmében jobbkéz szabály szerint irányítottak az

áramsűrűség irányához képest, és amelyekre a szimmetriatengelytől r távolságban

$$H_\varphi(r)2r\pi = \frac{4\pi}{c}\begin{cases} I, & \text{ha} \quad r \geq R \\ I\frac{r^2\pi}{R^2\pi}, & \text{ha} \quad 0 \leq r < R \end{cases}, \tag{126}$$

azaz

$$H_\varphi(r) = \frac{2I}{c}\begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{ha} \quad r \geq R \\ \frac{r}{R^2}, & \text{ha} \quad 0 \leq r < R \end{cases}, \tag{127}$$

Látjuk, hogy a vezető és a szigetelő felületén a mágneses térerősség tangenciális komponense folytonos. Legyen μ_1, ill. μ_2 rendre a vezető, ill. a szigetelő relatív mágneses permeabilitása, akkor a vezetőben $B_\varphi(r) = \mu_1 H_\varphi(r) = \frac{2I\mu_1 r}{cR^2}$, a környező szigetelőben pedig $B_\varphi(r) = \mu_2 H_\varphi(r) = \frac{2I\mu_2}{cr}$. A vezető és a szigetelő határán

$$(g_m)_z = \frac{c}{4\pi}[B_\varphi(R+0^+) - B_\varphi(R+0^-)] = \frac{2I(\mu_2-\mu_1)}{4\pi R} = \frac{I(\chi_2-\chi_1)}{2\pi R} \approx \frac{I\chi_2}{2\pi R} \tag{128}$$

mert a vezetőben (hacsak nem ferromágneses) $|\chi_1| \ll |\chi_2|$.

3.8 Rúdmágnes tere

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor egy mágnesezett anyagdarab hoz létre vákuumban mágneses teret. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a mágnes egy ℓ hosszúságú hengeres rúd, amelynek alap- és fedlapja R sugarú kör, és a rúd mágnesezettsége homogén, a henger szimmetriatengelyével párhuzamos. Ekkor a rúd mágeneses dipólmomentuma $\vec{m} = \vec{M}R^2\pi\ell$, ami a mágnesrúdtól nagy $r \gg \ell$, R távolságban olyan mágneses teret hoz létre, mint egy elemi mágneses dipólus:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\mu\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}, \tag{129}$$

ahol μ a környező közeg relatív mágneses permeabilitása.

Vizsgálhatunk egy másik szélsőséges esetet, amikor $R \ll \ell$, és a mágneses teret a mágnesrúd valamelyik vége közelében, $R \ll r \ll \ell$ keressük. Ha a környező közeg is homogén, akkor a mágnesrúdon kívül a mágneses térerősség eleget tesz a

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = 0 \tag{130}$$

egyenleteknek. Mivel a mágneses térerősség örvénymentes, azért bevezethetjük az elektrosztatikai potenciál analógiájára a $\psi(\vec{r})$ magnetosztatikai potenciált,

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\psi \tag{131}$$

definícióval, s erre a mágnesrudat környező közegben a

$$\Delta\psi = 0 \tag{132}$$

Poisson-egyenlet áll fenn. A mágnesrúd jelenlétét a mágnesrúd felületén kirótt határfeltétellel kell figyelembe venni. Mutasson az $\vec{n}$ felületi normális a mágnesrúdból (1-es közeg) kifelé (a 2-es közegbe). A mágneses indukcióvektor normális komponensének folytonossága azt jelenti, hogy a mágnesrúd felületén a mágneses térerősségnormális komponensének szakadása lehet,

$$B_{1n} = H_{1n} + 4\pi M_{1n} \approx H_{2n}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1+4\pi\chi_1}{\chi_1} M_{1n} \approx 4\pi M_{1n} \approx H_{2n} \tag{133}$$

(A külső közeg mágnesezettsége általában elhanyagolható a mágnesrúdéhoz képest; továbbá a rúdmágnesben $\chi_1 \gg 1$.) Általánosságban a határfeltétel mágnesezett anyagdarab és vákuum határfelületén

$$-\frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\mathrm{vac}} = 4\pi M_n, \tag{134}$$

ami elektrosztatikai analógia alapján azt jelenti, hogy M_n felületi ,,mágneses töltéssűrűség" szerepét játssza.

