SZIMMETRIÁK ÉS MEGMARADÁSI TÖRVÉNYEK

Sailer Kornél

(Speciális előadások)

Kossuth Lajos Tudományegyetem
Debrecen
1992.

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETŐ

A jegyzetben áttekintem a szimmetriáknak a kvantumelméletben játszott szerepét. A teljesség igénye nélkül azzal a céllal válogattam össze a témaköröket, hogy megmutassam, miként működnek a szimmetriák mint a fizikai törvények törvényei, mint általános elvek, amelyekből megmaradási törvények következnek és amelyek megszorítják a kölcsönhatások milyenségét és a fizikai rendszerek dinamikáját leíró mozgásegyenletek alakját.

A jegyzetet minden fizika szakot felvett hallgató figyelmébe ajánlom, aki éppen elkezdte kvantummechanika tanulmányait vagy már túl van rajta. A jegyzet úgy íródott, hogy akkor is érthető és tanulható legyen, ha valaki még nem ismerkedett meg a kvantummechanikával. Ezért elmondom a legfontosabb kvantummechanikai ismereteket a ,,megelőlegezés szintjén", azaz bizonyítás nélkül, – általában ott, ahol éppen használjuk őket.

A jegyzet a tárgyalásmód tekintetében erősen támaszkodik az [1] tankönyvre.

I. CSOPORTELMÉLETI BEVEZETŐ

1 A csoportokról és ábrázolásaikról

A $\mathcal{G}$ halmazt csoportnak nevezzük, ha értelmezve van rajta egy szorzásnak nevezett csoportművelet az alábbi tulajdonságokkal: bármely $g, g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$ esetén

- $g_1 g_2 \in \mathcal{G}$,
- $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) \equiv g_1 g_2 g_3$ (asszociativitás),
- létezik $e \in \mathcal{G}$ baloldali egységelem, $eg = g$,
- létezik g^{-1} baloldali inverz, $g^{-1} g = e$.

Ekkor a baloldali egység és inverz egyúttal jobboldali egység és inverz is: $ge = g$ és $gg^{-1} = e$.

A csoportokat elemeik számossága szerint a következőképpen nevezzük:

- Véges csoport: a csoport elemeinek n száma pozitív egész szám. Azt mondjuk, hogy a csoport rendje n.
- Diszkrét csoport: a csoport elemeinek száma megszámlálható végtelen.
- Folytonos csoport: a csoport kontinuum számosságú elemet tartalmaz. Ha a csoport minden eleme az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ véges számú valós paraméter analitikus függvénye, amelyek a valós számegyenes valamely intervallumát futják be, akkor véges folytonos csoportról beszélünk és n-et a csoport dimenziójának nevezzük.

A csoportot Abel-csoportnak nevezzük, ha a csoportművelet kommutatív, azaz bármely $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ esetén $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

A $\mathcal{G}$ csoport $\mathcal{G}'$ részhalmazát alcsoportnak nevezzük, ha az maga is csoport a $\mathcal{G}$-ben értelmezett műveletre nézve. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy $g_1 g_2^{-1} \in \mathcal{G}'$ bármely $g_1, g_2 \in \mathcal{G}'$ esetén. A $\mathcal{G}'$ alcsoportot invariáns alcsoportnak nevezzük, ha bármely $g \in \mathcal{G}$ és $g' \in \mathcal{G}'$ esetén $gg'g^{-1} \in \mathcal{G}'$. Az e egységelemből álló alcsoport és $\mathcal{G}$ a $\mathcal{G}$ csoport triviális invariáns alcsoportjai.

A csoportokat az invariáns alcsoportjaik alapján a következőképpen osztályozzuk:

- egyszerű csoportok, amelyeknek nincsen nem triviális invariáns alcsoportjuk;
- félegyszerű csoportok, amelyeknek nincsen nem triviális abeli invariáns alcsoportjuk.

Az egyszerű csoportok halmaza szűkebb, mint a félegyszerűeké: minden egyszerű csoport félegyszerű, de nem minden félegyszerű csoport egyszerű.

Különböző csoportok összehasonlítása leképezések révén lehetséges. A $\mathcal{G}$ csoportot a $\mathcal{G}'$ csoportra homomorf módon leképezhetőnek nevezzük, ha létezik $\mathcal{G}$-nek $\mathcal{G}'$-re való műveletttartó leképezése. $\mathcal{G}$-nek azt a $\mathcal{K}$ részhalmazát, amelyet a homomorfizmus az $e' \in \mathcal{G}'$ egységelemre képez le, a homomorfizmus magjának nevezzük. A homomorfizmus $\mathcal{K}$ magja a $\mathcal{G}$ csoport invariáns alcsoportja. Ha a homomorfizmus kölcsönösen egyértelmű leképezés, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{G}$ és $\mathcal{G}'$ izomorf. Az izomorfizmus magja a $\mathcal{G}$ egységeleméből álló halmaz.

A csoportokban valamely alcsoportjuk segítségével bal- és jobboldali mellékosztályokat, majd a csoport felett a mellékosztályokból álló faktorcsoportot értelmezhetünk. Ha $g \in \mathcal{G}$ tetszőleges rögzített elem és $\mathcal{G}'$ alcsoportja a $\mathcal{G}$ csoportnak, akkor a $\{gg'\} = g\mathcal{G}'$ ($\{g'g\} = \mathcal{G}'g$) halmazt, ahol $g' \in \mathcal{G}'$ tetszőleges, jobboldali (baloldali) mellékosztálynak nevezzük. Ha $\mathcal{G}'$ invariáns alcsoport, akkor $gg'g^{-1} \in \mathcal{G}'$ és a bal- és jobboldali mellékosztályok következésképpen megegyeznek. Ekkor a mellékosztályok csoportot alkotnak, amelyben a csoportművelet az alábbi tulajdonságú: $(g_1\mathcal{G}')(g_2\mathcal{G}') = g_1g_2\mathcal{G}'$; $e\mathcal{G}'$ az egységelem és $g\mathcal{G}'$ inverze $g^{-1}\mathcal{G}'$. A mellékosztályoknak ezt a csoportját faktorcsoportnak nevezik, jelölése: $\mathcal{G}/\mathcal{G}'$. Ha a $\mathcal{G}$ csoport homomorf módon leképezhető a $\mathcal{G}'$ csoportra, akkor a homomorfizmus $\mathcal{K}$ magja (invariáns alcsoport!) által generált $\mathcal{G}/\mathcal{K}$ faktorcsoport izomorf a $\mathcal{G}'$ csoporttal.

A $\mathcal{G}$ csoportot a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ alcsoportjai direkt szorzatának nevezzük, azaz $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$, ha

- a két alcsoportnak pontosan egy közös eleme van, az e egységelem;
- bármely két $g_1 \in \mathcal{G}_1$ és $g_2 \in \mathcal{G}_2$ elem kommutál, azaz $g_1g_2 = g_2g_1$;
- bármely $g \in \mathcal{G}$ csoportelem egyértelműen bontható fel $g = g_1g_2$ alakban, ahol $g_1 \in \mathcal{G}_1$ és $g_2 \in \mathcal{G}_2$.

A csoportokat ábrázolhatjuk valamely vektortér fölött értelmezett lineáris operátorokkal. Ha a vektortérben bázist választunk, akkor a lineáris operátoroknak ebben a bázisban mátrixok felelnek meg és így a csoportot mátrixokkal tudjuk ábrázolni. A $\mathcal{G}$ csoportnak az L vektortérben való ábrázolásán a $T : g(\in \mathcal{G}) \rightarrow T(g)(\in \mathcal{O}(L))$ homomorfizmust értjük, ahol $T(g)$ az L vektortéren értelmezett lineáris operátorok. Ha az L vektortér véges d dimenziós, akkor az ábrázolást véges dimenziósnak nevezzük. Ekkor (rögzített bázis esetén) valamennyi csoportelem $T(g)$ képe egy $(d \times d)$-s mátrix. Ha az L vektortérben létezik pozitív definit skalárszorzat, akkor beszélhetünk unitér ábrázolásról, amikoris minden g csoportelemet unitér $T(g)$ mátrixszal ábrázolunk. A $T_1 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}(L_1)$ és a $T_2 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}(L_2)$ ábrázolásokat ekvivalensnek nevezzük, ha létezik az L_2 vektortérnek L_1-re való $A : L_2 \rightarrow L_1$ kölcsönösen egyértelmű leképezése a $T_1(g)A = AT_2(g)$ tulajdonsággal. Egy csoport összes lehetséges ábrázolásainak halmaza ekvivalens ábrázolások diszjunkt osztályainak egyesítéseként áll elő.

A $T : \mathcal{G} \to \mathcal{O}(L)$ ábrázolást reducibilisnek nevezzük, ha létezik legalább egy olyan nem triviális L_1 altér az L vektortérben, amelyet valamennyi $T(g)$ lineáris operátor invariánsan hagy. Ellenkező esetben az ábrázolást irreducibilisnek nevezzük. Reducibilis ábrázolás esetén (alkalmas bázisban) minden csoportelemnek

$$T(g) \sim \begin{pmatrix} T_1(g) & Q(g) \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

alakú mátrix felel meg, ahol $T_1(g)$ L_1-et önmagára képezi le. Ha az L_1-re merőleges altér szintén invariáns, akkor minden csoportelem azonos blokkdiagonális szerkezettel rendelkező mátrixszal ábrázolható:

$$T(g) \sim \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a $\mathcal{G}$ csoport T ábrázolása L-ben az L_1-beli T_1 és az L_2-beli T_2 ábrázolások direkt összege: $T(g) = T_1(g) \oplus T_2(g)$. Ha az L teret teljesen sikerül felbontanunk invariáns alterek direkt összegére, $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$, akkor az ábrázolást teljesen reducibilisnek nevezzük, és írhatjuk, hogy $T(g) = T_1(g) \oplus T_2(g) \oplus \ldots \oplus T_n(g)$. Itt valamennyi T_i ábrázolás irreducibilis. A véges dimenziós unitér ábrázolások mindig teljesen reducibilisek. A véges dimenziós unitér ábrázolásokat tehát mindig vissza tudjuk vezetni irreducibilis ábrázolásokra. Ahhoz, hogy az ábrázolásokról teljes képet kapjunk, elegendő ilyenkor csak az irreducibilis ábrázolásokat felkutatni.

Megmutatjuk, hogyan lehet tenzori szorzással ábrázolásokból újabbakat szerkeszteni. Ezzel lehetővé válik majd egy csoport összes irreducibilis ábrázolásának felkutatása. Legyen $T_1 : \mathcal{G} \to \mathcal{O}(L_1)$ és $T_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{O}(L_2)$ két ábrázolás. A

$$[T_1(g) \otimes T_2(g)]_{ij,kl} \;=\; [T_1(g)]_{ik}[T_2(g)]_{jl} \tag{1.3}$$

összefüggéssel értelmezett $T_1 \otimes T_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{O}(L_1 \otimes L_2)$ leképezés szintén ábrázolása a $\mathcal{G}$ csoportnak; a neve tenzori szorzat ábrázolás. Ha $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$, és $T_1 : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{O}(L_1)$, $T_2 : \mathcal{G}_2 \to \mathcal{O}(L_2)$ irreducibilis ábrázolások, akkor a $T = T_1 \otimes T_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{O}(L_1 \otimes L_2)$ ábrázolás is irreducibilis. Ezt a tételt felhasználva megszerkeszthetjük egy csoport összes irreducibilis ábrázolásait.

A csoportokon bevezethetjük a ,,közelség" fogalmát, vagyis topológiát értelmezhetünk. Ezt követően értelmezhető a határérték és a folytonosság. A továbbiakban csak olyan csoportokat vizsgálunk, amelyek kölcsönösen egyértelműen leképezhetőek az n-dimenziós valós euklideszi tér valamely részhalmazára. Jelölje $P(g) \in E_n$ a g elem képét. Tekintsük ennek ϵ sugarú $S_\epsilon(P(g)) \subset E_n$ környezetét, azaz mindazon P' pontokat, amelyekre $|P' - P(g)| < \epsilon$. A g csoportelem ϵ sugarú $\Sigma_\epsilon(g) \subset$

$\mathcal{G}$ környezetén azon g' elemek halmazát értjük, amelyeknek képei a g elem $P(g)$ képének ϵ sugarú környezetében találhatók, azaz amelyekre $|P(g') - P(g)| < \epsilon$. A környezet fogalmának birtokában a határérték és a folytonosság a szokásos módon definiálható. Pl. a $g_1 g_2 = g_3$ csoportművelet folytonos a g_2-ben, ha tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta_\epsilon > 0$, hogy minden $g \in \Sigma_{\delta_\epsilon}(g_2)$ csoportelemre $|P(g_1 g) - P(g_3)| < \epsilon$.

A $\mathcal{G}$ csoportot topológikus csoportnak nevezzük, ha a csoportművelet mindkét változójában folytonos és az inverzképzés is folytonos. A $\mathcal{G}$ csoport kompakt, ha a csoportelemek E_n-beli képeinek $P(\mathcal{G})$ halmaza kompakt (korlátos és zárt). A $\mathcal{G}$ csoportot lokálisan kompaktnak nevezzük, ha minden $P(g) \in E_n$ képpontnak van csak képpontokból álló kompakt környezete.

A topológikus csoportok fontos tulajdonsága az összefüggőség. Ez azzal kapcsolatos, hogy a csoporton értelmezett görbéket (utakat) lehet-e folytonosan egymásba ill. egy pontba deformálni. A valós számegyenes $x \in [0, 1]$ zárt intervallumának a $\mathcal{G}$ csoportba való folytonos $g(x) : [0, 1] \to \mathcal{G}$ leképezését a $\mathcal{G}$ csoporton értelmezett folytonos görbének (útnak) nevezzük. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{G}$ csoport összefüggő, ha bármely két g_1, g_2 csoportelemhez található olyan folytonos görbe, amelynek végpontjai g_1 és g_2, azaz létezik olyan $g(x)$, hogy $g(0) = g_1$ és $g(1) = g_2$. A $g(x)$ görbét zártnak nevezzük, ha $g(0) = g(1)$. Akkor mondjuk, hogy a $g(x)$ és az $f(x)$ görbék folytonosan deformálhatók egymásba, ha létezik olyan, mindkét változójában folytonos $A(x, y) : [0, 1] \otimes [0, 1] \to \mathcal{G}$ leképezés, amelyre $A(x, 0) = g(x)$ és $A(x, 1) = f(x)$. A $\mathcal{G}$ csoportot egyszeresen összefüggőnek nevezzük, ha minden zárt görbéje folytonosan egy pontba deformálható (azaz az $f(x) = f$ „görbébe"). A nem egyszeresen összefüggő csoportot többszörösen összefüggőnek nevezzük. Utóbbi esetben a folytonosan egymásba deformálható zárt görbék diszjunkt osztályokat alkotnak. Ha m ilyen osztály van, akkor a csoport m-szeresen összefüggő.

A fizikai alkalmazások során csak olyan ábrázolásokat fogunk vizsgálni, amelyek folytonosak, azaz amelyekre $g \to g'$ esetén $T(g) \to T(g')$. A többszörösen összefüggő csoportok ábrázolásai többértékűeknek adódnak, ha ragaszkodunk az ábrázolás folytonosságához. A helyzetet azonban leegyszerűsíti az a tény, hogy minden többszörösen összefüggő $\mathcal{G}$ topológikus csoporthoz egyértelműen létezik egy egyszeresen összefüggő $\bar{\mathcal{G}}$ topológikus csoport, amely homomorf módon leképezhető $\mathcal{G}$-re. $\bar{\mathcal{G}}$-t a $\mathcal{G}$ csoport univerzális fedőcsoportjának nevezzük. Mivel a fedőcsoport egyszeresen összefüggő, azért csak egyértékű folytonos ábrázolásai vannak. Ezenkívül meg lehet mutatni, hogy a $\mathcal{G}$ csoport minden ábrázolása a fedőcsoportjának egy egyértékű ábrázolását valósítja meg. Ahhoz tehát, hogy megtaláljuk a $\mathcal{G}$ csoport összes (egy- és több-értékű) ábrázolását, elegendő a $\bar{\mathcal{G}}$ fedőcsoport összes (egyértékű) ábrázolását keresnünk.

A topológikus csoportok között a fizikai alkalmazások szempontjából különösen fontosak a Lie-csoportok. A $\mathcal{G}$ topológikus csoportot n-dimenziós Lie-csoportnak nevezzük, ha az $e \in \mathcal{G}$ egységelemnek létezik az alábbi tulajdonságokkal rendelkező N környezete:

- N pontjai E_n-beli képeinek parametrizálásához pontosan n darab valós a_1, a_2, $\ldots, a_n$ paraméter szükséges;
- az N környezetből vett tetszőleges két $g_1(a_1, \ldots a_n)$, $g_2(b_1, \ldots, b_n)$ elem $g_1 g_2 = g_3(c_1, \ldots, c_n)$ szorzatának és bármely $g_1(a_1, \ldots, a_n)$ elem $g_1^{-1}(d_1, \ldots, d_n)$ inverzének a képét megadó paraméterek a g_1 és g_2 képét megadó paramétereknek analitikus függvényei: $c_i = c_i(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ és $d_i = d_i(a_1, \ldots, a_n)$. A paramétereket célszerű úgy választani, hogy az egység elem képe E_n origója legyen: $e = e(0, \ldots, 0)$.

Ezt a fejezetet néhány fontos tétellel zárjuk. Véges ill. folytonos kompakt csoportokra a következő állítások igazak:

- Az ekvivalens ábrázolások minden osztályában van egy unitér ábrázolás.
- Bármely unitér ábrázolás teljesen reducibilis.
- Minden unitér ábrázolás véges dimenziós.

Ezért akár véges csoportok, akár folytonos kompakt csoportok esetén elegendő a véges dimenziós, irreducibilis, unitér, inekvivalens ábrázolásokat megkeresnünk.

Ha a csoport nem kompakt, akkor minden nem triviális unitér ábrázolása végtelen dimenziós.

Egy félegyszerű csoport (s így egy egyszerű csoport) folytonos ábrázolásai mind teljesen reducibilisek.

2 Lie-csoportok és Lie-algebrák

Legyen $\mathcal{G}$ egy n-paraméteres Lie-csoport és $T : g \to T(g)$ annak egy folytonos ábrázolása. Tekintsük az e egységelem $\Sigma_\epsilon(e)$ környezetében lévő $g = g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ elemeket. Segítségükkel definiáljuk a csoport ábrázolásának ún. infinitezimális generátorait:

$$I_k = \frac{\partial T(g)}{\partial a_k}|_{a_1=a_2=\ldots a_n=0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.1}$$

A Lie-csoportok talán legfontosabb tulajdonsága, hogy az infinitezimális generátorok kommutátorai kifejezhetők mint az infinitezimális generátorok lineáris kombinációi,

$$[I_k, I_j] \;=\; \sum_{\ell=1}^{n} c_{kj}^{\ell} I_\ell \qquad (j,k = 1,2,\ldots,n), \tag{2.2}$$

ahol a c_{kj}^{ℓ} csoportszerkezeti állandók függetlenek az ábrázolástól. A csoportszerkezeti állandók a csoportot kimerítően jellemzik és az alábbi tulajdonságoknak tesznek eleget:

$$c_{kj}^{\ell} \;=\; -c_{jk}^{\ell}, \tag{2.3}$$

$$\sum_{h=1}^{n} (c_{s\ell}^{h} c_{hi}^{k} + c_{is}^{h} c_{hl}^{k} + c_{li}^{h} c_{hs}^{k}) \;=\; 0. \tag{2.4}$$

Az $\mathcal{L}$ Lie-algebrán olyan valós lineáris vektorteret értünk, amelyen értelmezve van az $[x, y]$ művelet az alábbi tulajdonságokkal:

$$\begin{aligned} [x,y] &\in \mathcal{L}, \\ [x,y] &= -[y,x], \\ [x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

bármely $x, y, z \in \mathcal{L}$ esetén. Ha $[x, y] = 0$, akkor azt mondjuk, hogy x és y kommutál (uis. ha az algebrát lineáris operátorokkal ábrázoljuk, akkor a $[\ldots,\ldots]$ művelet az operátorok szokásos kommutátorát jelenti). A Lie-algebra rangja azon báziselemek maximális száma, amelyek egymással páronként kommutálnak. Az $\mathcal{L}$ Lie-algebra ábrázolásán a Lie-algebrának valamely lineáris vektortér lineáris operátorainak halmazára történő $x \to T(x)$ leképezését értjük, amelyre:

$$T(\alpha x + \beta y) \;=\; \alpha T(x) + \beta T(y), \tag{2.6}$$

$$T([x,y]) \;=\; [T(x), T(y)] \tag{2.7}$$

tetszőleges $x, y \in \mathcal{L}$ és α, β valós számok esetén.

A Lie-csoportok és a Lie-algebrák között szoros kapcsolat van. A $\mathcal{G}$ Lie-csoport valamely ábrázolásának infinitezimális generátorai egy Lie-algebrát ábrázolnak, a csoporthoz tartozó Lie-algebrát. Ebben az I_k infinitezimális generátorok bázist alkotnak és teljesítik a (2.2) azonosságot.

Fordítva is igaz, hogy a Lie-algebra bármely ábrázolása meghatározza a hozzátartozó Lie-csoport egy ábrázolását. Ezt a következőképpen láthatjuk be:

- Bevezetjük a Lie-csoport egy-paraméteres alcsoportjainak fogalmát. A $\mathcal{G}$ n-paraméteres Lie-csoport egy-paraméteres alcsoportján a $g(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ csoportelemek halmazát értjük. A t paraméter alkalmas megválasztásával elérhetjük, hogy $g(t_1)g(t_2) = g(t_1 + t_2)$, $g(0) = e$. Válasszuk meg t-t így. Az a_i $(i = 1, \ldots, n)$ paramétereket kifejezve a t paraméterrel, előáll $g(t)$.

- Meghatározzuk az egy-paraméteres alcsoportok ábrázolásainak alakját. Legyen $T(g)$ a $\mathcal{G}$ csoport egy folytonos ábrázolása. Ekkor valamely egy-paraméteres alcsoport ábrázolása a $T(t) \equiv T(a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t))$ egy-paraméteres operátorral adható meg. A t paraméter választásának következtében

$$T(t_1)T(t_2) = T(t_1 + t_2) \tag{2.8}$$

és $T(0) = 1$. Elemi számolással adódik, hogy

$$\frac{dT(t)}{dt}|_{t=0} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial T(t)}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial t} \right] |_{t=0} = \sum_{k=1}^{n} I_k c_k, \tag{2.9}$$

ahol $c_k = \partial a_k / \partial t|_{t=0}$ és felhasználtuk, hogy az e egységelemnek $a_k = 0$ és $t = 0$ felel meg.
Deriváljuk ezután a (2.8) összefüggés mindkét oldalát t_1 szerint, majd vegyük az eredményt a $t_1 = 0$, $t_2 = t$ helyen:

$$\frac{dT(t)}{dt}|_{t=0} T(t) \quad = \quad \frac{dT(t)}{dt}. \tag{2.10}$$

A bal oldalon a $t = 0$ helyen vett derivált helyére helyettesítsük be a (2.9) kifejezést, majd integráljunk t szerint. Eredményül azt kapjuk, hogy egy egy-paraméteres alcsoport minden elemének ábrázolása kifejezhető az ábrázolás infinitezimális generátorainak a segítségével az alábbi alakban:

$$T(t) \quad = \quad \exp\left(\sum_{k=1}^{n} I_k c_k t \right). \tag{2.11}$$

- Megmutatható, hogy az összefüggő Lie-csoportok minden eleme benne van valamelyik egy-paraméteres alcsoportban, így az összefüggő Lie-csoportok minden eleme felírható a (2.11) exponenciális alakban. Unitér ábrázolások esetén szokás az I_k operátorok helyett a $J_k = -\mathrm{i} I_k$ operátorokat bevezetni, amelyek hermitikusak. Ekkor (2.11) az alábbi alakot ölti:

$$T(t) \quad = \quad \exp\left(\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} J_k c_k t \right). \tag{2.12}$$

A Lie-algebra egy adott ábrázolása tehát az infinitezimális generátorok és a Lie-csoport elemei ábrázolásainak exponenciális alakja révén meghatározza a Lie-csoportnak is egy ábrázolását. A(z) (összefüggő) Lie-csoportok ábrázolásainak felkutatása ezért visszavezethető a csoporthoz tartozó Lie-algebrák ábrázolásainak felkutatására. A Lie-algebrák ábrázolásainak reducibilis vagy irreducibilis volta hasonlóan értelmezhető, mint a Lie-csoportok ábrázolásainak megfelelő tulajdonságai.

A Lie-csoportok és -algebrák ábrázolásainak osztályozásában alapvető fontosságú szerepet játszanak az ún. Casimir-operátorok. Legyen $\{\lambda_i\}$ az $\mathcal{L}$ Lie-algebra bázisa; $[\lambda_i, \lambda_j] = \sum_{\ell=1}^{n} c_{ij}^{\ell} \lambda_\ell$. Casimir-operátornak nevezzük az algebra bázisvektorainak minden olyan kifejezését, amely valamennyi bázisvektorral kommutál, azaz amelyre $[C, \lambda_i] = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. A Casimir-operátorok általában nem elemei az algebrának, mert nem lineáris kifejezései a bázisvektoroknak. Lie-algebra (-csoport) esetén a Casimir-operátorok az infinitezimális generátorok olyan kifejezései, amelyek a Lie-algebra (-csoport) ábrázolásának valamennyi elemével kommutálnak. Ezért, ha az ábrázolás irreducibilis, akkor a Casimir-operátorok az egységoperátor számszorosai. A Casimir-operátorok sajátértékeinek segítségével osztályozhatjuk tehát az irreducibilis ábrázolásokat. Meg lehet mutatni, hogy az irreducibilis ábrázolások teljes jellemzéséhez szükséges Casimir-operátorok száma pontosan megegyezik a Lie-algebra rangjával, vis. az egymással páronként kommutáló infinitezimális generátorok számával. Racahtól származik az a tétel, hogy minden félegyszerű csoporthoz, amelynek rangja r, létezik r darab független Casimir-operátor. (Ezek természetesen egymással is páronként felcserélhetők.)

Ha a Lie-algebra félegyszerű, akkor rögtön szerkeszthetünk egy Casimir-operátort. Képezzük a

$$g_{ij} \;=\; \sum_{k\ell} c_{ik}^{\ell} c_{j\ell}^{k}$$

mátrixot és g^{ij} inverzét, $\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta_{ik}$. A

$$C \;=\; \sum_{ij} g^{ij} \lambda_i \lambda_j \tag{2.13}$$

operátor Casimir-operátor, ez az ún. kvadratikus Casimir-operátor.

3 Speciális csoportok

3.1 A 3-dimenziós forgatások

Az E_3 valós 3-dimenziós euklideszi tér forgatásain olyan $\mathcal{R}$ transzformációkat értünk, amelyek a tér egy O pontját (nevezzük origónak) és a tér pontjainak távolságait invariánsan hagyják. A forgatások az egymás utáni végrehajtásukra mint műveletre nézve csoportot alkotnak. Ez az O(3)-csoport. Valamely rögzített bázisban az O(3)-csoportot valós 3×3-as $\mathcal{R}_{jk}$ mátrixok ábrázolják:

$$\vec{x} \to \vec{x}\,' = \mathcal{R}\vec{x} \quad \Rightarrow \quad x_j \to x_j{}' = \mathcal{R}_{jk} x_k, \tag{3.1}$$

bármely $\vec{x} \in E_3$ esetén. A forgatások a vektorok hosszát és egymással bezárt szögeit változatlanul hagyják, amit úgy is kifejezhetünk, hogy a skalárszorzat invariáns:

$$\vec{x}\vec{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \quad \to \quad \vec{x}\,'\vec{y}\,' = \sum_{i=1}^{3} x_i{}' y_i{}' = \vec{x}\vec{y}. \tag{3.2}$$

Ebből következik, hogy az $\mathcal{R}_{jk}$ mátrixok ortogonálisak:

$$\mathcal{R}\mathcal{R}^T = I, \quad \text{azaz} \quad \sum_{j=1}^{3} \mathcal{R}_{ij}\mathcal{R}_{kj} = \delta_{ik}. \tag{3.3}$$

Az ortogonalitás feltételéből következik, hogy $(\det\mathcal{R})^2 = 1$. Ennek megfelelően a csoport két diszjunkt részhalmazra bontható. Az egyikbe tartoznak azok az elemek, amelyekre $\det\mathcal{R} = +1$, a másikba pedig azok, amelyekre $\det\mathcal{R} = -1$. Az utóbbi részhalmaz egyik eleme az I_s tértükrözés:

$$I_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Az egyik részhalmazból a másikba nem lehet folytonos görbe mentén eljutni. Ezért az O(3)-csoport nem összefüggő. Azokat a transzformációkat, amelyekre $\det\mathcal{R} = +1$, valódi forgatásoknak nevezzük. A valódi forgatások között megtaláljuk az O(3)-csoport egységelemét is (egységmátrix), ezért a valódi forgatások az O(3)-csoport SO(3) alcsoportját képezik.

A valódi forgatások alcsoportja invariáns alcsoport, hiszen bármely $\mathcal{R} \in$O(3) és $\mathcal{R}_p \in$ SO(3) esetén $\det(\mathcal{R}\mathcal{R}_p\mathcal{R}^{-1}) = +1$. Az O(3)-csoport valamennyi eleme egyértelműen felírható egy valódi forgatás és I vagy I_s szorzataként: $\mathcal{R} = I\mathcal{R}_p$ vagy $\mathcal{R} = I_s\mathcal{R}_p$ alakban. Ez egyrészt azt jelenti, hogy létezik egy O(3) $\to$ SO(3) homomorfizmus, amelynek a magja a P=$\{I, I_s\}$ abeli alcsoport. Másrészt, az O(3) csoport a homomorfizmus P magjának és a valódi forgatások SO(3) alcsoportjának direkt szorzata: O(3) = SO(3) $\otimes$ P. Ezért O(3) összes irreducibilis ábrázolása mint SO(3) és P irreducibilis ábrázolásainak direkt szorzata áll elő. Mivel P Abel-csoport, azért csak egy-dimenziós ábrázolásai vannak; ezek $I, I_s \to 1$ és $I \to 1$, $I_s \to -1$. A továbbiakban elegendő ezért csak a valódi forgatások irreducibilis ábrázolásait keresnünk.

A valódi forgatások 3 paraméterrel adhatók meg. Ez lehet a 3 Euler-szög vagy az $\vec{n}$ egységvektor, amellyel párhuzamos tengely körül forgatunk és a forgatás ω $(0 \leq \omega \leq \pi)$ szöge. Az utóbbi parametrizálás különösen alkalmas arra, hogy a valódi forgatások csoportjának topológiáját vizsgáljuk. Az SO(3)-csoport kölcsönösen egyértelműen leképezhető az E_3 euklideszi tér origója körüli π sugarú gömbalakú tartományra: az $\mathcal{R}_p(\vec{n}, \omega)$ csoportelem képe az $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ vektor hegye által kijelölt pont. Mivel azonban az $\vec{n}$ irány és a $-\vec{n}$ irány körüli π szögű elforgatás ugyanaz az elforgatás, azért a π sugarú gömb átmérőinek végpontjait azonosaknak kell tekintenünk (egybe kell ejtenünk), ha nem akarjuk megsérteni a leképezés egy-egyértelműségét. Mivel a képpontok így nyert halmaza korlátos, zárt és összefüggő, azért a valódi forgatások SO(3) csoportja kompakt, összefüggő csoport.

Az SO(3)-csoport azonban nem egyszeresen összefüggő. A csoportra kétféle zárt görbe rajzolható: (i) azok a zárt görbék, amelyeknek a képe a π sugarú gömb ugyanazon pontjából indul ki, mint amelyben végződik; (ii) azok a zárt görbék, amelyeknek a végpontjai a gömb felületének diametrálisan átellenes pontjaiban vannak. Amíg az (i) típusú zárt görbék összehúzhatók egyetlen pontra, addig a (ii) típusúak nem. A zárt görbéknek két osztálya van, amelyek nem deformálhatók át folytonosan egymásba. A 3-dimenziós valódi forgatások csoportja tehát kétszeresen összefüggő.

Végezetül belátható az is, hogy két valódi forgatás egymás utáni alkalmazásának eredményét és a valódi forgatások inverzeit megadó paraméterek a megfelelő csoportelemek paramétereinek analitikus függvényei. Az SO(3)-csoport tehát kétszeresen összefüggő, kompakt, 3-paraméteres Lie-csoport.

A kétszeresen összefüggő SO(3)-csoport (egy- és kétértékű) irreducibilis ábrázolásait megkaphatjuk, mint az univerzális fedőcsoportjának (egyértékű) irreducibilis ábrázolásait. Az SO(3)-csoport univerzális fedőcsoportja az SU(2)-csoport: a $2\otimes 2$-es, komplex elemű, unitér, unimoduláris (a determináns értéke $+1$) mátrixok csoportja. Az SU(2)-mátrixok a 2-dimenziós komplex vektortéren hatnak és invariánsan hagyják a $(v,w)=\sum_{i=1,2} v_i^\star w_i$ skalárszorzatot, ahol v és w a 2-dimenziós komplex vektortér tetszőleges vektorai.

Definíciójuk következtében az SU(2)-mátrixok általános alakja:

$$\mathcal{V}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^\star & a^\star \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

ahol a és b tetszőleges komplex számok, amelyekre $|a|^2+|b|^2=1$. Vezessük be az $a=a_0+\mathrm{i}a_3$ és $b=a_2+\mathrm{i}a_1$ definícióval az a_i $(i=0,1,2,3)$ valós paramétereket $(\sum_{i=0}^3 a_i^2=1)$; ekkor

$$\mathcal{V} \;=\; a_0 I+\mathrm{i}\vec{a}\vec{\sigma}, \tag{3.6}$$

ahol $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ és $\vec{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ a Pauli-mátrixok:

$$\sigma_x=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y=\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Vezessük be az a paramétert az $a^2=\sum_{i=1}^3 a_i^2$ összefüggéssel. Ekkor írhatjuk, hogy $a_0=\cos(\omega/2)$ és $a=\sin(\omega/2)$, ahol $0\le\omega\le 2\pi$, és ekkor az SU(2)-mátrixok általános alakjára

$$\mathcal{V}(\vec{n},\omega)=\cos(\omega/2)+\mathrm{i}\vec{n}\vec{\sigma}\sin(\omega/2)=\exp(\mathrm{i}\vec{n}\vec{\sigma}\omega/2) \tag{3.8}$$

adódik, ahol $\vec{n}$ az $\vec{a}$ irányába mutató egységvektor. Ez az összefüggés megfeleltetést létesít az SU(2)-mátrixok és a 3-dimenziós euklideszi térbe írt π sugarú gömb pontjai között. A gömb felületének pontjai ($\omega = 2\pi$) mind a $\mathcal{V}(\vec{n}, 2\pi) = -I$ csoportelem képei. Most tehát minden zárt görbét folytonosan össze lehet húzni a gömb tetszőleges pontjára. Ezért az SU(2)-csoport egyszeresen összefüggő kompakt Lie-csoport.

Az SU(2) $\to$ SO(3) homomorfizmust az a leképezés valósítja meg, amely az SU(2)-csoport $\pm\mathcal{V}(\vec{n}, \omega)$ elemeihez ugyanazt az $\mathcal{R}_{ik}(\vec{n}, \omega/2)$ mátrixot rendeli. Mint az az előző fejezetekben elmondottakból következik, a 3-dimenziós tér valódi forgatásai SO(3) csoportjának csak egy- és két-értékű ábrázolásai vannak, amelyek mind az SU(2) fedőcsoport egyértékű ábrázolásai. Ezért elegendő a későbbiekben csak az SU(2)-csoport véges dimenziós, unitér, irreducibilis ábrázolásait meghatározni.

Határozzuk most meg a csoportszerkezeti állandókat. Az SO(3) és az SU(2) algebra izomorf. Ennek egyik ábrázolása az ön- vagy más néven alapábrázolás, amikor az algebra elemeit $2 \otimes 2$-es komplex mátrixokkal ábrázoljuk. Ekkor az ábrázolás exponenciális alakjára vonatkozó általános (2.12) képlet és az SU(2)-mátrixok alakját megadó (3.8) képlet összevetésével az infinitezimális generátorokra

$$J_1 = \frac{1}{2}\sigma_x, \qquad J_2 = \frac{1}{2}\sigma_y, \qquad J_3 = \frac{1}{2}\sigma_z \tag{3.9}$$

adódik. A Pauli-mátrixok alakját felhasználva igazolhatjuk,hogy az SU(2)-algebra generátorai a

$$[J_j, J_k] \;=\; \mathrm{i}\sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} J_l \tag{3.10}$$

kommutátorrelációt elégítik ki. Innen leolvashatók a csoportszerkezeti állandók.

Az SU(2)-csoport egyszerű és a rangja 1 (az SU(2)-algebrának nincs két kommutáló báziseleme). Utóbbiból következik, hogy az SU(2)-csoportnak az irreducibilis ábrázolásait egyetlen Casimir-operátor sajátértékeivel egyértelműen lehet jellemezni. A

$$C \;=\; \sum_{i=1}^{3} J_i^2 \tag{3.11}$$

operátor kommutál valamennyi J_i ($i = 1, 2, 3$) infinitezimális generátorral, így Casimir-operátor. Ennek sajátértékeit fogjuk használni az SU(2)-csoport irreducibilis ábrázolásainak jellemzésére.

3.2 Az SU(3)-csoport

Az SU(3)-csoport a komplex $3 \otimes 3$-as, unitér, unimoduláris mátrixok csoportja. A csoportelemek 18 valós paraméterrel jellemezhetők, amelyek között az unitaritási feltétel és az unimodularitás 10 valós összefüggést jelent, úgyhogy a csoport független paramétereinek száma 8. A csoport általános eleme

$$\mathcal{U} \;=\; \exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=1}^{8} c_k F_k\right) \tag{3.12}$$

alakú, ahol c_k tetszőleges valós paraméterek és F_k 8 lineárisan független $3 \otimes 3$-as hermitikus mátrix, az infinitezimális generátorok:

$$F_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$F_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$F_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$F_7 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

A generátorok az alábbi kommutációs relációt elégítik ki:

$$[F_i, F_j] \;=\; \mathrm{i}\sum_{k=1}^{8} f_{ijk} F_k, \tag{3.14}$$

ahol f_{ijk} bármely két indexére nézve antiszimmetrikus. Az el nem tűnő f_{ijk} értékek az alábbiak:

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = 1/2,$$
$$f_{156} = f_{367} = -1/2, \quad f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2. \tag{3.15}$$

Az F_k mátrixok megvalósítják az SU(3)-algebra önábrázolását. Az önábrázolásban az F_k mátrixok az alábbi antikommutációs relációkat is kielégítik:

$$\{F_i, F_j\} \;=\; \frac{1}{3}\delta_{ij} I + \sum_{k=1}^{8} d_{ijk} F_k, \tag{3.16}$$

ahol d_{ijk} bármely két indexében szimmetrikus és az el nem tűnő értékek:

$$d_{146} = d_{157} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = 1/2,$$
$$d_{247} = d_{366} = d_{377} = -1/2, \quad d_{118} = d_{228} = d_{338} = 1/\sqrt{3},$$
$$d_{888} = -1/\sqrt{3}, \quad d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{788} = -1/(2\sqrt{3}). \tag{3.17}$$

Az f_{ijk} és d_{ijk} mennyiségek az alábbi összefüggésnek tesznek eleget:

$$\sum_{k=1}^{8}(d_{ijk}f_{klm}+f_{klj}d_{ikm}) \quad = \quad \sum_{k=1}^{8} d_{kjm}f_{kil}. \tag{3.18}$$

Az SU(3)-csoport félegyszerű, kompakt és egyszeresen összefüggő Lie-csoport. A csoport rangja 2. Két Casimir-operátor szerkeszthető, a kvadratikus

$$C_1=\sum_{i=1}^{8}{F_i}^2=\frac{2\mathrm{i}}{3}\sum_{ijk} f_{ijk}F_iF_jF_k, \tag{3.19}$$

és a köbös

$$C_2=\sum_{ijk} d_{ijk}F_iF_jF_k. \tag{3.20}$$

Az SU(3) irreducibilis ábrázolásai C_1 és C_2 sajátértékeivel egyértelműen jellemezhetők. Megintcsak elegendő lesz a véges dimenziós, unitér, irreducibilis, inekvivalens ábrázolásokat megkeresnünk. Ezt azonban kicsit még későbbre halasztjuk.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából még érdemes az algebra egy másik bázisát is bevezetni:

$$\begin{aligned} T_\pm = F_1 \pm \mathrm{i}F_2, \quad U_\pm = F_6 \pm \mathrm{i}F_7,\\ V_\pm = F_4 \pm \mathrm{i}F_5, \quad T_3 = F_3, \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Érdemes megemlíteni, hogy T_+, T_- és T_3 az SU(3)-algebrának az SU(2)-algebrával izomorf részalgebráját alkotja, továbbá, hogy $[T_3, Y]=0$.

3.3 A homogén Lorentz-transzformációk csoportja

Homogén Lorentz-transzformációnak a Minkowski-tér x^μ vektorainak olyan

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_{\cdot\nu}x^\nu \tag{3.22}$$

transzformációit nevezzük, amelyekre

$${x'}_\mu x'^\mu = x^\mu x_\mu. \tag{3.23}$$

Ebből következik, hogy a homogén Lorentz-transzformációk valós mátrixai a

$$\Lambda^\mu_{\cdot\nu}g_{\mu\rho}\Lambda^\rho_{\cdot\sigma}=g_{\nu\sigma} \tag{3.24}$$

összefüggéseknek tesznek eleget, ahol

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

a Minkowski-tér metrikus tenzora. A (3.24) egyenlet 10 összefüggést jelent, mivel a metrikus tenzor szimmetrikus, így a homogén Lorentz-transzformációknak $4 \times 4 - 10 = 6$ paramétere van. Ezek a transzformációk alkotják a homogén Lorentz-csoportot; jele $\mathcal{L}_h$.

Az (3.24) egyenletből $(\mathrm{det}\Lambda)^2 = 1$, azaz $\mathrm{det}\Lambda = \pm 1$ adódik. A -1 determinánsú homogén Lorentz-transzformációk halmaza nem üres. Oda tartozik az I_s tértükrözés és az I_t időmegfordítás:

$$I_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad I_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Az (3.24) összefüggések közül vegyük azt, amelyet $\nu = \sigma = 0$ esetén kapunk; ebből:

$$(\Lambda^0_{\cdot 0})^2 \;=\; 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i_{\cdot 0})^2 \geq 1. \tag{3.27}$$

A homogén Lorentz-transzformációk között vannak tehát olyanok, amelyekre $\Lambda^0_{\cdot 0} \geq 1$ és olyanok, amelyekre $\Lambda^0_{\cdot 0} \leq -1$. Az utóbbira példa az I_t időmegfordítási transzformáció. Az $\mathcal{L}_h$ csoport, mint halmaz, diszjunkt részekből áll:

$$\begin{array}{rll} (I): & \mathrm{det}\Lambda = +1, & \Lambda^0_{\cdot 0} \geq 1, \\ (II): & \mathrm{det}\Lambda = -1, & \Lambda^0_{\cdot 0} \geq 1, \\ (III): & \mathrm{det}\Lambda = -1, & \Lambda^0_{\cdot 0} \leq -1, \\ (IV): & \mathrm{det}\Lambda = +1, & \Lambda^0_{\cdot 0} \leq -1. \end{array} \tag{3.28}$$

Az (I) részhalmaz tartalmazza az $\mathcal{L}_h$ csoport egységelemét, az azonossági transzformációt. Így (I) maga is csoport, az ún. valódi ortochron (más néven a leszűkített homogén) Lorentz-transzformációk csoportja; jele $\mathcal{L}_{hr}$.

Tekintsük a $V \equiv \{I, I_s, I_t, I_{st} = I_s I_t\}$ halmazt, amely $\mathcal{L}_h$ négyelemű, abeli alcsoportja. Létezik egy olyan homomorfizmus, amely leképezi az $\mathcal{L}_h$ csoportot a V alcsoportra. Ennek a magja $\mathcal{L}_{hr}$, így $\mathcal{L}_{hr}$ invariáns alcsoport. Meg lehet mutatni, hogy a homogén Lorentz-csoport összes irreducibilis ábrázolását meg lehet kapni a V és az $\mathcal{L}_{hr}$ alcsoportok irreducibilis ábrázolásaiból.

A V abeli alcsoport irreducibilis ábrázolásai:

$$\begin{array}{llllll} T_0: & I \to 1, & I_s \to 1, & I_t \to 1, & I_{st} \to 1 \\ T_1: & I \to 1, & I_s \to 1, & I_t \to -1, & I_{st} \to -1 \\ T_2: & I \to 1, & I_s \to -1, & I_t \to 1, & I_{st} \to -1 \\ T_3: & I \to 1, & I_s \to -1, & I_t \to -1, & I_{st} \to 1. \end{array} \tag{3.29}$$

A továbbiakban az $\mathcal{L}_{hr}$ alcsoporttal foglalkozunk. Amíg a homogén Lorentz-transzformációk $\mathcal{L}_h$ csoportja topológiailag nem összefüggő, addig a valódi ortochron Lorentz-transzformációk $\mathcal{L}_{hr}$ csoportja összefüggő. Ez is egy 6-paraméteres Lie-csoport. A valódi ortochron Lorentz-transzformációk csoportja tartalmazza alcsoportként a 3-dimenziós térbeli forgatásokat. A megfelelő transzformációk mátrixa az alábbi alakú:

$$\Lambda_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{R} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

A térbeli forgatásokon kívül a valódi ortochron Lorentz-transzformációk között vannak az ún. Lorentz-lökések, amelyek az egyik inerciarendszerről a másikra való áttérést írják le. (Ezek átlökik a megfigyelőt az egyik vonatkoztatási rendszerből egy ahhoz képest valamilyen sebességgel mozgó másikba.) Ilyen pl. az a Lorentz-lökés, amely a z-tengellyel párhuzamosan v sebességgel mozgó rendszerre való áttérést írja le:

$$\Lambda_{(z)} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

ahol a és b ($a^2 = 1 + b^2$, $a > b > 0$) kifejezhetők az φ rapiditás segítségével:

$$a = \cosh\varphi, \qquad b = \sinh\varphi. \tag{3.32}$$

(A fizikában a rapiditás szokásosabb jele y.) A rapiditás és a vonatkoztatási rendszer v sebessége között a kapcsolat: $v = \tanh\varphi$. Hasonló alakúak a másik két tengellyel párhuzamos Lorentz-lökéseket leíró transzformációk is. Mivel a Lorentz-lökéseket megadó sebesség $0 \leq v < 1$, azaz $v \neq 1$, azért a valódi ortochron Lorentz-transzformációk csoportja nem kompakt. Meg lehet mutatni azonban, hogy $\mathcal{L}_{hr}$ lokálisan kompakt.

Az $\mathcal{L}_{hr}$ csoport minden eleme felírható két térbeli forgatás, $\mathcal{R}_1$ és $\mathcal{R}_2$, és egy z-tengely irányú, (3.31) alakú Z Lorentz-lökés szorzataként: $\Lambda = \mathcal{R}_1 Z \mathcal{R}_2$. Ezt a tulajdonságot felhasználva be lehet látni, hogy az $\mathcal{L}_{hr}$ csoport kétszeresen összefüggő.

Ekkor egy- és kétértékű irreducibilis ábrázolásai vannak, amelyek az univerzális fedőcsoportjának egyértékű irreducibilis ábrázolásai.

A valódi ortochron Lorentz-transzformációk csoportjának fedőcsoportja az SL(2,C) csoport, a 2×2-es, komplex, unimoduláris mátrixok csoportja. Most megszerkesztjük az SL(2,C) $\to \mathcal{L}_{hr}$ homomorfizmust. Rendeljük az x^μ négyesvektorhoz az

$$\tilde{x} = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - \mathrm{i}x^2 \\ x^1 + \mathrm{i}x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

hermitikus mátrixot, ahol σ_0 a 2×2-es egységmátrix és σ_i $(i = 1, 2, 3)$ a Pauli-mátrixok. Ez a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, uis.

$$x^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tilde{x}\sigma_\mu). \tag{3.34}$$

Megmutatjuk, hogy minden $\alpha \in$ SL(2,C) mátrixszal definiált

$$\tilde{x} \to \tilde{x}\,' = \alpha\tilde{x}\alpha^\dagger \tag{3.35}$$

transzformációnak megfelel egy valódi ortochron Lorentz-transzformáció. Ez így is van, mert $\det\alpha = 1$ miatt

$$x'^\mu x'_\mu = \det\tilde{x}' = \det\tilde{x} = x^\mu x_\mu. \tag{3.36}$$

A transzformáció tehát homogén Lorentz-transzformáció. Másrészt SL(2,C) egyszeresen összefüggő és tartalmazza az azonossági transzformációt. Így minden $\alpha \in$SL(2,C) folytonosan az egységmátrixba transzformálható. Ekkor azonban az α-val meghatározott (3.35) transzformációk a valódi ortochron Lorentz-transzformációk. Az α mátrixhoz tartozó Lorentz-transzformáció $\Lambda(\alpha)$ mátrixát a transzformáció definíciója alapján határozzuk meg:

$$\begin{aligned} x'^\mu = \Lambda^\mu_{\cdot\nu}(\alpha)x^\nu &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tilde{x}'\sigma_\mu) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\alpha\tilde{x}\alpha^\dagger\sigma_\mu) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\alpha x^\nu\sigma_\nu\alpha^\dagger\sigma_\mu) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\alpha\sigma_\nu\alpha^\dagger\sigma_\mu)\, x^\nu. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Mivel x^ν tetszőleges, ebből az egyenletből

$$\Lambda^\mu_{\cdot\nu}(\alpha) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\alpha\sigma_\nu\alpha^\dagger\sigma_\mu) \tag{3.38}$$

adódik. Beláthatjuk, hogy az $\alpha \to \Lambda(\alpha)$ leképezés homomorfizmus.

Még megmutatjuk, hogy $\mathcal{L}_{hr}$ minden Λ eleméhez létezik olyan $\alpha \in$ SL(2,C), amelynek képe Λ. Meg kell tehát mutatnunk, hogy tetszőleges adott Λ transzformációhoz létezik olyan α, amelyre

$$\tilde{x}' = \alpha \tilde{x} \alpha^\dagger, \quad \text{azaz} \quad \Lambda^{\mu}_{\cdot\nu} x^\nu \sigma_\mu = \alpha x^\nu \sigma_\nu \alpha^\dagger, \tag{3.39}$$

ahonnan

$$\Lambda^{\mu}_{\cdot\nu} \sigma_\mu \;\; = \;\; \alpha \sigma_\nu \alpha^\dagger. \tag{3.40}$$

Ha egy α mátrix kielégíti ezt az egyenletet, akkor természetesen $-\alpha$ is megoldás. Ha Λ ω-szögű ($0 \le \omega \le \pi$) forgatás a térben az $\vec{n}$ egységvektorral kijelölt irány körül, akkor a megoldások:

$$\alpha = \pm \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2} - \mathrm{i} n_z \sin\frac{\omega}{2} & -\mathrm{i}(n_x - \mathrm{i} n_y)\sin\frac{\omega}{2} \\ -\mathrm{i}(n_x + \mathrm{i} n_y)\sin\frac{\omega}{2} & \cos\frac{\omega}{2} + \mathrm{i} n_z \sin\frac{\omega}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Ebben a speciális esetben α unitér és SL(2,C)-nek az SU(2) alcsoportjához tartozik. Ha Λ egy z-tengely irányú lökés, akkor a megfelelő α mátrixok:

$$\alpha = \pm \begin{pmatrix} (a+b)^{1/2} & 0 \\ 0 & (a-b)^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

Mivel $\mathcal{L}_{hr}$ minden eleme felírható térbeli forgatások és egy z-irányú lökés segítségével, azért beláttuk, hogy $\mathcal{L}_{hr}$ minden eleméhez 2 mátrix tartozik SL(2,C)-ben, amelyek csak előjelben különböznek. A homomorfizmus csak az I és $-I$ mátrixokat képezi le az azonossági transzformációra ($\mathcal{L}_{hr}$ egységelemére).

A fejezetet azzal zárjuk, hogy megszerkesztjük a valódi ortochron Lorentz-csoporthoz tartozó Lie-algebrát, amely azonos az SL(2,C)-algebrával. Ehhez parametrizáljuk az infinitezimális $\Lambda^{\mu}_{\cdot\nu}$ ($\det\Lambda = 1$, $\Lambda^{0}_{\cdot 0} \ge 1$) Lorentz-transzformációkat a következőképpen:

$$x'^\mu = (g^{\mu}_{\cdot\nu} + \epsilon^{\mu}_{\cdot\nu}) x^\nu \equiv \Lambda^{\mu}_{\cdot\nu}(\epsilon) x^\nu. \tag{3.43}$$

Itt $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ 6 független, valós paraméter. (Az $\epsilon^{\mu\nu}$ tenzor antiszimmetrikussága abból következik, hogy a transzformáció az x^μ négyes-vektor hosszát invariánsan hagyja, $x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$.) Ha a transzformáció mátrixait önmagukkal ábrázoljuk, akkor

$$\Lambda^{\mu}_{\cdot\nu}(\epsilon) \;\; = \;\; g^{\mu}_{\cdot\nu} + \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma}(M^{\rho\sigma})^{\mu}_{\cdot\nu} \tag{3.44}$$

írható, ahol $M^{\rho\sigma} = -M^{\sigma\rho}$ jelöli a valódi ortochron Lorentz-transzformációk 6 független infinitezimális generátorát. Az 1/2 szorzó azért lép fel, mert az egyenlet jobb oldalának második tagjában az összeg kétszeresen tartalmazza az ugyanattól a paramétertől származó járulékot. Az utóbbi egyenletet és a (3.43) egyenletet összevetve leolvashatjuk, hogy az infinitezimális generátorok az ön-ábrázolásban a

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\rho}(M^{\sigma\rho})^{\mu}_{\cdot\nu} \;=\; \epsilon^{\mu}_{\cdot\nu} \tag{3.45}$$

egyenletet elégítik ki. Ennek megoldása:

$$(M^{\rho\sigma})^{\mu}_{\cdot\nu} \;=\; g^{\mu\rho}g^{\sigma}_{\cdot\nu} - g^{\mu\sigma}g^{\rho}_{\cdot\nu}. \tag{3.46}$$

Az infinitezimális generátorok ön-ábrázolásban felvett alakját felhasználva könnyen igazolhatjuk az ábrázolástól független, alábbi kommutációs szabályokat:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}. \tag{3.47}$$

Vezessük be az alábbi operátorokat:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \mathrm{i}(M^{23}, M^{31}, M^{12}), \\ \vec{K} &= \mathrm{i}(M^{01}, M^{02}, M^{03}). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Ezekre a fentiek alapján az alábbi kommutációs szabályok következnek:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}J_k, \\ [K_i, K_j] &= -\mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}J_k, \\ [J_i, K_j] &= \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}K_k. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Az $\mathcal{L}_{hr}$-algebra szerkezete világosabban látszik, ha áttérünk az alábbi bázisra:

$$M_j = \frac{1}{2}(J_j + \mathrm{i}K_j), \qquad N_j = \frac{1}{2}(J_j - \mathrm{i}K_j) \tag{3.50}$$

Az új bázis operátorainak kommutátorai:

$$\begin{aligned} [M_i, M_j] = \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}M_k, \qquad [N_i, N_j] &= \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}N_k, \\ [M_i, N_j] &= 0. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Innen látjuk, hogy az $\mathcal{L}_{hr}$-algebra izomorf az $\mathrm{SU}(2)_M \otimes \mathrm{SU}(2)_N$ algebrával. Az algebra rangja 2. Ezért az irreducibilis ábrázolások jellemzéséhez két Casimir-operátor sajátértékeire van szükség. Ezek lehetnek

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 - \vec{K}^2 &= \frac{1}{2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}, \\ -\vec{J}\vec{K} &= \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma}, \end{aligned} \tag{3.52}$$

vagy $\vec{M}^{\,2}$ és $\vec{N}^{\,2}$. A $\vec{J}$ és $\vec{K}$ operátorok segítségével bármely valódi ortochron Lorentz-transzformáció (ábrázolástól függetlenül) az

$$\Lambda = \exp\left\{-\mathrm{i}(\vec{J}\vec{n}\omega - \vec{K}\vec{\nu}\varphi)\right\} \tag{3.53}$$

alakba írható, ahol $\vec{n}$ és $\vec{\nu}$ egységvektorok, ω az $\vec{n}$ irány körüli elforgatás szöge, φ pedig annak a $\vec{\nu}$ irányban v sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszernek a rapiditása $\varphi = \mathrm{artanh}v$, amelyre a szóbanforgó transzformációval áttérünk. Bár az $\mathcal{L}_{hr}$-csoport és az SU(2)$\otimes$SU(2)-csoport algebrája azonos, a két csoport mégis lényegesen különbözik. ($\mathcal{L}_{hr}$ nem kompakt, SU(2)$\otimes$SU(2) pedig kompakt.) A különbség onnan ered, hogy a valódi ortochron Lorentz-transzformációkat úgy kapjuk, hogy a iJ_i, iK_i generátorok valós együtthatókkal képzett lineáris kombinációit írjuk az exponensbe, míg az SU(2)$\otimes$SU(2) csoport esetén az iM_i, iN_i valós együtthatós lineáris kombinációit. A két eredmény minőségileg különböző, mert ha az iJ_i, iK_i valós együtthatós lineáris kombinációit átírjuk az iM_i, iN_i lineáris kombinációivá, akkor az együtthatók komplexek lesznek, vis. az eredmény nem tekinthető többé a csoportelemek szokásos exponenciális alakjának.

II. SZIMMETRIÁK A KVANTUMMECHANIKÁBAN

4 Szimmetriák a fizikában

A fizikában akkor beszélünk szimmetriáról, ha különböző megfigyelők a fizikai törvényeket azonosaknak találják. Ha nem akarunk a megfigyelőre hivatkozni, akkor ezt úgy fogalmazzuk, hogy szimmetriáról akkor beszélünk, ha a fizika törvényei a különböző vonatkoztatási rendszerekben azonosak. Beszélhetünk egy konkrét fizikai rendszer szimmetriáiról. A különböző megfigyelők ugyanazt a fizikai rendszert más vonatkoztatási rendszerekből nézve, valamilyen a vonatkoztatási rendszertől független tulajdonságot fedeznek fel. Ilyenkor az adott fizikai rendszerre vonatkozó törvények a különböző vonatkoztatási rendszerekben azonosak. A természet szempontjából azonban azok a szimmetriák a lényegesek, amelyek valamennyi fizikai rendszernek közös szimmetriái. Az ilyen szimmetriákat a természet szimmetriáinak nevezzük. Az utóbbi esetben valamennyi fizikai rendszerre nézve igaz, hogy az őket jellemző törvények függetlenek a vonatkoztatási rendszertől.

Aszerint, hogy egymástól milyen értelemben különböző vonatkoztatási rendszerekben adódnak azonosaknak a fizikai törvények, különböző szimmetriákról beszélünk. A megfigyelők pl. lehet, hogy csak abban különböznek egymástól, hogy a tér különböző pontjaiban helyezkednek el. Lehet, hogy ugyanazon a helyen vannak, és csak az óráik járnak különbözőképpen. Lehet, hogy a megfigyelők egymáshoz képest különböző sebességgel mozognak. Sőt olyan is elképzelhető, hogy a megfigyelők csak abban különböznek, hogy minden töltést ellenkező előjelűnek definiálnak. Mint az elmondottakból kitűnik, a vonatkoztatási rendszert kicsit általánosabb értelemben használjuk, mint tanulmányaink kezdetén. A vonatkoztatási rendszer tulajdonképpen (elképzelt) mérőberendezések azon együttese, amellyel a vizsgált fizikai rendszeren az állapotának meghatározásához szükséges méréseket (egy gondolatkísérletben) el tudjuk végezni.

Valamilyen speciális szimmetria azt jelenti, hogy az egymástól valamilyen speciális módon különböző megfigyelők a fizikai törvényeket azonosaknak találják. A fizikai törvényeket matematikai egyenletek alakjában fejezzük ki. Az, hogy a fizikai törvények különböző vonatkoztatási rendszerekben azonosak, azt jelenti, hogy ezekben a vonatkoztatási rendszerekben a fizikai törvényeket azonos alakú egyenletek írják le. Azt szokás mondani, hogy az egyenletek alakja kovariáns. Fogalmazzuk most meg az egyenletek kovarianciájának jelentését kicsit pontosabban. Az egyik megfigyelő vonatkoztatási rendszeréről a másikéra való áttérést transzformációk írják le, amelyek csoportot alkotnak. A fizikai törvényeket kifejező egyenletek kovariánsak, ha az egyenletek mindkét oldala a transzformációk fenti csoportjának ugyanazon ábrázolása szerint transzformálódik.

A szimmetriák következménye általában, hogy bizonyos fizikai mennyiségek értéke időben állandó. A megmaradási törvények hátterében mindig valamilyen szimmetria áll. Erre már a klasszikus mechanikában is szép példákat találunk.

Tegyük fel, hogy az S fizikai rendszert azonosnak találják olyan megfigyelők, akik csak abban különböznek, hogy egymáshoz képest állandó τ eltéréssel járnak az óráik. Ekkor a rendszert leíró H Hamilton-függvényre:

$$H(t) = H(t+\tau) \tag{4.1}$$

tetszőleges t és τ esetén. Ez azt jelenti, hogy a Hamilton-függvény nem függ explicit módon az időtől: $\partial H/\partial t = 0$. Ekkor

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\}_P = 0, \tag{4.2}$$

azaz a rendszer energiája megmaradó mennyiség. Az energiamegmaradás tehát az időbeli eltolásokkal szembeni szimmetriának a következménye a klasszikus mechanikában.

Tegyük fel, hogy az S rendszer invariáns a térbeli $\vec{b}$ vektorral történő eltolásokkal szemben. Ekkor

$$H(\vec{r}_a, \vec{p}_a) \;\; = \;\; H(\vec{r}_a + \vec{b}, \vec{p}_a), \tag{4.3}$$

ahonnan infinitezimális eltolások esetén

$$H(\vec{r}_a, \vec{p}_a) \;\; = \;\; H(\vec{r}_a, \vec{p}_a) + \sum_a \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_a}\, \vec{b} \tag{4.4}$$

adódik. Mivel ennek az egyenletnek tetszőleges $\vec{b}$ vektor esetén fenn kell állnia,

$$0 = \sum_a \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_a} = -\frac{d\vec{P}}{dt} \tag{4.5}$$

következik, ami az S rendszer impulzusának megmaradását jelenti. A térbeli eltolási szimmetria tehát az impulzus megmaradását eredményezi.

Következő példánk a forgásszimmetrikus S rendszer, amelyre

$$H(\vec{r}_a, \vec{p}_a) = H(\mathcal{R}\vec{r}_a, \mathcal{R}\vec{p}_a), \tag{4.6}$$

ahol $\mathcal{R}$ egy tetszőleges, $\vec{n}$ irány körüli ω szögű elforgatás. Infinitezimális elforgatások esetén:

$$\mathcal{R}\vec{r}_a = \vec{r}_a + \omega\vec{n} \times \vec{r}_a, \qquad \mathcal{R}\vec{p}_a = \vec{p}_a + \omega\vec{n} \times \vec{p}_a, \tag{4.7}$$

úgyhogy

$$0 = \sum_a \left(\vec{r}_a \times \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_a} + \vec{p}_a \times \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_a} \right) \vec{n}\omega, \tag{4.8}$$

azaz

$$0 = -\sum_a \left(\vec{r}_a \times \frac{d\vec{p}_a}{dt} - \vec{p}_a \times \frac{d\vec{r}_a}{dt} \right) = -\frac{d\vec{L}}{dt}, \tag{4.9}$$

ami a rendszer $\vec{L}$ impulzusmomentumának megmaradását kifejező egyenlet. A forgásszimmetria tehát az impulzusmomentum megmaradását eredményezi.

A kvantummechanikában a szimmetriát a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Az S fizikai rendszer állapotai egy Hilbert-tér vektorai. Az O és az O' megfigyelők, mindegyik a maga saját vonatkoztatási rendszeréből nézve, az S fizikai rendszernek ugyanahhoz az állapotához a ψ_O és a $\psi_{O'}$ állapotvektort rendelik a Hilbert-térben. Ezt annak alapján teszik, hogy elvégzik a fizikai mennyiségek egy teljes rendszerének mérését, és általában azt találják, hogy különböző eredményeket kapnak. Legyenek most ϕ_O és $\phi_{O'}$ az S fizikai rendszer egy másik állapotát leíró állapotvektorok rendre az O és az O' rendszerben. A kvantummechanikai mérések (egy adott vonatkoztatási rendszerben) mindig azt jelentik, hogy annak a valószínűségét határozzuk meg, hogy egy ψ állapotot megtalálunk egy másik ϕ állapotban. Ezt a valószínűséget a két állapotvektor skalárszorzata abszolutértékének négyzete adja meg: $|(\psi,\phi)|^2$. Szimmetriáról akkor beszélünk, ha a meghatározott módon különböző tetszőleges O és O' megfigyelők az S fizikai rendszer bármely két állapota esetén az egyik állapot másikban való megtalálásának valószínűségét függetlennek találják a vonatkoztatási rendszertől:

$$|(\psi_O,\phi_O)|^2 \quad = \quad |(\psi_{O'},\phi_{O'})|^2. \tag{4.10}$$

5 A különböző vonatkoztatási rendszerekben végzett megfigyelések kapcsolata

5.1 Az állapotok és a fizikai mennyiségek transzformációja

A kvantummechanikában a szimmetriákat a (4.10) egyenlet fejezi ki. Innen látjuk, hogy a szimmetriák matematikai megfogalmazása szempontjából szükség van annak a kapcsolatnak a kiderítésére, ami a különböző vonatkoztatási rendszerekben végzett mérések eredményei között áll fenn. Ha O és O' két megfigyelő, akkor az O vonatkoztatási rendszeréről az O' vonatkoztatási rendszerére való áttérés úgy fogható fel mint az S fizikai rendszer állapotai Hilbert-terének önmagára való $\hat{\mathcal{U}}(O' \leftarrow O)$ leképezése. Ha O az S fizikai rendszer valamely állapotát a ψ_O állapotvektorral írja le, és O' ugyanezt az állapotot a $\psi_{O'}$ vektorral, akkor a

$$\psi_{O'} \quad = \quad \hat{\mathcal{U}}(O' \leftarrow O)\,\psi_O \tag{5.1}$$

egyenlet definiálja a szóbanforgó leképezést. Ezek a leképezések az egymás utáni végrehajtásra, mint műveletre nézve csoportot alkotnak, amelynek egységeleme $\hat{\mathcal{U}}(O \leftarrow O)$ és az $\hat{\mathcal{U}}(O' \leftarrow O)$ transzformáció inverze $\hat{\mathcal{U}}(O \leftarrow O')$.

Wigner Jenőtől származik annak a tételnek a bizonyítása, hogy az $\hat{\mathcal{U}}(O' \leftarrow O)$ transzformáció vagy lineáris unitér vagy antilineáris unitér. (Az $\hat{A}$ operátort antilineárisnak nevezzük, ha tetszőleges ψ, ϕ vektorok és a, b komplex számok esetén $\hat{A}(a\psi + b\phi) = a^{\star}\hat{A}\psi + b^{\star}\hat{A}\phi$.)

Tekintsünk most egy tetszőleges fizikai mennyiséget, amely az S fizikai rendszert jellemzi. Ennek a kvantummechanika szerint egy $\hat{\alpha}$ önadjungált operátor felel meg. Ha a ψ állapotban az α mennyiség mérése bizonyossággal egy meghatározott eredményt szolgáltat, akkor ψ az $\hat{\alpha}$ önadjungált operátor sajátvektora és a mért érték ezen operátor (mindig valós) sajátértéke. Ha a ψ állapot nem sajátvektora az $\hat{\alpha}$ önadjungált operátornak, akkor az α fizikai mennyiség mérése a sajátértékek valamelyikére vezet, azonban az egyes esetek megvalósulásának valószínűsége általában különböző. A fizikai mennyiség értéke tehát úgy tekinthető mint egy valószínűségi változó, amelynek várható értékét a $(\psi, \hat{\alpha}\psi)$ skalárszorzat adja meg. A kvantummechanika klasszikus határesetében ($\hbar \to 0$) ez a várható érték veszi át a megfelelő klasszikus mechanikai α_{cl} fizikai mennyiség szerepét. (Feltéve, hogy létezik ilyen mennyiség a klasszikus mechanikában.)

Tegyük fel, hogy a fizikai mennyiségek leírására két tetszőleges megfigyelő ugyanazokat az $\hat{\alpha}_j$ önadjungált operátorokat használja. Pl. ugyanazt a helyzetvektort, impulzust, impulzusmomentumot, spint stb. figyelik meg az S rendszeren. Jelölje $\{\alpha_j\}$ a fizikai mennyiségek egy teljes rendszerét, azaz olyan maximális számú, független mennyiséget, amelyekből a rendszert jellemző minden más mennyiség leszármaztatható. A rendszer állapotát O a ψ_O vektorral, O' pedig a $\psi_{O'}$ vektorral írja le. Ha az α_j mennyiségeknek vannak klasszikus mechanikai megfelelőik, akkor azoknak O és O' rendszerében felvett értékei

$$\alpha'_{j\,cl} \;=\; f_j(\alpha_{1\,cl}, \alpha_{2\,cl}, \ldots) \tag{5.2}$$

összefüggésben állnak egymással, ahol f_j-k meghatározott függvények. A kvantummechanikai várható értékeknek ugyanilyen összefüggésben kell egymással lenniük, hogy helyesen kapjuk vissza a klasszikus ($\hbar \to 0$) határesetet. Ebből következik, hogy tetszőleges ψ_O állapot esetén fenn kell állnia a

$$(\psi_{O'}, \hat{\alpha}_j\psi_{O'}) \;=\; f_j\,(\,(\psi_O, \hat{\alpha}_1\psi_O),\,(\psi_O, \hat{\alpha}_2\psi_O), \ldots) \tag{5.3}$$

összefüggésnek. Ezt a kvantummechanika és a klasszikus mechanika közti megfeleltetésből következő összefüggést olyan esetekre is posztuláljuk, amikor a szóban forgó fizikai mennyiségeknek (vagy azok közül valamelyeknek) nincsen klasszikus mechanikai megfelelője. Ilyenkor feltesszük, hogy léteznek olyan $f_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ függvények, amelyek kapcsolatot teremtenek az O és O' vonatkoztatási rendszerben végzett mérések eredményei között.

A továbbiakban mindig olyan esetekről lesz szó, amikor az f_j függvények a változóikban lineárisak. Ilyenkor a (5.3) egyenlet

$$(\psi_{O'}, \hat{\alpha}_j \psi_{O'}) \;=\; (\psi_O, f_j(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots)\psi_O) \tag{5.4}$$

alakot ölt. A bal oldalon álló skalárszorzat

$$(\psi_{O'}, \hat{\alpha}_j \psi_{O'}) \;=\; (\psi_O, \hat{\mathcal{U}}^\dagger \hat{\alpha}_j \hat{\mathcal{U}} \psi_O) \tag{5.5}$$

alakba írható át, ha felhasználjuk, hogy $\psi_{O'} = \hat{\mathcal{U}}\psi_O$. Mivel a (5.4) egyenletnek minden állapotra fenn kell állni, azt kapjuk, hogy

$$\hat{\mathcal{U}}^\dagger \hat{\alpha}_j \hat{\mathcal{U}} \;=\; f_j(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots) \tag{5.6}$$

egyenletek állnak fenn. Ezeket felhasználhatjuk a vonatkoztatási rendszerek közötti transzformáció $\hat{\mathcal{U}}$ operátora konkrét alakjának meghatározására. Az f_j függvényeket a megfeleltetési elv vagy analógia alapján határozzuk meg.

Annak eldöntése, hogy valamely konkrét transzformáció operátora unitér lineáris vagy unitér antilineáris, úgy lehetséges, hogy a fizikai mennyiségek operátorai közötti

$$[\hat{\alpha}_j, \hat{\alpha}_k] \;=\; \hat{c}_{jk} \tag{5.7}$$

kommutátorokat balról $\hat{\mathcal{U}}^\dagger$-val, jobbról $\hat{\mathcal{U}}$-val szorozzuk. Ha olyan esetet nézünk, amikor a kommutátor egy képzetes szám (pl. egy általános koordináta és a hozzá kanonikusan konjugált impulzus kommutátorát), akkor

$$[f_j(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots), f_k(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots)] \;=\; \pm c_{jk} = \pm[\hat{\alpha}_j, \hat{\alpha}_k] \tag{5.8}$$

adódik, ahol a felső (alsó) előjel annak felel meg, hogy az $\hat{\mathcal{U}}$ operátor lineáris (antilineáris). Az (5.8) egyenlet bal és jobb oldalát külön-külön kiszámolva el tudjuk dönteni, hogy melyik előjel a helyes. Ez megmondja, hogy a transzformáció operátora lineáris vagy antilineáris.

Külön kell még beszélnünk a külső terek operátorainak transzformációs tulajdonságairól. Úgy gondolhatjuk, hogy a külső tér forrása valamilyen S' fizikai rendszer. Ha ugyanazzal az operátorral írnánk le a külső teret minden vonatkoztatási rendszerben, akkor ez azt jelentené, hogy nem ugyanattól az S' forrástól származó külső tereket hasonlítunk össze a különböző vonatkoztatási rendszerekben. Nyilván, ha ugyanazon forrástól származó teret nézzük különböző rendszerekből, akkor azt általában különbözőnek találjuk. Legyen g az a transzformáció, amely az O és az O' vonatkoztatási rendszer között kapcsolatot teremt. Ennek a Hilbert-térben az $\hat{\mathcal{U}}$ operátor felel meg. Legyen $\hat{\varphi}_j(\vec{r})$ egy többkomponensű téroperátor, amelynek várható értéke a

$$(\psi_{O'}, \hat{\varphi}'_j(\vec{r})\psi_{O'}) \;=\; g_{jk}(\psi_O, \hat{\varphi}_k(\vec{r})\psi_O) \tag{5.9}$$

összefüggésnek megfelelően transzformálódik. Ekkor

$$(\psi_O, \hat{\mathcal{U}}^\dagger \hat{\varphi}'_j(\vec{r}) \hat{\mathcal{U}} \psi_O) \;=\; g_{jk}(\psi_O, \hat{\varphi}_k(\vec{r})\psi_O), \tag{5.10}$$

ahonnan

$$g_{jk}\hat{\mathcal{U}}\hat{\varphi}_k(\vec{r})\hat{\mathcal{U}}^\dagger \;=\; \hat{\varphi}'_j(\vec{r}) \tag{5.11}$$

következik.

5.2 Az időbeli eltolások és a mozgásegyenletek

Tekintsünk most két olyan megfigyelőt, amelyek csak abban különböznek, hogy az óráik konstans időbeli τ eltolódással járnak:

$$t(O') \;=\; t(O) - \tau. \tag{5.12}$$

Mindketten ugyanannak az S rendszernek az időbeli fejlődését figyelik meg. Az a $\psi_{O'}(t)$ állapot, amit az O' megfigyelő a saját órája szerinti t pillanatban figyel meg természetesen az S rendszernek ugyanaz az állapota, mint az a $\psi_O(t+\tau)$ állapot, amit az O megfigyelő a saját órája szerinti $t+\tau$ pillanatban figyel meg:

$$\psi_{O'}(t) \;=\; \psi_O(t+\tau). \tag{5.13}$$

Jelöljük most a vonatkoztatási rendszerek közti transzformáció $\hat{\mathcal{U}}(O' \leftarrow O)$ operátorát $\hat{T}(t',t)$-vel, ahol $t' = t+\tau$:

$$\psi_{O'}(t) = \hat{T}\psi_O(t). \tag{5.14}$$

A két utóbbi egyenlet egybevetéséből:

$$\psi_O(t+\tau) \;=\; \hat{T}(t+\tau, t)\psi_O(t) \tag{5.15}$$

Könnyen beláthatjuk az alábbi tulajdonságokat:

$$\begin{aligned} \hat{T}(t,t) &= \hat{I}, \\ \hat{T}(t',t) &= \hat{T}(t',t'')\hat{T}(t'',t) \\ [\hat{T}(t',t)]^{-1} &= \hat{T}(t,t'). \end{aligned} \tag{5.16}$$

A $\hat{T}(t',t)$ operátor Wigner tétele értelmében unitér. Mivel a τ paraméterrel folytonosan nullához tartva az azonossági transzformációt kapjuk vissza, azért $\hat{T}(t',t)$ csak lineáris lehet.

Az így bevezetett $\hat{T}(t',t)$ lineáris unitér operátort evoluciós operátornak nevezzük, mert ez az operátor fejleszti az állapotot időben. Ha meghatározzuk az evoluciós operátor alakját, akkor ismerni fogjuk az S rendszer dinamikáját. Az alábbiakban differenciálegyenletet vezetünk le az evoluciós operátorra. Ez egyúttal a fizikai rendszer mozgásegyenlete. Célunk eléréséhez felhasználjuk a klasszikus és a kvantummechanika kapcsolatát. Ha $\hbar \to 0$, akkor a kvantummechanikai várható értékek a megfelelő klasszikus mechanikai mennyiségek értékeibe mennek át, és a fizikai mennyiségek operátorainak kommutátorai a megfelelő Poisson-zárójelekhez tartanak:

$$\begin{aligned} (\psi, \hat{\alpha}\psi) &\to \alpha_{cl}, \\ -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{\alpha}, \hat{\beta}] &\to \{\alpha_{cl}, \beta_{cl}\}_P. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Legyen α_{cl} egy klasszikus mechanikai mennyiség, amely nem függ explicit módon az időtől, ekkor

$$\frac{d\alpha_{cl}}{dt} = \{\alpha_{cl}, H_{cl}\}_P, \tag{5.18}$$

ahonnan infinitezimális τ esetén:

$$\alpha_{cl}(t+\tau) = \alpha_{cl}(t) + \tau\{\alpha_{cl}(t), H_{cl}(t)\}_P. \tag{5.19}$$

Ezt az összefüggést a kvantummechanikának a klasszikus határesetben ($\hbar \to 0$) reprodukálnia kell. Ezért írhatjuk, hogy

$$(\psi(t+\tau), \hat{\alpha}\psi(t+\tau)) = (\psi(t), \hat{\alpha}\psi(t)) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau(\psi(t), [\hat{\alpha}, \hat{H}(t)]\psi(t)). \tag{5.20}$$

Használjuk fel a (5.15) egyenletet és azt, hogy a fenti egyenletnek tetszőleges $\psi(t)$ állapotra fenn kell állni, ekkor:

$$\hat{T}^\dagger(t+\tau, t)\hat{\alpha}\hat{T}(t+\tau, t) = \hat{\alpha} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau[\hat{\alpha}, \hat{H}(t)]. \tag{5.21}$$

Az így kapott egyenlet nem más mint az (5.6) egyenlet megfelelője. Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát balról $\hat{T}^\dagger(t, t_0)$-val és jobbról $\hat{T}(t, t_0)$-val:

$$\begin{aligned} \hat{T}^\dagger(t+\tau, t_0)\hat{\alpha}\hat{T}(t+\tau, t_0) &= \hat{T}^\dagger(t, t_0)\hat{\alpha}\hat{T}(t, t_0) \\ &\quad - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau\hat{T}^\dagger(t, t_0)[\hat{\alpha}, \hat{H}(t)]\hat{T}(t, t_0). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Írjuk az evoluciós operátort

$$\hat{T}(t+\tau, t_0) = \left(\hat{I} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau\hat{F}(t)\right)\hat{T}(t, t_0), \tag{5.23}$$

ahol az evoluciós operátor uniteritása miatt az $\hat{F}$ operátor önadjungált, $\hat{F} = \hat{F}^\dagger$. Ekkor az (5.22) egyenletből

$$\hat{F}(t) = \hat{H}(t) \tag{5.24}$$

adódik, aminek segítségével a (5.23) egyenlet

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d\hat{T}(t,t_0)}{dt} \;=\; \hat{H}(t)\hat{T}(t,t_0) \tag{5.25}$$

alakot ölt. Ez az evoluciós operátor keresett differenciálegyenlete.

Az evoluciós operátor (5.25) differenciálegyenletének formális megoldása:

$$\hat{T}(t,t_0) \;=\; \mathbf{P}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{H}(t')dt'\right], \tag{5.26}$$

ahol az időrendezés **P** operátora az alábbiak szerint van definiálva:

$$\mathbf{P}(\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)) \;=\; \begin{cases} \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2), & t_1 < t_2 \\ \hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1), & t_2 < t_1 \end{cases} \tag{5.27}$$

Ha a Hamilton-operátor független az időtől, akkor az evoluciós operátor

$$\hat{T}(t,t_0) \;=\; \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right] \tag{5.28}$$

alakot ölt.

Szorozzunk rá az evoluciós operátor (5.25) differenciálegyenletére jobbról a $\psi(t_0)$ vektorral. Ekkor a

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d\psi(t)}{dt} \;=\; \hat{H}(t)\psi(t) \tag{5.29}$$

Schrödinger-egyenletet kapjuk eredményül, amely az S fizikai rendszer időbeli fejlődését az állapotvektor segítségével írja le.

Az (5.20) egyenletből megkapjuk a fizikai mennyiségek várható értékeinek időbeli változását leíró egyenletet:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}(\psi(t),\hat{\alpha}\psi(t)) \;=\; (\psi(t),[\hat{\alpha},\hat{H}(t)]\psi(t)) + \mathrm{i}\hbar\left(\psi(t),\frac{\partial\hat{\alpha}(t)}{\partial t}\psi(t)\right), \tag{5.30}$$

ahol a jobb oldalt kiegészítettük a második taggal, amelyre akkor van szükség, ha a fizikai mennyiség az időtől explicit módon is függ. Innen látjuk, hogy az α fizikai mennyiség akkor és csak akkor mozgásállandó, ha

$$[\hat{\alpha},\hat{H}(t)] + \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{\alpha}(t)}{\partial t} \;=\; 0. \tag{5.31}$$

A fizikai mennyiség tehát akkor mozgásállandó, ha a várható értéke időben állandó. Ilyenkor a fizikai mennyiség $\hat{\alpha}$ operátorának sajátértékei és a valószínűségek, hogy azokat a rendszer felveszi, időben állandók (még akkor is, ha $\hat{\alpha}$ explicit módon is függ az időtől).

A fentiekben megtaláltuk tehát a kvantummechanika klasszikus határesetével való összehasonlítás alapján az időbeli eltolás operátorának az alakját. Ez az operátor lineáris és unitér és a rendszer időbeli fejlődését írja le, amiért evoluciós operátornak nevezzük. Segítségével megfogalmaztuk a fizikai rendszer olyan dinamikai leírását, amikor az állapotvektorok időtől függenek és az időtől explicit módon nem függő fizikai mennyiségek operátorai függetlenek az időtől. A kvantummechanikai rendszerek dinamikájának ezt a fajta leírását Schrödinger-képnek nevezzük.

A dinamikai leírás egy másik lehetősége az, hogy az állapotvektorokat időtől függetleneknek tekintjük és a fizikai mennyiségek leírására használunk időtől függő operátorokat. Ez az utóbbi leírás az ún. Heisenberg-kép. Ehhez úgy jutunk, ha bevezetjük a

$$\psi_H = \hat{T}^\dagger(t,t_0)\psi(t) = \psi(t_0) \tag{5.32}$$

állapotvektorokat és a fizikai mennyiségek

$$\hat{\alpha}_H(t) = \hat{T}^\dagger(t,t_0)\hat{\alpha}(t)\hat{T}(t,t_0) \tag{5.33}$$

operátorait. Ekkor az (5.30) egyenletből

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d\hat{\alpha}_H(t)}{dt} = [\hat{\alpha}_H(t), \hat{H}_H(t)] + \mathrm{i}\hbar\left(\frac{\partial\hat{\alpha}(t)}{\partial t}\right)_H \tag{5.34}$$

adódik mozgásegyenletként a Heisenberg-képben. Az (5.34) egyenletet magára a $\hat{H}$ Hamilton-operátorra alkalmazva kapjuk, hogy:

$$\frac{d\hat{H}_H(t)}{dt} = \left(\frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial t}\right)_H . \tag{5.35}$$

Ha az α fizikai mennyiség megmaradó, akkor az (5.34) egyenlet jobb oldala zérus az (5.31) egyenlet következtében. A megmaradó fizikai mennyiségeket tehát időben állandó operátorok írják le a Heisenberg-képben:

$$\frac{d\hat{\alpha}_H(t)}{dt} = 0. \tag{5.36}$$

Az (5.35) egyenletből ezért következik, hogy a rendszer energiája időben állandó, ha a Hamilton-operátor nem függ explicit módon az időtől.

5.3 Az evoluciós operátorok kapcsolata

A rendszer időbeli fejlődését figyelhetjük különböző vonatkoztatási rendszerekből. Legyen pl. O és O' két tetszőleges megfigyelő, akik ugyanannak az S rendszernek az időbeli fejlődését a

$$\begin{aligned}\psi_O(t) &= \hat{T}(t,t_0)\psi_O(t_0),\\ &\text{ill. a}\\ \psi_{O'}(t) &= \hat{T}'(t,t_0)\psi_{O'}(t_0) \qquad (5.37)\end{aligned}$$

egyenletekkel írják le. Azt kérdezzük, hogy mi a kapcsolat a $\hat{T}(t,t_0)$ és a $\hat{T}'(t,t_0)$ evoluciós operátorok között. Wigner tétele értelmében létezik olyan lineáris vagy antilineáris unitér operátor, amelynek segítségével

$$\psi_{O'}(t) = \hat{\mathcal{U}}(t)\psi_O(t). \qquad (5.38)$$

Ezt használva, elemi számolással adódik, hogy

$$\hat{T}'(t,t_0)\hat{\mathcal{U}}(t_0) = \hat{\mathcal{U}}(t)\hat{T}(t,t_0). \qquad (5.39)$$

5.4 Az energia transzformációja

Az O megfigyelő az S rendszer időbeli fejlődését az

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d\psi_O(t)}{dt} = \hat{H}(t)\psi_O(t) \qquad (5.40)$$

Schrödinger-egyenlettel írja le. Szorozzuk ezt az egyenletet balról azzal az $\hat{\mathcal{U}}(t)$ operátorral, amely megadja a másik, O' megfigyelő rendszerére való áttérést az (5.38) egyenlet révén:

$$\pm\mathrm{i}\hbar\hat{\mathcal{U}}(t)\frac{d\psi_O}{dt} = (\hat{\mathcal{U}}(t)\hat{H}(t)\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t))\,\hat{\mathcal{U}}(t)\psi_O(t). \qquad (5.41)$$

Adjuk hozzá az egyenlet mindkét oldalához az

$$\pm\mathrm{i}\hbar\left(\frac{d\hat{\mathcal{U}}(t)}{dt}\right)\psi_O(t)$$

tagot:

$$\pm\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}\psi_{O'} = (\hat{\mathcal{U}}(t)\hat{H}(t)\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t))\,\psi_{O'}(t) \pm \mathrm{i}\hbar\left(\frac{d\hat{\mathcal{U}}(t)}{dt}\right)\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t)\psi_{O'}(t). \qquad (5.42)$$

Ez az egyenlet a

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d\psi_{O'}(t)}{dt} = \hat{H}'(t)\psi_{O'}(t) \qquad (5.43)$$

Schrödinger-egyenlet az O' vonatkoztatási rendszerben, ahol a Hamilton-operátor:

$$\hat{H}'(t) = \pm\hat{\mathcal{U}}(t)\hat{H}(t)\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t) + \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{\mathcal{U}}}{\partial t}\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t). \tag{5.44}$$

Ezzel megkaptuk a Hamilton-operátor transzformációját.

Határozzuk meg ezután az energia transzformációját. Képezzük az (5.44) egyenlet mindkét oldalának várható értékét a $\psi_{O'}(t)$ állapotban és használjuk ki, hogy $\hat{\mathcal{U}}$ unitér:

$$\begin{aligned}(\psi_{O'}(t), \hat{H}'(t)\psi_{O'}(t)) &= \pm(\psi_O(t), \hat{H}\psi_O(t)) \\ &\quad \pm\mathrm{i}\hbar\left(\psi_O(t), \hat{\mathcal{U}}^\dagger(t)\frac{\partial\hat{\mathcal{U}}(t)}{\partial t}\psi_O(t)\right).\end{aligned} \tag{5.45}$$

Az energia várható értéke tehát az

$$E_{O'}(t) = \pm E_O(t) \pm \mathrm{i}\hbar\left\langle\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t)\frac{\partial\hat{\mathcal{U}}(t)}{\partial t}\right\rangle_O \tag{5.46}$$

összefüggés szerint transzformálódik. A jobb oldal első tagjában a negatív előjel is lehetséges. Ezért az a félelmünk támadhat, hogy antilineáris transzformáció esetén az energia negatívvá is válhat. Látni fogjuk később, hogy ez mégsem fog előfordulni, mert ilyenkor a második tag járuléka biztosítja, hogy az eredmény pozitív.

6 Szimmetria elvek, megmaradási törvények és kiválasztási szabályok

Tegyük fel, hogy az S fizikai rendszert az O és az O' vonatkoztatási rendszerből néző megfigyelők azt találják, hogy az S rendszer dinamikáját ugyanaz a Schrödinger-egyenlet írja le:

$$\begin{aligned} O: \quad \mathrm{i}\hbar\frac{d\psi_O}{dt} &= \hat{H}\psi_O, \\ O': \quad \mathrm{i}\hbar\frac{d\psi_{O'}}{dt} &= \hat{H}'\psi_{O'}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

ahol $\hat{H}' = \hat{H}$. Ekkor az $\hat{\mathcal{U}}$ transzformáció, amely az O és az O' vonatkoztatási rendszerben végzett mérések kapcsolatát írja le, szimmetriatranszformáció. Nyilvánvalóan a két rendszerben az evoluciós operátorok is megegyeznek: $\hat{T}'(t, t_0) = \hat{T}(t, t_0)$. Felhasználva az általános érvényű (5.39) egyenletet, szimmetriatranszformáció esetén az

$$\hat{T}(t, t_0)\hat{\mathcal{U}}(t_0) = \hat{\mathcal{U}}(t)\hat{T}(t, t_0) \tag{6.2}$$

összefüggést kapjuk. Ez azt fejezi ki, hogy mindegy, hogy a t_0 pillanatban térünk át az O vonatkoztatási rendszerről az O'-re és abban fejlesztjük a t pillanatig a rendszert, vagy előbb O-ban fejlesztjük a rendszert a t pillanatig és utána a t pillanatban térünk át O'-re. Ha ez így van, akkor azt mondjuk, hogy az $\hat{\mathcal{U}}$ transzformáció az S fizikai rendszer szimmetriája.

A fizikában minket általában olyan szimmetriák érdekelnek, amelyek valamenynyi fizikai rendszernek, vagy legalábbis a fizikai rendszerek egy bő halmazának közös szimmetriái. A valamennyi rendszerre érvényes szimmetriákról azt szoktuk mondani, hogy azok a természet szimmetriái. Az utóbbi szimmetriák létét általában elvként szoktuk elfogadni a fizikai elméletek megalkotása során. A szimmetriaelvekből kiválasztási szabályok és megmaradási törvények következnek. A fizikus éppen az utóbbiak megfigyelése révén következtet a természet szimmetriáira.

6.1 Kiválasztási szabályok

A mikrovilág törvényszerűségei megfigyelésének egyik módja úgynevezett szórási kísérletek végzése. Ilyenkor valamilyen (többnyire gyorsító) berendezésekkel részecskéket állítunk elő valamilyen kezdeti állapotban, egymástól általában olyan távol, hogy a kölcsönhatásuk elhanyagolható; úgy mondjuk, hogy aszimptotikusan szabad állapotban. Ezután a részecskéket ütköztetjük, amikoris kölcsönhatásuk eredményeként valamilyen végtermékek keletkeznek. Ezek aztán megint szétrepülnek és mire az ütközés helyétől nagy távolságban detektáljuk őket, addigra a kölcsönhatásuk elhanyagolhatóvá válik: ismét aszimptotikusan szabad állapotba kerülnek. Az ilyen szórási kísérletek leírására a kvantummechanikában az $\hat{S}_{fi}$ S-operátor szolgál. Ennek definíciója

$$\hat{S}_{fi} = \lim_{t\to\infty, t_0\to-\infty} \hat{T}_f(0,t)\hat{T}(t,t_0)\hat{T}_i(t_0,0), \tag{6.3}$$

ahol $\hat{T}_f$ és $\hat{T}_i$ a végső és a kezdeti aszimptotikusan szabad állapot evoluciós operátora. Annak az amplitudója, hogy a szórási folyamat a Φ_i aszimptotikusan szabad állapotból indul és a Φ_f aszimptotikusan szabad állapottal végződik, $(\Phi_f, \hat{S}_{fi}\Phi_i)$.

Nézzük mostan, mit is jelent a fizikai rendszer, pontosabban a szóródó részecskék kölcsönhatásának $\hat{\mathcal{U}}(t)$ szimmetriája a szórási amplitudó szempontjából. Valamely O' vonatkoztatási rendszerben

$$\hat{S}'_{fi} = \lim_{t\to\infty, t_0\to-\infty} \hat{T}'_f(0,t)\hat{T}'(t,t_0)\hat{T}'_i(t_0,0), \tag{6.4}$$

ahol

$$\hat{T}'(t,t_0) = \hat{\mathcal{U}}(t)\hat{T}(t,t_0)\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t_0) \tag{6.5}$$

és hasonló összefüggések állnak fenn az aszimptotikusan szabad kezdeti és végső állapotok evoluciós operátoraira az O és O' rendszerben. Következésképpen

$$\hat{S}'_{fi} = \hat{\mathcal{U}}(0)\hat{S}_{fi}\hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(0), \tag{6.6}$$

ami megadja az S-operátor transzformációját az O vonatkoztatási rendszerről az O'-re való áttérés során. Ha most $\hat{\mathcal{U}}$ szimmetriatranszformáció, akkor

$$\hat{T}'(t,t_0) = \hat{T}(t,t_0) \tag{6.7}$$

és hasonló összefüggések igazak az aszimptotikusan szabad kezdeti és végállapot evoluciós operátoraira, ezért

$$\hat{S}'_{fi} = \hat{S}_{fi}, \tag{6.8}$$

azaz az S-operátor szimmetriatranszformáció során invariáns marad. Ezt összevetve a (6.6) egyenlettel

$$[\hat{\mathcal{U}}(0), \hat{S}_{fi}] = 0, \tag{6.9}$$

azaz az S-operátor kommutál a szimmetriatranszformáció operátorával.

Lineáris szimmetriatranszformáció esetén ebből a tényből következik az a kiválasztási szabály, hogy csak a szimmetriatranszformáció ugyanazon sajátértékéhez tartozó állapotok között lehetséges átmenet. Valóban, ha φ_i és φ_f olyan aszimptotikusan szabad állapotok, amelyek az $\hat{\mathcal{U}}(0)$ operátornak rendre az u_i és az u_f sajátértékhez tartozó sajátállapotai, akkor

$$0 = (\varphi_f, [\hat{\mathcal{U}}(0), \hat{S}_{fi}]\varphi_i) = (u_f - u_i)(\varphi_f, \hat{S}_{fi}\varphi_i), \tag{6.10}$$

ahonnan $u_f \neq u_i$ esetén $(\varphi_f, \hat{S}_{fi}\varphi_i) = 0$ adódik. A szimmetriatranszformáció különböző sajátértékeihez tartozó sajátállapotok közötti átmenet tehát tiltott, azaz az amplitudója (s így a valószínűsége is) zérus.

A szimmetria még másképpen is kifejezhető. Legyen ϕ_i és ϕ_f tetszőleges kezdeti és végállapot, ekkor

$$\begin{aligned}(\phi_f, \hat{S}_{fi}\phi_i) &= (\phi_f, \hat{\mathcal{U}}(0)\hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(0)\hat{S}_{fi}\phi_i) \\ &= (\hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(0)\phi_f, \hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(0)\hat{S}_{fi}\hat{\mathcal{U}}(0)\hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(0)\phi_i) \\ &= (\hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(0)\phi_f, \hat{S}_{fi}\hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(0)\phi_i). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy az S-operátor tetszőleges két állapot közötti mátrixeleme megegyezik ugyanezen két állapot transzformáltja közötti mátrixelemével, ha ez a transzformáció szimmetriatranszformáció.