Mivel a rúdmágnes hossztengelye irányában van mágnesezve, ezért a palástján H_n folytonos. Ugyanakkor a rúdmágnes ,,hegye" ($\vec{m}$,,hegye") közelében

$$-\frac{\partial\psi}{\partial n} = 4\pi M, \tag{135}$$

ill. a mágnesrúd másik végén

$$-\frac{\partial\psi}{\partial n} = -4\pi M \tag{136}$$

míg a paláston

$$-\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \tag{137}$$

határfeltételekkel kell megoldani a Poisson-egyenletet. Az elektrosztatikai analógia alapján a feladat ekvivalens azzal, mintha a mágnesrúd egyik végén

$\eta_m = M$, a másik végén $\eta_m = -M$, a palástján pedig $\eta_m = 0$ „mágneses felületi töltéssűrűség" helyezkedne el. A végteen vékony és hosszú mágnesrúd egyik végeinek közelében tehát a mágneses térerősség úgy alakul, mintha $q_m = R^2\pi\eta_m = \pm R^2\pi M$ pontszerű mágneses töltés keltene mágneses Coulomb-potenciált:

$$\psi(r) = \frac{q_m}{r} \tag{138}$$

ahol r a mágneses pólusoktól mért távolság, $R \ll r \ll \ell$.

Megjegyezzük, hogy a *homogénen mágnesezett* mágnesrúd belesejében is a $\Delta\psi = 0$ Laplace-egyenlet érvényes. Itt a határfeltételeket kielégítő megoldás a $\vec{H} = \frac{1}{\chi_1}\vec{M}$.

3.9 Stacionárius áram mágneses terének energiája

A mágneses tér energiasűrűsége

$$\rho_\epsilon = \frac{1}{8\pi}\vec{H}\cdot\vec{B}. \tag{139}$$

A mágneses tér energiája

$$\mathcal{E} = \int dV\vec{H}\cdot\vec{B} = \int_V dV\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}). \tag{140}$$

Használjuk fel, hogy

$$\begin{aligned}\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) &= \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}H_i = \frac{\partial}{\partial x_j}(\epsilon_{jki}A_kH_i) - \epsilon_{jki}A_k\frac{\partial H_i}{\partial x_j}\\ &= \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + \frac{4\pi}{c}\vec{A}\cdot\vec{j}\end{aligned} \tag{141}$$

A térenergia ezért

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\int dV\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + \frac{1}{2c}\int dV\vec{j}\cdot\vec{A} \tag{142}$$

A jobb oldalon a az első tag átírható a végtelen távoli felületre vett integrállá,

$$\frac{1}{8\pi}\int dV\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) = \oint(\vec{A}\times\vec{H})\cdot d\vec{f} = 0 \tag{143}$$

A felületi integrál zérus, mert $R \to \infty$ végtelen sugarú gömbfelületen a vektorpotenciál, ill. a mágneses térerősség legalább olyan gyoran csökken, mint $A \sim 1/R$, ill. $H \sim 1/R^2$, ugyanakkor $df \sim R^2$, vagyis $1/R \cdot 1/R^2 \cdot R^2 \sim 1/R \to 0$ ha $R \to \infty$. Ezért a térenergia általános kifejezése

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2c} \int dV \vec{j} \cdot \vec{A}. \tag{144}$$

Ez a kifejezés az $\frac{1}{2}$ szorzótól eltekintve pontosan olyan, mint az áram és a külső mágneses tér kölcsönhatásának potenciális energiája. Az $\frac{1}{2}$ szorzó azért jelenik meg, mert a mágneses tér most nem ,,külső", hanem az áram maga hozza létre. Az $\frac{1}{2}$ szorzó szerepét még világosabban megérthetjük, ha a mágneses térenergia kifejezését áramhurkok energiájának kiszámítására alkalmazzuk.

Tegyük fel, hogy az áramsűrűség csak $k = 1, 2, \ldots$ indexszel sorszámozott végtelen vékony, V_k térfogatú vezető belsejében nem nulla, ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2c} \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV = \frac{1}{2c} \sum_k \int_{V_k} \vec{A} \cdot \vec{j} dV = \frac{1}{2c} \sum_k I_k \oint_{g_k} \vec{A} \cdot d\vec{s}_k \\ &= \frac{1}{2c} \sum_k I_k \int_{f_k} \vec{B} \cdot d\vec{f} = \frac{1}{2c} \sum_k I_k \Phi_k \end{aligned} \tag{145}$$

ahol g_k, f_k, ill. Φ_k rendre a k-adik vezetőhurok görbéje, az arra illeszkedő felület, ill. a g_k görbe által határolt f_k felületen áthaladó mágneses indukciófluxus, továbbá $d\vec{s}_k$ a k-adik vezetőhurok ívhosszelem vektora. Stokes tétele értelmében a g_k görbe irányítása és az f_k flület normálisa a jobbkéz szabály szerint illeszkednek. Használjuk fel, hogy az áramhurkok a Biot-Savart-törvény értelmében