6.2 Megmaradási törvények

Ha a szimmetriatranszformáció lineáris, akkor megmaradási törvény(ek)re vezet a szimmetria. Az (5.44) egyenlet mindkét oldalára rászorzunk $\hat{\mathcal{U}}(t)$-vel és felhasználjuk, hogy szimmetria esetén $\hat{H}'(t) = \hat{H}(t)$. Ekkor azt látjuk, hogy a szimmetria következtében

$$\frac{d\hat{\mathcal{U}}(t)}{dt} \equiv [\hat{\mathcal{U}}(t), \hat{H}(t)] + \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{\mathcal{U}}(t)}{\partial t} \quad = \quad 0. \tag{6.12}$$

Innen, ha a szimmetriatranszformáció nem függ explicit módon az időtől, akkor

$$[\hat{\mathcal{U}}, \hat{H}(t)] \quad = \quad 0. \tag{6.13}$$

Ha még ráadásul $\hat{\mathcal{U}}$ önadjungált is, akkor ez azt jelenti, hogy $\hat{\mathcal{U}}$ egy megmaradó mennyiség operátora. Ha - mint általában - $\hat{\mathcal{U}}$ nem önadjungált, akkor két önadjungált operátor,

$$\hat{\mathcal{U}} + \hat{\mathcal{U}}^\dagger, \qquad \text{és} \qquad \mathrm{i}(\hat{\mathcal{U}} - \hat{\mathcal{U}}^\dagger) \tag{6.14}$$

képezhető a segítségével, amelyek megmaradó fizikai mennyiségek operátorai. Ezért, ha a szimmetriatranszformációk véges vagy diszkrét csoportot alkotnak, akkor kétszer annyi megmaradó mennyiség jellemzi a rendszert, mint amennyi a transzformációk csoportja elemeinek száma. Ha a szimmetriatranszformációk folytonos csoportot alkotnak, akkor a csoport elemei nem függetlenek. Megtanultuk a csoportok ábrázolásaival kapcsolatban, hogy ilyenkor a csoportelemek n darab független infinitezimális generátorral fejezhetők ki

$$\hat{\mathcal{U}}(t) \quad = \quad \exp\left(\sum_{s=1}^{n} \mathrm{i}a_s\hat{J}_s(t)\right) \tag{6.15}$$

alakban, ahol a_s valós paraméterek. Helyettesítsük ezt az alakot a (6.12) egyenletbe és deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát a_s szerint parciálisan, majd vegyük az eredményt az $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ helyen:

$$[\hat{J}_s, \hat{H}] + \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{J}_s}{\partial t} \quad = \quad 0. \tag{6.16}$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy egy n-paraméteres folytonos szimmetriacsoporthoz pontosan n darab megmaradó fizikai mennyiség tartozik, a csoport n darab infinitezimális generátora. (Megjegyezzük, hogy mint fizikusok a $\hat{J}_s$ hermitikus operátorokat is generátoroknak nevezzük, kis pongyolasággal.) Az, hogy valamennyi $\hat{J}_s$ generátor megmaradó mennyiség, még nem jelenti, hogy mind „jó kvantumszámokra” vezet. A csoport rangja meghatározza, hogy hány Casimir-operátorral jellemezhetők a csoport irreducibilis ábrázolásai. Ennyi jó kvantumszám, azaz egyidejűleg mérhető fizikai mennyiség biztosan van. Ezekhez jönnek még azok az infinitezimális generátorok, amelyek egymással kommutálnak, ezek maximális számát is a csoport rangja adja meg.

6.3 Multiplettek

Tegyük fel, hogy az S fizikai rendszer szimmetriatranszformációinak operátorai nem függnek explicit módon az időtől. Ekkor a szimmetriacsoport valamennyi eleme és generátora kommutál a Hamilton-operátorral:

$$[\hat{\mathcal{U}}, \hat{H}] = 0, \qquad [\hat{J}_s, \hat{H}] = 0. \tag{6.17}$$

Legyen ψ a Hamilton-operátor sajátállapota,

$$\hat{H}\psi = E\psi. \tag{6.18}$$

Ekkor

$$\hat{H}\hat{\mathcal{U}}\psi = \hat{\mathcal{U}}\hat{H}\psi = \hat{\mathcal{U}}E\psi = E\hat{\mathcal{U}}\psi, \tag{6.19}$$

azaz valamennyi $\hat{\mathcal{U}}\psi$ vektor, amely a ψ állapotból a szimmetriacsoport transzformációival kapható, ugyanahhoz az energiasajátértékhez tartozó állapot. Az $\hat{\mathcal{U}}\psi$ állapotvektorok tehát egy invariáns alteret alkotnak a rendszer állapotainak a Hilbert-terében.

Legyen továbbá a szimmetriacsoport egy r rangú félegyszerű Lie-csoport. Ekkor létezik r darab lineárisan független $\hat{C}_\lambda = C_\lambda(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \ldots, \hat{J}_n)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ Casimir-operátor (Racah tétele). Ezek definíció szerint mind kommutálnak a csoport generátorainak mindegyikével és következésképpen egymással is páronként:

$$[\hat{C}_\lambda, \hat{J}_s] = 0, \qquad [\hat{C}_\lambda, \hat{C}_{\lambda'}] = 0. \tag{6.20}$$

Másrészt, mivel a generátorok kommutálnak a Hamilton-operátorral, azért a Casimir-operátorok is:

$$[\hat{C}_\lambda, \hat{H}] = 0. \tag{6.21}$$

A fentiekből következik, hogy a Hamilton-operátornak és a Casimir-operátoroknak van közös sajátfüggvényrendszere.

A félegyszerű Lie-csoportok unitér ábrázolásaihoz tartozó Casimir-operátorok mindig hermitikusnak választhatók. Tegyük fel ugyanis, hogy $\hat{C}$ Casimir-operátor, amely nem hermitikus. Ekkor a $\hat{C} + \hat{C}^\dagger$ (nyilvánvalóan) hermitikus operátorról megmutatható, hogy Casimir-operátor, azaz, hogy a csoport valamennyi infinitezimális generátorával kommutál. Ez a tétel a fizikai alkalmazások szempontjából azt jelenti, hogy ha hermitikus Casimir-operátorokat választunk, akkor azok annyi darab megmaradó fizikai mennyiséget szolgáltatnak, amennyi a szimmetriacsoport rangja. Ezek mind egyidejűleg mérhető mennyiségek, vis. a sajátértékeik „jó kvantumszámok".

Belátható továbbá, hogy az r darab lineárisan független Casimir-operátor teljes rendszert alkot abban az értelemben, hogy bármely $\hat{A}$ operátor, amely a csoport valamennyi generátorával felcserélhető, azaz amelyre $[\hat{A}, \hat{J}_s] = 0$, a Casimir-operátorok függvénye: $\hat{A} = A(\hat{C}_1, \hat{C}_2, \ldots, \hat{C}_r)$. A fentiekből következik, hogy amennyiben az S fizikai rendszernek egy félegyszerű Lie-csoport a szimmetriája, akkor a rendszer Hamilton-operátora a csoport Casimir-operátorainak függvénye:

$$\hat{H} \;=\; H(\hat{C}_1, \hat{C}_2, \ldots, \hat{C}_r). \tag{6.22}$$

Ebből következik, hogy az energiasajátértékek a Casimir-operátorok sajátértékeinek függvényei: $E = E(C_1, C_2, \ldots, C_r)$.

Tudjuk, hogy r darab független Casimir-operátor sajátértékei egyértelműen meghatározzák a szimmetriacsoport egy-egy véges dimenziós irreducibilis ábrázolását. Ezért a fizikai rendszer minden egyes energiaszintjéhez olyan invariáns altér tartozik, amelyen a szimmetriacsoport (félegyszerű Lie-csoport) véges dimenziós unitér mátrixokkal irreducibilisen ábrázolható. A szimmetriával rendelkező fizikai rendszer energiaszintjei tehát elfajultak. Az elfajultság fokán a megfelelő irreducibilis ábrázolás dimenzióját, azaz az adott energiaszinthez tartozó invariáns altér dimenzióját értjük. Az adott energiaszinthez tartozó állapotok jellemzésére felhasználhatjuk, hogy a csoport n darab generátora között van pontosan r darab, amelyek egymással páronként felcserélhetők: $\hat{J}_{s_1}, \hat{J}_{s_2}, \ldots, \hat{J}_{s_r}$. Választhatunk tehát egy olyan bázisfüggvényrendszert, amelynek tagjai a

$$\hat{H}, \hat{C}_1, \hat{C}_2, \ldots, \hat{C}_r, \hat{J}_{s_1}, \hat{J}_{s_2}, \ldots, \hat{J}_{s_r} \tag{6.23}$$

operátorok

$$E, C_1, C_2, \ldots, C_r, m_{s_1}, m_{s_2}, \ldots, m_{s_r} \tag{6.24}$$

sajátértékeihez tartozó közös sajátfüggvényei. Ha a Casimir-operátorok rögzített sajátértékei esetén az m_{s_i} $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sajátértékek rendszerének különböző megválasztására összesen d lehetőség van, akkor az adott energiaszint d-szeresen elfajult.

A fizikai rendszer szimmetriája tehát multiplettek létezéséhez vezet. A multiplett-szerkezet jelenlétéből pedig, megfordítva, a rendszer valamilyen szimmetriájára következtetünk. Hogyan vesszük azonban észre, hogy az egyes energiaszintekhez több állapot is tartozik? A gyakorlatban mindig úgy, hogy valamilyen módon megsértjük a rendszer szimmetriáját „egy kicsit”. Ennek következtében az eredetileg egy adott energiaszinthez tartozó állapotok energiája kicsit különbözővé válik. A rendszer nivósémáján azt látjuk, hogy az energiaszintek egy-egy energiaérték körül csoportosulnak. Az energiaszintek felhasadását tudjuk megfigyelni annak következtében, hogy a rendszer szimmetriáját valamilyen más rendszerrel vagy külső térrel való kölcsönhatás kicsit megsérti. A szimmetriának ezt a fajta megvalósulását és megsérülését a szimmetriák Wigner-féle megvalósulásának nevezzük.

A multiplettek megfigyelésének klasszikus példája az atomi energiaszintek Zeeman- és Stark-effektus következtében történő felhasadása.

A multiplett-szerkezet figyelembevételével a kiválasztási szabályokat úgy is fogalmazhatjuk, hogy átmenetek csak egy-egy multipletten belül lehetségesek, míg a különböző multiplettek közötti átmenetek tiltottak. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Szimmetria esetén a szimmetriacsoport valamennyi eleme kommutál a $\hat{S}_{fi}$ operátorral, ezért a csoport valamennyi generátora és a csoporthoz tartozó Casimir-operátorok is. Az S-operátor tehát tekinthető az r darab független Casimir-operátor függvényének. Következésképpen az $\hat{S}_{fi}$ operátor mátrixa a Hamilton-operátor és a Casimir-operátorok közös sajátfüggvényeiből álló bázisban diagonális. A különböző multiplettek között tehát nincsen átmenet. A természetben a szimmetriát persze megint annak révén vesszük észre, hogy a szimmetria megsérül. Ekkor fogunk találni a különböző multiplettek között ún. tiltott átmeneteket, amelyek azonban sokkal kisebb valószínűségűek, mint az egyazon multipletthez tartozó állapotok közötti megengedett átmenetek.

6.4 Szuperkiválasztási szabályok

A kvantumelmélet alapelvei közé tartozik a szuperpozíció elve, amely kimondja, hogy bármely két állapot lineáris szuperpozíciója is egy állapota a rendszernek. Ezért lehet tulajdonképpen az állapotokat matematikailag egy lineáris vektortér, a Hilbert-tér vektorainak tekinteni. A Hilbert-térben vannak azonban olyan vektorok, amelyek fizikailag nem valósíthatók meg. Nem lehet például két különböző elektromos töltésű, bariontöltésű, ritkaságú stb. állapot szuperpozicióját kísérletileg előállítani. Erről a tényről úgy szokás beszélni, hogy vannak szuperkiválasztási szabályok. Általában létezik a fizikai mennyiségek (töltések) olyan $\{\Theta\}$ rendszere, hogy ezen mennyiségek különböző sajátértékrendszereihez tartozó állapotok lineáris kombinációi a természetben nem valósulnak meg (nem valósíthatók meg). Minden állapot ezen mennyiségeknek közös sajátállapota. A $\{\Theta\}$ mennyiségek valamely sajátértékrendszeréhez tartozó állapotok alterét koherens altérnek nevezzük. A fentiek értelmében a szimmetriatranszformációk a koherens altereket koherens alterekbe képezik le. Ezért olyan bázisban, amelyben a $\{\hat{\Theta}\}$ operátorok diagonálisak, a szimmetriatranszformáció mátrixa

$$\hat{\mathcal{U}} \sim \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & X & & & \\ \hline & & & X & \\ \hline & & X & & \\ \hline X & & & & \\ \hline & & & & X \end{array} \right) \tag{6.25}$$

blokkszerkezetet mutat, ahol minden sor és oszlop egy koherens altérnek felel meg, és minden oszlopban és sorban csak egy blokk nem azonosan zérus. Meg lehet mutatni, hogy a szimmetriatranszformáció operátora minden koherens altérben csak egy tetszőleges fázisfaktor erejéig van egyértelműen meghatározva, amely alterenként különbözőnek is választható.

A szimmetriatranszformációk nem függnek attól, hogy melyik a kezdeti O és a végső O' rendszer, hanem csak attól a g transzformációtól, amelyik a két rendszert összekapcsolja (matematikai értelemben). Ezen azt értjük, hogy ha $\tilde{O}$ és $\tilde{O}'$ két másik vonatkoztatási rendszer és ugyancsak a g művelet visz az egyikből a másikba, akkor a Hilbert-téren a megfelelő transzformációk egy tetszőleges fázisfaktor erejéig megegyeznek:

$$\hat{\mathcal{U}}(O' \leftarrow O) = \hat{\mathcal{U}}(\tilde{O}' \leftarrow \tilde{O}) \equiv \hat{\mathcal{U}}(g). \tag{6.26}$$

Ennek a következménye, többek között, hogy ha a g szimmetriatranszformációk egy G csoportot alkotnak, akkor a Hilbert-tér megfelelő $\hat{\mathcal{U}}(g)$ transzformációi ennek a csoportnak az ábrázolásait adják az egyes koherens alterekben.

7 A tér és az idő folytonos szimmetriái

7.1 Az időbeli eltolási szimmetria

A τ=áll. időbeli eltolás operátora a Hilbert-térben:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{U}}_\tau(t) &= \hat{T}(t+\tau, t) \\ &= \mathbf{P}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_t^{t+\tau} dt' \hat{H}(t')\right\}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

A rendszernek az időbeli eltolások akkor és csak akkor szimmetriái, ha tetszőleges τ esetén:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{i}\hbar\frac{d\hat{\mathcal{U}}_\tau}{dt} \\ &= \hat{\mathcal{U}}_\tau(t)\hat{H}(t) - \hat{H}(t)\hat{\mathcal{U}}_\tau(t) \\ &\quad +\mathrm{i}\hbar\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t+\tau)\hat{\mathcal{U}}_\tau(t) + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{\mathcal{U}}_\tau(t)\hat{H}(t)\right) \\ &= \hat{H}(t+\tau)\hat{\mathcal{U}}_\tau(t) - \hat{H}(t)\hat{\mathcal{U}}_\tau(t) \\ &= \left(\hat{H}(t+\tau) - \hat{H}(t)\right)\hat{\mathcal{U}}_\tau(t). \end{aligned} \tag{7.2}$$

A deriválás során az operátorok sorrendjében figyelemmel voltunk a $\mathbf{P}$ időrendező operátor hatására. A fenti egyenletből következik, hogy időbeli eltolási szimmetria esetén:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}(t+\tau), \tag{7.3}$$

azaz a Hamilton-operátor nem függ explicit módon az időtől:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0. \tag{7.4}$$

Ekkor viszont

$$0 = \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}\right)_H = \frac{d\hat{H}_H}{dt}, \tag{7.5}$$

ami azt jelenti, hogy a rendszer energiája megmarad.

7.2 A térbeli eltolások

Legyen az O' rendszer az $\vec{\ell}$ vektorral eltolva az O rendszerhez képest a térben. Ekkor egy pontszerű részecske ezen rendszerekben mért helyzetvektorára és impulzusára az

$$\vec{r}(O') = \vec{r}(O) - \vec{\ell}, \qquad \vec{p}(O') = \vec{p}(O) \tag{7.6}$$

összefüggések állnak fenn. Ebből következően az (5.6) egyenletek az alábbi alakot öltik:

$$\hat{D}_\ell^\dagger \hat{\vec{r}} \hat{D}_\ell = \hat{\vec{r}} - \vec{\ell}\hat{I}, \tag{7.7}$$

$$\hat{D}_\ell^\dagger \hat{\vec{p}} \hat{D}_\ell = \hat{\vec{p}}. \tag{7.8}$$

Az (5.8) egyenletekből $\hat{\alpha}_j \to \hat{\vec{r}}$ és $\hat{\alpha}_k \to \hat{\vec{p}}$ helyettesítéssel

$$[\hat{D}_\ell^\dagger \hat{\vec{r}} \hat{D}_\ell, \hat{D}_\ell^\dagger \hat{\vec{p}} \hat{D}_\ell] = [\hat{\vec{r}} - \vec{\ell}, \hat{\vec{p}}] = + [\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}] \tag{7.9}$$

adódik, ami mutatja a jobb oldal pozitív előjele révén, hogy az eltolások $\hat{D}_\ell$ operátorai lineárisak.

Az eltolás operátora a részecske impulzusának operátorával kommutál és a helyzetvektor operátorával nem, ezért az impulzus operátorának függvénye. Ekkor írhatjuk, hogy

$$D_\ell(\hat{\vec{p}})\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}} D_\ell(\hat{\vec{p}}) = \vec{\ell} D_\ell(\hat{\vec{p}}). \tag{7.10}$$

Használjuk az operátorok

$$\hat{\vec{r}} \to \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{p}}, \qquad \hat{\vec{p}} \to \vec{p} \tag{7.11}$$

ábrázolását. Ennek segítségével:

$$-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{p}} D_\ell = \vec{\ell} D_\ell. \tag{7.12}$$

Megkövetelve az eltolások operátorainak uniteritását és önkényesen 1-nek választva a fázisfaktort, a megoldás:

$$\hat{D}_\ell \;=\; \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{\vec{p}}\,\vec{\ell}\right\}. \tag{7.13}$$

Innen látjuk, hogy a térbeli eltolások csoportjának generátorai az impulzuskomponensek. Ez a csoport Abel-csoport, mivel az impulzuskomponensek felcserélhetők egymással. Az eredmény könnyen általánosítható sokrészecskés rendszerekre. Ekkor a rendszer teljes impulzusának operátora szerepel az eltolások operátorainak kitevőjében.

A rendszernek akkor és csak akkor szimmetriái a térbeli eltolások, ha tetszőleges $\vec{\ell}$ esetén $[\hat{D}_\ell, \hat{H}] = 0$, ami azt jelenti, hogy a rendszer teljes impulzusa megmarad.

Határozzuk még meg a rendszer hullámfüggvényének transzformációját térbeli eltolás esetén. Legyen $f_{\vec{r}}$ az $\hat{\vec{r}}$ operátor sajátvektora:

$$\hat{\vec{r}} f_{\vec{r}} = \vec{r} f_{\vec{r}}. \tag{7.14}$$

Hullámfüggvényen az $f_{\vec{r}}$ sajátvektor és az állapotvektor skalárszorzatát értjük:

$$O': \quad (f_{\vec{r}}, \psi_{O'}) = \psi_{O'}(\vec{r}), \qquad O: \quad (f_{\vec{r}}, \psi_O) = \psi_O(\vec{r}). \tag{7.15}$$

Az (7.14) egyenletből:

$$\begin{aligned}
\hat{D}_\ell^\dagger \hat{\vec{r}} \hat{D}_\ell \cdot \hat{D}_\ell^\dagger f_{\vec{r}} &= \vec{r} \hat{D}_\ell^\dagger f_{\vec{r}}, \\
(\hat{\vec{r}} - \vec{\ell}) \hat{D}_\ell^\dagger f_{\vec{r}} &= \vec{r} \hat{D}_\ell^\dagger f_{\vec{r}}, \\
\hat{\vec{r}} \hat{D}_\ell^\dagger f_{\vec{r}} &= (\vec{r} + \vec{\ell}) \hat{D}_\ell^\dagger f_{\vec{r}}.
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Írhatjuk tehát, hogy

$$\hat{D}_\ell^\dagger f_{\vec{r}} \;=\; f_{\vec{r}+\vec{\ell}}. \tag{7.17}$$

Az utóbbi egyenletet felhasználva az O és az O' vonatkoztatási rendszerbeli hullámfüggvények között az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned}
\psi_{O'}(\vec{r}) &= (f_{\vec{r}}, \psi_{O'}) = (f_{\vec{r}}, \hat{D}_\ell \psi_O) \\
&= (\hat{D}_\ell^\dagger f_{\vec{r}}, \psi_O) = (f_{\vec{r}+\vec{\ell}}, \psi_O) \\
&= \psi_O(\vec{r} + \vec{\ell}).
\end{aligned} \tag{7.18}$$

7.3 Forgási szimmetria. Az SO(3)-multiplettek

Először a valódi forgatások SO(3) csoportjához tartozó mátrixok néhány további tulajdonságát említjük meg.

1. Legyen $\mathcal{R}_0$ a csoport egy tetszőleges eleme, akkor

$$\mathcal{R}(\mathcal{R}_0\vec{n},\omega) = \mathcal{R}_0\mathcal{R}(\vec{n},\omega)\mathcal{R}_0^{-1}. \tag{7.19}$$

2. A forgatásokat másképpen, az ún. Euler-szögek segítségével is parametrizálhatjuk. Egy tetszőleges forgatást ekkor úgy állítunk elő, hogy először a 3. tengely körül forgatunk α szöggel, majd az így kapott 2'. tengely körül β szöggel és végül az új 3'. tengely körül γ szöggel:

$$\mathcal{R}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathcal{R}_{3'}(\gamma)\mathcal{R}_{2'}(\beta)\mathcal{R}_3(\alpha), \tag{7.20}$$

ahol $0 \leq \alpha,\gamma < 2\pi$, és $0 \leq \beta \leq \pi$. Az 1. tulajdonság segítségével a 2' és a 3' tengelyek körüli elforgatásokat kifejezhetjük a megfelelő szögű, 2 és 3 tengelyek körüli elforgatásokkal:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{3'}(\gamma) &= \mathcal{R}_{2'}(\beta)\mathcal{R}_3(\gamma)\mathcal{R}_{2'}^{-1}(\beta),\\ \mathcal{R}_{2'}(\beta) &= \mathcal{R}_3(\alpha)\mathcal{R}_2(\beta)\mathcal{R}_3^{-1}(\alpha).\end{aligned} \tag{7.21}$$

Ezeket az összefüggéseket felhasználva, valamint azt, hogy a 3. tengely körüli forgatások Abel-csoportot alkotnak, kapjuk az Euler-szögekkel parametrizált forgatások általános alakját:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\alpha,\beta,\gamma) &= \mathcal{R}_{2'}(\beta)\mathcal{R}_3(\gamma)\mathcal{R}_3(\alpha)\\ &= \mathcal{R}_3(\alpha)\mathcal{R}_2(\beta)\mathcal{R}_3^{-1}(\alpha)\mathcal{R}_3(\gamma)\mathcal{R}_3(\alpha)\\ &= \mathcal{R}_3(\alpha)\mathcal{R}_2(\beta)\mathcal{R}_3(\gamma).\end{aligned} \tag{7.22}$$

Az egyes tengelyek körüli forgatások mátrixai elemi számolással adódnak:

$$\mathcal{R}_3(\omega) = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0\\ \sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \mathcal{R}_2(\omega) = \begin{pmatrix} \cos\omega & 0 & \sin\omega\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\omega & 0 & \cos\omega\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_1(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega\\ 0 & \sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}. \tag{7.23}$$

Keressük meg ezek után azokat az $\hat{R}$ operátorokat, amelyek leírják az $\mathcal{R}$ forgatások következményét a Hilbert-térben. Vizsgáljuk először az $\vec{n}$ egységvektorral párhuzamos tengely körüli forgatásokat. Vizsgáljuk egyetlen pontszerű részecske esetét. Használjunk hengerkoordinátákat és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusokat, mint a részecskét jellemző fizikai mennyiségek teljes rendszerét. A forgatás csak a φ polárszöget változtatja meg. Az ehhez kanonikusan konjugált impulzus a részecske impulzusmomentumának $\vec{n}$ irányú vetülete, $\hbar J_n$. Az O' és az O

rendszerben mért polárszögek kapcsolata: $\varphi(O') = \varphi(O) + \omega$. Az (5.6) egyenletek a jelen esetben az

$$\hat{R}^\dagger \hat{\varphi} \hat{R} = \hat{\varphi} + \omega, \qquad \hat{R}^\dagger \hat{J}_n \hat{R} = \hat{J}_n \tag{7.24}$$

alakot öltik. Innen következik, hogy $\hat{R}$ csak a $\hat{J}_n$ operátor függvénye: $\hat{R} = R(\hat{J}_n)$. Ekkor az első egyenlőség alapján:

$$[\hat{R}, \hat{\varphi}] \;=\; -\omega \hat{R}. \tag{7.25}$$

Használjuk a szögelfordulás és az impulzusmomentum vetületének

$$\hat{\varphi} \to \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial(\hbar J_n)}, \qquad \hbar \hat{J}_n \to \hbar J_n \tag{7.26}$$

ábrázolását. Ennek segítségével

$$-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial R}{\partial(\hbar J_n)} \;=\; -\omega R \tag{7.27}$$

adódik, ahonnan az unitér megoldás:

$$\hat{R} \;=\; \exp\left\{-\mathrm{i}\hat{J}_n \omega\right\}. \tag{7.28}$$

Hasonló kifejezést nyerhetünk a forgatás operátorára egy N-részecskés rendszer esetén. Olyankor a (7.28) kifejezés kitevőjében a rendszer teljes impulzusmomentumának $\vec{n}$ irányú vetülete szerepel.

A (7.28) kifejezést felírhatjuk a tér 3 független iránya (az 1, 2 és 3 tengelyek) körüli forgatásokra. Bevezethetjük továbbá az $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ 3-komponensű mennyiséget, amelynek segítségével a forgatások

$$\hat{R} \;=\; \exp\left\{-\mathrm{i}\hat{\vec{J}}\vec{\omega}\right\} \tag{7.29}$$

alakot öltenek. Ha most az $\mathcal{R}$ operátorokat magukkal a 3×3-as SO(3)-mátrixokkal ábrázoljuk, akkor beláthatjuk, hogy a $\hat{J}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ impulzusmomentumkomponensek éppen az SO(3)-csoport infinitezimális generátorai. Csakugyan, tételezzünk fel infinitezimális ω szögű forgatásokat és írjuk, hogy

$$\mathcal{R}_i(\omega) = I - \mathrm{i}J_i\omega. \tag{7.30}$$

Hasonlítsuk össze ezen egyenletek jobb oldalát a (7.23) mátrixok sorfejtett alakjával infinitezimális ω esetén. Ekkor leolvashatjuk a $\hat{J}_i$ operátorok SO(3)-mátrixokkal történő ábrázolását:

$$(J_k)_{lm} \;=\; -\mathrm{i}\epsilon_{klm}. \tag{7.31}$$

Ezek után könnyen igazolhatjuk elemi számolással, hogy az impulzusmomentumkomponensek teljesítik a generátorokra kötelező érvényű

$$[J_j, J_k] = \mathrm{i}\epsilon_{jkl} J_l \tag{7.32}$$

relációkat.

Tekintsünk ezek után egy tetszőleges, α, β és γ Euler-szögekkel megadott forgatást. Erre az alábbiak teljesülnek:

$$\begin{aligned}
\hat{R}^\dagger \hat{\vec{r}} \hat{R} &= \mathcal{R}(\alpha,\beta,\gamma)\hat{\vec{r}} = \mathcal{R}_3(\alpha)\mathcal{R}_2(\beta)\mathcal{R}_3(\gamma)\hat{\vec{r}} \\
&= \mathcal{R}_3(\alpha)\mathcal{R}_2(\beta) e^{+\mathrm{i}\gamma \hat{J}_3} \hat{\vec{r}} e^{-\mathrm{i}\gamma \hat{J}_3} \\
&= \mathcal{R}_3(\alpha) e^{+\mathrm{i}\gamma \hat{J}_3} \left(\mathcal{R}_2(\beta)\hat{\vec{r}}\right) e^{-\mathrm{i}\gamma \hat{J}_3} \\
&= \mathcal{R}_3(\alpha) e^{+\mathrm{i}\gamma \hat{J}_3} e^{+\mathrm{i}\beta \hat{J}_2} \hat{\vec{r}} e^{-\mathrm{i}\beta \hat{J}_2} e^{-\mathrm{i}\gamma \hat{J}_3} \\
&= e^{+\mathrm{i}\gamma \hat{J}_3} e^{+\mathrm{i}\beta \hat{J}_2} e^{+\mathrm{i}\alpha \hat{J}_3} \hat{\vec{r}} e^{-\mathrm{i}\alpha \hat{J}_3} e^{-\mathrm{i}\beta \hat{J}_2} e^{-\mathrm{i}\gamma \hat{J}_3},
\end{aligned} \tag{7.33}$$

ahonnan az

$$\mathcal{R}(\alpha,\beta,\gamma) \to \hat{R} = e^{-\mathrm{i}\alpha \hat{J}_3} e^{-\mathrm{i}\beta \hat{J}_2} e^{-\mathrm{i}\gamma \hat{J}_3} \tag{7.34}$$

megfeleltetés adódik.

Az S fizikai rendszer forgási szimmetriája azt jelenti, hogy bármely $\hat{R}$ operátor felcserélhető a Hamilton-operátorral, $[\hat{R}, \hat{H}] = 0$, avagy másképpen valamennyi impulzusmomentumkomponens felcserélhető a Hamilton-operátorral, $[\hat{J}_i, \hat{H}] = 0$. Az SO(3)-csoport rangja $r = 1$. Az irreducibilis ábrázolások multiplettjei tehát egyetlen Casimir-operátor sajátértékeivel jellemezhetők. Ez lehet a $\hat{\vec{J}}^2$, az impulzusmomentum négyzetének operátora. Az irreducibilis ábrázolások bázisvektorainak választhatjuk a $\hat{H}$, $\hat{\vec{J}}^2$ és $\hat{J}_3$ operátorok közös sajátvektorait. Az alábbiakban megkeressük az SO(3)-csoport összes irreducibilis ábrázolásait.

Előzőleg bevezetünk egy a fizikában használatos, Diractól származó jelölést, amely rendkívül egyszerűvé teszi a matematikai írásmódot:

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha &\to |\alpha\rangle, \\
(\psi_\alpha, \psi_\beta) &\to \langle\alpha|\beta\rangle, \\
(\psi_\alpha, \hat{A}\psi_\beta) &\to \langle\alpha|\hat{A}|\beta\rangle.
\end{aligned} \tag{7.35}$$

Ezekután minden skalárszorzat formálisan egy "bra-" ($\langle\ldots|$) és egy "ket-" ($|\ldots\rangle$) vektor szorzata. A Hilbert-tér egységoperátorának felbontása az $\{|n\rangle\}$ ortonormált bázisvektorok által kifeszített egy-dimenziós alterek projektorainak összegére ebben a jelölésben

$$\hat{1} = \sum_n |n\rangle\langle n| \tag{7.36}$$

alakú.

Szerkesszük meg az SO(3)-csoport irreducibilis ábrázolásait. Vezessük be ehhez a

$$\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_1 \pm \mathrm{i}\hat{J}_2 \tag{7.37}$$

ún. léptető operátorokat. Ezek az alábbi csererelációknak tesznek eleget:

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_+] = \hat{J}_+, \qquad [\hat{J}_3, \hat{J}_-] = -\hat{J}_-, \qquad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_3, \tag{7.38}$$

és segítségükkel

$$\hat{\vec{J}}^{\,2} = \hat{J}_3^2 - \hat{J}_3 + \hat{J}_+\hat{J}_- = \hat{J}_3^2 + \hat{J}_3 + \hat{J}_-\hat{J}_+, \tag{7.39}$$

$$\hat{J}_{\pm}^{\dagger} = \hat{J}_{\mp}. \tag{7.40}$$

Legyen $|m\rangle$ a $\hat{J}_3$ operátor m sajátértékhez tartozó normált sajátvektora valamely ábrázolás L terében. Képezzük a $\hat{J}_+|m\rangle$ vektort. Erről megmutatjuk, hogy a $\hat{J}_3$ operátornak az $(m+1)$ sajátértékhez tartozó sajátvektora, hacsak nem $\hat{J}_+|m\rangle = 0$:

$$\hat{J}_3\hat{J}_+|m\rangle = [\hat{J}_3, \hat{J}_+]|m\rangle + \hat{J}_+\hat{J}_3|m\rangle = (m+1)\hat{J}_+|m\rangle. \tag{7.41}$$

A $\hat{J}_+$ operátor tehát felfelé lépteti egyesével a $\hat{J}_3$ sajátállapotok sajátértékeit. Hasonlóan belátható, hogy a $\hat{J}_-$ operátor pedig lefelé lépteti egyesével a sajátértékeket.

Tegyük fel, hogy $\hat{J}_+|m\rangle \neq 0$. Jelöljük ezt az állapotot normálás után $|m+1\rangle$-vel. A $\hat{J}_+$ operátor ismételt alkalmazásával és ismételt normálással kapjuk az $|m+k\rangle$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ állapotokat. Ha az ábrázolás véges dimenziós, akkor létezik olyan $k = j$ maximális érték, amelyre $\hat{J}_+|j\rangle = 0$ adódik. Erre az állapotra:

$$\hat{J}_3|j\rangle = j|j\rangle, \qquad \hat{\vec{J}}^{\,2}|j\rangle = j(j+1)|j\rangle. \tag{7.42}$$

Alkalmazzuk a $\hat{J}_-$ operátort ismételten a $|j\rangle$ állapotra. Normálás után az $|j-n\rangle$ vektorokat kapjuk, amelyekre:

$$\hat{\vec{J}}^{\,2}|j-n\rangle = j(j+1)|j-n\rangle, \qquad \hat{J}_3|j-n\rangle = (j-n)|j-n\rangle, \tag{7.43}$$

ahol $n = 0, 1, 2, \ldots$ lehet. Véges dimenziós ábrázolást csak akkor kapunk, ha létezik olyan $j - n = \ell$ érték, hogy $\hat{J}_-|\ell\rangle = 0$. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\ell|\hat{J}_-^{\dagger}\hat{J}_-|\ell\rangle \\ &= \langle\ell|\hat{J}_+\hat{J}_-|\ell\rangle \\ &= \langle\ell|\hat{\vec{J}}^{\,2} - \hat{J}_3^2 + \hat{J}_3|\ell\rangle \\ &= j(j+1) - \ell(\ell-1), \end{aligned} \tag{7.44}$$

azaz $\ell = -j$. Az $|\ell\rangle$ vektort azonban véges számú lépéssel kapjuk a $|j\rangle$ vektorból, azért a $(j-\ell)$ különbség egy $n = 0, 1, 2, \ldots$ nem negatív egész szám, így $j-(-j) = 2j = n$. A véges dimenziós irreducibilis ábrázolások tehát a $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ egész és félegész számokkal jellemezhetők és $(2j+1)$-dimenziósak.

Válasszunk az egyes ábrázolások terében olyan bázist, amely a $\hat{\vec{J}}^2$ és a $\hat{J}_3$ operátorok közös sajátvektoraiból áll:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{J}}^2 |jm\rangle &= j(j+1)|jm\rangle, && (7.45)\\ \hat{J}_3|jm\rangle &= m|jm\rangle. && (7.46) \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \langle jm|\hat{J}_\pm^\dagger \hat{J}_\pm|jm\rangle &= \langle jm|\hat{J}_\mp \hat{J}_\pm|jm\rangle \\ &= \langle jm|\hat{\vec{J}}^2 - \hat{J}_3^2 - \hat{J}_3|jm\rangle = j(j+1) - m(m\pm 1), \quad (7.47) \end{aligned}$$

ahonnan

$$\hat{J}_\pm|jm\rangle = [j(j+1) - m(m\pm 1)]^{1/2}|j, m\pm 1\rangle, \tag{7.48}$$

ahol a gyökvonás eredményének fázisfaktorát az általánosan elterjedt Condon-Shortly-féle konvenciónak megfelelően 1-nek választottuk. Az így választott bázisban a forgatások operátorait a

$$\langle jm'|\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle = D^j(\alpha,\beta,\gamma)_{m'm} \tag{7.49}$$

mátrixok ábrázolják. Felhasználva a forgatások (7.22) alakját, amely természetesen az ábrázolásaikra is érvényes,

$$\begin{aligned} D^j(\alpha,\beta,\gamma)_{m'm} &= e^{-\mathrm{i}\alpha m'}\langle jm'|\hat{R}_2(\beta)|jm\rangle e^{-\mathrm{i}\gamma m} \\ &= e^{-\mathrm{i}\alpha m'} d^j(\beta)_{m'm} e^{-\mathrm{i}\gamma m} && (7.50) \end{aligned}$$

írható, ahol bevezettük a

$$d^j(\beta)_{m'm} = \langle jm'|e^{-\mathrm{i}\beta\hat{J}_2}|jm\rangle \tag{7.51}$$

valós ortogonális mátrixokat. Mivel az ábrázolás unitér, azért a $D^j(\alpha,\beta,\gamma)$ mátrixok unitér mátrixok. Számos további fontos tulajdonságuk, amelyekre most nem térhetünk ki, rendkívül jól használhatóvá teszi őket a kvantummechanikai számolásokban. A fentiek alapján ezek a mátrixok adják meg, hogy elforgatás után az $\hat{R}|jm\rangle$ vektor hogyan fejezhető ki a bázisvektorokkal:

$$\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle = \sum_{m'=-j}^{j} D^j(\alpha,\beta,\gamma)_{m'm}|jm'\rangle. \tag{7.52}$$

Forgásszimmetria esetén célszerű gömbi polárkoordinátákat használni. Ilyenkor a $j = l$=egész értékekhez tartozó sajátvektorok az ún. gömbfelületi függvények:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} \left[D^l(\varphi,\theta,0)_{m0}\right]^\star. \tag{7.53}$$

A fizikai alkalmazásokban a $j = l$=egész ábrázolások írják le egy részecske pályaimpulzusmomentum-sajátállapotait.

Az elektron spinjének leírására a $j = 1/2$ ábrázolás alkalmas. Az elektronról a megfigyelések alapján tudjuk, hogy adott impulzusú állapota kétféle lehet. Az elektron energiaszintjeinek kétszeres elfajultságáról külső, gyenge mágneses tér bekapcsolása útján győződhetünk meg. Ha a kétszeres elfajultságot a forgásszimmetria következményének tekintjük, akkor nyilvánvalóan az elektron belső (nem a térbeli eloszlását megadó) állapotai Hilbert-terének 2-dimenziósnak kell lenni. A $j = 1/2$ ábrázolás az, amelyik két dimenzióban ábrázol. Azt mondjuk, hogy az elektronnak $s = \hbar/2$ nagyságú a sajátimpulzusmomentuma, az ún. spinje. A fent megadott (7.45), (7.46) és (7.48) képletek alapján ebben az ábrázolásban:

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.54}$$

ahonnan az adódik, hogy az 1/2-spinű részecske spinoperátorai a Pauli-mátrixok:

$$J_i = \frac{\sigma_i}{2} \qquad (i = 1,2,3; \quad j = 1/2). \tag{7.55}$$

Végül beszéljünk arról, hogyan lehet a tenzori szozással képzett magasabb dimenziós és általában reducibilis ábrázolásokat irreducibilis ábrázolások direkt összegére felbontani. Legyen D^j és $D^{j'}$ két tetszőleges irreducibilis ábrázolás. Meg lehet mutatni a következőket:

- A $D^j \otimes D^{j'}$ ábrázolás infinitezimális generátorai $J_i^j \otimes I^{j'} + I^j \otimes J_i^{j'}$, ahol a felső index az egyes ábrázolásokra utal. Ennek a fizikában az a jelentés tulajdonítható, hogy így kell képezni két impulzusmomentum összegének operátorát. Pl. egy részecskének $\hat{\vec{l}}$ a pályaimpulzusmomentuma és $\hat{\vec{s}}$ a spinje, akkor az eredő teljes impulzusmomentum operátora $\hat{\vec{j}} = \hat{\vec{l}} + \hat{\vec{s}}$, ahol elhagyjuk általában annak jelölését, hogy az egyes tagokat az l impulzusmomentum sajátérték és az s spin által meghatározott $(2l+1)$ és $(2s+1)$ dimenziós vektorterek direkt szorzatterében kell ábrázolni.

- A $D^j \otimes D^{j'}$ reducibilis ábrázolás egyértelműen felbontható alacsonyabb dimenziós irreducibilis ábrázolások összegére:

$$D^j \otimes D^{j'} = D^{|j-j'|} \oplus D^{|j-j'|+1} \oplus \ldots \oplus D^{j+j'-1} \oplus D^{j+j'}. \tag{7.56}$$

A fizikában azt mondjuk ennek megfelelően, hogy egy j és egy j' impulzusmomentum összege a $J = |j - j'|, |j - j'| + 1, \ldots, j + j'$ értékeket veheti fel. Mindegyik esetben az impulzusmomentum vetülete $(2J + 1)$-féle értéket vehet fel. Ezen szabály szerint kell tehát egy részecske pályaimpulzusmomentumát és spinjét összeadni, vagy két részecske impulzusmomentumának eredőjét is így kell meghatározni.

- A tenzori szorzat ábrázolás $(2j + 1)(2j' + 1)$ dimenziós terében használhatjuk a $\hat{\vec{j}}^{\,2}$, $\hat{j}_3$, $\hat{\vec{j}}^{\,\prime\, 2}$ és $\hat{j}_3'$ operátorok közös sajátvektorait, $|jm\rangle|j'm'\rangle$. Választhatjuk azonban bázisként a $\hat{\vec{J}}^{\,2}$, $\hat{J}_3$, $\hat{\vec{j}}^{\,2}$ és $\hat{\vec{j}}^{\,\prime\, 2}$ operátorok közös sajátvektorait, $|JMjj'\rangle$, ahol az eredő impulzusmomentum $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{j}} + \hat{\vec{j}}\,'$. A kétféle bázis közötti kapcsolat a csoportelmélet segítségével meghatározható:

$$|JMjj'\rangle = \sum_{m=-j}^{j} \sum_{m'=-j'}^{j'} (jmj'm'|JM)|jm\rangle|j'm'\rangle. \tag{7.57}$$

  Itt a $(jmj'm'|JM)$ együtthatók valós számok, az ún. Clebsch-Gordan-együtthatók. A fenti összefüggés meg is fordítható:

$$|jm\rangle|j'm'\rangle = \sum_{J=|j-j'|}^{j+j'} \sum_{M=-J}^{J} (jmj'm'|JM)^{\star}|JM\rangle. \tag{7.58}$$

Megjegyezzük még, hogy a Clebsch-Gordan-együtthatóknak a $\vec{J}$ impulzusmomentum harmadik komponensétől való függése

$$(jmj'm'|JM) \sim \delta_{M,m+m'} \tag{7.59}$$

alakú.

7.4 Forgási szimmetria. Részecske centrális potenciálban

Tegyük fel ezek után azt a kérdést, hogy egy zérus spinű részecske hullámfüggvénye hogyan transzformálódik a térbeli forgatások során. Jelölje megint $f_{\vec{r}}$ az $\hat{\vec{r}}$ operátor $\vec{r}$ sajátértékhez tartozó sajátvektorát. Hasonló megfontolással, mint az eltolások esetén, az O és a hozzá képest elforgatott O' vonatkoztatási rendszerben a hullámfüggvények kapcsolatára az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{aligned}\psi_{O'}(\vec{r}) &= (\hat{R}^{\dagger} f_{\vec{r}}, \psi_O) = (f_{\mathcal{R}^{-1}\vec{r}}, \psi_O) \\ &= \psi_O(\mathcal{R}^{-1}\vec{r}).\end{aligned} \tag{7.60}$$

Itt felhasználtuk, hogy

$$\hat{R}^{\dagger} f_{\vec{r}} = f_{\mathcal{R}^{-1}\vec{r}}, \tag{7.61}$$

avagy átjelölve, $f_{\vec{r}} \to |\vec{r}\rangle$,

$$\hat{R}^\dagger|\mathcal{R}\vec{r}\rangle = |\vec{r}\rangle, \tag{7.62}$$

ill.

$$|\mathcal{R}\vec{r}\rangle = \hat{R}|\vec{r}\rangle. \tag{7.63}$$

Vizsgáljunk most egy centrális potenciálban mozgó részecskét. A részecske energianívóihoz $(2l+1)$-dimenziós multiplettek tartoznak. Bázisállapotokként vezessük be a $\hat{H}$, $\hat{\vec{J}}^2$ és $\hat{J}_3$ operátorok (E,l,m) sajátértékekhez tartozó közös ψ_{Elm} sajátvektorait. Ezeket koordináta-függvényekkel reprezentálhatjuk:

$$\psi_{Elm}(\vec{r}) = (f_{\vec{r}}, \psi_{Elm}) = \langle\vec{r}|Elm\rangle. \tag{7.64}$$

Az $\vec{r}$ vektort tekinthetjük a z-tengely irányú $r\vec{e}_3$ vektor elforgatottjának, ahol $\vec{e}_3$ a z-irányú egységvektor. Ekkor

$$\begin{aligned} |\vec{r}\rangle &= |r,\theta,\varphi\rangle = \hat{R}(\alpha=\varphi,\beta=\theta,\gamma=0)|r\vec{e}_3\rangle \\ &= e^{-\mathrm{i}\hat{J}_3\varphi}e^{-\mathrm{i}\hat{J}_2\theta}|r\vec{e}_3\rangle. \end{aligned} \tag{7.65}$$

A (7.63) egyenlet alapján nyilvánvaló továbbá, hogy

$$e^{-\mathrm{i}\omega\hat{J}_3}|r\vec{e}_3\rangle = |r\vec{e}_3\rangle, \tag{7.66}$$

azaz

$$\hat{J}_3|r\vec{e}_3\rangle = 0. \tag{7.67}$$

Következésképpen írhatjuk, hogy:

$$\langle r\vec{e}_3|Elm'\rangle = \langle r\vec{e}_3|e^{\mathrm{i}\omega\hat{J}_3}|Elm'\rangle = e^{\mathrm{i}\omega m'}\langle r\vec{e}_3|Elm'\rangle, \tag{7.68}$$

ahonnan $m'=0$ és így a vizsgált mátrixelem

$$\langle r\vec{e}_3|Elm'\rangle = \delta_{m'0}\tilde{\psi}_{El}(r) \tag{7.69}$$

alakot ölt. Mindezt felhasználva, a hullámfüggvény alakjára a forgási szimmetria alapján az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{aligned} \psi_{Elm}(\vec{r}) &= \langle r,\theta,\varphi|Elm\rangle = \langle r\vec{e}_3|\hat{R}^\dagger(\varphi,\theta,0)|Elm\rangle \\ &= \sum_{m'=-l}^{l}\langle r\vec{e}_3|Elm'\rangle\left[D^l(\varphi,\theta,0)^\dagger\right]_{m'm} \\ &= \sum_{m'=-l}^{l}\delta_{m'0}\tilde{\psi}_{El}(r)\left[D^l(\varphi,\theta,0)_{mm'}\right]^\star \\ &= \psi_{El}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi). \end{aligned} \tag{7.70}$$

Ebben az alakban csak a $\psi_{El}(r)$ ún. radiális hullámfüggvény alakja függ a potenciál alakjától.

Végezetül még megvizsgáljuk azt az esetet, amikor egy részecske szóródik centrális potenciálon. A potenciál centrumától nagy távolságban a részecske szabad mozgást végez. Ennek leírására használhatjuk a $\hat{\vec{p}}$ impulzus és a $\hat{H} = \hat{\vec{p}}^{\,2}/2m$ Hamilton-operátor közös

$$|\vec{p}\rangle = |p, \theta, \varphi\rangle = \hat{R}(\varphi, \theta, 0)|p\vec{e}_3\rangle \tag{7.71}$$

sajátvektorait. Másrészt a forgásszimmetria következtében a $\hat{H}$, $\hat{\vec{J}}^{\,2}$ és $\hat{J}_3$ páronként felcserélhetők, s így közös $|plm\rangle$ sajátvektoraikat is választhatjuk bázisnak. Meg lehet mutatni, hogy a kétféle bázis az alábbi kapcsolatban van egymással:

$$|plm\rangle = \int d\Omega Y_{lm}(\theta, \varphi)|p\theta\varphi\rangle, \tag{7.72}$$

$$|p\theta\varphi\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^{\star}_{lm}(\theta, \varphi)|plm\rangle. \tag{7.73}$$

A második összefüggést úgy is szokás emlegetni, mint a síkhullámok parciális hullámok szerinti kifejtését.

Kérdezzük most meg, hogy mi jellemzi a szórási folyamatok S-mátrixát centrális potenciálon szóródó zérus spinű részecske esetén. Keressük a kezdeti $|\vec{p}_i\rangle = |p\vec{e}_3\rangle$ állapotból a végső $|\vec{p}_f\rangle = |p\theta\varphi\rangle$ állapotba való átmenet amplitudóját:

$$\langle \vec{p}_f|\hat{S}_{fi}|\vec{p}_i\rangle = \sum_{lm}\sum_{l'm'} \langle p\theta\varphi|plm\rangle\langle plm|\hat{S}_{fi}|pl'm'\rangle\langle pl'm'|p\vec{e}_3\rangle. \tag{7.74}$$

Itt felhasználhatjuk, hogy a forgásszimmetria miatt a szórási operátor csak az impulzusmomentum négyzetének függvénye (a Casimir-operátor függvénye):

$$\langle plm|\hat{S}_{fi}|pl'm'\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}S_l(p). \tag{7.75}$$

Ezt behelyettesítve, a keresett átmeneti amplitudó

$$\begin{aligned}\langle \vec{p}_f|\hat{S}_{fi}|\vec{p}_i\rangle &= \sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)Y^{\star}_{lm}(0, 0)S_l(p) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\theta)S_l(p)\end{aligned} \tag{7.76}$$

alakot ölt. Itt felhasználtuk a gömbfüggvények és a Legendre-polinomok közötti

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta, \varphi)Y^{\star}_{lm}(0, 0) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\theta) \tag{7.77}$$

összefüggést.

7.5 Forgási szimmetria. Irreducibilis tenzorok

Azt mondjuk, hogy a $(2j+1)$ darab $\psi_m(\vec{r})$ $(m=-j,-j+1,\ldots,j-1,j)$ függvény egy j-edrendű irreducibilis tenzor komponensei, ha a térforgatások során az alábbi módon transzformálódnak:

$$\psi'_m(\vec{r}) \;=\; \sum_{m'=-j}^{j} \psi_{m'}(\mathcal{R}^{-1}\vec{r})D^j(\hat{R})_{m'm}. \tag{7.78}$$

A $(2l+1)$ darab Y_{lm} gömbfelületi függvény egy l-edrendű irreducibilis tenzort alkot:

$$Y_{lm}(\mathcal{R}\vec{n}) \;=\; \sum_{m'=-l}^{l} Y_{lm'}(\vec{n})D^l(\hat{R})_{m'm}. \tag{7.79}$$

Az $l=1$ gömbfelületi függvények és az $\vec{r}$ helyzetvektor komponenseinek gömbi polárkoordinátákkal kifejezett alakját összehasonlítva kapjuk, hogy:

$$Y_{10}\sim z, \qquad Y_{11}\sim x+\mathrm{i}y, \qquad Y_{1\,-1}\sim x-\mathrm{i}y. \tag{7.80}$$

Ezek az arányosságok egyúttal azt is jelentik, hogy a helyzetvektor koordinátáiból képezett fenti kombinációk egy elsőrendű irreducibilis tenzort alkotnak. Hasonlóképpen tetszőleges $\vec{A}$ vektor Descartes-komponenseiből képezett

$$A_{1\,-1}=A_x-\mathrm{i}A_y, \qquad A_{1\,1}=A_x+\mathrm{i}A_y, \qquad A_{1\,0}=A_z \tag{7.81}$$

mennyiségek egy elsőrendű irreducibilis tenzor komponensei.

Az irreducibilis tenzorok egy másik fontos példája az $s=1/2$ spinű részecskék kétkomponensű (Pauli-féle) hullámfüggvénye. Ezek a hullámfüggvények a $D^{1/2}$ ábrázolást valósítják meg:

$$\psi'_\lambda(\vec{r}) \;=\; \sum_{\sigma=-1/2}^{1/2} \psi_\sigma(\mathcal{R}^{-1}\vec{r})D^{1/2}(\hat{R})_{\lambda\sigma}. \tag{7.82}$$

Az irreducibilis tenzorok használata a kvantummechanikai számolásokat kényelmessé teheti, mert ezeknek a mennyiségeknek egyszerű a transzformációja a forgatások során.

Legyen $\hat{A}_k$ k-adrendű irreducibilis tenzoroperátor, vagyis olyan $(2k+1)$-komponensű operátor, amelynek $\hat{A}_{kq}$ komponensei a forgatások során az

$$\hat{R}^\dagger\hat{A}_{kq}\hat{R} \;=\; \sum_{q'=-k}^{k} \hat{A}_{kq'}D^k(\hat{R})_{q'q} \tag{7.83}$$

szabály szerint transzformálódnak. Képezzük ennek hatását a $\hat{H}$, $\hat{\vec{J}}^2$ és $\hat{J}_z$ operátorok közös $|njm\rangle$ sajátvektoraira:

$$\hat{A}_{kq}|njm\rangle \quad = \quad \sum_{n'j'm'} \langle n'j'm'|\hat{A}_{kq}|njm\rangle|n'j'm'\rangle. \tag{7.84}$$

Ezt összehasonlítva a (7.58) képlettel látjuk, hogy a két egyenlet megfelelő oldalain álló mennyiségek azonos módon transzformálódnak a forgatások során. Ezért $\vec{j}$, $\vec{k}$ és $\vec{j}'$ ki kell elégítse az impulzusmomentumok összeadási szabályait, máskülönben az $\langle n'j'm'|\hat{A}_{kq}|njm\rangle$ mátrixelem eltűnik. A tenzoroperátor el nem tűnő mátrixelemei tehát csak azok lehetnek, amelyekre:

$$j' = |k-j|, |k-j|+1, \ldots, k+j; \qquad m' = m+q. \tag{7.85}$$

Ezek a mátrixelemek, az analógia alapján, arányosak a $(jmkq|j'm')$ Clebsch-Gordan-együtthatókkal. Az arányossági tényező már csak a j, j', k és n, n' kvantumszámoktól függő, ún. redukált mátrixelem:

$$\langle n'j'm'|\hat{A}_{kq}|njm\rangle \quad = \quad (jmkq|j'm')^{\star}\langle n'j'\|\hat{A}_k\|nj\rangle. \tag{7.86}$$

Ez a Wigner-Eckart-tétel. Ennek a fizikai következménye az, hogy az (nj) multiplett m-edik állapotából az $\hat{A}_k$ tenzoroperátor hatására az $(n'j')$ multiplett különböző m' állapotaiba történő átmenetek meghatározott elágazási arányoknak tesznek eleget:

$$R^{(knjn'j')}_{m_1'\leftarrow m\ /\ m_2'\leftarrow m} \quad = \quad \frac{|(jmk\ m_1'-m|j'm_1')|^2}{|(jmk\ m_2'-m|j'm_2')|^2}. \tag{7.87}$$

Ha a forgási szimmetria valamely perturbáló kölcsönhatás révén kicsit megsérül, akkor az energiaszintek felhasadnak és így a különböző $m \to m_1'$ és $m \to m_2'$ átmenetek mérhetővé válnak. Ekkor ellenőrizni lehet az elágazási arányok mérése alapján a gyengén sérülő szimmetria meglétét.

7.6 A speciális Galilei-transzformációk

Tekintsünk két vonatkoztatási rendszert, O-t és O'-t, amelyek a $t=0$ pillanatban egybeesnek és amelyekben az órák egyformán járnak. Mozogjon O' az O rendszerhez képest $\vec{v}_0$ sebességgel. A két rendszerben a megfigyelők ugyanarra az S fizikai rendszerre vonatkozó megfigyeléseiket azonos t pillanatban hasonlítják össze.

N-részecskés klasszikus mechanikai rendszer esetén a részecskék helyzetvektorai és impulzusai közötti kapcsolat:

$$\begin{aligned} \vec{r}_a(O') &= \vec{r}_a(O) - \vec{v}_0 t; \\ \vec{p}_a(O') &= \vec{p}_a(O) - m_a\vec{v}_0, \end{aligned} \tag{7.88}$$

ahol m_a az a-adik részecske tömege és $a = 1, 2, \ldots, N$. Ennek megfelelően a kvantummechanikai rendszerre vonatkozó (5.6) egyenletek az alábbi alakot öltik:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}^\dagger \hat{\vec{r}}_a \hat{\mathcal{G}} &= \hat{\vec{r}}_a - \vec{v}_0 t; \\ \hat{\mathcal{G}}^\dagger \hat{\vec{p}}_a \hat{\mathcal{G}} &= \hat{\vec{p}}_a - m_a \vec{v}_0. \end{aligned} \tag{7.89}$$

Ha az (5.8) egyenleteket az $(\hat{\vec{r}}_a, \hat{\vec{p}}_a)$ kanonikusan konjugált operátorokra alkalmazzuk, akkor

$$\left[\hat{\mathcal{G}}^\dagger \hat{\vec{r}}_a \hat{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{G}}^\dagger \hat{\vec{p}}_a \hat{\mathcal{G}}\right] = [\hat{\vec{r}}_a - \vec{v}_0 t, \hat{\vec{p}}_a - m_a \vec{v}_0] = +[\hat{\vec{r}}_a, \hat{\vec{p}}_a] \tag{7.90}$$

adódik. Innen látszik, hogy a $\hat{\mathcal{G}}$ operátor lineáris.

Keressük a $\hat{\mathcal{G}}$ operátort szorzatalakban:

$$\hat{\mathcal{G}} = g(\hat{\vec{p}}_1, \hat{\vec{p}}_2, \ldots, \hat{\vec{p}}_N) h(\hat{\vec{r}}_1, \hat{\vec{r}}_2, \ldots, \hat{\vec{r}}_N) \equiv \hat{g}\hat{h}.$$

Ekkor a (7.89) egyenletek a

$$\begin{aligned} \hat{g}^\dagger \hat{\vec{r}}_a \hat{g} = \hat{\vec{r}}_a - \vec{v}_0 t \quad &\Longrightarrow [\hat{g}, \hat{\vec{r}}_a] = \vec{v}_0 t \hat{g}; \\ \hat{h}^\dagger \hat{\vec{p}}_a \hat{h} = \hat{\vec{p}}_a - m_a \vec{v}_0 \quad &\Longrightarrow [\hat{h}, \hat{\vec{p}}_a] = m_a \vec{v}_0 \hat{h} \end{aligned} \tag{7.91}$$

alakot öltik. Használjuk az első egyenletben a $\hat{\vec{r}}_a \to \mathrm{i}\hbar\partial/\partial\vec{p}_a$, $\hat{\vec{p}}_a \to \vec{p}_a$ impulzusreprezentációt, a második egyenletben pedig a $\hat{\vec{r}}_a \to \vec{r}_a$, $\hat{\vec{p}}_a \to -\mathrm{i}\hbar\partial/\partial\vec{r}_a$ koordinátareprezentációt. Ekkor

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{p}_a} g &= \vec{v}_0 t g, \\ \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}_a} h &= m_a \vec{v}_0 h \end{aligned} \tag{7.92}$$

egyenletek adódnak. Ezeknek unitér megoldása (az állandó fázis önkényes rögzítése után):

$$\begin{aligned} \hat{g} &= \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \sum_{a=1}^{N} \hat{\vec{p}}_a \vec{v}_0 t\right\}, \\ \hat{h} &= \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \vec{v}_0 \sum_{a=1}^{N} m_a \hat{\vec{r}}_a\right\}. \end{aligned} \tag{7.93}$$

Valójában mindkét operátor tartalmazhatna egy tetszőleges, időtől és sebességtől függő fázist, ezért a Galilei-transzformációk alakja általában:

$$\hat{\mathcal{G}} = \gamma(t, \vec{v}_0) \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \hat{\vec{P}} \vec{v}_0 t\right\} \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} M \hat{\vec{R}} \vec{v}_0\right\}, \tag{7.94}$$

ahol $M=\sum_{a=1}^N m_a$ a rendszer teljes tömege, γ egy fázisfaktor és $\hat{\vec{R}}=\sum_{a=1}^N m_a\hat{\vec{r}}_a/M$ a tömegközéppont helyzetvektorának operátora. A γ fázist úgy választjuk meg, hogy a szabad részecskék rendszere invariáns legyen a Galilei-transzformációkkal szemben, azaz

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{\mathcal{G}}}{\partial t}+[\hat{\mathcal{G}},\hat{H}_0]=0 \tag{7.95}$$

legyen, ahol

$$\hat{H}_0 \;=\; \sum_{a=1}^{N}\frac{\hat{\vec{p}}_a^{\,2}}{2m_a} \tag{7.96}$$

a szabad részecskék rendszerének Hamilton-operátora. Elvégezve az idő szerinti parciális deriválást,

$$[\hat{H}_0,\hat{\mathcal{G}}] \;=\; \left(\mathrm{i}\hbar\frac{d\gamma}{dt}\gamma^{-1}-\hat{\vec{P}}\vec{v}_0\right)\hat{\mathcal{G}} \tag{7.97}$$

adódik. Mivel $\hat{H}_0$ felcserélhető a $\hat{\mathcal{G}}$ operátor első két tényezőjével, ezért az egyenlet bal oldalán álló kommutátor:

$$\begin{aligned}
[\hat{H}_0,\hat{\mathcal{G}}] &= \gamma(t,\vec{v}_0)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{\vec{P}}\vec{v}_0t\right\}\left[\hat{H}_0,\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}M\hat{\vec{R}}\vec{v}_0\right\}\right],\\
&= -\gamma(t,\vec{v}_0)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{\vec{P}}\vec{v}_0t\right\}\left(\frac{Mv_0^2}{2}+\vec{v}_0\hat{\vec{P}}\right)\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}M\hat{\vec{R}}\vec{v}_0\right\}\\
&= -\left(\frac{Mv_0^2}{2}+\vec{v}_0\hat{\vec{P}}\right)\hat{\mathcal{G}}.
\end{aligned} \tag{7.98}$$

(Itt felhasználtuk, hogy koordinátareprezentációban $\hat{\vec{p}}_a\to-\mathrm{i}\hbar\vec{\nabla}_a$.) Helyettesítsük be az eredményt a (7.97) egyenletbe:

$$-\frac{Mv_0^2}{2} \;=\; \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\gamma}{\partial t}\gamma^{-1}. \tag{7.99}$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása:

$$\gamma(t,\vec{v}_0) \;=\; \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{Mv_0^2}{2}t\right\}, \tag{7.100}$$

ahol a tetszőleges, $\vec{v}_0$-tól függő fázist 1-nek választottuk.

Mindezeket egybevetve a Galilei-transzformációk operátora a Hilbert-téren

$$\hat{\mathcal{G}}(t) \;=\; \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{1}{2}Mv_0^2t\right\}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{\vec{P}}\vec{v}_0t\right\}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}M\hat{\vec{R}}\vec{v}_0\right\} \tag{7.101}$$

alakú. Felhasználva az

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} \;=\; e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \tag{7.102}$$

azonosságot, valamint hogy

$$\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{\vec{P}}\vec{v}_0 t, -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}M\hat{\vec{R}}\vec{v}_0\right] \;=\; -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Mv_0^2 t, \tag{7.103}$$

írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}(t) &= \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{1}{2}Mv_0^2 t\right\}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\hat{\vec{P}}t - M\hat{\vec{R}}\right)\vec{v}_0\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{\vec{P}}t, -M\hat{\vec{R}}]\vec{v}_0\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\hat{\vec{P}}t - M\hat{\vec{R}}\right)\vec{v}_0\right\}. \end{aligned} \tag{7.104}$$

A kapott eredményből leolvashatjuk, hogy a Galilei-transzformációk infinitezimális generátorai a $\left(\hat{\vec{P}}t - M\hat{\vec{R}}\right)$ operátor Descartes-komponensei. Ha a kvantummechanikai rendszer Galilei-invariáns, akkor

$$\frac{d\left(\hat{\vec{P}}t - M\hat{\vec{R}}\right)_H}{dt} \;=\; 0. \tag{7.105}$$

Ha ezenkívül a rendszer még a térbeli eltolásokkal szemben is invariáns, akkor a teljes impulzusa is megmarad, azaz $d\hat{\vec{P}}_H/dt = 0$, azaz ilyenkor

$$\frac{d\hat{\vec{R}}_H}{dt} = \frac{\hat{\vec{P}}_H}{M} = \text{áll.} \tag{7.106}$$

adódik, ami kifejezi a tömegközéppont megmaradását.

A Galilei-transzformációk alakját felhasználva megkapjuk a Hamilton-operátor transzformációs képletét:

$$\begin{aligned} \hat{H}'(t) &= \hat{\mathcal{G}}(t)\hat{H}(t)\hat{\mathcal{G}}^\dagger + \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{\mathcal{G}}}{\partial t}\hat{\mathcal{G}}^\dagger \\ &= \hat{\mathcal{G}}(t)\hat{H}(t)\hat{\mathcal{G}}^\dagger - \frac{1}{2}Mv_0^2 - \vec{v}_0\hat{\vec{P}}, \end{aligned} \tag{7.107}$$

ahonnan az energiára

$$E_{O'} \;=\; E_O - \vec{v}_0\langle\hat{\vec{P}}\rangle_{O'} - \frac{1}{2}Mv_0^2 \tag{7.108}$$

adódik. Ez a megfelelő klasszikus mechanikai kifejezés pontos analogonja.

8 A tér és az idő diszkrét szimmetriái

8.1 A tértükrözési szimmetria. A paritás

Tekintsünk egy egyrészecskés fizikai rendszert. Legyen az O és az O' két vonatkoztatási rendszer, amelyeknek az origója egybeesik, de a koordinátatengelyeik irányítása éppen ellentétes. Ekkor a klasszikus határesetben a részecske helyzetvektorára és impulzusára

$$\vec{r}(O') = -\vec{r}(O), \qquad \vec{p}(O') = -\vec{p}(O) \tag{8.1}$$

összefüggések állnak fenn. Ennek megfelelően a kvantummechanikában az (5.6) egyenletek a

$$\hat{P}^\dagger \hat{\vec{r}} \hat{P} = -\hat{\vec{r}}, \qquad \hat{P}^\dagger \hat{\vec{p}} \hat{P} = -\hat{\vec{p}} \tag{8.2}$$

alakot öltik, ahol $\hat{P}$ unitér operátor. Mivel a fenti transzformáció során az $\vec{r} \times \vec{p}$ pályaimpulzusmomentum nem vált előjelet, ugyanezt feltételezzük a részecske spinjéről is. Ha az (5.8) egyenletet az $\vec{r}, \vec{p}$ változó-párra alkalmazzuk, akkor leolvashatjuk, hogy a tértükrözés $\hat{P}$ operátora lineáris:

$$[-\hat{\vec{r}}, -\hat{\vec{p}}] = +[\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}]. \tag{8.3}$$

Vizsgáljuk meg, hogyan transzformálódnak tértükrözés során a helyzetvektor és impulzus operátorának $|\vec{r}\rangle$ és $|\vec{p}\rangle$ sajátvektorai:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{r}}|\vec{r}\rangle &= \vec{r}|\vec{r}\rangle, & \hat{\vec{p}}|\vec{p}\rangle &= \vec{p}|\vec{p}\rangle, \\ \hat{P}\hat{\vec{r}}\hat{P}^\dagger\hat{P}|\vec{r}\rangle &= \vec{r}\hat{P}|\vec{r}\rangle, & \hat{P}\hat{\vec{p}}\hat{P}^\dagger\hat{P}|\vec{p}\rangle &= \vec{p}\hat{P}|\vec{p}\rangle, \\ -\hat{\vec{r}}\hat{P}|\vec{r}\rangle &= \vec{r}\hat{P}|\vec{r}\rangle, & -\hat{\vec{p}}\hat{P}|\vec{p}\rangle &= \vec{p}\hat{P}|\vec{p}\rangle, \\ \hat{P}|\vec{r}\rangle &= a(\vec{r})|-\vec{r}\rangle, & \hat{P}|\vec{p}\rangle &= b(\vec{p})|-\vec{p}\rangle, \end{aligned} \tag{8.4}$$

ahol a $\hat{P}$ operátor uniteritásából következően $a(\vec{r})$ és $b(\vec{p})$ egységnyi abszolútértékű komplex függvények. Rögzítésükhöz képezzük az

$$\langle\vec{r}|\hat{P}|\vec{p}\rangle \;=\; b(\vec{p})\langle\vec{r}|-\vec{p}\rangle \tag{8.5}$$

skalárszorzatot. Ez a koordinátasajátállapotok teljességét felhasználva az alábbi alakba is írható:

$$\begin{aligned} \langle\vec{r}|\hat{P}|\vec{p}\rangle &= \int d^3r' \langle\vec{r}|\hat{P}|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|\vec{p}\rangle \\ &= \int d^3r' a(\vec{r}\,')\langle\vec{r}|-\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|\vec{p}\rangle \\ &= \int d^3r' a(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}+\vec{r}\,')\langle\vec{r}\,'|\vec{p}\rangle \\ &= a(-\vec{r})\langle-\vec{r}|\vec{p}\rangle \\ &= a(-\vec{r})\langle\vec{r}|-\vec{p}\rangle. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Ezt összehasonlítva a (8.5) egyenlettel, adódik, hogy $a = b =$ áll.. Éljünk ezután az $a = 1$ választással. Ekkor az alábbiakban foglalható össze a tértükrözésnek a koordináta- és az impulzus-sajátfüggvényekre kifejtett hatása:

$$\begin{aligned} \hat{P}|\vec{r}\rangle &= |-\vec{r}\rangle, \\ \hat{P}|\vec{p}\rangle &= |-\vec{p}\rangle. \end{aligned} \tag{8.7}$$

A tértükrözésnek az $|\vec{r}\rangle$ és $|\vec{p}\rangle$ sajátvektorokra kifejtett hatása alapján $\hat{P}^2 = \hat{I}$. Másrészt az uniteritás miatt $\hat{P}\hat{P}^\dagger = \hat{I}$, úgyhogy a tértükrözés operátora önadjungált: $\hat{P} = \hat{P}^\dagger$. Mindezekből az is következik, hogy a tértükrözés operátorának sajátértékei valósak, és ± 1-gyel egyenlők.

A fentieket felhasználva a tértükrözés hatása a hullámfüggvényre koordináta- ill. impulzus-reprezentációban:

$$\begin{aligned} \hat{P}\psi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\hat{P}|\psi\rangle = \langle-\vec{r}|\psi\rangle = \psi(-\vec{r}), \\ \hat{P}\psi(\vec{p}) = \langle\vec{p}|\hat{P}|\psi\rangle = \langle-\vec{p}|\psi\rangle = \psi(-\vec{p}). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Határozzuk meg a tértükrözés hatását a pályaimpulzusmomentum sajátfüggvényeire, azaz a gömbfelületi függvényekre. Használjunk gömbi polárkoordinátákat. Ekkor nyilvánvalóan:

$$\hat{P}|\vec{r}\rangle = \hat{P}|r\ \vec{n}\rangle = |r\ -\vec{n}\rangle, \tag{8.9}$$

aminek a segítségével

$$\begin{aligned} \hat{P}Y_{\ell m}(\vec{n}) &= \langle\vec{n}|\hat{P}|\ell m\rangle = \langle-\vec{n}|\ell m\rangle \\ &= Y_{\ell m}(-\vec{n}) = (-1)^\ell Y_{\ell m}(\vec{n}) \end{aligned} \tag{8.10}$$

alakban adódik a keresett összefüggés.

A tértükrözés operátora független az időtől, ezért a tértükrözési szimmetria azt jelenti, hogy a rendszer Hamilton-operátora felcserélhető a tértükrözés operátorával: $[\hat{P}, \hat{H}] = 0$. Mivel a tértükrözés operátora önadjungált, ezért a $\hat{P}$ ilyenkor megmaradó fizikai mennyiséget képvisel, amelyet paritásnak nevezünk. A kvantummechanikai rendszerek energiasajátállapotai tehát a paritásra nézve is sajátállapotok: pozitív vagy negatív paritásúak. Általánosan is meg lehet mutatni, hogy ha az energianívó elfajult, akkor is mindig létezik jól definiált paritású bázis a Hilbert-térnek az adott energiaszinthez tartozó alterében. A fentiek alapján az ℓ pályaimpulzusmomentumú egyrészecske-állapot paritása $(-1)^\ell$.

Kötött állapotú összetett rendszer esetén a tértükrözési szimmetria azt jelenti, hogy a rendszer hullámfüggvénye energiasajátállapotban egyúttal paritássajátállapot is. A sajátértéket az összetett részecske belső paritásának nevezzük.

Egy N-részecskés rendszer esetén a paritás operátora minden egyes részecske helyzetvektorát és impulzusát átfordítja az eredetivel ellenkező irányba. Ezért a rendszer paritás-operátora az egyrészecskés paritás-operátorok szorzata, amelyek egymással kommutálnak:

$$\hat{P} \;=\; \hat{P}_1\hat{P}_2\ldots\hat{P}_N. \tag{8.11}$$

Vizsgáljuk azt a szórási folyamatokra jellemző esetet, amikor két összetett részecske ℓ relatív pályamomentumú állapotban ütközik. A kezdeti állapotban a részecskék kölcsönhatása elhanyagolható, ezért energia- és egyúttal paritássajátállapotban vannak. Legyen a paritásuk π_1 és π_2. A rendszer hullámfüggvénye $\psi(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_n,\vec{r}_{n+1},\ldots,\vec{r}_N) = \psi_1(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_{k-1}-\vec{r}_k)\psi_2(\vec{r}_{k+1}-\vec{r}_{k+2},\ldots,\vec{r}_{N-1}-\vec{r}_N)Y_{\ell m}(\vec{n})$ alakú, ahol az 1. részecske k darab, a 2. részecske $N-k$ darab részecskét tartalmaz, ψ_1 és ψ_2 jelentik az összetett részecskék belső hullámfüggvényeit, és $\vec{n}$ a két összetett részecske tömegközéppontjai által meghatározott irány egységvektora. Tértükrözés során nyilvánvalóan valamennyi relatív helyzetvektor és az $\vec{n}$ egységvektor is előjelet vált. Ennek következtében:

$$\hat{P}\psi = \hat{P}(\psi_1\psi_2Y_{\ell m}) = \pi_1\pi_2(-1)^{\ell}\psi. \tag{8.12}$$

Az összetett részecskék belső paritásai és az egymáshoz viszonyított pályamozgásukból adódó paritásuk összeszorzódik: $P = \pi_1\pi_2(-1)^{\ell}$. Ezt a szabályt felhasználhatjuk természetesen a szórási kísérlet végállapotára vonatkozóan is. Például az $1\,+\,2 \to 1'\,+\,2'$ folyamat esetén a paritás megmaradása azt jelenti, hogy:

$$\pi_1\pi_2(-1)^{\ell_i} \;=\; {\pi_1}'{\pi_2}'(-1)^{\ell_f}. \tag{8.13}$$

Mivel minden részecskének lehet elvben belső szerkezete, csak esetleg nem ismerjük, ezért megvan az a szabadságunk, hogy egy részecske belső paritását önkényesen rögzítsük. Ezután a szórási kísérletek segítségével rögzíthetjük a részecskék egymáshoz képesti paritását s ezáltal a belső paritásukat. A tértükrözési szimmetria azt jelenti, hogy a természet törvényei nem függenek attól, hogy a kiszemelt részecske paritását +1-nek vagy -1-nek választottuk.

A tértükrözési szimmetria a tapasztalat szerint nem általános érvényű. Az erős és az elektromágneses kölcsönhatási folyamatokban a paritás megmarad. Ugyanakkor a gyenge kölcsönhatás során a paritás megsérül. C.S. Wu 1956-ban megfigyelte, hogy a Co^{60} izotóp β-bomlása során keletkező elektronok előszeretettel az atommag spinjével ellentétes irányban emittálódnak, azaz szögeloszlásuk anizotróp. Ha a tértükrözési szimmetria nem sérülne meg a gyenge kölcsönhatás során, akkor a következőknek kellene igaznak lenni:
Tegyük fel, hogy az elektronok anizotróp szögeloszlását az O rendszerben figyeltük meg. Az O' rendszerre való áttérés során az atommag spinjének iránya nem változik, ugyanakkor az emittált elektronok helyzetvektorait és impulzusait -1-gyel kell szorozni. Ezért az O'-ben nyugvó megfigyelő azt látná, hogy az elektronok előszeretettel az

atommag spinjének irányában emittálódnak. A tapasztalatnak azonban nem szabad attól függni, hogy a kísérletet melyik rendszerből nézzük, ha fennáll a tértükrözési szimmetria. Ez akkor és csak akkor lenne lehetséges, ha az elektronok szögeloszlása izotróp lenne. A tapasztalat azonban nem ez. Ezért a tértükrözési szimmetria valóban megsérül.

8.2 Az időmegfordítási szimmetria

Különbözzön az O és az O' vonatkoztatási rendszer csak abban, hogy az S fizikai rendszer azon eseményeihez, amelyekhez az O-beli megfigyelő a $t(O)$ pillanatot rendeli, az O'-beli megfigyelő a $t(O') = -t(O)$ pillanatot rendeli. Ez azt is jelenti, hogy a $t(O) = 0$ pillanatban a két rendszer egybeesik. Wigner tétele értelmében létezik egy a Hilbert-tér fölött értelmezett unitér operátor, amely kifejezi az ugyanahhoz a $t(O') = t$ és $t(O) = t$ pillanathoz tartozó állapotvektorok kapcsolatát:

$$\psi_{O'}(t) \;\; = \;\; \hat{\Theta}(t)\psi_O(t). \tag{8.14}$$

A $\hat{\Theta}(t)$ időfüggő operátor helyett (ami megfelel az általános tárgyalás $\hat{\mathcal{U}}(t)$ operátorának) célszerűbb bevezetni azt a $\hat{\theta}$ operátort, amely az egyes események által meghatározott azonos objektív időpillanathoz tartozó állapotvektorok kapcsolatát írja le:

$$\psi_{O'}(-t) \;\; = \;\; \hat{\theta}\psi_O(t). \tag{8.15}$$

Emlékezzünk, hogy $t(O) = t$ és $t(O') = -t$ vannak ugyanahhoz az eseményhez rendelve. Az így bevezetett $\hat{\theta}$ operátor nem függ az időtől, mert a definiáló egyenlet két oldalán álló állapotvektorok ugyanahhoz az objektív időpillanathoz tartoznak. A $\hat{\Theta}(t)$ és a $\hat{\theta}$ operátorok definíciójából, valamint az evoluciós operátornak az állapotvektorra gyakorolt hatásából adódóan:

$$\hat{\Theta}(t) = \hat{\theta}\hat{T}(-t,t) = \hat{T}'(t,-t)\hat{\theta}. \tag{8.16}$$

Innen következik az is, hogy $\hat{\theta}$ unitér.

Tekintsünk egyetlen részecskét. Ugyanabban az objektív időpillanatban fennállnak a helyzetvektor és az impulzus O-ban és O'-ben mért várható értékei között az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} (\psi_{O'}(t),\, \hat{\vec{r}}\psi_{O'}(t)) &= (\psi_O(-t),\, \hat{\vec{r}}\psi_O(-t)), \\ (\psi_{O'}(t),\, \hat{\vec{p}}\psi_{O'}(t)) &= -(\psi_O(-t),\, \hat{\vec{p}}\psi_O(-t)). \end{aligned} \tag{8.17}$$

Használjuk fel a $\hat{\theta}$ operátor definícióját. Ekkor a várható értékek fenti összefüggéseiből az (5.6) egyenleteket az alábbi alakban kapjuk:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^\dagger\hat{\vec{r}}\hat{\theta} &= \hat{\vec{r}}, \\ \hat{\theta}^\dagger\hat{\vec{p}}\hat{\theta} &= -\hat{\vec{p}}. \end{aligned} \tag{8.18}$$

A fentiekből az is következik, hogy a pályaimpulzusmomentum operátora időtükrözés során előjelet vált:

$$\hat{\theta}^\dagger(\hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{p}})\hat{\theta} \;=\; -\hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{p}}. \tag{8.19}$$

Ennek analógiájára megköveteljük, hogy a részecske spinjének operátora ugyancsak váltson előjelet:

$$\hat{\theta}^\dagger\hat{\vec{s}}\hat{\theta} \;=\; -\hat{\vec{s}}. \tag{8.20}$$

Ha ezek után az (5.8) egyenleteket az $\hat{\vec{r}},\hat{\vec{p}}$ kanonikusan konjugált változópárra alkalmazzuk, akkor látjuk, hogy $\hat{\theta}$ antilineáris operátor:

$$[\hat{\theta}^\dagger\hat{\vec{r}}\hat{\theta},\ \hat{\theta}^\dagger\hat{\vec{p}}\hat{\theta}] \;=\; -[\hat{\vec{r}},\ \hat{\vec{p}}]. \tag{8.21}$$

A $\hat{\theta}$ operátor konkrét alakjának meghatározásához szükségünk lesz a komplex konjugálás operátorára és annak néhány tulajdonságára. Így most először ezzel foglalkozunk. A komplex konjugálás $\hat{K}$ operátorát koordinátareprezentációban definiáljuk:

$$\langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}|\psi\rangle \;=\; \langle\vec{r}s\sigma|\psi\rangle^\star, \tag{8.22}$$

ahol $|\psi\rangle$ a részecske tetszőleges állapota, $|\vec{r}s\sigma\rangle$ pedig az $\hat{\vec{r}}$, $\hat{\vec{s}}^{\,2}$ és az s_z operátorok $\vec{r}$, $s(s+1)$ és σ sajátértékekhez tartozó közös sajátvektora. A komplex konjugálás operátora az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- $\hat{K}$ antilineáris. Ez az alábbiak szerint látható be:

$$\begin{aligned}\langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}|\alpha\psi_1+\beta\psi_2\rangle &= \langle\vec{r}s\sigma|\alpha\psi_1\rangle^\star+\langle\vec{r}s\sigma|\beta\psi_2\rangle^\star\\ &= \alpha^\star\langle\vec{r}s\sigma|\psi_1\rangle^\star+\beta^\star\langle\vec{r}s\sigma|\psi_2\rangle^\star\\ &= \alpha^\star\langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}|\psi_1\rangle+\beta^\star\langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}|\psi_2\rangle\\ &= \langle\vec{r}s\sigma|\alpha^\star\hat{K}\psi_1+\beta^\star\hat{K}\psi_2\rangle.\end{aligned} \tag{8.23}$$

  Itt $|\psi_1\rangle$ és $|\psi_2\rangle$ tetszőleges állapotok és α és β tetszőleges komplex számok.

- A $\hat{K}$ operátor unitér, mert tetszőleges ϕ és ψ állapotok esetén:

$$\begin{aligned}(\hat{K}\phi,\ \hat{K}\psi) &= \sum_{s\sigma}\int d^3r\langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}|\phi\rangle^\star\langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}|\psi\rangle\\ &= \sum_{s\sigma}\int d^3r\langle\vec{r}s\sigma|\phi\rangle\langle\vec{r}s\sigma|\psi\rangle^\star\\ &= \langle\psi|\phi\rangle,\end{aligned} \tag{8.24}$$

  ahonnan

$$\hat{K}^\dagger\hat{K}=\hat{K}\hat{K}^\dagger=\hat{I}. \tag{8.25}$$

- Impulzusreprezentációban a komplex konjugálás operátora a következőképpen hat:

$$\begin{aligned}
\langle\vec{p}s\sigma|\hat{K}|\psi\rangle &= \int d^3r\langle\vec{p}|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}|\psi\rangle \\
&= \int d^3r\langle-\vec{p}|\vec{r}\rangle^\star\langle\vec{r}s\sigma|\psi\rangle^\star \\
&= \langle-\vec{p}\,s\sigma|\psi\rangle^\star.
\end{aligned} \tag{8.26}$$

- A definíciójából következően $\hat{K}^2 = \hat{I}$, mert

$$\langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}^2|\psi\rangle = \langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}|\psi\rangle^\star = \langle\vec{r}s\sigma|\psi\rangle. \tag{8.27}$$

  Felhasználva még, hogy $\hat{K}$ unitér, adódik, hogy a komplex konjugálás operátora önadjungált: $\hat{K}^\dagger = \hat{K}$.

- Teljesülnek az alábbi operátor-összefüggések:

$$\hat{K}\hat{\vec{r}}\hat{K} = \hat{\vec{r}}, \tag{8.28}$$
$$\hat{K}\hat{\vec{p}}\hat{K} = -\hat{\vec{p}}. \tag{8.29}$$

  A (8.28) egyenletet az alábbiak szerint láthatjuk be:

$$\begin{aligned}
\langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}\hat{\vec{r}}\hat{K}|\psi\rangle &= \langle\vec{r}s\sigma|\hat{\vec{r}}\hat{K}|\psi\rangle^\star = \vec{r}\,\langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}|\psi\rangle^\star \\
&= \vec{r}\langle\vec{r}s\sigma|\psi\rangle \\
&= \langle\vec{r}s\sigma|\hat{\vec{r}}|\psi\rangle.
\end{aligned} \tag{8.30}$$

  A (8.29) egyenlet bizonyítása:

$$\begin{aligned}
\langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}\hat{\vec{p}}\hat{K}|\psi\rangle &= \langle\vec{r}s\sigma|\hat{\vec{p}}\hat{K}|\psi\rangle^\star = \mathrm{i}\hbar\vec{\nabla}_{\vec{r}}\langle\vec{r}s\sigma|\hat{K}|\psi\rangle^\star \\
&= \mathrm{i}\hbar\vec{\nabla}_{\vec{r}}\langle\vec{r}s\sigma|\psi\rangle = -\langle\vec{r}s\sigma|\hat{\vec{p}}|\psi\rangle.
\end{aligned} \tag{8.31}$$

- A komplex konjugálás operátora a spin operátoraival az alábbi felcserélési relációkban áll:

$$\hat{K}\hat{S}_x\hat{K} = \hat{S}_x, \qquad \hat{K}\hat{S}_y\hat{K} = -\hat{S}_y, \qquad \hat{K}\hat{S}_z\hat{K} = \hat{S}_z. \tag{8.32}$$

  Ennek a belátásához képezzük az alábbi skalárszorzatot:

$$\begin{aligned}
(f_{\vec{r}}\chi_{s\sigma}, \hat{K}\hat{S}_i\hat{K}\psi) &= (f_{\vec{r}}\chi_{s\sigma}, \hat{S}_i\hat{K}\psi)^\star = (\hat{S}_i f_{\vec{r}}\chi_{s\sigma}, \hat{K}\psi)^\star \\
&= (\hat{S}_i f_{\vec{r}}\chi_{s\sigma}, \psi) \\
&= \sum_{s'\sigma'}(\hat{S}_i\chi_{s\sigma}, \chi_{s'\sigma'})(f_{\vec{r}}\chi_{s'\sigma'}, \psi),
\end{aligned} \tag{8.33}$$

ahol $\chi_{s\sigma}$ az $\hat{\vec{S}}^2$ és $\hat{S}_z$ sajátvektorai. Az impulzusmomentum operátorainak mátrixelemeit a forgáscsoport irreducibilis ábrázolásainak tanulmányozása során meghatároztuk. A (7.46), (7.48) mátrixelemeket felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(\chi_{s'\sigma'}, \hat{S}_x \chi_{s\sigma}) &= (\chi_{s\sigma}, \hat{S}_x \chi_{s'\sigma'}), \\
(\chi_{s'\sigma'}, \hat{S}_y \chi_{s\sigma}) &= -(\chi_{s\sigma}, \hat{S}_y \chi_{s'\sigma'}), \\
(\chi_{s'\sigma'}, \hat{S}_z \chi_{s\sigma}) &= (\chi_{s\sigma}, \hat{S}_z \chi_{s'\sigma'}).
\end{aligned} \tag{8.34}$$

Pl. az első egyenlőség bizonyítása:

$$\begin{aligned}
(\hat{S}_x \chi_{s\sigma}, \chi_{s'\sigma'}) &= (\chi_{s\sigma}, \hat{S}_x^\dagger \chi_{s'\sigma'})^\star = (\chi_{s'\sigma'}, \hat{S}_x \chi_{s\sigma})^\star \\
&= (\hat{S}_x \chi_{s\sigma}, \chi_{s'\sigma'}) = (\chi_{s'\sigma'}, \hat{S}_x \chi_{s\sigma})^\star \\
&= (\chi_{s\sigma}, \hat{S}_x \chi_{s'\sigma'}).
\end{aligned} \tag{8.35}$$

A (8.34) egyenlőségeket behelyettesítve (8.33) utolsó sorába, $i = x$ és $i = z$ esetén a jobb oldalon $(f_{\vec{r}}\chi_{s\sigma}, \hat{S}_i\psi)$ adódik, míg $i = y$ esetén $-(f_{\vec{r}}\chi_{s\sigma}, \hat{S}_y\psi)$. Ezt összevetve a bal oldallal megkapjuk a keresett összefüggéseket.

A komplex konjugálás operátorának fenti tulajdonságait tudva, keressük az időtükrözés $\hat{\theta}$ operátorát

$$\hat{\theta} = \hat{K}\hat{\Sigma} \tag{8.36}$$

alakban, ahol a $\hat{\Sigma}$ operátor a spinállapotok terében hat és unitér, mert $\hat{\theta}$ és $\hat{K}$ is az. Mivel $\hat{\theta}^2 = c_\theta \hat{I}$, ahol c_θ egységnyi abszolút értékű komplex szám, azért

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}^2 &= (\hat{K}\hat{\Sigma})(\hat{K}\hat{\Sigma}) = \hat{K}^2\hat{\Sigma}^\star\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}^\star\hat{\Sigma}, \\
c_\theta \hat{\Sigma}^\dagger &= \hat{\Sigma}^\star, \\
\hat{\Sigma} &= c_\theta^\star \hat{\Sigma}^T, \\
\hat{\Sigma}^T &= c_\theta^\star \hat{\Sigma}, \\
\hat{\Sigma} &= (c_\theta^\star)^2 \hat{\Sigma}, \\
c_\theta &= \pm 1.
\end{aligned} \tag{8.37}$$

Ennek egyik következménye, hogy

$$\hat{\theta}^2 = \pm \hat{I}. \tag{8.38}$$

Használjuk fel, hogy $\hat{\theta}$ valamennyi spinösszetevő előjelét ellentétesre változtatja, $\hat{K}$ pedig csak az y-komponensét. Ebből adódik, hogy az

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}^\dagger \hat{S}_x \hat{\Sigma} = -\hat{S}_x, \qquad \hat{\Sigma}^\dagger \hat{S}_z \hat{\Sigma} &= -\hat{S}_z, \\
\hat{\Sigma}^\dagger \hat{S}_y \hat{\Sigma} &= \hat{S}_y
\end{aligned} \tag{8.39}$$

egyenletek adják meg a $\hat{\Sigma}$ operátornak a spinekre a hatását. Innen látjuk, hogy $\hat{\Sigma}$ az y-tengely körüli π szögű forgatás a spinállapotok terében:

$$\hat{\Sigma} \;=\; \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\pi \hat{S}_y\right\}. \tag{8.40}$$

(Behelyettesítéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.)

Egyetlen $s = 1/2$ spinű részecske esetén a $D^{1/2}$ irreducibilis ábrázolás tere adja a részecske spinállapotainak Hilbert-terét. Ezen a spin-operátorokat a Pauli-mátrixok ábrázolják: $\hat{S}_i \to \frac{\hbar}{2}\sigma_i$. Ekkor

$$\hat{\Sigma} \to \exp\left\{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\sigma_y\right\} = \mathrm{i}\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.41}$$

és

$$\hat{\theta}^2 = c_\theta \hat{I} = \hat{\Sigma}^\star \hat{\Sigma} = -\hat{I}. \tag{8.42}$$

Tegyük fel, hogy a rendszer F darab azonos, $1/2$ spinű részecskéből áll. Ekkor

$$\hat{S}_y \to \frac{\hbar}{2}\sum_{a=1}^{F}(\sigma_a)_y \tag{8.43}$$

és

$$\hat{\Sigma} \to \mathrm{i}(\sigma_1)_y \mathrm{i}(\sigma_2)_y \cdots \mathrm{i}(\sigma_F)_y, \tag{8.44}$$

amiből

$$\hat{\theta}^2 = c_\theta \hat{I} = \hat{\Sigma}^\star \hat{\Sigma} = (-1)^F \hat{I} \tag{8.45}$$

következik.

Ennyit az időtükrözés operátorának alakjáról. Most még megmutatjuk az időtükrözött állapotok néhány tulajdonságát:

- Páratlan számú $1/2$-spinű részecskét tartalmazó rendszer bármely ψ állapotának időtükrözöttje ortogonális az eredeti állapotra:

$$(\psi, \hat{\theta}\psi) = (-1)^F(\hat{\theta}^2\psi, \hat{\theta}\psi) = (-1)^F(\hat{\theta}\psi, \psi)^\star, \tag{8.46}$$

  ahonnan páratlan F esetén: $(\hat{\theta}\psi, \psi) = 0$.

- Egyetlen $1/2$-spinű részecske esetén $\hat{\theta}$ konkrét alakját felhasználva kapjuk az alábbi tulajdonságokat:

$$\hat{\theta}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = -\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad \hat{\theta}\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle. \tag{8.47}$$

Érdekességként jegyezzük meg, hogy a szupravezetés jelensége azon alapul, hogy két elektron, amelyek időtükrözött állapotban vannak, egy zérus spinű kötött állapotot, ún. Cooper-párt alkot. Amíg a szabad elektronokra a szilárdtestben véges nagyságú „súrlódási" erő hat, addig a Cooper-párok gyakorlatilag súrlódás mentesen tudnak az anyagban mozogni. Teljesen hasonlóan, az atommagokban is létrejöhetnek olyan körülmények, amikor az időtükrözött állapotokban lévő nukleonok gyengén kötött Cooper-párokat alkotnak. Ez azt eredményezi, hogy az atommag anyaga (anyagának egy része) szuperfolyékonnyá válik és ezáltal ugrásszerűen lecsökken az atommag tehetetlenségi nyomatéka.

A Hamilton-operátor transzformációja az antilineáris $\hat{\Theta}(t)$ transzformáció során:

$$\hat{H}'(t) \;=\; -\hat{\Theta}(t)\hat{H}(t)\hat{\Theta}^{\dagger}(t) + \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{\Theta}}{\partial t}\hat{\Theta}^{\dagger}(t). \tag{8.48}$$

Helyettesítsük be ide az időtükrözés operátorának (8.16) alakját és használjuk fel, hogy

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{T}(-t,t)}{\partial t} &= -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-t}^{t}dt'\hat{H}(t')\right\} \\ &= \hat{T}(-t,t)\hat{H}(t) + \hat{H}(-t)\hat{T}(-t,t). \end{aligned} \tag{8.49}$$

Ekkor elemi számolás után

$$\hat{H}'(t) \;=\; \hat{\theta}\hat{H}(-t)\hat{\theta}^{\dagger} \tag{8.50}$$

adódik eredményül.

Miután megismerkedtünk az időtükrözési transzformáció hatásával, most vizsgáljuk meg az időtükrözési szimmetria következményeit. Időtükrözési szimmetriáról akkor beszélünk, ha az O és az időtükrözött O' vonatkoztatási rendszerben az S fizikai rendszert ugyanaz a

$$\hat{H}'(t) \;=\; \hat{H}(t) \tag{8.51}$$

Hamilton-operátor írja le. Felhasználva a (8.50) összefüggést, időtükrözési szimmetriával rendelkező fizikai rendszer Hamilton-operátora a

$$\hat{H}(t) \;=\; \hat{\theta}\hat{H}(-t)\hat{\theta}^{\dagger} \tag{8.52}$$

egyenletnek tesz eleget. Ha a rendszer az időbeli eltolásokkal szemben is invariáns, akkor Hamilton-operátora független az időtől, és ezért az időtükrözési szimmetria azt jelenti, hogy a Hamilton-operátor felcserélhető az időtükrözés operátorával:

$$[\hat{\theta},\hat{H}] \;=\; 0. \tag{8.53}$$

Ennek ellenére az időmegfordítási szimmetriához nem tartozik megmaradó fizikai mennyiség, mert $\hat{\theta}$ nem lineáris operátor.