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu \sum_k \oint_{g_k} \frac{I_k d\vec{s}_k}{|\vec{r} - \vec{r}(s_k)|} \tag{146}$$

ahol $\vec{r} = \vec{r}(s_k)$ a g_k görbe paraméteres egyenlete. Feltettük, hogy a vezetők közti teret homogén, μ relatív mágneses permeabilitású szigetelő közeg tölti ki. Helyettesítsük be a vektorpotenciál explicit kifejezését a térenergia kifejezésébe, ekkor

$$\mathcal{E} = \frac{\mu}{2c} \sum_{k,k'} I_k I_{k'} \oint_{g_k} \oint_{g'_k} \frac{d\vec{s}_k \cdot d\vec{s}_{k'}}{|\vec{r}(s_k) - \vec{r}(s_{k'})|} = \frac{1}{2} \sum_{k,k'} L_{k,k'} I_k I_{k'} \tag{147}$$

ahol bevezettük az

$$L_{k,k'} = \frac{\mu}{c} \oint_{g_k} \oint_{g'_k} \frac{d\vec{s}_k \cdot d\vec{s}_{k'}}{|\vec{r}(s_k) - \vec{r}(s_{k'})|} \tag{148}$$

együtthatókat. Ha $k \neq k'$, akkor $L_{k,k'}$ kölcsönös indukciós együttható, megadja, hogy a k'-edik kör árama $L_{k,k'} I_{k'}$ járulékot ad a k-adik kör indukciófluxusához, $\Phi_k = \sum'_k L_{k,k'} I'_k$. Ha $k = k'$, akkor $L_{k,k}$ úgynevezett önindukciós együttható, megadja hogy a k-adik kör árama $L_{k,k} I_k$ járulékot ad a Φ_k mágneses indukciófluxushoz.

Körvezető önindukciós együtthatója. Egyetlen áramhurok mágneses terének energiáját az áramhurok L önindukciós együtthatója határozza meg,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L I^2 \tag{149}$$

ahol

$$L = \frac{\mu}{c} \oint_g \oint_g \frac{d\vec{s} \cdot d\vec{s}\,'}{|\vec{r}(s) - \vec{r}(s')|}. \tag{150}$$

Például az (x, y) síkban fekvő, R sugarú körvezető esetén, ha a síkbeli polárkoordinátarendszer origóját a kör középpontjában választjuk, és az áram pozitív körüljárási irányban folyik, akkor

$$\begin{aligned}
&\vec{r}(s) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi), \quad \vec{r}(s') = (R\cos\varphi', R\sin\varphi') \\
&|\vec{r}(s) - \vec{r}(s')| = R\sqrt{(\cos\varphi - \cos\varphi')^2 + (\sin\varphi - \sin\varphi')^2} \\
&= R\sqrt{2 - 2(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi')} \\
&= R\sqrt{2 - 2\cos(\varphi - \varphi')} \\
&d\vec{s} = R(-\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi, \quad d\vec{s}\,' = R(-\sin\varphi', \cos\varphi')d\varphi', \\
&d\vec{s} \cdot d\vec{s}\,' = R^2(\sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi')d\varphi d\varphi' = R^2\cos(\varphi - \varphi')
\end{aligned} \tag{151}$$

úgyhogy

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\mu R}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{[2 - 2\cos(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\mu 2\pi R}{c} \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\cos\alpha}{[2 - 2\cos\alpha]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu 4\pi R}{c\sqrt{2}} \int_0^{\pi} d\alpha \frac{\cos 2\alpha}{[1 - \cos 2\alpha]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mu 2\pi R}{c}\int_0^\pi d\alpha \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\mu 2\pi R}{c}\int_0^\pi d\alpha \sin\alpha \frac{2\cos^2\alpha - 1}{1-\cos^2\alpha} \\
&= \frac{\mu 2\pi R}{c}\int_{-1}^1 du \frac{2u^2-1}{1-u^2} = \frac{\mu 2\pi R}{c}\int_{-1}^1 du \Big(-2 + \frac{1}{1-u^2}\Big) \\
&= \frac{\mu 2\pi R}{c}\Big(-4 + 2\int_0^{1-\epsilon}\frac{du}{1-u^2}\Big) = \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{\mu 2\pi R}{c}\Big[-4 + \Big(\ln\Big|\frac{1+u}{1-u}\Big|\Big)_0^{1-\epsilon}\Big] \\
&= \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{\mu 2\pi R}{c}\Big(-4 + \ln\frac{2-\epsilon}{\epsilon}\Big). \qquad (152)
\end{aligned}
$$

Ez a példa mutatja, hogy a végtelen vékony vezetőhurkok önindukciós együtthatója logaritmikusan divergens. Véges eredményt csak akkor kapunk, ha a vezető keresztmetszetének kicsiny, véges értékét figyelembe vesszük. Ennek taglalása azonban meghaladja a jelen előadás kereteit.