Az időmegfordítási szimmetria az ún. mikroszkopikus reverzibilitásban jut kifejeződésre: egy mikroszkopikus folyamat átmeneti valószínűsége és az időben megfordított folyamat átmeneti valószínűsége ugyanaz, ha a megfordított folyamat az eredeti végállapot időtükrözöttjéből indul és az eredeti kezdeti állapot időtükrözöttjében ér véget. Ezt az alábbiak szerint látjuk be:

1. Az időmegfordítási transzformáció tulajdonságait felhasználva írjuk, hogy:

$$\psi_{O'}(t) = \hat{T}'(t, t_0)\psi_{O'}(t_0) = \hat{T}'(t, t_0)\hat{\theta}\psi_O(-t_0), \tag{8.54}$$

másrészt, hogy

$$\psi_{O'}(t) = \hat{\theta}\psi_O(-t) = \hat{\theta}\hat{T}(-t, -t_0)\psi_O(-t_0). \tag{8.55}$$

A két egyenletsor összevetése alapján:

$$\hat{T}'(t, t_0)\hat{\theta} \;\; = \;\; \hat{\theta}\hat{T}(-t, -t_0). \tag{8.56}$$

2. A fenti tulajdonságot felhasználva, megkapjuk az S-operátor transzformációját időtükrözés során. Induljunk ki az S-operátor alakjából az O' rendszerben:

$$\hat{S}'_{fi} \;\; = \;\; \lim_{t\to\infty,\, t_0\to-\infty}\hat{T}'_f(0, t)\hat{T}'(t, t_0)\hat{T}'_i(t_0, 0). \tag{8.57}$$

Szúrjunk be a jobb oldalon a tényezők közé, valamint elé és után egy-egy $\pm\hat{I}$ operátort $\hat{\theta}\hat{\theta}^\dagger$ alakban (összesen négyet, hogy az előjel ne változzon):

$$\begin{aligned}
\hat{S}'_{fi} &= \lim_{t\to\infty,\, t_0\to-\infty}\hat{\theta}\hat{T}_f(0, -t)\hat{T}(-t, -t_0)\hat{T}_i(-t_0, 0)\hat{\theta}^\dagger \\
&= \lim_{t\to\infty,\, t_0\to-\infty}\hat{\theta}\left[\hat{T}_i^\dagger(-t_0, 0)\hat{T}^\dagger(-t, -t_0)\hat{T}_f^\dagger(0, -t)\right]^\dagger\hat{\theta}^\dagger \\
&= \hat{\theta}\left[\lim_{t\to-\infty,\, t_0\to\infty}\hat{T}_i(0, t_0)\hat{T}(t_0, t)\hat{T}_f(t, 0)\right]^\dagger\hat{\theta}^\dagger \\
&= \hat{\theta}\hat{S}_{if}^\dagger\hat{\theta}^\dagger.
\end{aligned} \tag{8.58}$$

3. Ha a rendszer időmegfordítási szimmetriával rendelkezik, akkor az evoluciós operátor és időmegfordítottja megegyezik, úgyhogy:

$$\hat{S}_{fi} \;\; = \;\; \hat{\theta}\hat{S}_{if}^\dagger\hat{\theta}^\dagger. \tag{8.59}$$

Szorozzuk ezen egyenlet mindkét oldalát balról és jobbról is $\hat{\theta}^\dagger\hat{\theta} = \pm\hat{I}$-vel, akkor az egyenlet az

$$\hat{S}_{fi} \;\; = \;\; \hat{\theta}^\dagger\hat{S}_{if}^\dagger\hat{\theta} \tag{8.60}$$

alakot ölti.

4. Legyen ezek után ϕ_i és ϕ_f a rendszer tetszőleges kezdeti és végállapota. A megfelelő átmeneti amplitudó:

$$\begin{aligned}(\phi_f, \hat{S}_{fi}\phi_i) &= (\phi_f, \hat{\theta}^\dagger \hat{S}_{if}^\dagger \hat{\theta}\phi_i) = (\hat{\theta}\phi_f, \hat{S}_{if}^\dagger \hat{\theta}\phi_i)^\star \\ &= (\hat{\theta}\phi_i, \hat{S}_{if}\,\hat{\theta}\phi_f). \end{aligned} \tag{8.61}$$

   Innen leolvashatjuk a bizonyítani kívánt állítást.

Pl. ha egy $\vec{p}_1 s_1 \sigma_1$ és egy $\vec{p}_2 s_2 \sigma_2$ állapotú részecske szóródik és a végállapotban lesz két részecske a $\vec{p}_1' s_1 \sigma_1'$ és $\vec{p}_2' s_2 \sigma_2'$ állapotban, akkor ennek a folyamatnak az átmeneti amplitudója ugyanaz, mint az időbeni megfordítottjának, amikor egy $-\vec{p}_1' s_1 - \sigma_1'$ és egy $-\vec{p}_2' s_2 - \sigma_2'$ állapotú részecske szóródik a $-\vec{p}_1 s_1 - \sigma_1$ és $-\vec{p}_2 s_2 - \sigma_2$ végállapotokba.

9 Belső szimmetriák

9.1 Az izospin

Ellentétben a tér és az idő szimmetriáival, most olyan szimmetriákról fogunk beszélni, amelyek a fizikai rendszerek valamilyen további, nem térbeli szabadsági fokaival kapcsolatosak. Arra, hogy ilyen szimmetriák is vannak, úgy jövünk rá, hogy bizonyos fizikai rendszerek energiaspektrumában olyan multipletteket találunk, amelyek nem magyarázhatók a tér és az idő már megismert szimmetriáival.

Az egyik klasszikus példa erre az izospin-szimmetria. Az atommagokat felépítő protonok és neutronok nyugalmi tömege kb. 1 GeV. Ugyanakkor a proton tömege kb. 1 MeV-tal, azaz 0.001 GeV-tal kisebb mint a neutron tömege. Ez a kicsiny tömegkülönbség az erős (nukleáris) kölcsönhatás jellemző energiaskáláján elhanyagolható. Ha a protont homogénen töltött gömbnek tekintjük, akkor a kölcsönhatás Coulomb-energiája ugyanilyen nagyságrendűnek adódik. Ezért - Heisenberg érvelését elfogadva - úgy tekintjük, hogy a proton és a neutron ugyanannak a részecskének két különböző állapota. A részecskét nukleonnak nevezzük. A nukleonállapot kétszeresen elfajult. Ezt a tényt úgy tekintjük mint egy SU(2) szimmetria következményét. A szóbanforgó szimmetriát izospin-szimmetriának nevezzük. Az izospin-csoport generátorait $\hat{T}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ jelöli. A csoport irreducibilis ábrázolásai a $\hat{\vec{T}}^2$ operátor $T(T+1)$ sajátértékei szerint osztályozhatók. A 2 multiplicitású nukleon nyilvánvalóan a $T = 1/2$ ábrázolást valósítja meg. A nukleon izospin-állapotainak Hilbert-tere tehát 2-dimenziós. A $T_3 = +1/2$ állapotot a protonnal, a $T_3 = -1/2$ állapotot a neutronnal azonosítjuk:

$$\hat{T}_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle, \qquad \hat{T}_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle. \tag{9.1}$$

(Hogy így és nem fordítva, az csupán konvenció kérdése.) Az izospin operátorait a $T = 1/2$ ábrázolás terében a Pauli-mátrixok ábrázolják: $\hat{T}_i \to \tau_i/2$. Ezeket - spintől való megkülönböztetés végett - jelöljük most σ_i helyett τ_i-vel. Tudjuk, hogy az SU(2)-csoport generátorai egy 3-dimenziós euklideszi térben végzett forgatásokat generálnak. Az izospin esetében ez azonban nem a koordináta-tér, hanem valamilyen absztrakt belső tér, amelyet izo-térnek nevezünk. Azt mondjuk, hogy a nukleon kétszeres elfajultsága annak a következménye, hogy az erős kölcsönhatás az izo-térben végzett elforgatásokkal szemben invariáns. Az izo-tér $\bar{\nu}$ iránya körüli ε szögű elforgatást a Hilbert-térben az $\hat{U}(\bar{\nu}\varepsilon) = \exp\{-\mathrm{i}\bar{\nu}\varepsilon\hat{\bar{T}}\}$ operátor írja le. Az izospin generátorai az

$$\left[\hat{T}_i, \hat{T}_j\right] = \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\hat{T}_k \tag{9.2}$$

SU(2)-algebrának tesznek eleget. A nukleon példáján látjuk, hogy az elektromos töltés $\hat{Q}$ operátora az izospin 3-adik komponensével

$$\hat{Q} = e\left(\hat{T}_3 + \frac{1}{2}\right) \tag{9.3}$$

összefüggésben áll:

$$\hat{Q}|p\rangle = e|p\rangle, \qquad \hat{Q}|n\rangle = 0. \tag{9.4}$$

Azzal, hogy találtunk egyetlen két-állapotú rendszert, amelynek létét az izospin-szimmetria következményének tudtuk be, még nem nyertünk volna sokat, ha ennek a szimmetriának más irreducibilis ábrázolásait nem találnánk meg a természetben. A tapasztalat azonban az, hogy a könnyű atommagok alapállapotai izospin-multiplettekbe rendezhetők. Sőt, néhány, az alapállapotokból nem teljesen kirakható multiplett hiányzó állapotait sikerült gerjesztett állapotként felfedezni (izobár analóg rezonanciák). Ebből arra következtetünk, hogy a magerők nem sértik meg az izospin-szimmetriát. Ezt másképpen úgy mondjuk, hogy a magerők töltésfüggetlenek. Ez azt jelenti, hogy a könnyű atommagok Hamilton-operátora jó közelítéssel csak a $\hat{\bar{T}}^2$ Casimir-operátor függvénye. Persze a Coulomb-energia mindig jelen van a Hamilton-operátorban. Ez könnyű atommagok esetén olyan kicsi még, hogy perturbációnak tekinthető. A nehéz atommagok esetében azonban a Coulomb-kölcsönhatás miatt az izospin-szimmetria már olyan erősen megsérül, hogy nehéz vagy nem is nagyon lehet az izospin-multipletteket megtalálni.

Az atommagok $\hat{\bar{T}}$ izospinje az egyes nukleonjaik $\hat{\bar{T}}_a$ izospinjének összege:

$$\hat{\bar{T}} = \sum_{a=1}^{A} \hat{\bar{T}}_a. \tag{9.5}$$

Az összeadást az impulzusmomentumok összeadási szabálya szerint kell végezni. Mivel az egyes nukleonok izospinjeinek $\hat{T}_3$ komponensei összeadódnak, azért az A nukleont (N neutront és Z protont) tartalmazó atommag izospinje 3-adik komponensének sajátértéke $T_3 = \frac{1}{2}(Z - N)$, a töltése pedig $Q = eZ = e(T_3 + \frac{1}{2}A)$.

Azt a tényt, hogy az atommagok Hamilton-operátora felcserélhető az izospin-csoport generátoraival úgy szoktuk emlegetni, hogy a magerők töltésfüggetlenek. Ha elhanyagoljuk a Coulomb-kölcsönhatás és az aszimmetria-energia járulékát, akkor az atommagok Hamilton-operátora csak az izospin négyzetének függvénye: $\hat{H} = H(\hat{\vec{T}}^2)$. A magerők töltés-függetlenségének következménye, hogy két proton és két neutron között ugyanaz a nukleáris kölcsönhatás, ha a $|pp\rangle$ és a $|nn\rangle$ állapot csak abban különbözik, hogy a protonokat neutronokra cseréljük:

$$\langle pp|\hat{H}_{\text{nukleáris}}|pp\rangle = \langle nn|\hat{H}_{\text{nukleáris}}|nn\rangle. \tag{9.6}$$

Az izospin-szimmetriára további szép példa a pionok multiplettje. A semleges π^0 mezon nyugalmi tömege 135.00 MeV, a töltött π^+ és π^- mezonoké 139.59 MeV. Ezt a három állapotot egy izospin-triplett 3 tagjának tekintjük:

$$\begin{aligned} |T=1\;T_3=1\rangle = -|\pi^+\rangle, \qquad & |T=1\;T_3=0\rangle = |\pi^0\rangle, \\ |T=1\;T_3=-1\rangle \;=\; & +|\pi^-\rangle, \end{aligned} \tag{9.7}$$

ahol a fázisokat a jobb oldalon önkényesen választottuk, az általánosan elfogadott konvenciónak megfelelően. Ez a három állapot az izo-térben végzett forgatások során úgy transzformálódik, mint egy $T = 1$-rendű irreducibilis SU(2)-tenzor 3 komponense:

$$\begin{aligned} \hat{T}_\pm|TT_3\rangle &= [T(T+1) - T_3(T_3 \pm 1)]^{1/2}|T\;T_3 \pm 1\rangle, \\ \hat{T}_3|TT_3\rangle &= T_3|TT_3\rangle, \end{aligned} \tag{9.8}$$

ahol $T = 1$, $T_3 = -1, 0, +1$. Sokszor kényelmesebb a

$$|\pi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^+\rangle + |\pi^-\rangle), \quad |\pi_2\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(|\pi^+\rangle - |\pi^-\rangle), \quad |\pi_3\rangle = |\pi_0\rangle \tag{9.9}$$

bázist használni. Ezek az állapotok az izo-térben végzett forgatások során úgy transzformálódnak, mint az (izo)-vektorok Descartes-komponensei:

$$\hat{T}_i|\bar{\pi}\rangle = \sum_{k=1}^{3}(T_i)_{jk}|\pi_k\rangle = \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}|\pi_k\rangle. \tag{9.10}$$

(Mindkét bázis ortonormált.)

9.2 A G-paritás

Az erős kölcsönhatás izospin-szimmetriáját a nukleonok, a pionok, a rho-mezonok valamint az atommagok multiplettjei és az elemi részecskék számos erős bomlási folyamatának elágazási aránya igazolja. Ezért elfogadjuk azt a nézőpontot, hogy az erősen kölcsönható részecskéknek, a hadronoknak, vannak a belső, izo-térben is szabadsági fokaik, nemcsak az ,,evilági" koordináták terében. Az izospin-szimmetria, az izo-térben végzett forgatásokkal szembeni szimmetria.

Tudjuk, hogy a közönséges tér tükrözésével szembeni szimmetria következménye a paritás megmaradása. Feltehetjük a kérdést, hogy hogyan viselkednek az erősen kölcsönható részecskék az izo-tér tükrözésével szemben. Az izo-tér tükrözésén azt a $\mathcal{G}$ műveletet nevezzük, amely az izo-tér tetszőleges $\bar{\rho}$ vektorát átfordítja az eredetivel ellentétes irányba:

$$\mathcal{G}\bar{\rho} \quad = \quad -\bar{\rho}. \tag{9.11}$$

Ennek megfelelően az izospin-állapotok Hilbert-terében egy olyan $\hat{G}$ operátor írja le az izo-tér tükrözésének hatását, amely a pion-triplett $|\pi_i\rangle$ bázisállapotaira

$$\hat{G}|\pi_i\rangle \quad = \quad -|\pi_i\rangle \tag{9.12}$$

módon hat. A $|\pi_i\rangle$ bázis ugyanis, mint korábban láttuk, úgy transzformálódik, mint az izovektorok Descartes-komponensei. A pionok tehát a $\hat{G}$ operátor -1 sajátértékéhez tartoznak. Azt mondjuk, hogy a G-paritásuk -1.

Keressük meg az utóbbi speciális ábrázolásból kiindulva a G-paritás operátorát. Ehhez először bevezetjük a töltéskonjugáció $\hat{C}$ operátorát, amely a részecskék töltésének előjelét ellentétesre változtatja. A $T = 1$ ábrázolásban:

$$\hat{C}|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle, \qquad \hat{C}|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle, \qquad \hat{C}|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle, \tag{9.13}$$

azaz

$$\hat{C}|\pi_1\rangle = |\pi_1\rangle, \qquad \hat{C}|\pi_2\rangle = -|\pi_2\rangle, \qquad \hat{C}|\pi^3\rangle = |\pi^3\rangle, \tag{9.14}$$

úgyhogy ebben az ábrázolásban

$$\hat{C} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.15}$$

Ennek a speciális ábrázolásnak az alapján könnyen beláthatjuk, hogy

$$\hat{G} \quad = \quad \exp\left\{-\mathrm{i}\pi\hat{T}_2\right\}\, \hat{C}. \tag{9.16}$$

Valóban ahhoz, hogy a $|\bar{\pi}\rangle$ izo-vektor mindhárom komponense előjelet váltson, a töltéskonjugálás elvégzése után még az izo-tér második tengelye körül egy π szögű forgatást kell elvégezni, ami megfordítja a $|\bar{\pi}\rangle$ izo-vektor 1. és 3. komponensének az előjelét is.

Ha az erős kölcsönhatás vezérelte bomlási folyamatokban az izo-tér tükrözése szimmetriaként jelentkezik, akkor a G-paritásnak meg kell maradni. Kérdés, hogy az erős bomlási folyamatok során találunk-e olyan tiltást, amelyet kiválasztási szabályként értelmezhetünk és amely indokolja az izo-tükrözési szimmetria feltételezését. Nos, a tapasztalat szerint az $\omega-$mezonok 3 pionra, a $\rho-$mezonok 2 pionra bomlanak. Az $\omega-$mezonok 2–pionos és a $\rho-$mezonok 3–pionos bomlásai a tapasztalat szerint tiltottak. Ezeket a tiltásokat a tér-idő szimmetriái és az izospin- szimmetria alapján nem lehet megérteni. Könnyen magyarázatot nyernek azonban, ha a G-paritást elfogadjuk megmaradó mennyiségnek és az $\omega-$mezonnak -1 a $\rho-$mezonnak pedig +1 G-paritást tulajdonítunk. Ekkor a tiltott folyamatokban a G-paritás nem maradna meg. Vegyük figyelembe, hogy a kezdeti ill. a végállapot G-paritása a kezdeti ill. a végállapotban található részecskék G-paritásainak a szorzata. (A G-paritás, akárcsak a paritás, multiplikatív megmaradó mennyiség.) A mezonok G-paritása az erős bomlási folyamataik alapján ellentmondás mentesen bevezethető, a fenti módon okoskodva tovább.

A nukleonok esetén a G-tükrözés nem lehet szimmetria, mert a töltéskonjugálás (amely a pozitív töltésű protonból negatív töltésű antiprotont csinál) kivezet a nukleonok multiplettjéből.

9.3 A hipertöltés és a barion-multiplettek

Ha megvizsgáljuk a nukleonok és az atommagok izospin multiplettjeit, akkor könnyen rájöhetünk, hogy a töltésközéppontjuk nem a zérus töltésnél van. Mivel az izospin harmadik komponensének a sajátértékei között adott $T-$hez tartozó irreducibilis ábrázolásban van egy minimális $T_3 = -T$ és egy maximális $T_3 = +T$ érték, a töltés sajátértékének is van egy minimális és egy maximális értéke, Q_{min} ill. Q_{max}. Az izospin-multiplettek Y hipertöltését a töltés-középpontjukkal definiáljuk:

$$\frac{1}{2}Y \quad = \quad \frac{1}{2}(Q_{min} + Q_{max}). \tag{9.17}$$

A nukleonok esetén $Y = 1$.

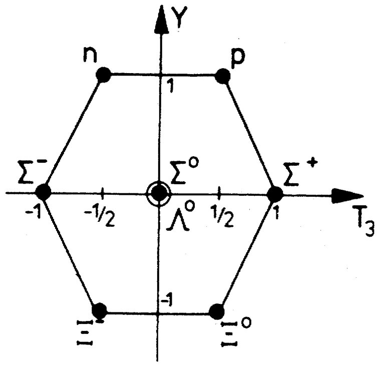
Adott T esetén az izospin-multiplett egyes tagjai a „töltés-tengely” mentén, a töltésközéppontra szimmetrikusan, e távolságra helyezkednek el egymástól, mert T_3 egyesével változik $-T-$től $+T-$ig. Így érvényes a Gell-Mann és Nishijama-féle képlet:

$$Q = e\left(T_3 + \frac{1}{2}Y\right), \qquad (9.18)$$

amely megadja egy izospin-multiplett tagjainak a töltését.

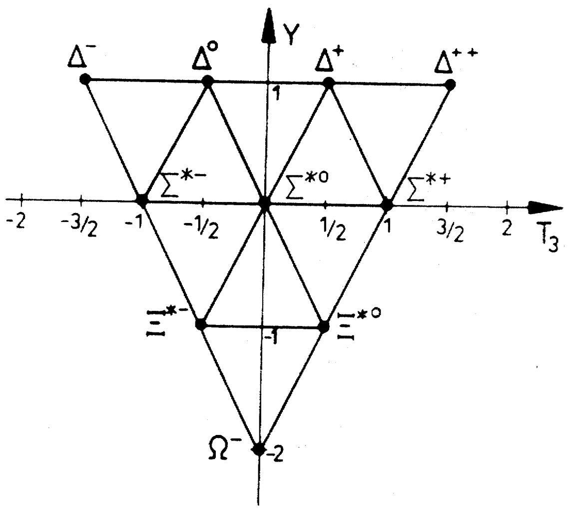
Az atommagok esetén $A = N + Z$, $T_3 = \frac{1}{2}(Z - N)$, és $Q = eZ = e(\frac{1}{2}A + T_3)$, amit a Gell-Mann-Nishijama-formulával összevetve $Y = A$ adódik.

Az 1. és a 2. ábrán az $Y - T_3$-síkon ábrázoljuk rendre az 1/2 spinű, pozitív paritású $(\frac{1}{2}^+)$, és a 3/2 spinű, pozitív paritású $(\frac{3}{2}^+)$ barionokat. A mellékelt táblázatokból kitűnik, hogy az egyes ábrákra rajzolt részecskék közel azonos tömegűek. Ez arra vezet minket, hogy megpróbáljuk az egyes barion-ábrákat valamilyen szimmetria multiplettjeiként értelmezni. A következő fejezetben megmutatjuk, hogy az SU(3) szimmetria alkalmas erre.



1. ábra: A $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ barionok.

Részecske	Jel	Q	T	T_3	Y	Tömeg (MeV)	Élettartam (s)
Nukleon	p	+1	1/2	+1/2	1	938,3	∞
	n	0	1/2	-1/2	1	939,6	960
Lambda	Λ^0	0	0	0	0	1116	$2,6 \cdot 10^{-10}$
Sigma	Σ^+	1	1	1	0	1189	$0,8 \cdot 10^{-10}$
	Σ^0	0	1	0	0	1192	$5,8 \cdot 10^{-20}$
	Σ^-	-1	1	- 1	0	1197	$1,5 \cdot 10^{-10}$
Xi	Ξ^0	0	1/2	1/2	-1	1315	$2,9 \cdot 10^{-10}$
	Ξ^-	-1	1/2	- 1/2	-1	1321	$2,9 \cdot 10^{-10}$



2. ábra: A $J^{\pi} = \frac{3}{2}^{+}$ barionok.

Részecske	Jel	Q	T	T_3	Y	Tömeg (MeV)	Élettartam (s)
H	Δ^{++}	2	3/2	+3/2	1	1232	$5,49 \cdot 10^{-24}$
i	Δ^{+}	1	3/2	1/2	1	1232	$5,49 \cdot 10^{-24}$
p	Δ^{0}	0	3/2	-1/2	1	1232	$5,49 \cdot 10^{-24}$
e	Δ^{-}	-1	3/2	-3/2	1	1232	$5,49 \cdot 10^{-24}$
r	Σ^{*+}	1	1	1	0	1382,3	$1,78 \cdot 10^{-23}$
o	Σ^{*0}	0	1	0	0	1382,0	$1,78 \cdot 10^{-23}$
n	Σ^{*-}	-1	1/2	-1	0	1387,4	$1,78 \cdot 10^{-23}$
o	Ξ^{*0}	0	1/2	1/2	-1	1531,8	$9,4 \cdot 10^{-23}$
k	Ξ^{*-}	-1	1/2	- 1/2	-1	1535,0	$9,4 \cdot 10^{-23}$
	Ω^{-}	-1	0	0	-2	1672	$0,8 \cdot 10^{-10}$

9.4 Az SU(3)-szimmetria

9.4.1 Az SU(3)-csoport

A 3.2 fejezetben már megismerkedtünk az SU(3)-csoport legfontosabb tulajdonságaival. A bevezetett F_a $(a = 1, 2, \ldots, 8)$ 3×3-as mátrixok a csoport infinitezimális generátorai az ún. önábrázolásban. Szokás a fizikában helyettük a λ_a Gell-Mann-mátrixokat is használni: $F_a = \frac{1}{2}\lambda_a$.

Tetszőleges ábrázolásban az SU(3) generátorokat $\hat{F}_a$−val fogjuk jelölni. Természetesen az infinitezimális generátorok algebrája független az ábrázolástól. Így az F_a-kra vonatkozó valamennyi korábbi összefüggés az $\hat{F}_a$-kra is érvényben marad.

A korábbiakban T_i $(i = \pm, 0)$ jelöléssel definiált generátorok egy SU(2)-részalgebrát definiálnak. Ezeket az izospinnel fogjuk azonosítani, amikor az SU(3)-csoportot a barionok osztályozására fogjuk felhasználni. Az egyes barionábrák ugyanis izospin-multiplettekből tevődnek össze. Definíció szerint:

$$\hat{T}_\pm = \hat{F}_1 \pm \mathrm{i}\hat{F}_2, \qquad \hat{T}_3 = \hat{F}_3. \tag{9.19}$$

Vegyük észre, hogy

$$[\hat{T}_+, \hat{T}_-] = 2\hat{T}_3. \tag{9.20}$$

Definiáljuk ezek után az alábbi, U- és V-spinnek nevezett operátorokat:

$$\begin{aligned} \hat{U}_\pm = \hat{F}_6 \pm \mathrm{i}\hat{F}_7, \qquad \hat{U}_3 = \frac{1}{2}[\hat{U}_+, \hat{U}_-] = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\hat{Y} - \hat{T}_3\right), \\ \hat{V}_\pm = \hat{F}_4 \pm \mathrm{i}\hat{F}_5, \qquad \hat{V}_3 = \frac{1}{2}[\hat{V}_+, \hat{V}_-] = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\hat{Y} + \hat{T}_3\right), \end{aligned} \tag{9.21}$$

ahol

$$\hat{Y} \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{F}_8. \tag{9.22}$$

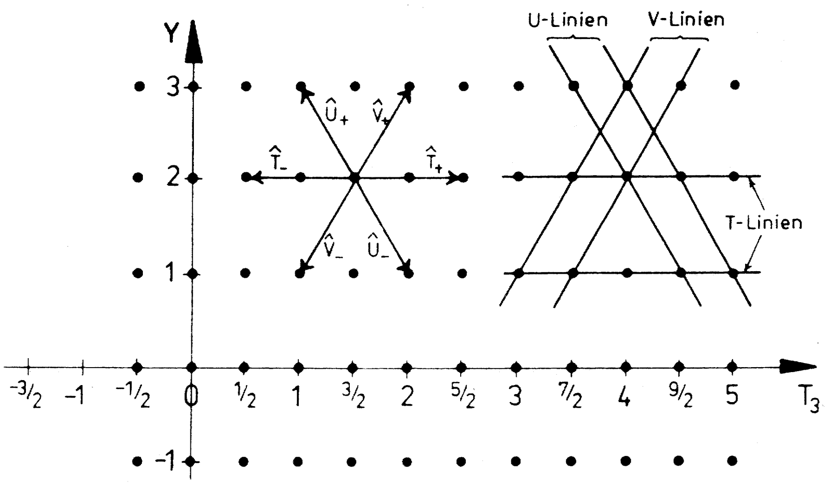
Az infinitezimális generátorok felcserélési törvényeit felhasználva könnyű megmutatni, hogy az U- és a V-spin generátorai is egy-egy SU(2)-részalgebrát alkotnak. Az SU(3)-algebra tehát teljesen szimmetrikusan három darab SU(2)-részalgebrát tartalmaz.

Az SU(3)-csoport rangja 2, ezért az irreducibilis ábrázolások egyértelműen jellemezhetők 2 független adattal (két Casimir-operátor sajátértékével). Egy SU(3)-multipletten belül a bázisállapotok ugyancsak két adattal jellemezhetők egyértelműen, a két felcserélhető generátor, $\hat{T}_3$ és $\hat{Y}$ sajátértékeivel. Egy adott (véges dimenziós) irreducibilis ábrázolás terében használhatjuk tehát a $|T_3 Y\rangle$ bázisvektorokat, amelyek

$\hat{T}_3$ és $\hat{Y}$ közös sajátvektorai. Az SU(2)-algebra tulajdonságait már ismerve tudjuk, hogy a $\hat{T}_\pm$, $\hat{U}_\pm$ és $\hat{V}_\pm$ operátorok léptetnek, rendre a T_3, U_3 és V_3 sajátértékeket ± 1-gyel. Ez azt jelenti, hogy az alábbi módon léptetnek

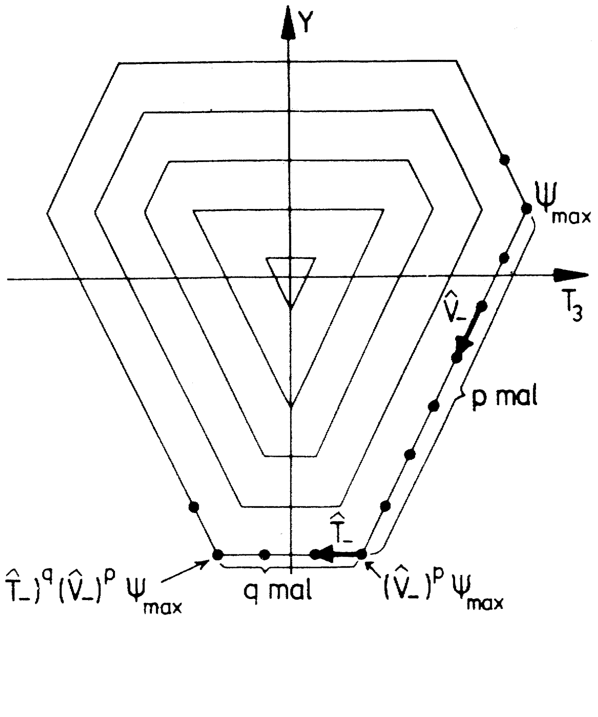
$$
\begin{aligned}
\hat{T}_\pm: &\qquad \Delta T_3 = \pm 1, \quad \Delta Y = 0, \\
\hat{U}_\pm: &\qquad \Delta T_3 = \pm\frac{1}{2}, \quad \Delta Y = \pm 1, \\
\hat{V}_\pm: &\qquad \Delta T_3 = \pm\frac{1}{2}, \quad \Delta Y = \pm 1.
\end{aligned} \tag{9.23}
$$

A fentieket a 3. ábrával illusztráljuk.



3. ábra: A léptető operátorok hatása a T_3, Y-síkon.

Az SU(3)-csoport véges dimenziós irreducibilis ábrázolásait meg tudjuk szerkeszteni a léptető operátorok segítségével. Minden véges dimenziós irreducibilis ábrázolásban van egy ,,jobb szélső" állapot a (T_3, Y)-síkon (4.ábra). Ezt az állapotot a $\hat{T}_+$, $\hat{V}_+$ és $\hat{U}_-$ operátorok zérusba viszik át. Az ábrázolás ábrájának kerülete mentén elindulhatunk ebből a ,,jobb szélső" pontból a $\hat{V}_-$ operátor alkalmazásával. Általában p lépés után a $\hat{V}_-$ operátor $(p+1)-$dik alkalmazása nullát eredményez. Van ilyen p egész szám, mert az ábrázolás véges dimenziós. Ezekután az ábrázolás ábrájának kerülete mentén úgy tudunk továbbhaladni, hogy a $\hat{T}_-$ operátort alkalmazzuk. Tegyük fel, hogy q egész számszor tudjuk alkalmazni, majd a $(q+1)-$edik alkalmazása zérust eredményez. Ilymódon megkaptuk az SU(3)-csoport $D(p,q)$ ábrázolása ábrája kerületének egy darabját. Mivel a 3 SU(2)-csoport teljesen szimmetrikusan van jelen az SU(3)-csoportban, azért az irreducibilis ábrázolások ábráinak az origó $(T_3 = Y = 0)$ szimmetriacentruma. Így a $D(p,q)$ irreducibilis ábrázolás teljes kerületét úgy kapjuk meg, hogy a már megtalált kerületdarabot kiegészítjük a 120^o-os és a 240^o-os elforgatottjával. Az így kapott kerület háromszög vagy hatszög alakú. A belső pontok a külső kerület darabjaival párhuzamos szakaszokból álló héjakon helyezkednek el. A héjakon az állapotok multiplicitása kívülről befelé haladva rendre 1, 2, stb., azaz egyesével nő.



4. ábra: A $D(q,p)$-ábrázolások sematikus képe a T_3, Y-síkon.

Be lehet látni, hogy a $D(p,q)$ irreducibilis ábrázolás dimenziója

$$d = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2), \tag{9.24}$$

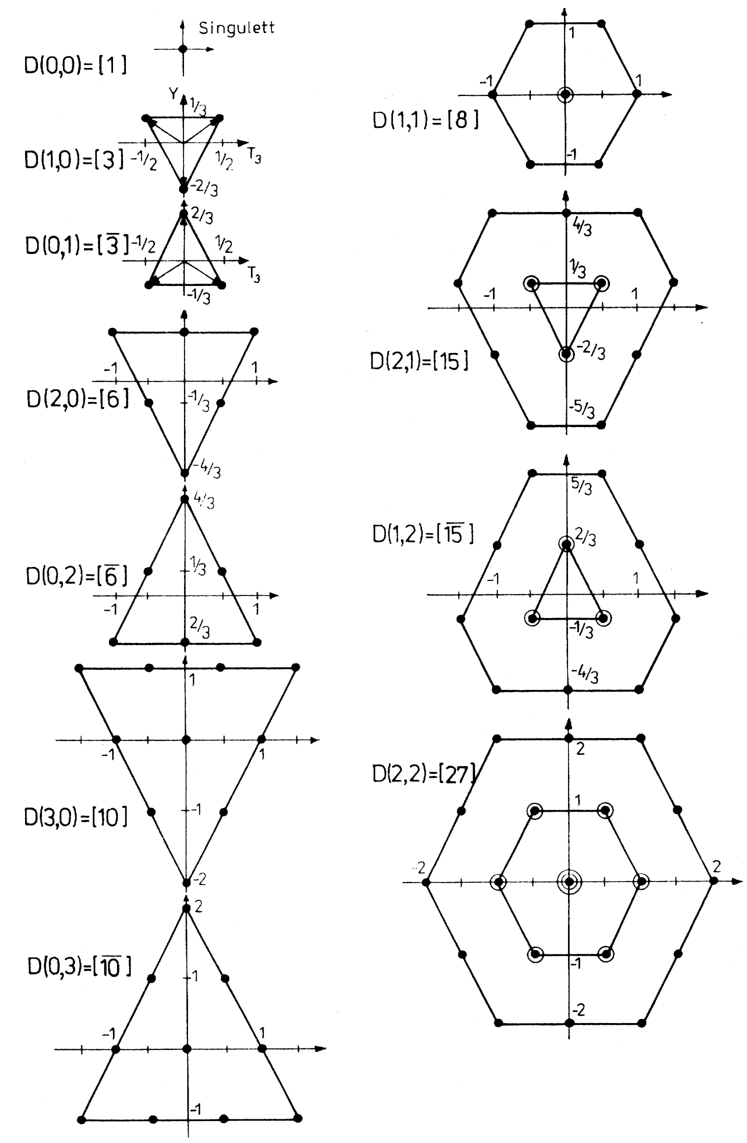
a kvadratikus Casimir-operátor sajátértéke

$$C_1 = \frac{1}{3}(p^2+pq+q^2) + p + q, \tag{9.25}$$

és a „jobb szélső" állapot kvantumszámai

$$T_3 = \frac{1}{2}(p+q), \qquad Y = \frac{1}{3}(p-q). \tag{9.26}$$

Az 5. ábrán bemutatjuk az SU(3)-csoport legalacsonyabb dimenziós irreducibilis ábrázolásainak ábráit.



5. ábra: Az SU(3)-csoport legalacsonyabb dimenziós irreducibilis ábrázolásainak ábrái a (T_3, Y)-síkon.

A $J^P = \frac{1}{2}^+$ barionok tehát a $D(1,1)$ irreducibilis ábrázolást valósítják meg, a $J^P = \frac{3}{2}^+$ barionok pedig $D(3,0)$ ábrázolást. A fenti multiplettek antirészecskéi ($B = -1$) egy $D(1,1)$ és egy $D(0,3)$ irreducibilis ábrázolást valósítanak meg. Történetileg először Sakata jött rá arra, hogy az $\frac{1}{2}^+$ barionok a $D(1,1)$ ábrázolás szerinti oktettbe rendezhetők. Ez az ún. Sakata-féle nyolcas út. Ezután megkísérelték a $\frac{3}{2}^+$ barionrezonanciákat is SU(3) multiplettbe rendezni. Minden állapot (részecske) ismeretes is volt egy $D(3,0)$ ábrázoláshoz, kivéve a $T_3 = 0, Y = -2$ állapotot. Ilyen részecskét ugyanis nem figyeltek meg a korábbi mérésekben. Később felfedezték az Ω^- bariont, amely kvantumszámai és tömege alapján jól beleilleszkedett a hiányzó helyre és teljessé tette a $D(3,0)$ multiplettet. Ez az SU(3) szimmetria igazolásának egyik fontos lépése volt.

9.4.2 A kvarkok

Láttuk, hogy a barionok SU(3)-ábrázolásokat valósítanak meg. Ezek az ábrázolások azonban nem a legegyszerűbbek az SU(3)-csoport irreducibilis ábrázolásai között. Feltehetjük a kérdést, hogy a legegyszerűbb ábrázolások megvalósulnak-e a természetben. Miért fontos ez a kérdés? Azért, mert a magasabb dimenziós ábrázolások mind felépíthetők a $D(1,0) = [3]$ és a $D(0,1) = [\bar{3}]$ ábrázolásokból (sőt ezek bármelyikéből is) tenzori szorzással. Ha ez így van, akkor viszont azokat a részecskéket, amelyek ezeket az ábrázolásokat megvalósítják, lehetne a barionokat felépítő részecskéknek tekinteni. Ez az elgondolás Gell-Manntól származik, aki a feltételezett részecskéket kvarkoknak nevezte.

Az SU(3)-csoport legkisebb dimenziós ábrázolása az egyetlen, $T_3 = Y = 0$ állapotot tartalmazó szinglett ábrázolás. Ezt az ábrázolást triviálisnak nevezzük. Belőle nem építhetők fel további ábrázolások. Hasonló a helyzet az SU(2)-csoport esetéhez, amelynek a $j = 0$ ábrázolásából ugyancsak nem szerkeszthetők további ábrázolások.

Az SU(3)-csoport legkisebb, nem triviális ábrázolásai a 3-dimenziós $D(1,0)$ és $D(0,1)$ ábrázolások. Belőlük tenzori szorzással felépíthető az összes magasabb dimenziós ábrázolás, hasonlóan mint ahogy az SU(2)-csoport $j = 1/2$ ábrázolásából megszerkeszthető az SU(2)-csoport összes többi irreducibilis ábrázolása. Nevezzük a $D(1,0) = [3]$ ábrázolás hipotetikus részecskéit kvarkoknak. A 3-dimenziós ábrázolásnak legalább egy izospin-dublettet tartalmaznia kell ahhoz, hogy belőle az izospin-multiplettek megszerkeszthetők legyenek. Vezessük be erre a

$$|q_1\rangle = \left|\frac{1}{2}Y\right\rangle, \qquad |q_2\rangle = \left|-\frac{1}{2}Y\right\rangle \tag{9.27}$$

jelölést, a harmadik, izospin-szinglett állapot pedig legyen

$$|q_3\rangle = |0Y'\rangle. \tag{9.28}$$

Mivel az SU(3)-algebra teljesen szimmetrikusan tartalmazza a T-, U- és V-spinek SU(2)-algebráját, azért a $|q_1\rangle$ állapotnak vagy U-, vagy V-szinglettnek kell lennie. Ha a

$$\hat{U}_3|q_1\rangle \;=\; 0, \tag{9.29}$$

akkor a $D(1,0) = [3]$ ábrázolást kapjuk. Ekkor felhasználva, hogy $\hat{U}_3 = \frac{1}{4}(3\hat{Y} - 2\hat{T}_3)$:

$$\hat{Y}|q_1\rangle = \left(\frac{4}{3}\hat{U}_3 + \frac{2}{3}\hat{T}_3\right)|q_1\rangle = \frac{1}{3}|q_1\rangle. \tag{9.30}$$

Másrészt az izospin dublett egyazon hipertöltéshez tartozik, ezért

$$\hat{U}_3|q_2\rangle = \frac{1}{4}\left(3\hat{Y} - 2\hat{T}_3\right)|q_2\rangle = \frac{1}{2}|q_2\rangle. \tag{9.31}$$

Ekkor viszont az U-dublett másik tagjára

$$\hat{U}_3|q_3\rangle = -\frac{1}{2}|q_3\rangle. \tag{9.32}$$

Végül tehát

$$\hat{Y}|q_3\rangle = \left(\frac{4}{3}\hat{U}_3 + \frac{2}{3}\hat{T}_3\right)|q_3\rangle = -\frac{2}{3}|q_3\rangle. \tag{9.33}$$

A fenti [3] ábrázolást megvalósító részecskéket kvarkoknak nevezzük. Szokásos elnevezésük:

$$\begin{aligned}
&\text{up:} && |u\rangle = |q_1\rangle = \left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{3}\right\rangle, \\
&\text{down:} && |d\rangle = |q_2\rangle = \left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{3}\right\rangle, \\
&\text{strange:} && |s\rangle = |q_3\rangle = \left|0\ -\tfrac{2}{3}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{9.34}$$

A kvarkok feltételezett bariontöltése $B = 1/3$, mert - mint látni fogjuk - a nyolcas út 3 kvarkból álló rendszer révén valósulhat meg és ezeknek a barionoknak egységnyi a bariontöltése.

Ha a 3-dimenziós ábrázolás $|q_1\rangle$ állapotát a V-szinglett állapottal azonosítjuk, akkor a $D(0,1) = [\bar{3}]$ ábrázolást kapjuk. Az állapotokat a $B = -1/3$ bariontöltésű antikvarkokkal azonosítjuk. Szokásos jelölésük:

$$\begin{aligned}
|\bar{u}\rangle &= |\bar{q}_1\rangle = \left|-\frac{1}{2}\ -\frac{1}{3}\right\rangle, \\
|\bar{d}\rangle &= |\bar{q}_2\rangle = \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{3}\right\rangle, \\
|\bar{s}\rangle &= |\bar{q}_3\rangle = \left|0\ \frac{2}{3}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{9.35}$$

A kvarkok elektromos töltése a Gell-Mann-Nishijama-képlet alapján:

$$\begin{aligned}\hat{Q}|u\rangle &= \frac{2e}{3}|u\rangle, \\ \hat{Q}|d\rangle &= -\frac{e}{3}|d\rangle, \\ \hat{Q}|s\rangle &= -\frac{e}{3}|s\rangle.\end{aligned} \tag{9.36}$$

A kvarkok tehát törttöltéssel rendelkeznek. Számos kísérletet végeztek, amelyekben törttöltésű részecskéket kerestek. Ezekben a kísérletekben azonban nem sikerült bizonyítani, hogy léteznek szabad törttöltésű részecskék. Ugyanakkor, mint alább látjuk majd, a barionok és a mezonok SU(3)-szimmetria alapján történő osztályozása arra enged következtetni, hogy a barionok 3 darab kvarkból, a mezonok pedig egy kvarkból és egy antikvarkból felépülő kötött rendszerek. A kvarkok léte mellett a döntő bizonyítékot az elektronok protonokon történő mélyen rugalmatlan szórása szolgáltatta. Ezekben a nagyenergiás szórási kísérletekben ugyanis ténylegesen megfigyelték, hogy az elektronok 3, pontszerű töltésen szóródnak, s azokat a kvarkokkal lehetett azonosítani. A kísérleti tények azt látszanak igazolni, hogy szabad kvarkok nincsenek; a kvarkok csak a hadronok belsejében, ,,bezárva" találhatók meg. Ez a kvarkbezárás jelensége.

Térjünk most ezen kis kitérő után vissza az SU(3)-csoport [3] és [$\bar{3}$] ábrázolásaihoz. A [3] ábrázolás infinitezimális generátorai a Gell-Mann-mátrixok:

$$(F_a)_{ij} = \langle q_i|\hat{F}_a|q_j\rangle = \frac{1}{2}(\lambda_a)_{ij}, \tag{9.37}$$

$(a = 1, 2, \ldots, 8)$ és $(i, j = 1, 2, 3)$. Az általános, θ_a $(a = 1, 2, \ldots, 8)$ paraméterekkel jellemzett SU(3)-forgatások a kvarkállapotokat a

$$|q_i\rangle' = U_{ij}(\theta)|q_j\rangle = \left(e^{-\mathrm{i}\sum_{a=1}^{8}\theta_a\frac{\lambda_a}{2}}\right)_{ij}|q_j\rangle \tag{9.38}$$

szerint forgatják, vagyis mint 3-dimenziós komplex vektorokat.

A [$\bar{3}$] ábrázolás infinitezimális generátorai:

$$(F_a)_{ij} = -\frac{1}{2}(\lambda_a)^{\star}_{ij}. \tag{9.39}$$

Az általános, θ_a paraméterekkel jellemzett SU(3)-forgatás az antikvark-állapotokra

$$|\bar{q}_i\rangle' = \bar{U}_{ij}(\theta)|\bar{q}_j\rangle = \left(e^{\mathrm{i}\sum_{a=1}^{8}\theta_a\frac{\lambda_a^{\star}}{2}}\right)_{ij}|\bar{q}_j\rangle \tag{9.40}$$

hatással van. Meg lehet mutatni, hogy [3] és [$\bar{3}$] inekvivalens irreducibilis ábrázolások.

9.4.3 Magasabb dimenziós SU(3)-ábrázolások. Hadron-multiplettek

Az SU(2)-csoport esetében megtanultuk az impulzusmomentumok összeadásának szabályait. Ezeket felhasználhatjuk, hogy a $D^{1/2}$ ábrázolásból tenzori szorzással megszerkesszük a magasabb dimenziós ábrázolásokat:

$$\begin{aligned} D^{1/2} \otimes D^{1/2} &= D^1 \oplus D^0, \\ D^{1/2} \otimes D^{1/2} \otimes D^{1/2} &= (D^1 \oplus D^0) \otimes D^{1/2} \\ &= D^{3/2} \oplus D^{1/2} \oplus D^{1/2}, \end{aligned} \tag{9.41}$$

stb.

Az SU(3)-ábrázolásokat akár [3], akár [$\bar{3}$] ábrázolásból meg lehet szerkeszteni tenzori szorzással:

$$\begin{aligned} [3] \otimes [3] &= [6] \oplus [\bar{3}], \\ [\bar{3}] \otimes [\bar{3}] &= [\bar{6}] \oplus [3]. \end{aligned} \tag{9.42}$$

Mivel azonban a barionok és az antibarionok különböző multipletteket alkotnak pozitív ill. negatív barionszámmal, azért a fizikában mindkét ábrázolásra szükségünk van.

A $D(p, q)$ ábrázoláshoz a következőképpen jutunk el. Képezzük a

$$\begin{array}{ccc} [3] \otimes \ldots \otimes [3] & \otimes & [\bar{3}] \otimes \ldots \otimes [\bar{3}] \\ p - \text{szer} & | & q - \text{szor} \end{array} \tag{9.43}$$

tenzori szorzat ábrázolást. Ez fizikailag azt jelenti, hogy p darab kvarkból és q darab antikvarkból összetett részecskéket szerkesztünk az SU(3)-szimmetria által megszabott csatolások betartásával. Ha $|T_3 Y\rangle$ és $|\bar{T}_3 \bar{Y}\rangle$ jelölik a kvark- ill. antikvarkállapotokat, akkor a tenzori szorzat ábrázolás bázisa:

$$|T_3(1)Y(1)\rangle \cdots |T_3(p)Y(p)\rangle |\bar{T}_3(1)\bar{Y}(1)\rangle \cdots |\bar{T}_3(q)\bar{Y}(q)\rangle. \tag{9.44}$$

Mivel

$$\begin{aligned} \hat{T}_3 &= \sum_{i=1}^{p+q} \hat{T}_3(i), \\ \hat{Y} &= \sum_{i=1}^{p+q} \hat{Y}(i), \end{aligned} \tag{9.45}$$

azért az összetett részecske izospinjének harmadik komponense és hipertöltése rendre:

$$\begin{aligned} T_3 &= \sum_{i=1}^{p} T_3(i) + \sum_{i=1}^{q} \bar{T}_3(i), \\ Y &= \sum_{i=1}^{p} Y(i) + \sum_{i=1}^{q} \bar{Y}(i). \end{aligned} \tag{9.46}$$

Az így szerkesztett tenzori ábrázolás reducibilis. A legnagyobb dimenziós irreducibilis ábrázolás benne éppen a $D(p,q)$ ábrázolás.

A hadronok az alábbiak szerint osztályozhatók. Vannak a nem zérus bariontöltéssel rendelkező barionok és megfelelő antibarion párjaik. A barionok 3 darab kvarkból álló kötött rendszerek. A három kvarkból álló rendszer a

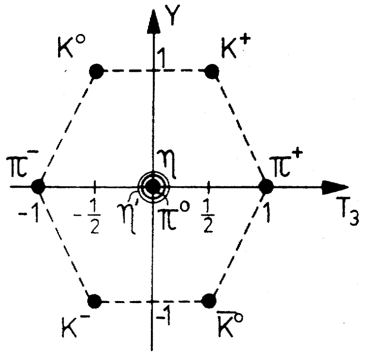
$$[3] \otimes [3] \otimes [3] = ([6] \oplus [\bar{3}]) \otimes [3] = [10] \oplus [8] \oplus [8] \oplus [1] \tag{9.47}$$

redukciós szabály értelmében vagy oktett, vagy dekuplett ábrázolást valósít meg. Mindkettőre láttunk példát.

A mezonok $q\bar{q}$ kötött rendszerek. A

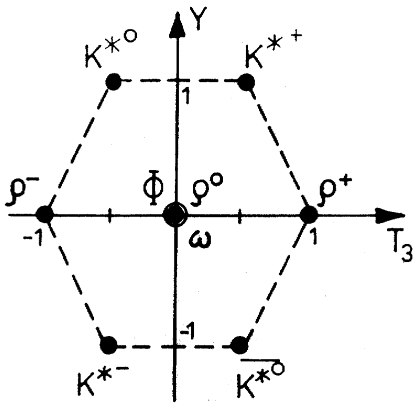
$$[\bar{3}] \otimes [3] = [8] \oplus [1] \tag{9.48}$$

szabály értelmében a mezonok nonettekbe rendezhetők, amelyek egy oktettet és egy szinglettet tartalmaznak. Az alábbiakban közöljük mezonok ábrázolásait és legfontosabb tulajdonságaikat.



6. ábra: A $J^P = 0^-$ pszeudoskalár mezonok.

Részecske	Jel	Q	T	T_3	Y	Tömeg (MeV)	Élettartam (s)
Pionok	π^+	+1	1	1	0	139,57	$2,60 \cdot 10^{-8}$
	π^0	0	1	0	0	134,97	$0,89 \cdot 10^{-16}$
	π^-	-1	1	-1	0	139,57	$2,60 \cdot 10^{-8}$
Kaonok	K^+	+1	1/2	+1/2	1	493,82	$1,235 \cdot 10^{-8}$
	K^0	0	1/2	-1/2	1	497,82	50 % K_s + 50 % K_l
	K^-	-1	1/2	-1/2	-1	493,82	$1,235 \cdot 10^{-8}$
	$\bar{K}^0$	0	1/2	+1/2	-1	497,82	50 % K_s + 50 % K_l
Rövidéletű K^0	K_s	0	1/2	-1/2	1	497,7	$0,88 \cdot 10^{-10}$
Hosszúéletű K^0	K_l	0	1/2	-1/2	1	497,7	$5,77 \cdot 10^{-8}$
Éta–mezon	η	0	0	0	0	548,6	$\sim 10^{-20}$
Éta-vessző–mezon	η'	0	0	0	0	958	$> 6,6 \cdot 10^{-22}$



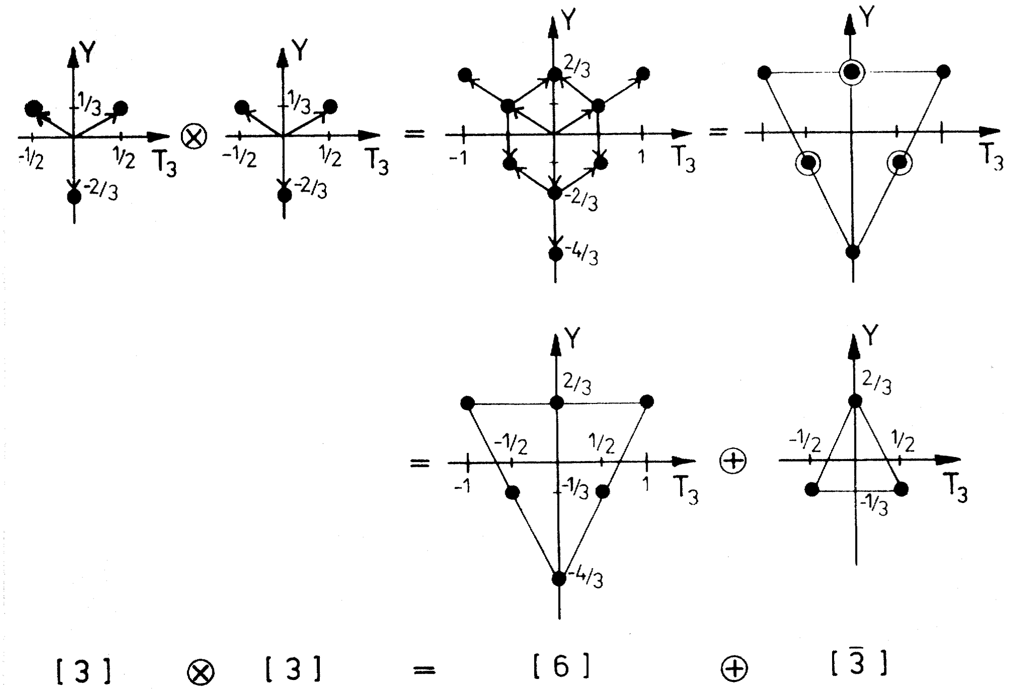
7. ábra: A $J^P = 1^-$ vektor-mezonok.

Részecske	Jel	Q	T	T_3	Y	Tömeg (MeV)	Élettartam (s)
Ró– mezonok	ρ^+	+1	1	1	0	773	$4,3 \cdot 10^{-24}$
	ρ^-	-1	1	-1	0	773	$4,3 \cdot 10^{-24}$
	ρ^0	0	0	0	0	773	$4,3 \cdot 10^{-24}$
Omega– mezon	ω	0	0	0	0	782,7	$6,6 \cdot 10^{-23}$
Kaon– rezonanciák	$K^{*\pm}$	± 1	1/2	$\pm 1/2$	± 1	892	$1,3 \cdot 10^{-23}$
	K^{*0} , $\bar{K}^{*0}$	0	1/2	$\pm 1/2$	± 1	898	$1,3 \cdot 10^{-23}$
Fí– mezon	Φ	0	0	0	0	1019	$1,6 \cdot 10^{-22}$

9.4.4 SU(3)-ábrázolások tenzori szorzása és redukciója

Az SU(2)-csoport irreducibilis ábrázolásainak tenzori szorzása során a D^{j_1} és a D^{j_2} ábrázolás tenzori szorzata szétesik a $|j_1-j_2|, |j_1-j_2|+1, \dots, j_1+j_2$ eredő impulzusmomentummal jellemzett ábrázolások direkt összegére.

Most a megfelelő szerkesztési szabályt ismertetjük, amelynek segítségével két irreducibilis SU(3)-ábrázolás tenzori szorzata kiredukálható. Vegyük az egyik ábrázolás ábráját a (T_3, Y)-síkon és vegyük fel az origóból a multiplett egyes tagjainak megfelelő pontokba mutató vektorokat. Toljuk el ezt a vektor-ábrát úgy, hogy origója rendre a másik ábrázolás ábrájának pontjaiba kerüljön. A tenzori szorzat ábrázolás ábrájának pontjai az így kapott vektorok végpontjai. Minden pont anynyiszorosan szerepel, ahány különböző vektor közös végpontja. Ezután megnézzük, hogy a kapott ábrát hogyan tudjuk előállítani az irreducibilis ábrázolások ismert ábráinak egymásra helyezésével. Az eljárást a 8. ábra szemlélteti a $[3] \otimes [3]$ ábrázolás példáján.



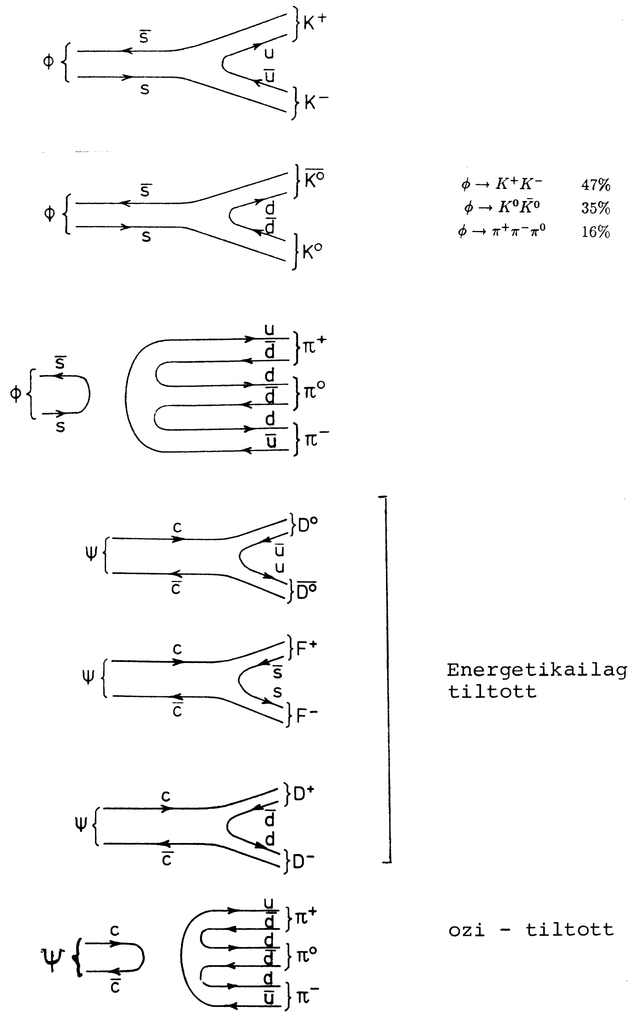
8. ábra: A $[3] \otimes [3]$ ábrázolás megszerkesztése.

9.5 A kvarkok zamata

Azt az SU(3) szimmetriát, amelynek alapján az előző fejezetben osztályoztuk a kvarkokat és a belőlük felépülő hadronokat, zamat- (angolul ,,flavour"-) szimmetriának nevezzük. A részecske-fizikai kísérletek azt mutatják, hogy az u-, d- és s-kvarkok mellett további kvarkok is léteznek.

Keresztezett elektron- és pozitron-nyaláb ütközésében, kb. 3 GeV tömegközépponti energián Ting és Richter (1976) nagyon keskeny rezonanciát észlelt. Az új részecske a J/ψ nevet kapta. A különlegessége az, hogy a bomlási szélessége rendkívül kicsi, kb. 0,00006 GeV a többi rezonancia 0,1 GeV nagyságrendű szélességéhez képest. A Heisenberg-féle határozatlansági elv értelmében a kvantummechanikai rezonanciaállapot Γ energiaszélessége és a rezonancia τ élettartama fordítva arányos egymással: $\Gamma = 1/\tau$. Ezt figyelembe véve a rendkívül kicsiny rezonanciaszélességből arra lehetett következtetni, hogy van valamilyen megmaradási törvény, ami megtiltja a J/ψ rezonanciának az erős kölcsönhatással történő elbomlását. A legegyszerűbb útja az új kvantumszám bevezetésének az volt, hogy egy további kvark, a bájos (charm) c-kvark létezését feltételezték. Ezt az különbözteti meg a már ismert kvarkoktól, hogy azoknak a bájossága $C_u = C_d = C_s = 0$, míg a c-kvark bájossága definíció szerint egységnyi, $C_c = 1$. Másrészről a c-kvark egy SU(3)-szinglett a $T = T_3 = Y = 0$ kvantumszámokkal. Megfigyelték, hogy a J/ψ három pionra tud elbomlani. Ennek a végállapotnak a bájossága zérus. Ha a bájosság megmarad a J/ψ erős bomlása során, akkor a J/ψ bájossága is zérus. Ez csak úgy lehet, ha egy c és egy $\bar{c}$ alkotta kötött rendszer. Ezekután a rezonancia szokatlanul hosszú élettartamát, azaz rendkívül kicsiny szélességét könnyen megérthetjük. Először is a J/ψ-mezon nem tud olyan mezonokra elbomlani, amelyek bájosak, hiszen nála könnyebb ilyen mezonok nem léteznek. (A később felfedezett D- és F-mezonokra való elbomlás - ld. 9. ábra - tehát energetikailag nem lehetséges.) Úgy kell tehát elbomlania, hogy a $c\bar{c}$-pár megsemmisül, szétsugárzódik gluonokká, majd azokból a megfelelő számú $u\bar{u}$-, $d\bar{d}$-pár keletkezik, amelyek a három pion felépítéséhez szükségesek (ld. ábra). Azt, hogy az ilyen típusú, csak gluonokat tartalmazó közbenső állapotokon keresztüli bomlások nagyon kis valószínűségűek, azt már a ϕ-mezon, az alapállapotú $s\bar{s}$ kötött rendszer erős bomlásaiból lehetett tudni a J/ψ-kísérletek idején. (A ϕ-mezon erős bomlásainak csak kb. 16 százalékát teszi ki az az eset, amikor az $s\bar{s}$-pár annihilálódik. A többi esetben nyílt ritkasággal rendelkező mezonokra történik a bomlás, ami itt energetikailag lehetséges (ld. ábra).) Azt a szabályt, hogy egy mezon olyan bomlásai erősen tiltottak, amelyek során a mezont alkotó kvark-antikvark-pár először szétsugárzódik, az Okubo-Zweig-Iizuka-féle tiltási szabálynak (OZI-szabály) nevezik. A J/ψ kivételesen hosszú élettartamáért a bájosság megmaradása és az OZI-szabály felelős.

Abból a tényből, hogy a tapasztalat szerint a bájosság megmaradó mennyiség, az is következik, hogy a kvarkok - és így a hadronok - világának szimmetriája bővebb, A ϕ- és a J/ψ-mezon bomlásai.



9. ábra: A ϕ- és a J/ψ-mezon bomlásai.

mint amit az SU(3)-csoporttal le lehet írni. Az új szimmetria-csoport alapábrázolása a már ismert SU(3)-triplettből ($C = 0$) és egy bájos SU(3)-szinglettből ($C = 1$) áll. Az új, bővebb szimmetriacsoport rangja 3 kell legyen. Az alapábrázolás állapotait a T_3, Y és a C bájosság kell, hogy jellemezze. Ezeknek a követelményeknek az SU(4)-csoport eleget tesz. Az SU(4) csoport alcsoportként tartalmazza az SU(3)-csoportot. Így az összes már ismert SU(3)-ábrázolást megtaláljuk valamely SU(4)-ábrázolás részeként.

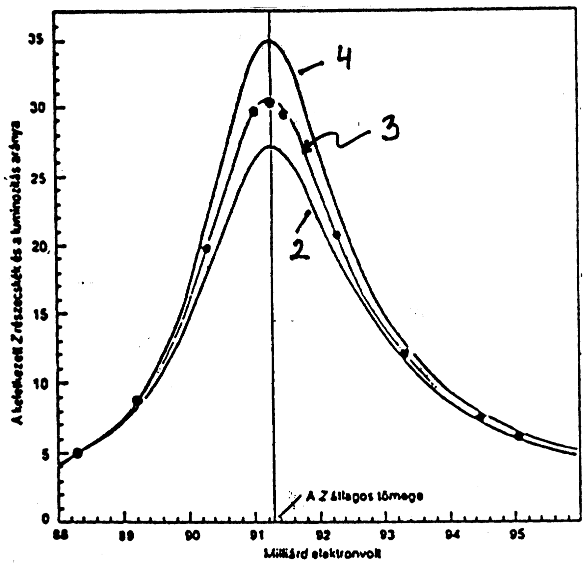
Később felfedezték a J/ψ gerjesztett állapotait, valamint a kompenzálatlan bájossággal rendelkező D- és F-mezonokat. Ezeket az SU(4)-ábrázolások alapján sikerült osztályozni. Meg kell azonban jegyezni, hogy az SU(4)-szimmetria lényegesen erősebben sérül, mint az SU(3)- vagy az SU(2)-szimmetria. A szimmetria sérülésének mértékét az egyazon multipletthez tartozó részecskék nyugalmi tömegeinek különbségei jelzik. A tömegkülönbségek nagyságrendje az izospin-multipletteken belül $\mathcal{O}(\Delta M) \leq 10$ MeV az elektromágneses kölcsönhatás miatt, az SU(3) zamat-multipletteken belül $\mathcal{O}(\Delta M) = 0.1$ GeV, az SU(4)-multipletteken belül pedig $\mathcal{O}(\Delta M) = 1$ GeV.

1977-ben $p + N$ ütközésekben kb. 10 GeV tömegközépponti energián újra szokatlanul éles rezonanciákat találtak. Ezek az Υ-mezon és gerjesztett állapotai. Rendkívül kicsi bomlási szélességük megmagyarázására ismét újabb kvark ill. megmaradó tulajdonság létét kellett feltenni. Ez a b-kvark (az angol ,,bottom" vagy ,,beauty" szavak kezdőbetűjéből), és az új megmaradó tulajdonság a b szépség, amelynek értéke az $u-$, $d-$, $s-$ és $c-$kvarkok esetén zérus, a $b-$kvark esetén 1. Az $\Upsilon-$mezon az alapállapotú kötött $b\bar{b}$ rendszer. További, igazság-zamatot (,,top"- vagy ,,trueth"-) hordozó kvark létére találtak kísérleti bizonyítékot a XX. szd. végén. Azt azonban nem tudjuk a kísérleti adatok birtokában megállapítani, hogy van-e olyan zamat-szimmetria, amelynek alapábrázolását valósítják meg a kvarkok. Kérdés továbbá, hogy hányféle kvark(-zamat) létezik.

Arra, hogy hányféle kvark van a természetben, közvetett úton tudunk következtetni. Az erős és az elektro-gyenge kölcsönhatás egyesített elmélete az ún. Standard Modell. Ebben a modellben feltételezzük, hogy a fermionok, azaz hogy a kvarkok és a leptonok párosával családokat alkotnak, és – szimmetrikusan – minden leptoncsaládnak van egy megfelelője a kvarkcsaládok között:

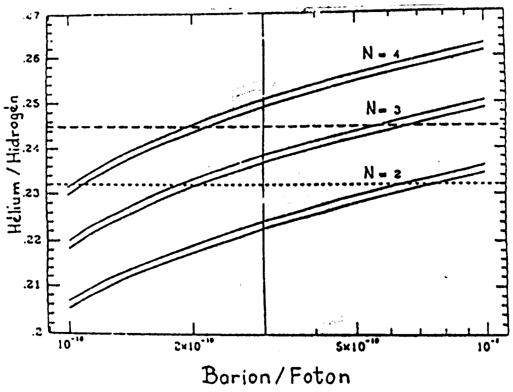
Kvarkok	Leptonok
u, d	e, ν_e
s, c	μ, ν_μ
b, t	τ, ν_τ
???	???

A XX. szd. végén sikerült a hatodik kvarkot, a t-kvarkot (,,top" vagy ,,truth") kísérletileg egyértelműen kimutatni. Kérdés azonban, hogy hány fermioncsalád van a természetben. Nagy pontossággal megmérték a gyenge kölcsönhatást közvetítő semleges vektorbozon, a Z^0 bomlási szélességét (időegységre vonatkoztatott bomlási valószínűségét). A Z^0 vektorbozont ütköző elektron- és pozitronnyalábbal végzett kísérletben 91,18 GeV tömegközépponti energián keltették. A Z^0 vektorbozon azonban nem stabil, hanem bomlékony, s így a tömegközépponti energia függvényében egy rezonanciát észleltek (10. ábra), amelynek szélességét a Z^0 élettartama szabja meg. A teljes bomlási szélesség Γ az egyes $f\bar{f}$ kvark-antikvark-párokra történő elbomlások Γ_f parciális szélességeinek összege: $\Gamma = \sum_f \Gamma_f$. Az összegzés az összes kvark-zamatra történik. Nyilván, minél többféle kvark-zamat létezik, annál könnyebben tud a Z^0 elbomlani, annál nagyobb a szélessége. A 10. ábra mutatja, hogy az az elméleti számítás, amely pontosan 3 darab kvarkcsalád létezését feltételezi, jól illeszkedik a mérési pontokra. Ugyanakkor 4 kvarkcsalád feltételezése már túl széles, 2 kvarkcsalád feltételezése pedig túl keskeny rezonanciát eredményez.



10. ábra: A Z^0 rezonancia-görbéje.

Egy másik becslés a neutron élettartamának pontos ismeretén és a Világegyetemben található hélium és hidrogén aránya alapján ugyancsak azt valószínűsíti, hogy a fermioncsaládok száma 3. A becslés lényege a következő. A Világegyetem tágulásának korai szakaszában volt egy pillanat, amikor a neutronok és a protonok már létrejöttek és egymással a gyenge kölcsönhatás révén kémiai egyensúlyba kerültek Kb. 10 MeV hőmérsékleten ugyanannyi neutron bomlik el β-bomlással, mint amennyi a protonok és az elektronok ütközése révén keletkezik. Az egyensúlyi neutron-proton arány: $\exp\{-(E_n - E_p)/kT\}$. A Világegyetem tágulása és hűlése során a neutronok képződési valószínűsége rohamosan csökken és a bomlásuk válik dominánssá. Teljesen el is bomlanának, ha kb. 1 MeV hőmérsékleten nem válna stabillá a deuteron. Így a neutronok egy része, mielőtt elbomlana, a protonokkal kötött deuteronokat alkot. Még alacsonyabb hőmérsékleten, kb. 0,1 MeV-on, a ^4He atommag is stabillá válik. Az atommagok felépülése tovább folyik és (a deuteronokból nukleonok befogásával) hélium-atommagok keletkeznek. Itt az atommagok felépülése megáll, mert a hélium-atommagok nukleonokkal való ütközése nem vezet stabil végállapotra. A Világegyetemben a neutron-proton arány jelenlegi értéke a megfigyelt hélium-hidrogén arányból határozható meg. Mármost az, hogy mennyi neutron ,,tudott bemenekülni" az atommagokba, az attól függ, hogy milyen gyorsan hűlt a Világegyetem és hogy mennyi a neutronok élettartama. Utóbbit 1991-ben a korábbinál lényegesen pontosabban megmérték Grenobleban: $\tau_n = 876,7$s. A Világegyetem tágulásának és hűlésének ütemét a sugárzási energia ρ_s sűrűsége határozza meg az általános relativitás elmélete értelmében. A statisztikus fizikából viszont tudjuk, hogy T hőmérsékletű rendszerben $\rho_s = \frac{\pi^2}{30}N(T)(kT)^4$. Itt $N(T)$ számértéke attól függ, hogy a sugárzásban hányféle fermion vesz részt. Ha 3 fermioncsalád létezik csak, akkor a sugárzásban az elektron, az elektron-, a müon- és a τ-neutrinó vesznek részt és ekkor $N(T) = 43/4$. Ha még egy negyedik fajta neutrinó is lenne, akkor $N(T) = 57/4$ lenne. A neutron ismert felezési ideje elegendően pontos ahhoz, hogy a hélium és a hidrogén arányának mért értékét összevetve a tágulási modell alapján végzett számolások eredményeivel meg lehessen becsülni a fermioncsaládok számát a természetben. A 11. ábra ilyen számolás eredményét mutatja a barionok és a fotonok arányának függvényében. A vízszintes és a függőleges vonalak a megfigyelt értékeknek felelnek meg. Látható, hogy a fermioncsaládok legvalószínűbb száma 3.



11. ábra: A He/H-arány a barion/foton-arány függvényében $N = 2, 3, 4$ darab fermioncsalád esetén.

III. TÉRIDŐSZIMMETRIÁK A KVANTUMELMÉLETBEN

10 A valódi ortochron Lorentz-transzformációk véges dimenziós irreducibilis ábrázolásai

A relativisztikus kvantumelmélet egyik alapelve a speciális relativitás elve, amely kimondja, hogy az inerciális vonatkoztatási rendszerekben a fizika törvényei azonosak. Másképpen, az inerciális vonatkoztatási rendszerek fizikailag egyenértékűek. Ahhoz, hogy az elméletet olyan alakban fogalmazzuk meg, hogy a mozgásegyenletek alakja minden inerciális vonatkoztatási rendszerben azonos legyen, a fizikai mennyiségek és a térmennyiségek leírásához olyan matematikai objektumokat kell használni, amelyek a Lorentz-transzformációk véges dimenziós irreducibilis ábrázolásai szerint transzformálódnak. Ekkor a mozgásegyenletek $\mathcal{T}^{\cdots}_{\cdots} = 0$ alakban írhatók, ahol a baloldalon a Lorentz-csoport véges dimenziós irreducibilis ábrázolása szerint transzformálódó mennyiség áll. Ez a mozgásegyenletek ún. kovariáns alakja.

10.1 A véges dimenziós irreducibilis ábrázolások osztályozása

Miután az $\mathcal{L}_{hr}-$algebra izomorf az SU(2)$\otimes$SU(2) algebrával, az $\mathcal{L}_{hr}-$algebra véges dimenziós irreducibilis ábrázolásai a két SU(2)-algebra véges dimenziós irreducibilis ábrázolásainak direkt szorzataként adódnak. Legyen a direkt-szorzattér bázisa $|kl\rangle$ az alábbi tulajdonságokkal:

$$\hat{\vec{M}}^2|kl\rangle = u(u+1)|kl\rangle, \tag{10.1}$$

$$\hat{\vec{N}}^2|kl\rangle = v(v+1)|kl\rangle, \tag{10.2}$$

$$\hat{M}_3|kl\rangle = k|kl\rangle, \tag{10.3}$$

$$\hat{N}_3|kl\rangle = l|kl\rangle. \tag{10.4}$$

Itt u és v lehetséges értékei:

$$u,\ v = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots \tag{10.5}$$

Könnyen kiszámolhatjuk a térbeli forgatások és a Lorentz-lökések generátorainak a mátrixelemeit ebben a bázisban:

$$\hat{J}_3|kl\rangle = (\hat{M}_3 + \hat{N}_3)|kl\rangle = (l+k)|kl\rangle, \tag{10.6}$$

$$\begin{aligned}\hat{J}_\pm|kl\rangle &= (\hat{M}_\pm + \hat{N}_\pm)|kl\rangle \\ &= [u(u+1) - k(k\pm 1)]^{1/2}|k\pm 1\ l\rangle \\ &+ [v(v+1) - l(l\pm 1)]^{1/2}|k\ l\pm 1\rangle,\end{aligned} \tag{10.7}$$

$$\hat{K}_3|kl\rangle = \mathrm{i}(\hat{N}_3 - \hat{M}_3)|kl\rangle = \mathrm{i}(l-k)|kl\rangle, \tag{10.8}$$

$$\begin{aligned}\hat{K}_\pm|kl\rangle &= \mathrm{i}(\hat{N}_\pm - \hat{M}_\pm)|kl\rangle \\ &= \mathrm{i}[v(v+1) - l(l\pm 1)]^{1/2}|k\ l\pm 1\rangle \\ &- \mathrm{i}[u(u+1) - k(k\pm 1)]^{1/2}|k\pm 1\ l\rangle. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Innen látjuk, hogy J_i mátrixai önadjungáltak, de K_i mátrixai nem. A véges dimenziós irreducibilis ábrázolások tehát nem unitérek. Ezek az ábrázolások tehát nem valósulnak meg mint fizikai állapotok alterei a Hilbert-térben. A jelentőségük a fizika szempontjából abban van, hogy a térmennyiségek és a fizikai mennyiségek a véges dimenziós irreducibilis ábrázolások szerint transzformálódnak. Az egyes véges dimenziós irreducibilis ábrázolásokat a Casimir-operátorok sajátértékeit megadó (u, v) kvantumszámok jellemzik. Az (u, v) irreducibilis ábrázolás $(2u{+}1)(2v{+}1)$-dimenziós.

A fenti $|uv; kl\rangle$ bázisból képezhetjük a

$$\sum_{k=-u}^{u}\sum_{l=-v}^{v}(ukvl|Jj_3)|uv;kl\rangle = |Jj_3uv\rangle \tag{10.10}$$

bázist, amely a 3-dimenziós térben végzett forgatások szempontjából úgy viselkedik, mint az u és v impulzusmomentumok összeadásakor az eredő impulzusmomentum és vetületének sajátvektoraiból álló bázis. Az eredő impulzusmomentum lehetséges értékei:

$$J:\ j_0 = |u-v|, |u-v|+1, \ldots, u+v-1, j_1 = u+v. \tag{10.11}$$

Az irreducibilis ábrázolások u és v helyett megadhatók j_0 és j_1 segítségével is; j_1-et az ábrázolás spinjének szokás nevezni. Ha j_1 egész szám, akkor tenzor-ábrázolásról beszélünk, ha pedig félegész, akkor spinorábrázolásról.

Érdemes még a következőket is figyelembe venni. Tértükrözések során az impulzusmomentum komponensei nem váltanak előjelet, míg a Lorentz-lökések generátorai előjelet váltanak:

$$\hat{J}_i \to \hat{J}_i, \qquad \hat{K}_i \to -\hat{K}_i. \tag{10.12}$$

Ennek megfelelően tértükrözéskor $\hat{M}_i$ és $\hat{N}_i$ szerepet cserélnek: $\hat{M}_i \leftrightarrow \hat{N}_i$. Következésképpen az (u, v) ábrázolás tértükrözéskor átmegy a (v, u) ábrázolásba. Ez azt jelenti, hogy ha egy mennyiség az (u, v) ábrázolást valósítja meg, akkor a belőle tértükrözéssel kapott mennyiség a (v, u) ábrázolást valósítja meg. Az összetartozó (u, v) és (v, u) ábrázolásokat szokták bal- és jobbkezes ábrázolásoknak nevezni.

Az $(u = 0, v = 0)$ ábrázolás szerint transzformálódó mennyiséget Lorentz-skalárnak nevezzük. Ez egy-komponensű és Lorentz-transzformációk során invariáns. Ekkor $j_0 = j_1 = 0$.

Az alábbiakban megismerkedünk a véges dimenziós irreducibilis ábrázolások közül a legkisebb dimenziójúakkal.

Az $(1/2,0)$ és a $(0,1/2)$ ábrázolásokat két-komponensű mennyiségek valósítják meg, amelyeket bal- és jobbkezes Weyl-spinoroknak nevezünk. Ezen ábrázolások spinje $j_1 = 1/2$. A $(1/2,0) \oplus (0,1/2)$ ábrázolást megvalósító négy-komponensű mennyiségeket Dirac-spinoroknak nevezzük.

A négyes-vektorok a $(1/2,1/2)$ ábrázolás szerint transzformálódnak. Az x^μ négyes-vektor x^0 komponense ezen belül térbeli forgatások során invariáns, azaz a $j_0 = 0$ ábrázolást adja, a 3 térszerű komponens pedig forgatások során 3-dimenziós térbeli vektorként transzformálódik a $j_1 = 1$ ábrázolás szerint.

További egységnyi spinű ábrázolások a bal- és jobbkezes vektorokat adó $(1,0)$ és $(0,1)$ ábrázolások. Ezek direkt összege, $(1,0)\oplus(0,1)$ szerint transzformálódnak a másodrendű antiszimmetrikus Lorentz-tenzorok komponensei. Ilyen pl. az elektrodinamika $F^{\mu\nu}$ térerősség-tenzora.

10.2 Weyl-spinorok

10.2.1 Alapfogalmak

Ebben a fejezetben részletesebben foglalkozunk az $\mathcal{L}_{hr}$-csoport két-dimenziós ábrázolásaival. Az $(\frac{1}{2},0)$ ábrázolás a 2-komponensű ψ_A $(A = 1,2)$ mennyiségek F terében valósul meg. Ez az ábrázolás definíció szerint az SL(2,C)-csoport önábrázolása, amikor minden $\Lambda \in \mathcal{L}_{hr}$ Lorentz-transzformációnak egy $\alpha \in$ SL(2,C) mátrix felel meg:

$$\Lambda \quad \leftrightarrow \quad \alpha. \tag{10.13}$$

A ψ_A mennyiségek az ún. balkezes Weyl-spinor komponensei. A balkezes Weyl-spinorok Lorentz-transzformáció során a

$$\psi'_A \quad = \quad {\alpha_A}^B \psi_B \tag{10.14}$$

előírás szerint transzformálódnak.

Azt az ábrázolást, amelyet a

$$\Lambda \quad \leftrightarrow \quad \alpha^{-1\,T} \tag{10.15}$$

megfeleltetés ad meg, duális önábrázolásnak nevezzük. A duális önábrázolás unitér-ekvivalens az önábrázolással, azaz létezik olyan $\epsilon \in$ SL(2,C) mátrix, hogy tetszőleges α esetén:

$$\epsilon\alpha\epsilon^{-1} \quad = \quad \alpha^{-1\,T}. \tag{10.16}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv (\epsilon^{AB}). \tag{10.17}$$

Definiáljuk továbbá az alábbi mátrixot:

$$(\epsilon_{AB}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10.18}$$

legyen továbbá

$$\epsilon_C{}^A \equiv \delta^A_C, \tag{10.19}$$
$$\epsilon^A{}_C \equiv \epsilon^{AB}\epsilon_{BC} = -\delta^A_C. \tag{10.20}$$

Ekkor teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

$$\epsilon^{BA} = -\epsilon^{AB}, \qquad \epsilon_{BA} = -\epsilon_{AB}, \tag{10.21}$$
$$\epsilon^A{}_C = -\epsilon_C{}^A, \tag{10.22}$$
$$\epsilon_{AB}\epsilon^{DC} = \delta^D_A\delta^C_B - \delta^C_A\delta^D_B. \tag{10.23}$$

A duális önábrázolás a ψ^A $(A = 1,2)$ két-komponensű mennyiségek $F^\star$ terében valósul meg. Az önábrázolás és a duális önábrázolás szerint transzformálódó Weyl-spinorok között a kapcsolat:

$$\psi^A = \epsilon^{AB}\psi_B. \tag{10.24}$$

Innen

$$\psi^A\epsilon_{AC} = \epsilon^{AB}\psi_B\epsilon_{AC} = -\epsilon^{BA}\epsilon_{AC}\psi_B = \delta^B_C\psi_B = \psi_C, \tag{10.25}$$

ugyanakkor viszont

$$\psi_A\epsilon^{AC} = -\epsilon^{CA}\psi_A = -\psi^C. \tag{10.26}$$

Az ϵ tehát metrikus tenzor szerepét játssza, segítségével a Weyl-spinorok indexeit fel és le lehet húzni, azonban csak akkor, ha az összegzés jobb felső és bal alsó indexre történik. Az összegzésnek ez az iránya fontos, mert ϵ antiszimmetrikus.

Képezzük a $\psi^A\chi_A$ kifejezést. Ez Lorentz-invariáns, úgyhogy tekinthetjük két Weyl-spinor skaláris szorzatának:

$$\begin{aligned} \psi'^A\chi'_A &= (\alpha^{-1\,T})^A{}_C\psi^C\alpha_A{}^B\chi_B = (\alpha^{-1})_C{}^A\alpha_A{}^B\psi^C\chi_B \\ &= \delta^B_C\psi^C\chi_B = \psi^B\chi_B. \end{aligned} \tag{10.27}$$

Ezek szerint a $\{\psi^A\}$ spinorok adják a $\{\psi_A\}$ spinorok duális terét. A vektorok transzponáltjának szokásos értelmezése, hogy azt a duális vektorral azonosítjuk. Most is így járunk el, és a Weyl-spinorok transzponáltját a

$$(\psi_A)^T = \psi^A, \qquad (\psi^A)^T = \psi_A \tag{10.28}$$

összefüggésekkel definiáljuk.

A komplex-konjugált önábrázolást a

$$\Lambda \;\leftrightarrow\; \alpha^\star \tag{10.29}$$

hozzárendelés definiálja. Ez éppen a $(0, \frac{1}{2})$ ábrázolás. Az ábrázolás $\dot{F}$ terét alkotó $\bar{\psi}_{\dot{A}}$ ($\dot{A} = \dot{1}, \dot{2}$) jobbkezes Weyl-spinorok transzformációja Lorentz-transzformáció során:

$$\bar{\psi}'_{\dot{A}} \;=\; (\alpha^\star)_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} \bar{\psi}_{\dot{B}}. \tag{10.30}$$

A felülvonás és a pont az index felett csak jelölés, nem jelent műveletet. Egyszerűen az $\dot{F}$ teret alkotó spinorokat és azok komponenseit így jelöljük megkülönböztetésül az F teret alkotó spinoroktól.

A komplex-konjugált önábrázolás duálisát a

$$\Lambda \;\leftrightarrow\; \alpha^{\star\,-1\,T} \tag{10.31}$$

megfeleltetés definiálja. Ez az ábrázolás az $\dot{F}^\star$ térben valósul meg, amelynek elemeit képező jobbkezes spinorok komponenseit $\bar{\psi}^{\dot{A}}$-val jelöljük. Ezek Lorentz-transzformáció során a

$$\bar{\psi}\,'^{\dot{A}} \;=\; (\alpha^{\star\,-1\,T})^{\dot{A}}{}_{\dot{B}} \bar{\psi}^{\dot{B}} \tag{10.32}$$

szabály szerint transzformálódnak.

A duális komplex-konjugált önábrázolás unitér-ekvivalens a komplex-konjugált önábrázolással, azaz létezik olyan $\bar{\epsilon}$ mátrix, amelynek segítségével tetszőleges α esetén:

$$\bar{\epsilon}\alpha^\star\bar{\epsilon}^{\,-1} \;=\; \alpha^{\star\,-1\,T}. \tag{10.33}$$

Ez a mátrix:

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv -(\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}). \tag{10.34}$$

Vezessük be továbbá a következő definíciókat:

$$(\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10.35}$$

$$\epsilon^{\dot{C}}{}_{\dot{A}} = \delta^{\dot{C}}_{\dot{A}}, \tag{10.36}$$

$$\epsilon_{\dot{A}}{}^{\dot{C}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon^{\dot{B}\dot{C}} = -\delta^{\dot{C}}_{\dot{A}}. \tag{10.37}$$

Ekkor teljesülnek az alábbi azonosságok:

$$\bar{\epsilon} = (\epsilon^{\dot{A}\dot{B}})^T, \tag{10.38}$$

$$\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = -\epsilon_{\dot{B}\dot{A}}, \qquad \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} = -\epsilon^{\dot{B}\dot{A}}, \tag{10.39}$$

$$\epsilon_{\dot{A}}{}^{\dot{C}} = -\epsilon^{\dot{C}}{}_{\dot{A}}, \tag{10.40}$$

$$\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon^{\dot{D}\dot{C}} = \delta^{\dot{D}}_{\dot{A}}\delta^{\dot{C}}_{\dot{B}} - \delta^{\dot{C}}_{\dot{A}}\delta^{\dot{D}}_{\dot{B}}. \tag{10.41}$$

A $\bar{\psi}_{\dot{A}}$ spinor duálisa:

$$\bar{\epsilon}\bar{\psi} = \epsilon^T\bar{\psi} = \bar{\psi}\epsilon, \tag{10.42}$$

azaz komponensekben kiírva:

$$\bar{\psi}^{\dot{A}} \;=\; \bar{\psi}_{\dot{B}}\epsilon^{\dot{B}\dot{A}}. \tag{10.43}$$

Másrészt,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\dot{B}\dot{A}}\bar{\psi}^{\dot{A}} &= \epsilon_{\dot{B}\dot{A}}\bar{\psi}_{\dot{C}}\epsilon^{\dot{C}\dot{A}} = \epsilon_{\dot{B}\dot{B}}(\epsilon^{\dot{C}\dot{A}})^T\bar{\psi}_{\dot{C}} \\
&= \epsilon_{\dot{B}\dot{A}}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\bar{\psi}_{\dot{C}} = \delta^{\dot{C}}_{\dot{B}}\bar{\psi}_{\dot{C}} \\
&= \bar{\psi}_{\dot{B}}.
\end{aligned} \tag{10.44}$$

Az $\bar{\epsilon}$ tehát metrikus tenzor szerepét játssza a komplex-konjugált önábrázolás és duálisának terében, ha az összegzés a bal alsó és a jobb felső indexre történik. A

$$(\bar{\psi}\bar{\chi}) = \bar{\psi}_{\dot{A}}\bar{\chi}^{\dot{A}} \tag{10.45}$$

kifejezés Lorentz-skalár, ezért megint definiálhatjuk a transzponáltat a duális spinor komponenseivel:

$$(\bar{\psi}_{\dot{A}})^T \equiv \bar{\psi}^{\dot{A}}, \qquad (\bar{\psi}^{\dot{A}})^T \equiv \bar{\psi}_{\dot{A}}. \tag{10.46}$$

A spinorkomponensek indexeinek felcserélése most is a skalárszorzat előjelváltását eredményezi:

$$\bar{\psi}_{\dot{A}}\bar{\chi}^{\dot{A}} \;=\; -\bar{\psi}^{\dot{A}}\bar{\chi}_{\dot{A}}. \tag{10.47}$$

A balkezes és a jobbkezes Weyl-spinorok komplex-konjugálásban különböznek egymástól, ami abból látszik, hogy az $(\frac{1}{2}, 0)$ ábrázolásban az α mátrix, a $(0, \frac{1}{2})$ ábrázolásban az $\alpha^\star$ mátrix felel meg ugyanannak a Lorentz-transzformációnak. Mivel azonban ψ és $\bar{\psi}$ két inekvivalens ábrázolás vektorterében vannak, ezért önkényesen definiálhatjuk, hogy ψ felső és alsó indexes komponensének komplex-konjugáltját hogyan feleltetjük meg $\bar{\psi}$ komponenseinek. Erre érvényes az alábbi konvenció:

$$\bar{\psi}_{\dot{A}} = (\psi^A)^\star, \qquad \bar{\psi}^{\dot{A}} = (\psi_A)^\star. \tag{10.48}$$

A transzponálás szabályait is figyelembe véve az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$(\psi_A)^+ = (\psi_A)^{\star T} = \bar{\psi}_{\dot{A}}, \tag{10.49}$$

$$(\psi^A)^+ = \bar{\psi}^{\dot{A}}, \tag{10.50}$$

$$(\bar{\psi}_{\dot{A}})^+ = \psi_A, \tag{10.51}$$

$$(\bar{\psi}^{\dot{A}})^+ = \psi^A. \tag{10.52}$$

10.2.2 Spin és statisztika

A fentiekben láttuk, hogy a Lorentz-invariáns $\psi\chi = \psi^A\chi_A$ skalárszorzat azonos átalakítással a $\psi\chi = -\psi_B\chi^B$ alakra hozható. Ha azt akarjuk, hogy a skalárszorzat értéke ne függjön a tényezők sorrendjétől, azaz $\psi\chi = \chi\psi = \chi^B\psi_B$ legyen, akkor fel kell tennünk, hogy a spinorkomponensek antikommutálnak.

A fizikában a Weyl-spinorok $\frac{1}{2}$-spinű részecskéket írnak le. Feltesszük a továbbiakban, hogy a spinorkomponensek antikommutálnak:

$$\psi_A\chi^B = -\chi^B\psi_A, \qquad \ldots \tag{10.53}$$

$$\psi_A\bar{\chi}^{\dot{B}} = -\bar{\chi}^{\dot{B}}\psi_A, \qquad \ldots \tag{10.54}$$

$$\bar{\psi}_{\dot{A}}\bar{\chi}^{\dot{B}} = -\bar{\chi}^{\dot{B}}\bar{\psi}_{\dot{A}}, \qquad \ldots \tag{10.55}$$

az indexek tetszőleges helyzete esetén. Mivel az egész spinű ábrázolások páros számú Weyl-spinor-ábrázolás, a feles spinű ábrázolások pedig páratlan számú Weyl-spinor-ábrázolás direkt szorzataként állíthatók elő, feltevésünk biztosítja, hogy az egész spinű részecskéket kommutáló, a feles spinűeket antikommutáló klasszikus térmennyiségek fogják leírni. Későbbi tanulmányainkban látni fogjuk, hogy a kvantumtérelméletnek a Huygens-elven alapuló (Feynman-féle pályaintegrálokkal történő) megfogalmazásában éppen azáltal lehet biztosítani a Pauli-elvet, hogy azokat a tereket, amelyeknek a részecskéi feles spinűek, antikommutáló klasszikus térmennyiségekkel írjuk le.

A Weyl-spinorok komponensei tehát feltevésünk értelmében nem közönséges számok, hanem antikommutáló számok, ún. Grassmann-változók.

10.2.3 A σ-mátrixok

Foglalkozzunk először a σ-mátrixok indexszerkezetével. A $\sigma^\mu = (1, \vec{\tau})$ mátrixok ortonormált teljes rendszert alkotnak a 2×2-es komplex mátrixok terében. Láttuk, hogy a Λ Lorentz-transzformációnak SL(2,C)-ben az α mátrix, az x^μ négyes-vektornak pedig az $\tilde{x} = x^\mu \sigma_\mu$ mátrix felel meg. Lorentz-transzformáció során:

$$\tilde{x} \ \rightarrow \ \tilde{x}\,' = \alpha \tilde{x} \alpha^\dagger, \tag{10.56}$$

ahonnan

$$\Lambda^\mu_{\cdot\nu} \sigma_\mu \ = \ \alpha \sigma_\nu \alpha^\dagger. \tag{10.57}$$

Adjunk most másik értelmezést ezeknek az összefüggéseknek. Mondjuk azt, hogy nem x^μ változik, hanem σ_μ:

$$\sigma_\mu \ \rightarrow \ \sigma'_{\ \mu} = \alpha \sigma_\mu \alpha^\dagger. \tag{10.58}$$

Mivel α az ön-ábrázoláshoz tartozik, azért közönséges indexekre „hat", míg $\alpha^\dagger = \alpha^{\star T}$ a komplex-konjugált önábrázolás egyik elemének transzponáltja, s így pontozott indexekre „hat". Ebből következik, hogy a σ-mátrixoknak egy közönséges és egy pontozott indexe van. Az ábrázolásokat definiáló képletekből tudjuk, hogy α indexszerkezete $\alpha_A{}^B$, és $\alpha^\star$ indexszerkezete $(\alpha^\star)_{\dot{A}}{}^{\dot{B}}$, amiből $\alpha^\dagger$ indexeire $(\alpha^\star)^{\dot{B}}{}_{\dot{A}}$. Mindezt figyelembe véve:

$$\sigma_\mu \equiv (\sigma_\mu)_{B\dot{B}} \tag{10.59}$$

definiálja a σ-mátrixok indexszerkezetét. Ez az egyetlen lehetőség, ha az összegzések irányára vonatkozó előírásokat is betartjuk. Az indexeket most már kiírva:

$$(\sigma'_{\ \mu})_{A\dot{A}} \ = \ \alpha_A{}^B (\sigma_\mu)_{B\dot{B}} (\alpha^\star)^{\dot{B}}{}_{\dot{A}}. \tag{10.60}$$

A 2×2-es komplex mátrixok terében szokás még bevezetni a $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\tau})$ ortonormált bázist, amely a σ-mátrixokkal

$$\Lambda^\mu_{\cdot\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\bar{\sigma}^\mu \sigma'_{\ \nu}) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\bar{\sigma}'^{\mu} \sigma_\nu) \tag{10.61}$$

összefüggésben van. Innen

$$\bar{\sigma}'^{\mu} \ = \ \alpha^\dagger \bar{\sigma}^\mu \alpha, \tag{10.62}$$

ahonnan a korábbihoz hasonló megfontolások alapján az alábbi indexszerkezet adódik:

$$\bar{\sigma}^\mu \ = \ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{B}B}. \tag{10.63}$$

Az ϵ metrikus tenzor segítségével az indexek megint fel- és lehúzhatók:

$$(\sigma_\mu)^{A\dot{A}} \ = \ \epsilon^{AB} (\sigma_\mu)_{B\dot{B}} \epsilon^{\dot{B}\dot{A}}, \tag{10.64}$$

$$(\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{A}A} \ = \ \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{B}B} \epsilon_{BA}. \tag{10.65}$$

A fentiek alapján:

$$
\begin{aligned}
(\sigma^\mu) &= (\sigma^\mu_{B\dot{B}}) = (1, \vec{\tau}), && (10.66)\\
(\bar{\sigma}^\mu) &= (\bar{\sigma}^{\mu\,\dot{B}B}) = (1, -\vec{\tau}). && (10.67)
\end{aligned}
$$

A σ-mátrixok a jobbkezes spinorokat balkezes spinorokba képezik le, a $\bar{\sigma}$-mátrixok pedig, fordítva, a balkezes spinorokat képezik le jobbkezes spinorokba. Mivel $\mathrm{i}\tau_j$ és 1 SL(2,C)-mátrixok, érvényesek rájuk az alábbi összefüggések:

$$
\begin{aligned}
\epsilon(\mathrm{i}\tau_j)\epsilon^{-1} &= (\mathrm{i}\tau_j)^{-1T},\\
\epsilon 1 \epsilon^{-1} &= 1^T. && (10.68)
\end{aligned}
$$

Felhasználva, hogy $(\mathrm{i}\tau_j)^{-1} = -\mathrm{i}\tau_j$, az első egyenlet helyett írhatjuk, hogy

$$
\epsilon\tau_j\epsilon^{-1} = -\tau_j^T, \tag{10.69}
$$

amit a második egyenlettel közösen az alábbi egyenletben foglalhatunk össze:

$$
\epsilon\sigma^\mu\epsilon^{-1} = \bar{\sigma}^{\,\mu T}. \tag{10.70}
$$

Mivel

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\epsilon^{AB}),\\
\epsilon^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\epsilon^{\dot{B}\dot{A}}), && (10.71)
\end{aligned}
$$

az alábbiakat kapjuk:

$$
\epsilon^{AB}(\sigma^\mu)_{B\dot{B}}\epsilon^{\dot{B}\dot{A}} = (\bar{\sigma}^{\mu T})^{A\dot{A}}, \tag{10.72}
$$

azaz

$$
(\sigma^\mu)^{A\dot{A}} = (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}A}. \tag{10.73}
$$

Az áttérés σ-ról $\bar{\sigma}$-ra és viszont megfelel a közönséges és a pontozott indexek felcserélésének.

A σ-mátrixok teljességéből következik, hogy

$$
(\sigma_\mu)_{A\dot{A}}(\bar{\sigma}^{\,\mu})^{\dot{B}B} = 2\delta_A^B\delta_{\dot{A}}^{\dot{B}} = 2\epsilon_A{}^B\epsilon^{\dot{B}}{}_{\dot{A}}. \tag{10.74}
$$

Néhány további összefüggés:

$$
\begin{aligned}
(\bar{\sigma}_\mu\alpha\sigma^\mu)^{\dot{A}}{}_{\dot{B}} &= (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{A}A}\alpha_A{}^B(\sigma^\mu)_{B\dot{B}} = 2\alpha_A{}^A\delta_{\dot{B}}^{\dot{A}}, && (10.75)\\
(\sigma^\mu)_{A\dot{B}}(\bar{\sigma}^{\,\nu})^{\dot{B}A} &= 2g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\epsilon_A{}^A = g^{\mu\nu}\delta_A^A. && (10.76)
\end{aligned}
$$

10.2.4 Generátorok és magasabb dimenziós ábrázolások

Először belátunk néhány hasznos összefüggést, majd segítségükkel meghatározzuk a Lorentz-transzformációk generátorait a 2-dimenziós irreducibilis ábrázolásokban. Végül megszerkesztjük a vektor- és másodrendű tenzor-ábrázolásokat.

Az összefüggések:

1.
$$\psi\chi \;=\; \chi\psi. \tag{10.77}$$

2.
$$\bar\psi\bar\chi \;=\; \bar\chi\bar\psi. \tag{10.78}$$

3. Ha θ egyszerű Grassmann-szám, akkor $\theta\theta = 0$. Ha θ balkezes ill. jobbkezes spinor, akkor $\theta\theta \neq 0$:
$$\theta\theta = \theta^A\theta_A = 2\theta_2\theta_1 = 2\theta^2\theta^1 = -2\theta_1\theta_2 = -2\theta^1\theta^2, \tag{10.79}$$
$$\bar\theta\bar\theta = \bar\theta_{\dot A}\bar\theta^{\dot A} = 2\bar\theta_{\dot 1}\bar\theta_{\dot 2} = 2\bar\theta^{\dot 1}\bar\theta^{\dot 2} = -2\bar\theta_{\dot 2}\bar\theta_{\dot 1} = -2\bar\theta^{\dot 2}\bar\theta^{\dot 1}, \tag{10.80}$$
A bizonyításhoz fel kell használni, hogy az ϵ mátrix alkalmazásával $\theta^1 = \theta_2$ és $\theta^2 = -\theta_1$ adódik.

4.
$$\theta^A\theta^B \;=\; -\frac{1}{2}\epsilon^{AB}\theta\theta, \tag{10.81}$$
$$\bar\theta^{\dot A}\bar\theta^{\dot B} \;=\; -\frac{1}{2}\epsilon^{\dot A\dot B}\bar\theta\bar\theta. \tag{10.82}$$

5. Az alábbi képletek a Weyl-spinorok Fierz-rendezése néven ismeretesek:
$$(\theta\phi)(\theta\psi) \;=\; -\frac{1}{2}(\phi\psi)(\theta\theta) = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\phi\psi), \tag{10.83}$$
$$(\phi\psi)\bar\chi_{\dot A} \;=\; \frac{1}{2}(\phi\sigma^\mu\bar\chi)(\psi\sigma_\mu)_{\dot A}. \tag{10.84}$$
A bizonyítások:
$$\begin{aligned}\theta^A\phi_A\theta^B\psi_B &= -\theta^A\theta^B\phi_A\psi_B = \frac{1}{2}\epsilon^{AB}(\theta\theta)\phi_A\psi_B\\ &= -\frac{1}{2}(\theta\theta)\phi^B\psi_B,\end{aligned} \tag{10.85}$$
$$\begin{aligned}(\phi\psi)\bar\chi_{\dot A} &= \phi^B\psi_A\bar\chi_{\dot B}\delta^A_B\delta^{\dot B}_{\dot A} = \frac{1}{2}\phi^B(\sigma^\mu)_{B\dot A}\psi_A(\bar\sigma_\mu)^{\dot BA}\bar\chi_{\dot B}\\ &= \frac{1}{2}\psi_A(\sigma_\mu)^{A\dot B}\bar\chi_{\dot B}(\phi\sigma^\mu)_{\dot A}.\end{aligned} \tag{10.86}$$

6.

$$\begin{aligned}\sigma^\mu\bar\theta &= -\bar\theta\bar\sigma^\mu, &(10.87)\\ \theta\sigma^\mu &= -\bar\sigma^\mu\theta. &(10.88)\end{aligned}$$

Példaként az első egyenlőség bizonyítása:

$$(\sigma^\mu\bar\theta)_A = (\sigma^\mu)_{A\dot B}\bar\theta^{\dot B} = -\bar\theta_{\dot B}(\bar\sigma^\mu)^{\dot B}{}_A. \quad (10.89)$$

7.

$$\begin{aligned}\phi\sigma^\mu\bar\chi &= -\bar\chi\bar\sigma^\mu\phi, &(10.90)\\ (\theta\phi)^+ &= \bar\phi\bar\theta. &(10.91)\end{aligned}$$

A bizonyítások:

$$\begin{aligned}(\phi\sigma^\mu)_{\dot A}\bar\chi^{\dot A} &= -(\bar\sigma^\mu\phi)_{\dot A}\bar\chi^{\dot A} = \bar\chi^{\dot A}(\bar\sigma^\mu\phi)_{\dot A}\\ &= -\bar\chi\bar\sigma^\mu\phi, &(10.92)\\ (\theta^A\phi_A)^+ &= \bar\phi_{\dot A}\bar\theta^{\dot A}. &(10.93)\end{aligned}$$

8.

$$(\phi\sigma^\mu\bar\chi)^+ = (\chi\sigma^\mu\bar\phi). \quad (10.94)$$

Ennek következtében $(\psi\sigma^\mu\bar\psi)$ önadjungált. Lorentz-transzformációk során $(\phi\sigma^\mu\bar\chi)$ úgy transzformálódik, mint egy négyes-vektor.

9.

$$\begin{aligned}(\sigma^\mu\bar\theta)_A(\theta\sigma^\nu\bar\theta) &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\theta_A(\bar\theta\bar\theta), &(10.95)\\ (\theta\sigma^\mu\bar\theta)(\theta\sigma^\nu\bar\theta) &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta). &(10.96)\end{aligned}$$

Definiáljuk az alábbi mátrixokat:

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu\nu} &= \frac{\mathrm{i}}{4}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu - \sigma^\nu\bar\sigma^\mu), &(10.97)\\ \bar\sigma^{\mu\nu} &= \frac{\mathrm{i}}{4}(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\sigma^\mu). &(10.98)\end{aligned}$$

A $\sigma^{\mu\nu}$ mátrixnak két közönséges indexe van, a $\bar\sigma^{\mu\nu}$ mátrixnak pedig két pontozott indexe. Az így definiált mátrixok a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu\nu+} &= \bar\sigma^{\mu\nu}, &(10.99)\\ [\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(g_{\nu\rho}\sigma_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}\sigma_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}\sigma_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}\sigma_{\nu\rho}), &(10.100)\end{aligned}$$

és az utóbbihoz hasonló egyenlőség áll fenn $\bar\sigma^{\mu\nu}$-re is. Tehát $\sigma^{\mu\nu}$ ill. $\bar\sigma^{\mu\nu}$ a Lorentz-csoport generátorai az $(\frac{1}{2}, 0)$ ill. a $(0, \frac{1}{2})$ ábrázolásokban.

További azonosságok:

1. Vezessük be a teljesen antiszimmetrikus negyedrendű tenzort:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{0123} &= +1, &(10.101)\\
\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\delta\mu\nu\rho} &= \delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta\delta^\rho_\gamma+\delta^\nu_\alpha\delta^\rho_\beta\delta^\mu_\gamma+\delta^\rho_\alpha\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\gamma\\
&\quad -\delta^\mu_\alpha\delta^\rho_\beta\delta^\nu_\gamma-\delta^\rho_\alpha\delta^\nu_\beta\delta^\mu_\gamma-\delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta\delta^\rho_\gamma, &(10.102)\\
\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\gamma\delta\mu\nu} &= 2(\delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta-\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta), &(10.103)\\
\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} &= -24. &(10.104)
\end{aligned}$$

A Pauli-mátrixok csererelációit felhasználva beláthatjuk, hogy a $\sigma^{\mu\nu}$ és $\bar\sigma^{\mu\nu}$ mátrixok önduálisak:

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}, &(10.105)\\
\bar\sigma^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar\sigma_{\rho\sigma}. &(10.106)
\end{aligned}$$

2. A bevezetett mátrixok Lorentz-indexeikben antiszimmetrikusak,

$$\sigma^{\mu\nu}=-\sigma^{\nu\mu}, \tag{10.107}$$

de spinor-indexeikben szimmetrikusak:

$$\begin{aligned}
(\sigma^{\mu\nu})_{BA} &= (\sigma^{\mu\nu})_{AB}, &(10.108)\\
(\bar\sigma^{\mu\nu})_{\dot B\dot A} &= (\bar\sigma^{\mu\nu})_{\dot A\dot B}. &(10.109)
\end{aligned}$$

Nézzünk most magasabb dimenziós ábrázolásokat. Képezzük az $(1/2,0)\otimes(0,1/2)=(1/2,1/2)$ ábrázolás terét alkotó másodrendű spinorokat:

$$\psi^A\otimes\bar\chi_{\dot A}=\psi^A\bar\chi_{\dot A}. \tag{10.110}$$

Ezek minden indexük szerint úgy transzformálódnak mint a Weyl-spinorok. Előállíthatjuk őket

$$\psi^A\bar\chi_{\dot A} = \frac{1}{2}(\psi\sigma_\mu\bar\chi)(\sigma^\mu)_{A\dot A} \tag{10.111}$$

alakban. Ezért a Minkowski-tér egy

$$V_\mu = \frac{1}{2}(\psi\sigma_\mu\bar\chi) \tag{10.112}$$

négyes-vektora felel meg nekik. A (10.111) egyenlet ugyanis azt fejezi ki, hogy egy V_μ négyesvektor komponenseiből alkalmas lineáris kombinációval (amelynek együtthatóit a σ-mátrixok elemei adják) olyan négy mennyiség képezhető, amely az $(1/2,1/2)$ ábrázolás szerint transzformálódik.

Két balkezes Weyl-spinor direkt szorzata az $(1/2,0)\otimes(1/2,0)=(0,0)\oplus(1,0)$ ábrázolás terében van benne:

$$\psi_A\chi_B \;=\; -\frac{1}{2}(\psi\chi)\epsilon_{AB}+\frac{1}{2}(\psi\sigma_{\mu\nu}\chi)(\sigma^{\mu\nu})_{AB}. \qquad (10.113)$$

Az első tag Lorentz-invariáns skalár, A, B indexekben antiszimmetrikus, míg a második tag másodrendű antiszimmetrikus Lorentz-tenzor, amely A-ban, B-ben szimmetrikus. Az előbbi a (0,0) részt, utóbbi a balkezes $(1,0)$ részt képviseli. Általában a szimmetrikus $S_{AB}=S_{BA}$ spinorok az $(1,0)$ ábrázoláshoz tartoznak, míg az antiszimmetrikus $\phi_{AB}=-\phi_{BA}$ spinorok mindig skalárok, mert $\phi_{AB}=-\frac{1}{2}\phi^C_{\;C}\epsilon_{AB}$.

11 A Poincaré-csoport

11.1 Általános ismertető

A Minkowski-féle téridőben végzett eltolások, ,,forgatások" és tükrözések alkotják a Poincaré-csoportot, vagy más néven az $\mathcal{L}$ inhomogén Lorentz-csoportot. Ezek olyan $\{a,\Lambda\}$ transzformációk, amelyek az események x^μ négyes-vektorait

$$x^\mu \;\to\; x'^\mu=\Lambda^\mu_{\cdot\nu}x^\nu+a^\mu \qquad (11.1)$$

szerint transzformálják, miközben az események távolsága invariáns marad:

$$(x-y)^\mu(x-y)_\mu=(x'-y')^\mu(x'-y')_\mu \qquad (11.2)$$

Itt a^μ tetszőleges négyes-vektor és Λ tetszőleges homogén Lorentz-transzformáció, így:

$$\begin{aligned}\Lambda^{\cdot\mu}_{\rho}\Lambda^{\rho}_{\cdot\nu} &= \Lambda^{\mu}_{\cdot\rho}\Lambda^{\cdot\rho}_{\nu}=g^{\mu}_{\cdot\nu},\\ \Lambda^{\cdot\sigma}_{\mu}g_{\sigma\rho}\Lambda^{\cdot\rho}_{\nu} &= g_{\mu\nu}.\end{aligned} \qquad (11.3)$$

Ezek a transzformációk csoportot alkotnak az egymás utáni végrehajtásra, mint műveletre nézve:

$$\{a_2,\Lambda_2\}\{a_1,\Lambda_1\} \;=\; \{a_2+\Lambda_2a_1,\Lambda_2\Lambda_1\}. \qquad (11.4)$$

A csoport egységeleme: $\{0,I\}$, és tetszőleges $\{a,\Lambda\}$ elem inverze: $\{-\Lambda^{-1}a,\Lambda^{-1}\}$.

Az $\mathcal{L}$ Poincaré-csoport alcsoportként tartalmazza a $\{0,\Lambda\}$ homogén Lorentz-transzformációk $\mathcal{L}_h$ csoportját, valamint az $\{a,I\}$ téridőbeli eltolások $\mathcal{S}$ abeli csoportját. Tetszőleges $\{a,\Lambda\}\in\mathcal{L}$ csoportelem felírható egy eltolás és egy homogén Lorentz-transzformáció szorzataként:

$$\{a,\Lambda\}=\{a,I\}\{0,\Lambda\}=\{0,\Lambda\}\{\Lambda^{-1}a,I\}. \qquad (11.5)$$

A második egyenlőség azt mutatja, hogy az eltolások és a homogén Lorentz-transzformációk nem cserélhetők fel egymással. Az $\mathcal{L} \to \mathcal{L}_h$−ra: $\{a, \Lambda\} \to \{0, \Lambda\}$ leképezés homomorfizmus, amelynek magja az eltolások $\mathcal{S}$ csoportja, hiszen $\mathcal{S} \to I \in \mathcal{L}_h$. Ebből következik, hogy $\mathcal{S}$ invariáns alcsoport. Ezt kifejezi az alábbi egyenlőség:

$$\{0, \Lambda\}\{a, I\}\{0, \Lambda\}^{-1} = \{0, \Lambda\}\{a, \Lambda^{-1}\} = \{\Lambda a, I\} \in \mathcal{S} \tag{11.6}$$

Ugyanakkor a homogén Lorentz-csoport nem invariáns alcsoport, hiszen

$$\{a, I\}\{0, \Lambda\}\{a, I\}^{-1} = \{a, I\}\{-\Lambda a, \Lambda\} = \{a - \Lambda a, \Lambda\} \notin \mathcal{L}_h. \tag{11.7}$$

A Poincaré-csoport $\mathcal{L}_h$ alcsoportjának $\mathcal{L}_{hr}$ alcsoportját képezik a valódi ortochron Lorentz-transzformációk, ez a leszűkített homogén Lorentz-csoport. Az $\mathcal{L}_{hr}$ alcsoporttal szemben invariáns tulajdonságok találhatók:

1. A négyes-vektorok osztályozhatók időszerű, fényszerű és térszerű vektorokra, amelyekre rendre $x^\mu x_\mu > 0$, $= 0$ és < 0. Ez az osztályozás az $\mathcal{L}_{hr}$ alcsoport szempontjából invariáns, mivel $x^\mu x_\mu$ $\mathcal{L}_{hr}$−invariáns.

2. Ha x^μ és y^μ időszerű négyes-vektorok, akkor $x^\mu y_\mu$ előjelét $x^0 y^0$ előjele határozza meg. Valóban x^μ és y^μ időszerű, s ezért

$$\begin{aligned} (x^0)^2 &> g^{jk} x_j x_k = |g^{jk} x_j x_k|, \\ (y^0)^2 &> |g^{jk} y_j y_k|. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Ekkor a Schwartz-egyenlőtlenség alapján:

$$|x^0 y^0| \quad > \quad |g^{jk} x_j y_k|. \tag{11.9}$$

Ezt figyelembe véve,

$$\mathrm{sgn}(x^\mu y_\mu) \quad = \quad \mathrm{sgn}(x^0 y^0). \tag{11.10}$$

Ha mindkét időszerű vektor jövőbeli, vagy múltbeli, akkor $x^\mu y_\mu > 0$; ha az egyik múltbeli és a másik jövőbeli, akkor $x^\mu y_\mu < 0$.

Az időszerű vektoroknak az a tulajdonsága, hogy múltbeliek vagy jövőbeliek, invariáns a valódi ortochron Lorentz-transzformációkkal szemben. Legyen $x^\mu = (1, 0, 0, 0)$, akkor $(\Lambda x)^0 = \Lambda^0_{\cdot 0} \geq +1 > 0$, azaz $(\Lambda x)^\mu$ jövőbeli időszerű vektor. Legyen y^μ tetszőleges jövőbeli időszerű vektor. Megmutatjuk, hogy akkor $(\Lambda y)^\mu$ is az, tetszőleges $\Lambda \in \mathcal{L}_{hr}$ esetén. Csakugyan,

$$(\Lambda x)_\nu (\Lambda y)^\nu = x_\nu y^\nu = y^0 > 0, \tag{11.11}$$

ahol $(\Lambda x)^\mu$ jövőbeli időszerű vektor, de akkor $(\Lambda y)^\mu$ is az. Éppen ezt akartuk bizonyítani.

11.2 A leszűkített Poincaré-csoport

Tekintsük az inhomogén Lorentz-transzformációk csoportjának azon $\{a, \Lambda\}$ transzformációit, ahol $\Lambda \in \mathcal{L}_{hr}$ valódi ortochron Lorentz-transzformációk. Ezek a transzformációk alkotják a $\mathcal{P}$ leszűkített Poincaré-csoportot. Mivel $\mathcal{P}$-nek $\mathcal{S}$ invariáns abeli alcsoportja, azért $\mathcal{P}$ nem félegyszerű csoport.

A $\mathcal{P}$-csoport kétszeresen összefüggő. A $\mathcal{P}$-csoport $\bar{\mathcal{P}}$ univerzális fedőcsoportját azok az $\{a, \alpha\}$ transzformációk alkotják, ahol $\alpha \in$ SL(2,C). A fedőcsoport tetszőleges két elemének szorzata:

$$\{a_1, \alpha_1\}\{a_2, \alpha_2\} \quad = \quad \{a_1 + \Lambda_1 a_2, \alpha_1 \alpha_2\}, \tag{11.12}$$

ahol Λ_1 az α_1 képe $\mathcal{L}_{hr}-$ben.

Mivel $\mathcal{L}_{hr}$ nem kompakt, azért $\mathcal{P}$ sem kompakt (azonban lokálisan kompakt).

Tegyük fel, hogy a vizsgált S fizikai rendszernek a $\mathcal{P}$ leszűkített Poincaré-csoport szimmetriája. Ekkor az S rendszer energiasajátértékeihez az állapotvektorok olyan alterei tartoznak a Hilbert-térben, amelyek a $\mathcal{P}$ csoport unitér irreducibilis ábrázolásait valósítják meg. A csoport minden $\{a, \Lambda\}$ eleméhez egy a Hilbert-téren ható $\hat{\mathcal{U}}(a, \Lambda)$ unitér operátor tartozik. Ezek az unitér ábrázolások azonban végtelen dimenziósak. Bár $\mathcal{P}$ se nem félegyszerű, se nem kompakt, mégis minden unitér ábrázolása kiredukálható irreducibilis unitér ábrázolások direkt összegére.

Abból a feltevésből kiindulva, hogy a $\mathcal{P}$-csoport szimmetriája a kvantumterekkel leírt fizikai rendszernek, megkapjuk a téregyenleteket, és az elemi rendszerek osztályozását. Ezt a következő fejezetekben látni fogjuk. Az, hogy az ábrázolások a Hilbert-térben végtelen dimenziósak, azzal a fizikai ténnyel van összhangban, hogy az energia-impulzus operátor végtelen sok sajátértéket vehet fel.

Be lehet látni, hogy a $\mathcal{P}$-csoport folytonos unitér irreducibilis ábrázolásainak megkeresése egyenértékű a $\bar{\mathcal{P}}$ fedőcsoport folytonos unitér irreducibilis ábrázolásainak megkeresésével. Ezek az ábrázolások minden $\{a, \alpha\} \in \bar{\mathcal{P}}$ elemhez egy $\hat{\mathcal{U}}(a, \alpha)$ unitér operátort rendelnek úgy, hogy

$$\hat{\mathcal{U}}(a_1, \alpha_1)\hat{\mathcal{U}}(a_2, \alpha_2) \quad = \quad \hat{\mathcal{U}}(a_1 + \Lambda_1 a_2, \alpha_1 \alpha_2). \tag{11.13}$$

A $\{0, I\}$ elem képe az $\hat{I}$ egységoperátor, és $\hat{\mathcal{U}}(0, \alpha^{-1}) = \hat{\mathcal{U}}^{-1}(0, \alpha)$. Ehhez kapcsolódik a következő megjegyzés. Minden$\{a, \Lambda\} \in \mathcal{P}$ csoportelemhez két elem tartozik a fedőcsoportban: $\{a, \pm\alpha_\Lambda\} \in \bar{\mathcal{P}}$. Ugyanakkor, ha adott ábrázolásban $\{a, \alpha_\Lambda\} \in \bar{\mathcal{P}}$ képe az $\hat{\mathcal{U}}(a, \alpha_\Lambda)$ operátor, akkor ugyanebben az ábrázolásban $\{a, -\alpha_\Lambda\} \in \bar{\mathcal{P}}$ képe vagy az $\hat{\mathcal{U}}(a, \alpha_\Lambda)$ operátor, vagy az $-\hat{\mathcal{U}}(a, \alpha_\Lambda)$ operátor. Ha a pozitív előjelet választjuk, akkor egyúttal a $\mathcal{P}$-csoport ábrázolását is megkaptuk.

11.3 A leszűkített Poincaré-csoport infinitezimális generátorai

Az infinitezimális transzformációk, olyan $\{a, \Lambda\} \in \mathcal{P}$ transzformációk, ahol a^μ infinitezimális és $\Lambda^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu}$ csak az infinitezimális antiszimmetrikus $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ tenzorral különbözik az azonossági transzformációtól. A fedőcsoport megfelelő $\{a, \alpha(\epsilon)\} \in \bar{\mathcal{P}}$ elemét olyan $\hat{\mathcal{U}}(a, I + \epsilon)$ unitér operátor ábrázolja, amely az egységoperátortól csak infinitezimálisan különbözik. Az infinitezimális transzformáció operátorának sorfejtésével definiáljuk a $\mathcal{P}$-csoport infinitezimális generátorait:

$$\hat{\mathcal{U}}(a, I+\epsilon) \;=\; \hat{I} + \mathrm{i} a_\mu \hat{P}^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}. \tag{11.14}$$

Mivel $\hat{\mathcal{U}}$ unitér, a $\hat{P}^\mu$ és a $\hat{J}^{\mu\nu} = \mathrm{i}M^{\mu\nu}$ operátorok önadjungáltak és így nekik megmaradó fizikai mennyiségek felelnek meg. Az $\epsilon^{\mu\nu}$ mátrix antiszimmetrikusságából következik, hogy

$$\hat{J}^{\mu\nu} \;=\; -\hat{J}^{\nu\mu}. \tag{11.15}$$

A leszűkített Poincaré-csoportnak tehát 10 darab generátora van; $\mathcal{P}$ egy 10-paraméteres Lie-csoport. A Lorentz-forgatások 6 független generátorából sokszor célszerű a

$$\hat{J}^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{J}^{jk} \qquad (i,j,k = 1,2,3) \tag{11.16}$$

3-dimenziós axiálvektort és a

$$\hat{K}^i = \hat{J}^{0i} \qquad (i = 1,2,3) \tag{11.17}$$

3-dimenziós vektort képezni.

Határozzuk meg az infinitezimális generátorok csererelációit, amelyek definiálják a Poincaré-algebrát. Mivel a csoportelemek szorzatát ábrázoló operátor a csoportelemeket ábrázoló operátorok ugyanolyan sorrendű szorzata, írhatjuk, hogy

$$\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha^{-1})\hat{\mathcal{U}}(a_1,\alpha_1)\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha) = \hat{\mathcal{U}}(\Lambda^{-1}a_1, \alpha^{-1}\alpha_1\alpha), \tag{11.18}$$

ahol $\Lambda \in \mathcal{L}_{hr}$ az $\alpha \in$ SL(2,C) mátrixnak megfelelő Lorentz-transzformáció. A továbbiakban ennek az egyenletnek két speciális esetét vizsgáljuk.

1. Legyen $\alpha_1 = I$ és a_1^μ infinitezimális:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{U}}^{-1}(0,\alpha)\left(\hat{I} + \mathrm{i}a_{1\mu}\hat{P}^\mu\right)\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha) &= \hat{I} + \mathrm{i}\left(\Lambda^{-1}a_1\right)_\mu \hat{P}^\mu, \\
\hat{\mathcal{U}}^{-1}(0,\alpha)(a_1)_\mu\hat{P}^\mu\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha) &= \left(\Lambda^{-1}\right)^{\cdot\mu}_{\rho}(a_1)_\mu\hat{P}^\rho, \\
\hat{\mathcal{U}}^{-1}(0,\alpha)\hat{P}^\mu\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha) &= \Lambda^\mu_{\cdot\rho}\hat{P}^\rho.
\end{aligned} \tag{11.19}$$

2. Legyen $a_1^\mu = 0$ és $\alpha_1 = I + \epsilon$:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{U}}^{-1}(0,\alpha)\left(\hat{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}\right)\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha) &= \hat{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\Lambda^{-1}\right)_{\rho}^{\cdot\mu}\epsilon_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\cdot\sigma}\hat{J}^{\rho\sigma}, \\
\hat{\mathcal{U}}^{-1}(0,\alpha)\hat{J}^{\mu\nu}\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha) &= \Lambda^{\mu}_{\cdot\rho}\Lambda^{\nu}_{\cdot\sigma}\hat{J}^{\rho\sigma}. \qquad (11.20)
\end{aligned}
$$

Tegyük most fel, hogy az (11.19) és az (11.20) egyenletekben $\Lambda = I + \epsilon$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha) &= \hat{I} - \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}, \\
\hat{\mathcal{U}}^{-1}(0,\alpha) &= \hat{I} + \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}. \qquad (11.21)
\end{aligned}
$$

Ezeket behelyettesítve a (11.19) és az (11.20) egyenletekbe, megkapjuk a Poincaré-generátorok algebráját definiáló kommutációs relációkat:

$$
\begin{aligned}
[\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu] &= 0, \qquad (11.22) \\
[\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{P}^\lambda] &= \mathrm{i}\left(g^{\nu\lambda}\hat{P}^\mu - g^{\mu\lambda}\hat{P}^\nu\right), \qquad (11.23) \\
[\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{J}^{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}\left(g^{\nu\rho}\hat{J}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}\hat{J}^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}\hat{J}^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}\hat{J}^{\mu\rho}\right). \qquad (11.24)
\end{aligned}
$$

A továbbiakban szükségünk lesz a Pauli-Ljubanszki-vektorra, amelyet a Poincaré-csoport infinitezimális generátoraiból képezünk:

$$
\hat{W}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\hat{J}^{\nu\rho}\hat{P}^\sigma = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\hat{J}^{\rho\sigma}\hat{P}^\nu. \qquad (11.25)
$$

Nem Lorentz-kovariáns alakban a Pauli-Ljubanszki-vektor komponensei:

$$
\begin{aligned}
\hat{W}^0 &= \hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}, \qquad (11.26) \\
\hat{\vec{W}} &= -\hat{\vec{J}}\hat{P}^0 - \hat{\vec{K}} \times \hat{\vec{P}}. \qquad (11.27)
\end{aligned}
$$

A Pauli-Ljubanszki-vektor az alábbi összefüggéseknek tesz eleget:

$$
\begin{aligned}
\hat{W}_\mu\hat{P}^\mu &= 0, \qquad (11.28) \\
[\hat{P}^\mu, \hat{W}^\sigma] &= 0, \qquad (11.29) \\
[\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{W}^\sigma] &= \mathrm{i}(g^{\nu\sigma}\hat{W}^\mu - g^{\mu\sigma}\hat{W}^\nu), \qquad (11.30) \\
[\hat{W}^\mu, \hat{W}^\nu] &= -\mathrm{i}\epsilon^{\mu\nu}_{\cdot\cdot\rho\sigma}\hat{W}^\rho\hat{P}^\sigma. \qquad (11.31)
\end{aligned}
$$

A leszűkített Poincaré-csoport Casimir-operátorai:

$$
\begin{aligned}
\hat{P}^2 &= \hat{P}^\mu\hat{P}_\mu, \qquad (11.32) \\
\hat{W}^2 &= \hat{W}^\mu\hat{W}_\mu = \frac{1}{2}\hat{J}_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}\hat{P}^2 - \hat{J}_{\mu\nu}\hat{J}^{\rho\nu}\hat{P}^\mu\hat{P}_\rho. \qquad (11.33)
\end{aligned}
$$

A definíciójukból adódóan a Poincaré-csoport generátorai az infinitezimális eltolások és forgatások generátorai a Minkowski-térben. Mivel feltettük, hogy olyan fizikai rendszerről beszélünk, amely invariáns a leszűkített Poincaré-csoport transzformációival szemben, azért a generátoroknak megmaradó mennyiségek felelnek meg. (Most unitér ábrázolásokat keresünk, így a generátorok önadjungáltak.) A nem relativisztikus mechanika mintájára azt mondjuk, hogy az a P^μ mennyiség, amely a rendszer téridőbeli eltolásokkal szembeni invarianciája miatt megmaradó, az energia és a hármas-impulzus által alkotott négyes-impulzus. Ugyancsak az analógia alapján, $J^{\mu\nu}$-t az impulzusmomentum (négyes-)tenzorával (másodrendű, antiszimmetrikus) azonosítjuk. A fizikai rendszer nyugalmi rendszerében az impulzusmomentum-tenzor éppen a spin-tenzor.

11.4 A $\bar{\mathcal{P}}$-csoport unitér irreducibilis ábrázolásainak négyes-impulzus szerinti osztályozása

Legyen $\{|P\zeta\rangle\}$ a négyes-impulzus operátorának sajátvektoraiból álló bázis a Hilbert-térben:

$$\hat{P}^\mu|P\zeta\rangle \;=\; P^\mu|P\zeta\rangle. \tag{11.34}$$

A négyes-impulzus valamennyi komponense egyidejűleg mérhető, mert operátoraik páronként felcserélhetők. ζ jelenti a bázis teljességéhez szükséges többi kvantumszámot. Először azt a kérdést válaszoljuk meg, hogy milyen P^μ értékekhez tartozó sajátvektorok alkotják az irreducibilis unitér ábrázolások bázisát.

A $\bar{\mathcal{P}}$-csoport unitér ábrázolásaira:

$$\hat{\mathcal{U}}(a,\alpha) \;=\; \hat{\mathcal{U}}(a,I)\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha). \tag{11.35}$$

Itt a téridőbeli eltolást

$$\hat{\mathcal{U}}(a,I) \;=\; \exp\{\mathrm{i}a_\mu\hat{P}^\mu\} \tag{11.36}$$

ábrázolja. A bevezetett bázis a téridőbeli eltolások $\mathcal{S}$ alcsoportjának ábrázolási tere, amelyben az eltolásokat ábrázoló mátrixok blokkdiagonálisak:

$$\hat{\mathcal{U}}(a,I)|P\zeta\rangle \;=\; \exp\{\mathrm{i}a_\mu P^\mu\}\;|P\zeta\rangle. \tag{11.37}$$

Ha valamely $|P\zeta\rangle$ vektor egy irreducibilis ábrázolás terében benne van, akkor bármely $|\Lambda P\;\zeta\rangle$ is benne van ennek az ábrázolásnak a terében, ahol $\Lambda\in\mathcal{L}_{hr}$ tetszőleges (ld. a (11.19) egyenletet):

$$\begin{aligned}\hat{P}^\mu\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha)|P\zeta\rangle \;&=\; \hat{\mathcal{U}}(0,\alpha)\Lambda^\mu_{\cdot\nu}\hat{P}^\nu|P\zeta\rangle = \Lambda^\mu_{\cdot\nu}P^\nu\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha)|P\zeta\rangle,\\ \hat{\mathcal{U}}(0,\alpha)|P\zeta\rangle \;&=\; \sum_\eta c_{\eta\zeta}(\alpha,P)|\Lambda P\;\eta\rangle.\end{aligned} \tag{11.38}$$

Az utolsó egyenlőség csupán azt fejezi ki, hogy $\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha)|P\zeta\rangle$ a ΛP sajátértékhez tartozó altérben van, és ezért léteznek olyan $c_{\eta\zeta}(\alpha, P)$ együtthatók, amelyek segítségével $\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha)|P\zeta\rangle$ kikombinálható ezen altér $|\Lambda P\ \zeta\rangle$ bázisvektoraiból.

Mivel $\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha)$ unitér, a P^μ sajátértékhez tartozó $|P\zeta\rangle$ ortonormált bázisból képzett $\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha)|P\zeta\rangle$ vektorok a $(\Lambda P)^\mu$ sajátértékhez tartozó ortonormált bázist alkotnak. Ezért a különböző P^μ sajátértékekhez tartozó alterek ζ szerinti elfajultságának foka azonos.

Ha P' és P'' két olyan négyes-impulzus, hogy nincsen olyan Λ Lorentz-transzformáció, amely átvinné őket egymásba, akkor $\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha)|P'\zeta\rangle$ és $\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha)|P''\zeta\rangle$ két diszjunkt invariáns alteret képeznek, ha α befutja az összes elemét SL(2,C)-nek. Ha tehát két ilyen vektor benne van egy unitér ábrázolásban, akkor az reducibilis. A fejezet elején feltett kérdésre tehát az a válasz, hogy a $|P\zeta\rangle$ állapotvektorok akkor és csak akkor alkotják egy irreducibilis ábrázolás bázisát, ha P^μ pontosan azokat az értékeket futja be, amelyek egy (tetszőlegesen) rögzített standard $\bar{P}^\mu$ négyes-impulzus értékből valódi homogén Lorentz-transzformációkkal leszármaztathatók.

Mivel $\hat{P}^2$ Casimir-operátor, az irreducibilis ábrázolások első osztályozása P^2 alapján történik. Az $\mathcal{L}_{hp}$ valódi homogén Lorentz-transzformációk nem változtatják meg a négyes-vektorok 0-adik komponensének előjelét. Így $\mathrm{sgn}P^0$ is invariáns. Ezen ismérvek alapján az irreducibilis ábrázolások következő osztályait kapjuk:

1.
   - (m_+) : $P^2 = m^2$ $(m > 0)$, $P^0 > 0$;
     P^μ egy jövőbeli hiperboloid pontja.
   - (m_-) : $P^2 = m^2$ $(m > 0)$, $P^0 < 0$;
     P^μ egy múltbeli hiperboloid pontja.
2.
   - (0_+) : $P^2 = 0$, $P^0 > 0$;
     P^μ a jövőbeli fénykúp pontja.
   - (0_-) : $P^2 = 0$, $P^0 < 0$;
     P^μ a múltbeli fénykúp pontja.
3. (σ): $P^2 = -\sigma^2$;
   P^μ térszerű hiperboloid pontja.
4. (0_0): $P^2 = 0$, $P^\mu = 0$;
   P^μ az origó.

A fizikai alkalmazásokban a nem zérus nyugalmi tömegű rendszerek állapotvektorai a $(m_\pm)$-ábrázolások szerint transzformálódnak, a zérus nyugalmi tömegű rendszerek állapotai pedig a $(0_\pm)$ ábrázolások tereit alkotják. A (σ) ábrázolásoknak nincsen fizikai megvalósulása. A (0_0) ábrázolást az eltolás-invariáns fizikai vákuum valósítja meg.

Adott irreducibilis ábrázoláshoz tartozó tetszőleges $|\psi\rangle$ állapotnak a bázisállapotok ,,irányába eső" komponensei definiálják a hullámfüggvényt:

$$\psi(P\zeta) \;=\; \langle P\zeta|\psi\rangle. \tag{11.39}$$

Két tetszőleges hullámfüggvény skalárszorzatát

$$\langle\phi|\psi\rangle \;=\; \sum_\zeta \int d^4\mu(P,\zeta)\phi^\star(P,\zeta)\psi(P,\zeta) \tag{11.40}$$

összefüggéssel értelmezzük, ahol a $d^4\mu$ integrálási mértéket meg lehet úgy választani, hogy csak az adott irreducibilis ábrázolás invariánsaitól függjön:

$$\begin{array}{ll}
(m_+): & d^4\mu = 2\delta(P^2-m^2)\Theta(P^0)d^4P, \\
(m_-): & d^4\mu = 2\delta(P^2-m^2)(1-\Theta(P^0))d^4P, \\
(0_+): & d^4\mu = 2\delta(P^2)\Theta(P^0))d^4P, \\
(0_-): & d^4\mu = 2\delta(P^2)(1-\Theta(P^0))d^4P,
\end{array}$$

Ekkor az $(m_\pm)$ ábrázolásokban:

$$\begin{aligned}
\langle\phi|\psi\rangle \;&=\; \sum_\zeta \int d^4P \frac{\delta(P^0 \mp \sqrt{\vec{P}^{\,2}+m^2})}{\sqrt{\vec{P}^{\,2}+m^2}}\phi^\star(P,\zeta)\psi(P,\zeta) \\
&=\; \sum_\zeta \int \frac{d^3P}{\sqrt{\vec{P}^{\,2}+m^2}}\phi^\star(P,\zeta)\psi(P,\zeta),
\end{aligned} \tag{11.41}$$

és

$$\langle P\zeta|P'\zeta'\rangle \;=\; \sqrt{\vec{P}^{\,2}+m^2}\,\delta_{\zeta\zeta'}\delta^{(3)}(\vec{P}-\vec{P}\,'). \tag{11.42}$$

Ugyanezek a képletek alkalmazhatók a $(0_\pm)$ ábrázolások esetén is $m=0$ helyettesítéssel.

A normálás fenti megválasztásából következik, hogy az a $\hat{\Pi}(\Lambda)$ operátor, amelyet

$$\hat{\Pi}(\Lambda)|P\zeta\rangle \;=\; |\Lambda P\,\zeta\rangle \tag{11.43}$$

definiál, unitér. Ekkor a

$$\hat{D}(\alpha) \;=\; \hat{\Pi}^\dagger(\Lambda)\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha) \tag{11.44}$$

operátor is unitér. Rögzített P-hez tartozó irreducibilis ábrázolásban ez az operátor ábrázolja a Lorentz-forgatásokat (ld. a (11.38) egyenletet):

$$\begin{aligned}
\hat{D}(\alpha)|P\zeta\rangle \;&=\; \sum_\eta c_{\eta\zeta}(\alpha,P)\hat{\Pi}^\dagger(\Lambda)|\Lambda P\,\eta\rangle \\
&=\; \sum_\eta c_{\eta\zeta}(\alpha,P)|P\eta\rangle.
\end{aligned} \tag{11.45}$$

Innen látszik, hogy a $c_{\eta\zeta}$ mátrix a $\hat{D}(\alpha)$ Lorentz-transzformációkat ábrázolja az adott ábrázolási osztályok valamelyikében adott P esetén, ezért $c_{\eta\zeta}$ unitér mátrix.

Végezetül fogadjuk el bizonyítás nélkül az alábbi állítást. Ha ismerjük az irreducibilis ábrázolások valamely osztályában a standard négyes-impulzushoz tartozó $c_{\eta\zeta}$ ábrázolást, akkor ebből tetszőleges négyes-impulzushoz tartozó irreducibilis ábrázolás megszerkeszthető. A továbbiakban ezért azt fogjuk megvizsgálni, hogy az egyes ábrázolási osztályokban milyenek az adott (standard) négyes-impulzushoz tartozó unitér irreducibilis ábrázolások.

11.5 A kis-csoport és irreducibilis ábrázolásai

(A jelen fejezetben a szóhasználatban nem fogunk mindig élesen különbséget tenni aközött, hogy $\bar{\mathcal{P}}$ vagy $\mathcal{P}$ ábrázolásairól beszélünk. A jelölésekben azonban következetesek leszünk, így α, $\alpha_{\mathcal{R}}$, α_L $\in$SL(2,C), míg Λ, $\mathcal{R}$, $L \in \mathcal{L}_{hr}$.)

Az eddigiekből azt láttuk, hogy a leszűkített Poincaré-csoport unitér irreducibilis ábrázolásai során a téridőbeli eltolások $\exp\{\mathrm{i}a_\mu \hat{P}^\mu\}$ alakban ábrázolhatók, és az ábrázolás terét a négyes-impulzus sajátvektoraiból álló $\{|P\zeta\rangle\}$ bázis feszíti ki. Ebben minden olyan P^μ sajátértékhez tartozó alteret szerepeltetni kell, amely egy tetszőlegesen választott $\bar{P}^\mu$ standard négyes-impulzusból Lorentz-transzformációval leszármaztatható.

Az eddigiek alapján magukat a valódi ortochron Lorentz-transzformációkat olyan $\hat{D}^{(P)}(\alpha)$ operátor ábrázolja a fenti ábrázolási tér minden egyes P^μ-höz tartozó alterében, amelynek $c_{\eta\zeta}(\alpha, P)$ mátrixa unitér. Az előző fejezetből az is kiderült, hogy valamennyi P^μ-höz tartozó ábrázolási altérnek ugyanaz a dimenziója. A bonyodalmat az okozza, hogy maguk az ábrázolást megvalósító $c_{\eta\zeta}(\alpha, P)$ mátrixok P^μ értékétől is függenek. Ahhoz, hogy a Poincaré-csoport unitér irreducibilis ábrázolásait megkapjuk, meg kell keresnünk a Lorentz-transzformációk $\hat{D}^{(P)}(\alpha)$ ábrázolásait. Annak az α (ill. Λ) Lorentz-transzformációnak az ábrázolását keressük, amelyet abban a rendszerben végzünk, amelyben az S fizikai rendszer négyes impulzusa P^μ. Úgy járunk el, hogy áttérünk arra a vonatkoztatási rendszerre, amelyben az S fizikai rendszer négyes-impulzusa a standard $\bar{P}^\mu$ érték. Ebben a vonatkoztatási rendszerben valamilyen $\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha, P)$ (ill. $\mathcal{R}(\alpha, P)$) Lorentz-transzformáció vezet ugyanarra az eredményre, mint amire α az eredeti rendszerben, ahol S négyes-impulzusa P^μ. Az α és az $\alpha_{\mathcal{R}}$ között (ill. Λ és $\mathcal{R}$ között) az az $\alpha_L(P)$ (ill. $L(p)$) Lorentz-transzformáció teremt kapcsolatot, amely a $\bar{P}^\mu$ standard négyes-impulzusból előállítja P^μ-t. $\mathcal{R}$-et Wigner-forgatásnak, L-et Wigner-lökésnek nevezzük. A Wigner-lökéseknek az felel meg, hogy a $|\bar{P}\zeta\rangle$ bázisvektorokról (a $\bar{P}^\mu$ értékhez tartozó altérről) áttérünk a $|P\zeta\rangle$ bázisvektorokra (a P^μ értékhez tartozó altérre). Így tulajdonképpen a Wigner-forgatások ábrázolásait kell megkeresnünk. Utána már könnyűszerrel megkapjuk majd tetszőleges α és végül tetszőleges Poincaré-transzformáció unitér irreducibilis ábrázolását. A Wigner-forgatások csoportot alkotnak, mint majd látni fogjuk, ez az ún. kis-csoport. Célunk ebben a fejezetben, hogy megkeressük a Wigner-féle kis-csoport unitér irreducibilis ábrázolásait és ezzel teljessé tegyük a Poincaré-csoport unitér irreducibilis ábrázolásainak felderítését. Miután vázoltuk, hogy hogyan fogunk eljárni, most nézzük mindezt részletesen.

Kiindulási pontunk a $\hat{D}^{(P)}$ ábrázolást definiáló (11.45) képlet:

$$\hat{D}^{(P)}(\alpha)|P\zeta\rangle \;=\; \sum_{\eta} c_{\eta\zeta}(\alpha, P)|P\eta\rangle, \tag{11.46}$$

ahol $c_{\eta\zeta}(\alpha, P)$ unitér mátrixok. Válasszuk $\bar{P}^{\mu}$-t standard négyes-impulzusnak. Definiáljuk az $L(P)$ Wigner-lökést azzal, hogy ez az a Lorentz-transzformáció, amely $\bar{P}^{\mu}$-ből előállítja P^{μ}-t:

$$L(P)\,\bar{P} \;=\; P. \tag{11.47}$$

Követeljük meg, hogy $L(P)$ P^{μ}-ben folytonos legyen. Ekkor $L(\bar{P}) = I$, s így egyértelműen létezik egy $\alpha_L(P) \in$ SL(2,C), amely megfelel a fedőcsoportban az $L(P)$ Wigner-lökésnek. Legyen továbbá a $\{|P\zeta\rangle\}$ bázis olyan, hogy

$$\hat{U}(0, \alpha_L(P))|\bar{P}\zeta\rangle \;=\; |P\zeta\rangle. \tag{11.48}$$

Definiáljuk ezután az $\mathcal{R}(\Lambda, P)$ ún. Wigner-forgatásokat:

$$\mathcal{R}(\Lambda, P) \;=\; L^{-1}(\Lambda P)\,\Lambda L(P). \tag{11.49}$$

Ezek a $\bar{P}^{\mu}$ standard négyes-impulzust invariánsan hagyják,

$$\mathcal{R}(\Lambda, P)\bar{P} = \bar{P}, \tag{11.50}$$

hiszen $L(P)\;\bar{P} = P$, $\Lambda L(P)\;\bar{P} = \Lambda P$ és $L^{-1}(\Lambda P)\;\Lambda P = \bar{P}$. A Wigner-forgatások tehát azok a Lorentz-transzformációk, amelyek a téridőben a $\bar{P}^{\mu}$ standard négyes-impulzus körül „forgatnak”. A Wigner-forgatásoknak SL(2,C)-ben az

$$\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda, P) \;=\; \alpha_L^{-1}(\Lambda P)\,\alpha_\Lambda\,\alpha_L(P) \tag{11.51}$$

mátrixok felelnek meg. Adott P^{μ} esetén ezek SL(2,C) egy alcsoportját képezik, amelyet a Wigner-féle kis-csoportnak nevezünk. Tetszőleges Λ Lorentz-transzformáció előáll

$$\Lambda \;=\; L(\Lambda P)\,\mathcal{R}(\Lambda, P)\,L^{-1}(P) \tag{11.52}$$

alakban Wigner-forgatás és Wigner-lökések segítségével. Ennek megfelelően:

$$\alpha_\Lambda \;=\; \alpha_L(\Lambda P)\,\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda, P)\,\alpha_L^{-1}(P). \tag{11.53}$$

A választott $\{|\bar{P}\zeta\rangle\}$ bázisban ζ jelentését most definiáljuk azzal, hogy ez a bázis adja a kis-csoport unitér irreducibilis ábrázolásának terét. Ezt, a négyes-impulzus standard értékéhez mint sajátértékhez tartozó sajátvektorokból álló teret kis Hilbert-térnek nevezzük. Felhasználva a (11.46) egyenlőséget, valamint, hogy

$$\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P)) = \hat{\Pi}(\mathcal{R}(\alpha_\Lambda,P))\,\hat{D}(\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P)), \tag{11.54}$$

kapjuk az alábbi egyenletet:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))|\bar{P}\zeta\rangle &= \hat{\Pi}(\mathcal{R}(\alpha_\Lambda,P))\sum_\eta D_{\eta\zeta}(\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))|\bar{P}\eta\rangle\\ &= \sum_\eta D_{\eta\zeta}(\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))|\mathcal{R}(\alpha_\Lambda,P)\bar{P}\;\eta\rangle\\ &= \sum_\eta D_{\eta\zeta}(\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))|\bar{P}\eta\rangle,\end{aligned} \tag{11.55}$$

ahol a $c_{\eta\zeta}$ mátrixokat átjelöltük a szokásosabb $D_{\eta\zeta}$-ra. Ennek az összefüggésnek és a (11.53) egyenlőségnek az alapján tetszőleges Lorentz-transzformáció ábrázolása a P^μ-höz tartozó sajátaltérben kifejezhető a Wigner-forgatások $D_{\eta\zeta}(\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))$ ábrázolásának mátrixaival:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_\Lambda)|P\zeta\rangle &= \hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_L(\Lambda P))\,\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))\,\hat{\mathcal{U}}^{-1}(0,\alpha_L(P))|P\zeta\rangle\\ &= \hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_L(\Lambda P))\,\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))|\bar{P}\zeta\rangle\\ &= \hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_L(\Lambda P))\sum_\eta D_{\eta\zeta}(\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))|\bar{P}\eta\rangle\\ &= \sum_\eta D_{\eta\zeta}(\alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))|\Lambda P\;\eta\rangle.\end{aligned} \tag{11.56}$$

Határozzuk meg az $\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_\Lambda)$ unitér operátor inverzét. Írjuk ehhez először az α_Λ mátrixot a $\Lambda P = P'$ változócserével az

$$\alpha_\Lambda = \alpha_L(P')\;\alpha'_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P')\;\alpha_L^{-1}(\Lambda^{-1}P') \tag{11.57}$$

alakba, ahol

$$\begin{aligned}\alpha'_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P') &= \alpha_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,\Lambda^{-1}P')\\ &= \alpha_L^{-1}(P')\;\alpha_\Lambda\;\alpha_L(\Lambda^{-1}P').\end{aligned} \tag{11.58}$$

Mindkét utóbbi egyenletben a vessző a négyes-impulzus jele mellett formális, s így el is hagyható. α_Λ most levezetett alakját felhasználva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}^\dagger(0,\alpha_\Lambda)|P\zeta\rangle &= \hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_\Lambda^{-1})|P\zeta\rangle\\ &= \hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_L(\Lambda^{-1}P))\,\hat{\mathcal{U}}^{-1}(0,\alpha'_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))\,\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_L^{-1}(P))|P\zeta\rangle\\ &= \hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_L(\Lambda^{-1}P))\,\hat{\mathcal{U}}^{-1}(0,\alpha'_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))\;|\bar{P}\zeta\rangle\\ &= \hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_L(\Lambda^{-1}P))\;\hat{D}^{-1}(\alpha'_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))\;|\bar{P}\zeta\rangle\\ &= \hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_L(\Lambda^{-1}P))\;\sum_\eta D^\star_{\zeta\eta}(\alpha'_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))\;|\bar{P}\eta\rangle\\ &= \sum_\eta D^\star_{\zeta\eta}(\alpha'_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))\;|\Lambda^{-1}P\;\eta\rangle.\end{aligned} \tag{11.59}$$

Itt felhasználtuk, hogy $\hat{D}$ unitér és hogy

$$L(P)\bar{P} = P, \qquad L(\Lambda^{-1}P)\bar{P} = \Lambda^{-1}P. \tag{11.60}$$

Az S fizikai rendszer állapotai Poincaré-szimmetria esetén a Poincaré-csoport unitér irreducibilis ábrázolásai szerint transzformálódnak. Legyen $|\psi\rangle$ egy tetszőleges állapot. Ennek a hullámfüggvénye

$$\psi_\zeta(P) \;=\; \langle P\zeta|\psi\rangle \tag{11.61}$$

annyi komponensű, amennyi az adott irreducibilis ábrázolásban a kis-csoport irreducibilis ábrázolásának dimenziója. A hullámfüggvény transzformációját az alábbi alakban kapjuk:

$$\begin{aligned}
\Big(\hat{\mathcal{U}}(a,\alpha_\Lambda)\Big)_{\zeta\eta}\psi_\eta(P) &= \Big(\hat{\mathcal{U}}(a,I)\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_\Lambda)\Big)_{\zeta\eta}\psi_\eta(P)\\
&= \langle P\zeta|\hat{\mathcal{U}}(a,I)\hat{\mathcal{U}}(0,\alpha_\Lambda)|\psi\rangle\\
&= \Big[\langle\psi|\hat{\mathcal{U}}^\dagger(0,\alpha_\Lambda)\hat{\mathcal{U}}^\dagger(a,I)|P\zeta\rangle\Big]^\star\\
&= \exp\{\mathrm{i}a_\mu P^\mu\}\Big[\langle\psi|\hat{\mathcal{U}}^\dagger(0,\alpha_\Lambda)|P\zeta\rangle\Big]^\star\\
&= \exp\{\mathrm{i}a_\mu P^\mu\}\left[\sum_\eta D^\star_{\zeta\eta}(\alpha'_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))\;\langle\psi|\Lambda^{-1}P\;\eta\rangle.\right]^\star\\
&= \exp\{\mathrm{i}a_\mu P^\mu\}\sum_\eta D_{\zeta\eta}(\alpha'_{\mathcal{R}}(\alpha_\Lambda,P))\;\psi_\eta(\Lambda^{-1}P).
\end{aligned} \tag{11.62}$$

A továbbiakban már csak az van hátra, hogy a fizikailag érdekes $(m_\pm)$ és $(0_\pm)$ ábrázolási osztályokban ténylegesen meghatározzuk a kis-csoport unitér irreducibilis ábrázolásait. Erről a következő fejezetben lesz szó.

11.6 A kis-csoportok irreducibilis unitér ábrázolásai

11.6.1 Az $m_\pm$ ábrázolás kis-csoportja

A standard impulzust $\bar{P}^\mu = (m,0,0,0)$-nak választjuk, ami az S fizikai rendszer nyugalmi rendszerének felel meg. Részecske esetén $m > 0$ (m_+ ábrázolás), anti-részecske esetén $m < 0$ (m_- ábrázolás). A kis-csoport transzformációi a 0-adik tengely irányába mutató $\bar{P}^\mu$ négyes-vektort invariánsan hagyják, azaz ezek a transzformációk a 3-dimenziós térbeli forgatások. Ezeknek a generátorai $\hat{J}^i = \hat{J}^{jk}$ (ahol $(ijk) = (123),(231),(312)$). A nyugalmi rendszerben a rendszer impulzusmomentumának operátora megegyezik a spin operátorával. Az unitér irreducibilis ábrázolásokat, mint tudjuk, az $\hat{\vec{S}}^2$ Casimir-operátor $s(s+1)$ sajátértékei szerint lehet osztályozni.

Az $(m_\pm, s)$ irreducibilis ábrázolás kis-csoportjának ábrázolási terét tehát az $\hat{\vec{S}}^2$ és az $\hat{S}_3$ operátorok közös $|\bar{P}s\zeta\rangle = |\bar{P}s\sigma\rangle$ $(\sigma = -s, -s+1, \ldots, s-1, s)$ sajátállapotai alkotják. Ebben az ábrázolásban:

$$\begin{aligned} \hat{W}^\mu|\bar{P}s\sigma\rangle &= (0, -\hat{S}^1, -\hat{S}^2, -\hat{S}^3)m|\bar{P}s\sigma\rangle, && (11.63) \\ \hat{W}^\mu\hat{W}_\mu|\bar{P}s\sigma\rangle &= -m^2\hat{\vec{S}}^2|\bar{P}s\sigma\rangle \\ &= -m^2 s(s+1)|\bar{P}s\sigma\rangle. && (11.64) \end{aligned}$$

Látjuk, hogy a részecske nyugalmi rendszerében a Pauli-Ljubanszki-vektor játssza a spin szerepét.

Az adott spinű állapotokat (bázist) kifejezhetjük természetesen a valódi ortochron Lorentz-csoport véges-dimenziós (u, v) ábrázolásához tartozó $|uk\rangle|vl\rangle$ bázis segítségével:

$$|s\sigma\rangle = \sum_{u=0}^{s}\sum_{k=-u}^{u}(uk\ s-u\ \sigma-k\ |s\sigma)|uk\rangle|s-u\ \sigma-k\ \rangle. \qquad (11.65)$$

11.6.2 A $(0_\pm)$ ábrázolások kis-csoportja

Ebben az esetben a standard négyes-impulzust $\bar{P}^\mu = (\pm\rho, 0, 0, \rho)$ alakban vesszük fel, ahol $\rho > 0$. A kis-csoport azokat a Lorentz-transzformációkat tartalmazza, amelyek $\bar{P}^\mu$-t invariánsan hagyják. Ezek a z-tengely körüli forgatások a 3-dimenziós térben, valamint a standard négyes-impulzusra és az y-tengelyre (x-tengelyre) merőleges forgatások a Minkowski-térben. Ezek generátorai: $\hat{J}^3 = \hat{J}^{12}$, $\hat{\Pi}^1 = \hat{J}^{10} \mp \hat{J}^{13}$ és $\hat{\Pi}^2 = \hat{J}^{20} \mp \hat{J}^{23}$. A Lorentz-generátorok algebrájának ismeretében meghatározhatjuk a kis-csoport generátorainak algebráját:

$$[\hat{J}^3, \hat{\Pi}^1] = \mathrm{i}\hat{\Pi}^2, \qquad [\hat{J}^3, \hat{\Pi}^2] = -\mathrm{i}\hat{\Pi}^1, \qquad [\hat{\Pi}^1, \hat{\Pi}^2] = 0. \qquad (11.66)$$

Ez az algebra izomorf a két-dimenziós euklideszi térben végzett forgatások és eltolások generátorainak algebrájával. A két-dimenziós euklideszi csoportnak $(\hat{\Pi})^2 = (\hat{\Pi}^1)^2 + (\hat{\Pi}^2)^2$ Casimir-operátora. A $0_\pm$ ábrázolásban:

$$\begin{aligned} \hat{W}^\mu|\bar{P}\zeta\rangle &= (\hat{J}^3, \hat{\Pi}^2, -\hat{\Pi}^1, \mp\hat{J}^3)\rho|\bar{P}\zeta\rangle, && (11.67) \\ \hat{W}^\mu\hat{W}_\mu|\bar{P}\zeta\rangle &= -\rho^2(\hat{\Pi})^2|\bar{P}\zeta\rangle. && (11.68) \end{aligned}$$

A tapasztalat szerint fizikai jelentéssel csak azok az ábrázolások rendelkeznek, amelyek a Casimir-operátor $(\hat{\Pi})^2 = 0$ sajátértékéhez tartoznak. Ekkor

$$(\hat{\Pi})^2|\bar{P}\zeta\rangle = 0, \qquad (11.69)$$

$$\hat{\Pi}^1|\bar{P}\zeta\rangle = 0, \qquad (11.70)$$

$$\hat{\Pi}^2|\bar{P}\zeta\rangle = 0, \qquad (11.71)$$

$$\hat{W}^\mu\hat{W}_\mu|\bar{P}\zeta\rangle = 0, \qquad (11.72)$$

$$\hat{P}^\mu\hat{P}_\mu|\bar{P}\zeta\rangle = 0. \qquad (11.73)$$

Egyedül a $\hat{J}^3$ operátor ábrázolása nem triviális. A síkbeli forgatások Abel-csoportot alkotnak. A csoport elemeit $\exp\{\mathrm{i}\lambda\theta\}$ ábrázolja a λ paraméterrel jellemzett irreducibilis ábrázolásban (θ az elforgatás szöge). Be lehet látni, hogy csak akkor kapjuk $\bar{\mathcal{P}}$-nek egyértékű ábrázolását, ha

$$\lambda \;=\; 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \tag{11.74}$$

Minden egyes λ sajátértékhez tartozó irreducibilis ábrázolás egy-dimenziós, mert hiszen Abel-csoport irreducibilis ábrázolásáról van szó.

A $|\bar{P}\lambda\rangle$ bázisban a sajátértékekre fennállnak a következő összefüggések:

$$\begin{aligned}(P^0)^2 = \vec{P}^{\,2}, (W^0)^2 = \vec{W}^{\,2},\\ \vec{P}\vec{W} = P^0W^0 = \pm|\vec{P}||\vec{W}|,\end{aligned} \tag{11.75}$$

aminek alapján

$$\hat{\vec{W}} \;=\; \hat{\mathcal{A}}\hat{\vec{P}}, \tag{11.76}$$

ahol $\hat{\mathcal{A}}$ diagonális a $|\bar{P}\lambda\rangle$ bázisban. Ekkor viszont

$$P^0W^0 = \vec{W}\vec{P} = \mathcal{A}\vec{P}^{\,2} = \mathcal{A}(P^0)^2, \tag{11.77}$$

azaz

$$W^0 \;=\; \mathcal{A}P^0. \tag{11.78}$$

Mindezek alapján írhatjuk tehát, hogy

$$\hat{W}^\mu \;=\; \hat{\mathcal{A}}\hat{P}^\mu. \tag{11.79}$$

Innen kifejezzük az $\hat{\mathcal{A}}$ operátort:

$$\hat{\mathcal{A}} \;=\; \hat{W}^0(\hat{P}^0)^{-1} = \hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}(\hat{P}^0)^{-1}. \tag{11.80}$$

Itt az operátorok sorrendje közömbös, mert $[\hat{W}^\mu, \hat{P}^\nu] = 0$. Ebből az is következik, hogy

$$[\hat{\mathcal{A}}, \hat{P}^\mu] = 0. \tag{11.81}$$

Határozzuk meg az $\hat{\mathcal{A}}$ operátor és a $\hat{J}^{\mu\nu} = \mathrm{i}M^{\mu\nu}$ Lorentz-generátorok csrerelációit. Felhasználva, hogy

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] \;=\; \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}, \tag{11.82}$$

írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= [\hat{P}^0(\hat{P}^0)^{-1}, \hat{J}^{\mu\nu} \\ &= \hat{P}^0[(\hat{P}^0)^{-1}, \hat{J}^{\mu\nu}] + [\hat{P}^0, \hat{J}^{\mu\nu}](\hat{P}^0)^{-1}, \end{aligned} \tag{11.83}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} [(\hat{P}^0)^{-1}, \hat{J}^{\mu\nu}] &= -(\hat{P}^0)^{-1}[\hat{P}^0, \hat{J}^{\mu\nu}](\hat{P}^0)^{-1} \\ &= (\hat{P}^0)^{-2}\mathrm{i}(g^{\nu 0}\hat{P}^{\mu} - g^{\mu 0}\hat{P}^{\nu}). \end{aligned} \tag{11.84}$$

Az utóbbi egyenlőséget és a (11.82) azonosságot felhasználva a keresett kommutátor:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{A}}, \hat{J}^{\mu\nu}] &= [\hat{W}^0(\hat{P}^0)^{-1}, \hat{J}^{\mu\nu}] \\ &= \hat{W}^0[(\hat{P}^0)^{-1}, \hat{J}^{\mu\nu}] + [\hat{W}^0, \hat{J}^{\mu\nu}](\hat{P}^0)^{-1} \\ &= \mathrm{i}(\hat{P}^0)^{-1}\Big[g^{\mu 0}(\hat{W}^{\nu} - \hat{W}^0(\hat{P}^0)^{-1}\hat{P}^{\nu}) \\ &\quad - g^{\nu 0}(\hat{W}^{\mu} - \hat{W}^0(\hat{P}^0)^{-1}\hat{P}^{\mu})\Big]. \end{aligned} \tag{11.85}$$

Ebből leolvashatjuk, hogy a $|\bar{P}\lambda\rangle$ vektorokkal kifeszített ábrázolási terekben:

$$[\hat{\mathcal{A}}, \hat{J}^{\mu\nu}] = 0. \tag{11.86}$$

A bevezetett irreducibilis ábrázolásokban tehát $\hat{\mathcal{A}}$ felcserélhető a csoport valamennyi generátorával, azaz $\hat{\mathcal{A}} = \mathrm{const.}\hat{I}$. Az alábbi egyenlet alapján könnyen meghatározhatjuk az arányossági tényezőt:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}|\bar{P}\lambda\rangle &= \hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}(\hat{P}^0)^{-1}|\bar{P}\lambda\rangle = \pm\hat{J}^3|\bar{P}\lambda\rangle \\ &= \pm\lambda|\bar{P}\lambda\rangle, \end{aligned} \tag{11.87}$$

ahol az előjel a $0_{\pm}$ ábrázolásoknak felel meg. $\pm\lambda$ fizikai jelentése az, hogy ez a részecske spinjének az impulzus irányába eső vetülete. Ezt helicitásnak nevezzük. A helicitás operátora $\hat{\mathcal{A}}$. A szóbanforgó irreducibilis ábrázolás tehát helicitás-saját-állapotok terében valósul meg.

A csoportelméleti megfontolások alapján azt gondolhatnánk, hogy egy s spinű részecske helicitása $-s$, $-s+1, \ldots, s$ értékeket vehet fel. Ez így is van, ha a részecske nyugalmi tömege nem zérus. Zérus nyugalmi tömegű részecskék esetén azonban az a tapasztalat, hogy a helicitás csak

$$\mathcal{A} = \pm s \tag{11.88}$$

lehet. A zérus nyugalmi tömegű részecskék spinje vagy párhuzamos, vagy ellentétes irányú az impulzusukkal.

Természetesen a helicitás-sajátállapotokat is kifejezhetjük a standard vonatkoztatási rendszerben az (u, v) irreducibilis ábrázolás bázisával:

$$|\bar{P}\,\mathcal{A} = \pm s\rangle \;=\; \sum_{u=-s}^{s}\sum_{k=-u}^{u} (uk\; s-u\; \pm s-k|s \pm s)|uk\rangle|\; s-u\; \pm s-k\rangle. \tag{11.89}$$

11.7 A mozgásegyenletek kovariáns alakja.

A relativisztikus kvantumelméletben a fizikai állapotok a leszűkített Poincaré-csoport irreducibilis ábrázolásai szerint transzformálódnak. Ha megmondjuk, hogy a fizikai állapotok hullámfüggvényei melyik irreducibilis ábrázolás szerint transzformálódnak, akkor ez meghatározza a hullámfüggvények időfüggését leíró klasszikus téregyenletek szerkezetét.

11.7.1 A Klein-Gordon-egyenlet

Először megmutatjuk, hogy tetszőleges irreducibilis ábrázolás szerint transzformálódó hullámfüggvény minden komponense kielégíti a Klein-Gordon-egyenletet. Már itt megemlítjük azonban, hogy a Klein-Gordon-egyenlet nem minden megoldása lesz a kovariáns téregyenletek megoldása is. Ez elég kézenfekvő, hiszen azzal, hogy a hullámfüggvény minden komponense megoldása a Klein-Gordon-egyenletnek, még nincsen biztosítva, hogy a hullámfüggvény, mint több komponensű matematikai objektum, éppen a megfelelő irreducibilis ábrázolás terében legyen.

A bizonyítás nagyon egyszerű. Az előzőekben beláttuk, hogy a leszűkített Poincaré-csoport minden irreducibilis ábrázolása $P^2 = m^2$ sajátértékhez tartozik. Ezért a hullámfüggvény teljesíti a

$$\hat{P}^{\mu}\hat{P}_{\mu}\psi(x,\zeta) \;=\; m^2\psi(x,\zeta) \tag{11.90}$$

egyenletet. Felhasználva, hogy koordináta-reprezentációban $\hat{P}^{\mu} = \mathrm{i}\partial^{\mu}$, a hullámfüggvény minden egyes ζ komponensére a Klein-Gordon-egyenletet kapjuk:

$$(\Box + m^2)\psi(x,\zeta) \;=\; 0. \tag{11.91}$$

Nyilvánvaló, hogy az $(m_{\pm}, s = 0)$ ábrázolást megvalósító skalártér esetén a hullámfüggvény egy-komponensű, s így semmi további, transzformációs tulajdonságból adódó megszorítás nem lévén az egyetlen komponensre, a kovariáns téregyenlet éppen a Klein-Gordon-egyenlet.

Zérus tömegű, nulla spinű részecskét nem ismerünk, ezért ezzel az esettel nem kell foglalkoznunk.

Még itt megjegyezzük, hogy az $s = 0$ spinű részecskék hullámfüggvénye tértükrözéssel szemben vagy invariáns

$$\hat{P}\psi(t,\vec{r}) = \psi(t,\vec{r}), \tag{11.92}$$

vagy előjelet vált:

$$\hat{P}\psi(t,\vec{r}) = -\psi(t,\vec{r}). \tag{11.93}$$

Az első esetben skalárrészecskéről, a második esetben pszeudoskalár részecskéről beszélünk. Ilyenek a skalár- és pszeudoskalár mezonok.

11.7.2 A Weyl-egyenletek

Tegyük fel, hogy a részecske $m = 0$ tömegű és $s = 1/2$ spinű. Ekkor az irreducibilis ábrázolás bázisát helicitás-sajátállapotokból kell képezni. A hullámfüggvény a ζ-komponensek tekintetében ekkor vagy az $(1/2,0)$ ábrázolás szerint transzformálódó balkezes Weyl-spinor, ϕ_A, vagy a $(0,1/2)$ ábrázolás szerint transzformálódó jobbkezes Weyl-spinor, $\bar{\chi}^{\dot{A}}$.

Szerkesszük meg a téregyenleteket abból a járulékos feltevésből kiindulva, hogy az időderiváltban elsőrendűeknek kell lenniük. Lorentz-kovariáns alakban ez azt jelenti, hogy a $\hat{P}^\mu$ operátorban lineáris $\hat{D}$ operátornak kell a Weyl-spinorra hatni, és az eredménynek magának is Weyl-spinornak kell lenni:

$$\hat{D}\phi = 0, \qquad \text{ill.} \qquad \hat{D}\bar{\chi} = 0. \tag{11.94}$$

A Weyl-spinorok tereiben a $\hat{P}^\mu$ négyes-vektoroknak a $(\hat{P}_\mu\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}A}$ ill. $(\hat{P}_\mu\sigma^\mu)_{A\dot{A}}$ SL(2,C)-mátrixok felelnek meg. Ezen mátrixok hatására balkezes spinorból jobbkezes lesz és viszont. Ezért a $\hat{D}$ operátor nem tartalmazhat a négyes-impulzus operátorától független tagot, mert annak a σ-mátrixokban kvadratikusnak kellene lennie, és az ilyen tagok meghagynák a balkezes spinort balkezesnek, a jobbkezest jobbkezesnek. A kovariáns egyenletek egyetlen lehetséges alakja tehát:

$$(\hat{P}_\mu\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}A}\phi_A = 0, \tag{11.95}$$

ill.

$$(\hat{P}_\mu\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\bar{\chi}^{\dot{A}} = 0. \tag{11.96}$$

Ezek az ún. Weyl-egyenletek.

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy ezek az egyenletek valóban zérus nyugalmi tömegű részecskét írnak le. Hassunk például az első egyenletre a $(\hat{P}_\nu\sigma^\nu)_{B\dot{A}}$ operátorral:

$$(\hat{P}_\nu\sigma^\nu)_{B\dot{A}}(\hat{P}_\mu\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}A}\phi_A \;=\; 0. \tag{11.97}$$

Mivel $\hat{P}_\nu\hat{P}_\mu$ szimmetrikus a μ és a ν indexekben, azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\hat{P}_\nu\hat{P}_\mu\left[(\sigma^\nu)_{B\dot{A}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}A}+(\sigma^\mu)_{B\dot{A}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{A}A}\right]\phi_A &= 0,\\ 2\hat{P}_\nu\hat{P}_\mu g^{\mu\nu}\delta_B^A\phi_A &= 0,\\ \hat{P}^\mu\hat{P}_\mu\phi_A &= 0.\end{aligned} \tag{11.98}$$

Éppen ezt akartuk belátni.

Használjuk fel a σ-mátrixoknak a Pauli-mátrixokkal felírt alakját és az indexszerkezetüket, akkor:

$$\begin{aligned}(\hat{P}_\mu\bar{\sigma}^{\mu\;\dot{A}A}) &= \hat{P}^0\sigma^0+\hat{\vec{P}}\vec{\sigma},\\ (\hat{P}_\mu\sigma_{\mu\;A\dot{A}}) &= \hat{P}^0\sigma^0-\hat{\vec{P}}\vec{\sigma}.\end{aligned} \tag{11.99}$$

Ezeket behelyettesítve a Weyl-egyenletekbe, impulzusreprezentációban a következők adódnak:

$$\begin{aligned}\frac{(\vec{P}\vec{\sigma})}{|\vec{P}|}\phi &= -\frac{P^0}{|\vec{P}|}\phi,\\ \frac{(\vec{P}\vec{\sigma})}{|\vec{P}|}\bar{\chi} &= +\frac{P^0}{|\vec{P}|}\bar{\chi}.\end{aligned} \tag{11.100}$$

Mint arról a Weyl-spinorok tárgyalása során már szó volt, a tértükrözés a balkezes Weyl-spinorokat jobbkezesbe viszi át és viszont. Ezekszerint ϕ és $\bar{\chi}$ tértükrözött állapotokat ír le, ha mindkettő ugyanarra a részecskére vonatkozik. Mint az a Weyl-egyenletekből látható, az egyik esetben a helicitás negatív, a másik esetben pozitív. A tapasztalat szerint a neutrinó 1/2 spinű, zérus nyugalmi tömegű részecske. Az is bebizonyosodott azonban, hogy csak balkezes neutrinó létezik. Ugyanakkor létezik egy másik részecske, amely ugyancsak zérus tömegű és 1/2 spinű, de jobbkezes, ez az antineutrinó. Ezért a balkezes Weyl-egyenlet a neutrinót, a jobbkezes Weyl-egyenlet pedig az antineutrinót írja le.

Koordináta-reprezentációban a Weyl-egyenletek alakja:

$$\mathrm{i}\partial_t\phi = +\mathrm{i}\vec{\sigma}\,\vec{\nabla}\phi, \tag{11.101}$$

$$\mathrm{i}\partial_t\bar{\chi} = -\mathrm{i}\vec{\sigma}\,\vec{\nabla}\bar{\chi}. \tag{11.102}$$

11.7.3 A Dirac-egyenlet

Tekintsünk egy $m \neq 0$ tömegű, 1/2 spinű részecskét. Ilyenek a kvarkok és a leptonok közül az elektron, a müon és a tau-részecske. Ezen részecskék hullámfüggvényei (azaz a megfelelő klasszikus terek) az $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ ábrázolás szerint transzformálódnak. A ψ hullámfüggvény tehát négy-komponensű mennyiség, első két komponense balkezes, másik két komponense jobbkezes Weyl-spinort alkot:

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix}. \tag{11.103}$$

A legáltalánosabb alakú, $\hat{P}^\mu$-ben lineáris mozgásegyenlet, amelyet a fenti Weyl-spinorokra a kovariáns alak megtartásával felírhatunk:

$$\hat{P}_\mu (\sigma^\mu)_{A\dot{A}} \bar{\chi}^{\dot{A}} = C_1 \phi_A, \tag{11.104}$$

$$\hat{P}_\mu (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}A} \phi_A = C_2 \bar{\chi}^{\dot{A}}. \tag{11.105}$$

Mivel $P^2 = m^2$ sajátértékhez kell a hullámfüggvénynek tartoznia impulzusreprezentációban, azért

$$\hat{P}_\nu (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{A}A} \hat{P}_\mu (\sigma^\mu)_{A\dot{B}} \bar{\chi}^{\dot{B}} = \hat{P}_\nu (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{A}A} C_1 \phi_A = C_1 C_2 \bar{\chi}^{\dot{A}}, \tag{11.106}$$

azaz

$$\hat{P}^\mu \hat{P}_\mu \bar{\chi} = C_1 C_2 \bar{\chi} \tag{11.107}$$

alapján választhatjuk az általánosság csorbítása nélkül, hogy $C_1 = C_2 = m$. Ilymódon azt is biztosítjuk, hogy tértükrözéskor az első egyenlet átmegy a másodikba és viszont. A felírt mozgásegyenletek tehát invariánsak a tértükrözéssel szemben.

A két egyenletet összefoglalhatjuk a négy-komponensű ψ bispinorra vonatkozó egyetlen egyenletben:

$$\hat{P}_\mu \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix}, \tag{11.108}$$

$$\hat{P}_\mu \gamma^\mu \psi = m\psi. \tag{11.109}$$

Ez a Dirac-egyenlet. Bevezettük a

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{11.110}$$

Dirac-féle γ-mátrixokat:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.111}$$

A σ-mátrixok tulajdonságait felhasználva megkapjuk a Dirac-féle γ-mátrixok antikommutátorait:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix} \\ &= 2g^{\mu\nu} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = 2g^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{11.112}$$

A γ-mátrixokból szerkesszük meg a

$$\gamma_5 = \mathrm{i}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{11.113}$$

mátrixot. Ennek segítségével projektoroperátorokat képezhetünk, amelyek a Dirac-spinor balkezes és jobbkezes komponenseire vetítenek:

$$\frac{1}{2}(1+\gamma_5) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}(1-\gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{11.114}$$

11.7.4 Az $s = 1$ spinű részecskék

Kezdjük az $m \neq 0$ nyugalmi tömegű, 1 spinű részecske esetével. A részecske nyugalmi rendszerében az $s = 1$ spinű ábrázoláshoz az $(1/2, 1/2)$ ábrázolás ad egy V_μ négyesvektort, az $(1,0)$ ábrázolás és a $(0,1)$ ábrázolás pedig az antiszimmetrikus $V_{\mu\nu}$ és $\bar{V}_{\mu\nu}$ tenzorokat. Itt $\bar{V}_{\mu\nu} = V_{\mu\nu}^+$, úgyhogy csak V_μ és $V_{\mu\nu}$ tekinthetők függetlennek. Ezekre a komponensekre a kovariancia betartásával, az alábbi, a $\hat{P}^\mu$ operátorban lineáris egyenleteket írhatjuk csak fel:

$$\hat{P}^\mu V_{\mu\nu} = C_1 V_\nu, \tag{11.115}$$
$$\hat{P}_\mu V_\nu - \hat{P}_\nu V_\mu = C_2 V_{\mu\nu}. \tag{11.116}$$

Hassunk az első egyenletre a $\hat{P}^\nu$ operátorral, mivel $V_{\mu\nu}$ antiszimmetrikus és a négyes-impulzus operátorai kommutálnak,

$$0 = \hat{P}^\nu \hat{P}^\mu V_{\mu\nu} = C_1 \hat{P}^\nu V_\nu, \tag{11.117}$$

ahonnan

$$\hat{P}^\nu V_\nu = 0. \tag{11.118}$$

Helyettesítsük a (11.116) egyenletből $V_{\mu\nu}$-t a (11.115) egyenletbe:

$$\hat{P}^{\mu}\hat{P}_{\mu}V_{\nu} - \hat{P}_{\nu}\hat{P}^{\mu}V_{\mu} = C_2 C_1 V_{\nu}. \tag{11.119}$$

Használjuk fel a (11.118) egyenletet. Ekkor a

$$(\hat{P}^{\mu}\hat{P}_{\mu} - m^2)V_{\nu} \;\; = \;\; 0 \tag{11.120}$$

Klein-Gordon-egyenletet kapjuk meg, ha az állandókat $C_1 C_2 = m^2$ szerint választjuk. A szokásos választás $C_1 = -\mathrm{i}m^2$, $C_2 = \mathrm{i}$. Ekkor

$$V_{\mu\nu} \;\; = \;\; \partial_{\mu}V_{\nu} - \partial_{\nu}V_{\mu} \tag{11.121}$$

adódik koordinátareprezentációban. Az 1 spinű részecske hullámegyeneletei a (11.118) és (11.120) egyenletek, az ún. Proca-egyenletek. Ezek az egyenletek írják le például a vektormezonokat.

Impulzusreprezentációban, a standard vonatkoztatási rendszerben $\bar{P}^{\mu}V_{\mu} = 0$ azt jelenti, hogy $V_0 = 0$ és a vektorrészecske 3 térszerű komponenssel rendelkezik.

A fotonok is $s = 1$ spinű részecskék, de nulla a nyugalmi tömegük. Látjuk a fentiekből, hogy $m = 0$ esetén

$$\hat{P}^{\mu}V_{\mu\nu} \;\; = \;\; 0, \tag{11.122}$$

$$-\mathrm{i}(\hat{P}_{\mu}V_{\nu} - \hat{P}_{\nu}V_{\mu}) \;\; = \;\; V_{\mu\nu}. \tag{11.123}$$

adódik. A két egyenlet szétcsatolódott. A második úgy tekinthető, mint $V_{\mu\nu}$ definíciója. A téregyenletek

$$\hat{P}^{\mu}\hat{P}_{\mu}V_{\nu} - \hat{P}_{\nu}\hat{P}^{\mu}V_{\mu} = \hat{P}^{\mu}V_{\mu\nu} = 0 \tag{11.124}$$

alakot öltenek és (11.118) nem következik belőlük. Ugyanakkor a hullámfüggvény komponensei akkor megoldásai az $m = 0-$hoz tartozó Klein-Gordon-egyenletnek (ahogy ezt az ábrázolás irreducibilis volta megköveteli), ha a (11.118) egyenletet külön feltételként előírjuk. A standard vonatkoztatási rendszerben $\bar{P} = (\rho, 0, 0, \pm\rho)$, úgyhogy a (11.118) feltétel

$$\bar{P}^{\mu}V_{\mu} = \rho V_0 \mp \rho V_3 = 0 \tag{11.125}$$

alakot ölt. Ez azt jelenti, hogy ebben a rendszerben $V_0 = V_3 = 0$, azaz a foton a standard vonatkoztatási rendszerben csak 2, az impulzusra merőleges transzverzális szabadsági fokkal rendelkezik. Ez a lényeges különbség a nem nulla és a nulla tömegű vektorterek között. Az a feltétel, amelynek segítségével kizárjuk a hamis szabadsági fokokat az ún. mértékfeltétel. Ennek egyik alakja a (11.118) egyenlet.

IV. SZIMMETRIÁK ÉS KÖLCSÖNHATÁSOK

12 Lokális és globális szimmetriák

Az eddigi példáinkban a szimmetriák ún. globális szimmetriák voltak. Azt tettük fel, hogy a fizikai rendszer invariáns marad, ha a téridő minden pontjában ugyanazt a transzformációt végezzük el. Ez abban nyilvánult meg matematikailag, hogy a szimmetria-transzformációk Lie-csoportjának paraméterei függetlenek voltak a téridő-koordinátáktól. A globális belső szimmetria-csoport elemeinek általános alakja (folytonos csoport esetén):

$$\hat{\mathcal{U}}(\theta) \;\; = \;\; \exp\{\sum_{a=1}^{n} \mathrm{i}\theta_a \hat{I}_a\}, \qquad (12.1)$$

ahol θ_a $(a = 1, 2, \ldots, n)$ a csoport n darab folytonos, az x^μ téridő-koordinátáktól független paramétere, és $\hat{I}_a$ a csoport generátorai. Mint tudjuk, a θ_a paraméterek valamilyen belső szabadsági fokok terében végzett forgatásokat adnak meg. Hasonlóan, a globális Poincaré-transzformációk

$$\hat{\mathcal{U}}(a, \epsilon) \;\; = \;\; \exp\{\mathrm{i}a_\mu \hat{P}^\mu + \mathrm{i}\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}\} \qquad (12.2)$$

alakba írhatók, ahol a transzformáció 10 darab paramétere, azaz az eltolások a^μ paraméterei (4), és a téridőbeli „forgatások” $\epsilon^{\mu\nu}$ paraméterei (6) ugyancsak függetlenek a téridő-koordinátáktól.

A lokális szimmetria azt jelenti, hogy a fizikai rendszer invariáns az olyan transzformációkkal szemben, amikor a téridő minden pontjában más és más a transzformáció folytonos paramétereinek az értéke.

A fizikai rendszer lokális belső szimmetriával rendelkezik, ha a rendszer invariáns az olyan transzformációkkal szemben, amikor a belső szabadsági fokok terében a téridő minden pontjában más és más elforgatásokat végzünk. Ilyenkor a folytonos θ_a paraméterek a téridő-koordináták függvényei, $\theta_a(x)$:

$$\hat{\mathcal{U}}(\theta(x)) \;\; = \;\; \exp\{\sum_{a=1}^{n} \mathrm{i}\theta_a(x)\, \hat{I}_a\}. \qquad (12.3)$$

Emlékszünk, hogy a globális belső szimmetria azt jelenti, léteznek megmaradó töltések, az energia-sajátállapotok pedig multipletteket alkotnak, amelyek a szimmetria-csoport irreducibilis ábrázolásainak ábrázolási terét adják. A kérdés az, hogy mi a fizikai jelentése annak, hogy egy belső szimmetria nem csak globális, hanem lokális is. Megmutatjuk, hogy az anyagot felépítő fermionok közötti kölcsönhatás lokális belső szimmetria következménye.

Példánk az elektronok hullámfüggvényét megadó Dirac-egyenlet:

$$\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \;\; = \;\; m\psi(x). \qquad (12.4)$$

Ez az egyenlet invariáns a

$$\psi(x) \quad \rightarrow \quad \psi'(x) = e^{\mathrm{i}\theta}\psi(x) \tag{12.5}$$

globális mértéktranszformációval szemben. Ezek a transzformációk U(1) Abel-csoportot alkotnak.

Tegyük most a mértéktranszformációt lokálissá, vagyis a transzformáció paraméterét x-függővé, $\theta(x)$:

$$\psi(x) \quad \rightarrow \quad \psi'(x) = e^{\mathrm{i}\theta(x)}\psi(x). \tag{12.6}$$

A lokális mértékszimmetria fennállásáról akkor beszélhetünk, ha a transzformált $\psi'(x)$ hullámfüggvényre vonatkozó Dirac-egyenlet alakja ugyanaz mint az eredeti $\psi(x)$ hullámfüggvényre vonatkozó Dirac-egyenleté. Ez azonban nincsen így, mert a hullámfüggvény deriváltját tartalmazó tag nem egyszerűen csak az $\exp\{\mathrm{i}\theta(x)\}$ fázisfaktorral szorzódik:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) &= e^{\mathrm{i}\theta(x)}\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - \partial_\mu\theta\,\gamma^\mu e^{\mathrm{i}\theta(x)}\psi(x) \\ &\neq e^{\mathrm{i}\theta(x)}\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x). \end{aligned} \tag{12.7}$$

A lokális mértékszimmetria biztosításához meg kell tehát változtatnunk a hullámfüggvény deriváltját tartalmazó tagot:

$$\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu = \hat{P}_\mu\gamma^\mu \quad \rightarrow \quad \hat{D} \tag{12.8}$$

A változtatást úgy kell elvégezni, hogy

$$\hat{D}'\psi'(x) \quad = \quad e^{\mathrm{i}\theta(x)}\hat{D}\psi(x) \tag{12.9}$$

legyen, ekkor ugyanis a Dirac-egyenlet alakja változatlan marad lokális mértéktranszformáció során. A (12.7) egyenlet jobb oldalán a lokális szimmetriát megsértő nem kívánatos tag egy Lorentz-vektor és γ^μ szorzata. Ez azt az ötletet adja, hogy a $\hat{D}$ operátort

$$\hat{D} \quad = \quad (\hat{P}_\mu + eA_\mu(x))\gamma^\mu \tag{12.10}$$

alakban vegyük fel, ahol az $A_\mu(x)$ vektorteret úgy kell megválasztani, hogy a (12.9) transzformációs tulajdonság teljesüljön. Kérdés, hogy lehet-e olyan $A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x)$ transzformációt előírni, hogy a (12.9) egyenlőség tetszőleges mértéktranszformáció esetén teljesüljön. Elemi számolással kapjuk, hogy

$$\hat{D}'\psi'(x) = e^{\mathrm{i}\theta(x)}\left(\hat{P}_\mu\gamma^\mu - \partial_\mu\theta(x)\,\gamma^\mu + eA'_\mu\gamma^\mu\right)\psi(x) \tag{12.11}$$

Helyettesítsük ezt be a (12.9) egyenletbe, amelynek teljesülését megköveteljük tetszőleges $\theta(x)$ függvény esetén. Ebből leolvashatjuk, hogy az $A_\mu(x)$ vektortérnek a lokális szimmetria biztosításához úgy kell transzformálódnia, hogy

$$A'_\mu(x) \quad = \quad A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x). \tag{12.12}$$

A lokális U(1) szimmetriával rendelkező Dirac-egyenlet tehát

$$\hat{D}\psi \quad = \quad m\psi, \tag{12.13}$$

azaz

$$(\hat{P}_\mu\gamma^\mu + eA_\mu(x))\psi(x) = m\psi(x) \tag{12.14}$$

alakot ölt. Ez éppen az elektromágneses tér $A_\mu(x)$ vektorpotenciáljával kölcsönható elektronokat írja le. A (12.12) egyenlet pedig a vektorpotenciálnak az elektrodinamikából már ismert mértéktranszformációja. Abból a követelményből tehát, hogy az elektronokat leíró egyenlet legyen invariáns a lokális mértéktranszformációkkal szemben, következik, hogy léteznie kell az elektromágneses térnek, amellyel az elektronok kölcsönhatnak. Az elektromágneses kölcsönhatás hátterében tehát egy szimmetria, a lokális U(1) mérték-szimmetria áll.

Hasonlóan, lokális mértékszimmetria következménye a gyenge és az erős kölcsönhatás is. A gyenge kölcsönhatásban kvarkok és leptonok hatnak egymással kölcsön ún. vektorbozon-terek közvetítésével. Két elektromosan töltött vektorbozon, a W^+ és a W^-, valamint egy semleges vektorbozon, a Z^0 fordul elő a természetben. A kölcsönhatás során a kvarknak megváltozik a zamata. A lokális mértékszimmetria, amely a gyenge kölcsönhatásra vezet, nem abeli:

$$q(x) \quad \to \quad \exp\{\mathrm{i}\sum_a \theta_a(x)\hat{I}_a\}\; q(x). \tag{12.15}$$

A szimmetria nem abeli jellegének az a következménye, hogy csak úgy tehető lokálissá, ha pontosan annyi darab vektorteret (mértékteret) vezetünk be, mint ahány paramétere van a szimmetriatranszformációk csoportjának. Mivel a gyenge kölcsönhatást 3 vektorbozon-tér közvetíti, azért a megfelelő lokális szimmetria SU(2).

A XIX. században Maxwell egyesítette az elektromosság és a mágnesség jelenségeit egyetlen elméletbe, az elektromágneses tér elméletébe. Az elektromágneses kölcsönhatás elméletének alapját az U(1) lokális mértékszimmetria képezi. Az alapvető kölcsönhatások egyesítése útján a következő nagy lépést Weinberg, Salam és Glashow tették meg, akik egyesítették az elektromágneses és a gyenge kölcsönhatás elméletét az elektro-gyenge kölcsönhatás elméletében. Ennek alapjául az SU(2)$\otimes$U(1) lokális mértékszimmetria szolgál.

A kvarkok közötti erős kölcsönhatás leírására is sikerült elméletet kidolgozni, amelyet a kísérletek eddig messzemenően igazolnak. Ennek az elméletnek alapjául a lokális SU(3) mértékszimmetria szolgál. A szimmetriacsoport 8 generátorának megfelelően a kölcsönhatást 8 darab vektortér, a gluonterek közvetítik. Az SU(3)-csoport megmaradó generátorai közül 2 felcserélhető egymással, $T_3^{(c)}$ és $Y^{(c)}$. A c felső index arra utal, hogy a szóbanforgó szimmetriát színszimmetriának („colour") és a hozzátartozó megmaradó töltéseket színtöltéseknek nevezzük. A kvarkok a színcsoport alapábrázolása, [3] szerint transzformálódnak, ψ_C ($C = 1, 2, 3$). A háromféle színállapot:

$$\begin{array}{lll}
\text{„red"}: & T_3^{(c)} = \frac{1}{2}, & Y^{(c)} = \frac{1}{3}; \\
\text{„blue"}: & T_3^{(c)} = -\frac{1}{2}, & Y^{(c)} = \frac{1}{3}; \\
\text{„green"}: & T_3^{(c)} = 0, & Y^{(c)} = -\frac{2}{3}.
\end{array}$$

A kölcsönhatást közvetítő 8 gluon az [8] oktett ábrázolás szerint transzformálódik. Mivel ez az ábrázolás a $[3]\otimes[\bar{3}]$ ábrázolás kiredukálásával nyerhető, úgy tekinthetjük, hogy a gluonok kétféle színtöltést, egy színt és egy antiszínt hordoznak egyszerre: $r\bar{g}$, $b\bar{g}$, $b\bar{r}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} + b\bar{b})$, $g\bar{g}$, $r\bar{b}$, $g\bar{r}$, $g\bar{b}$.

Az elektrogyenge és az erős kölcsönhatás egyesített elméletében, a Standard Modellben, a feltételezett lokális mértékszimmetria $\mathrm{SU}(3)_c\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$. Az eddigi kísérleti eredmények alátámasztják a Standard Modellt, vannak azonban a modellnek olyan elméleti jóslatai, mint pl. a top-kvark létezése (1992-es állapot, azóta felfedezték) és egy skalár-részecske, a Higgs-bozon létezése, amelyeket eddig nem sikerült kimutatni. Az évezred végéig azonban elvégzésre kerülnek azok a kísérletek, amelyek alapján el lehet majd dönteni, hogy helyes-e a Standard Modell. Ezzel választ kapunk arra is, hogy helyes-e a három említett alapvető kölcsönhatásnak a fenti lokális mértékszimmetrián alapuló egyesítése. Azt azonban már az eddigi eredmények alapján is el lehet mondani, hogy a lokális mértékszimmetria elvéből kiindulva jelentős lépéssel kerültünk közelebb az alapvető kölcsönhatások megértéséhez.

IRODALOM

1. L. Fonda, G.C. Ghirardi, Symmetry Principles in Quantum Physics (Marcel Dekker, Inc., New York, 1970)

2. B. Müller, W. Greiner, Quantenmechanik II. Symmetrien (Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1990)

3. L.D. Landau, E.M. Lifsic, Elméleti fizika III. Kvantummechanika (Tankönyvkiadó, Budapest, 1978)

4. Wu-Ki Tung, Group Theory in Physics (World Scientific, Singapore, 1985)

5. A.P. Balachandran, C.G. Trahern, Lectures on Group Theory for Physicists; Monographs and Textbooks in Physical Science (Bibliopolis, Napoli, 1984)

6. J. Rau, Supersymmetrie (Diploma Thesis, Frankfurt am Main, 1989)

7. Lovas I., A részecske-családok száma, Fizikai Szemle **8** (1991) 262.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönetemet fejezem ki Lovas Istvánnak, valamint Iványi Bélának, Kun Ferencnek és Trefán Lászlónak a kézirat gondos áttanulmányozásáért és kritikai észrevételeikért.

Köszönet illeti Király Editet és Tiba Imrénét gondos szövegszerkesztő munkájukért, továbbá Bajka Tündét és Kertészné Molnár Zsuzsát az elektronikus változat létrehozásában nyújtott segítségükért.