

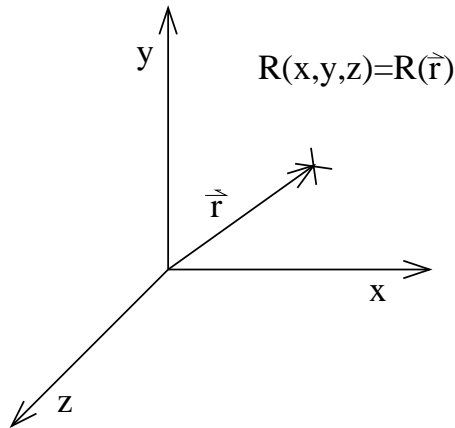
ELEKTRODINAMIKA

Vektoranalízis I.

Olyan függvények analízise, ahol a független változó értékei és/vagy a függvény értékei is vektorok vagy helyvektorok.

A fizikai mennyiségek tere: a skalár tér, a vektortér

Egy adott (derékszögű) koordináta-rendszerben a tér \forall pontja (R) jellemezhető a megfelelő (x, y, z) koordinátahármassal, illetőleg a megfelelő \vec{r} helyvektorral. Így az $R(x, y, z)$, illetve $R(\vec{r})$ függvényt kapjuk. Ha a tér (tér egy része) $\forall R(x, y, z)$ pontjához tartozik egy fizikai mennyiség valamely értéke, akkor ezt fizikai térnek vagy mezőnek nevezzük.



Ha a fizikai mennyiség skalár \rightarrow skalártér.

Ha a fizikai mennyiség vektor \rightarrow vektortér.

A fizikai mennyiség tere függhet a t-től (idő) is.

Példa: A fizikai mennyiség legyen a hőmérséklet T (skalár).

$$\begin{array}{lll} \text{Ekkor} & T(x, y, z, t) = T(\vec{\mathbf{r}}, t) & \text{instacionárius eset} \\ & T(x, y, z) = T(\vec{\mathbf{r}}) & \text{stacionárius eset} \end{array}$$

A $T = T(\vec{\mathbf{r}}, t)$, illetve $T = T(\vec{\mathbf{r}})$ skalár-vektor függvény.

Független változó vektor, a függvényérték pedig skalár mennyiség.

Példa: A fizikai mennyiség legyen a sebesség \vec{v} (vektor).

$$\begin{array}{lll} \text{Ekkor} & \vec{\mathbf{v}}(x, y, z, t) = \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}, t) & \text{instacionárius eset} \\ & \vec{\mathbf{v}}(x, y, z) = \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}) & \text{stacionárius eset} \end{array}$$

A $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$, illetve $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektor-vektor függvény.

Független változó vektor, a függvényérték szintén vektor.

Skalár tér

$$\vartheta_0 = \vartheta(x, y, z) = \vartheta(\vec{\mathbf{r}}).$$

A függvényt az úgynevezett szintfelületek vagy nívófelületek segítségével ábrázolhatjuk.

Ha $\vartheta = \vartheta(x, y, z, t) = \vartheta(\vec{\mathbf{r}}, t)$ (instacionárius eset), akkor egy rögzített ($t = t_0 - ra$, $\vartheta = \vartheta_0 - ra$) kapunk szintfelületet.

Ha ϑ_0 változik, de $t = t_0$ (megkapjuk a $t = t_0$ időpontra az összes szintfelületet).

Ha t_0 változik, de $\vartheta_0 = \text{áll.}$ (milyen felületeken nyerjük az idő változása esetén ugyanazt a ϑ_0 függvényértéket).

Vektortér

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}) &= v_1(x, y, z)\vec{\mathbf{i}} + v_2(x, y, z)\vec{\mathbf{j}} + v_3(x, y, z)\vec{\mathbf{k}} && \text{stacionárius eset} \\ \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}, t) &= v_1(x, y, z, t)\vec{\mathbf{i}} + v_2(x, y, z, t)\vec{\mathbf{j}} + v_3(x, y, z, t)\vec{\mathbf{k}} && \text{instacionárius eset}\end{aligned}$$

A lineáris vektor-vektor függvény: a tenzor

Legyenek a $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vektor koordinátái a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor koordinátáinak homogén lineáris függvényei:

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3$$

$$w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3$$

$$w_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3$$

ahol $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ állandók.

Ez az egyenletrendszer egy homogén lineáris vektor-vektor függvényt (tenzort) értelmez.

Ha pld. $\vec{w} = \vec{h}(\vec{v})$ jelöli e függvényt, akkor :

$$1. \quad \vec{h}(\vec{0}) = \vec{0} \quad \text{homogén}$$

$$2. \quad \vec{h}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{h}(\vec{v}_1) + \vec{h}(\vec{v}_2) \quad \text{lineáris}$$

Írjuk az alábbi alakba:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\vec{w} = \underline{\mathbf{A}}\vec{v}$$

homogenitás: $\underline{\mathbf{A}}\vec{o} = \vec{o}$

linearitás: $\underline{\mathbf{A}}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \mathbf{A}\vec{v}_1 + \mathbf{A}\vec{v}_2$

Tenzor értelmezés diadikus szorzattal (oszlop \times sor)

Egységvektorok diadikus szorzata

$$\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{A}} = a_{11}\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_3$$

$$+ a_{21}\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_3$$

$$+ a_{31}\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_3.$$

A térfüggvény differenciálása és a nabla-operátor

Legyen adva

$$\vartheta = \vartheta(x, y, z) = \vartheta(\vec{\mathbf{r}})$$

térfüggvény és az É.T.-ban haladó g görbe, amelyik paraméteres egyenlete:

$$\vec{\mathbf{r}} \doteq \vec{\mathbf{r}}(\lambda) = x(\lambda) \vec{\mathbf{i}} + y(\lambda) \vec{\mathbf{j}} + z(\lambda) \vec{\mathbf{k}}.$$

Lokalizáljuk a térfüggvényt erre a görbére:

$$\vartheta = \vartheta(\vec{\mathbf{r}}(\lambda)) = \vartheta(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)).$$

Ha a ϑ differenciálható a görbe pontjain, akkor a növekedés mértékét a g görbe mentén a lánc szabállyal nyert

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} \frac{dz}{d\lambda}$$

derivált adja, a térfüggvény teljes differenciálja pedig

$$d\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial x} dx + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} dy + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} dz,$$

ahol

$$dx = \frac{dx}{d\lambda} d\lambda \quad dy = \frac{dy}{d\lambda} d\lambda \quad dz = \frac{dz}{d\lambda} d\lambda.$$

Ekkor

$$d\vartheta = \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} \vec{k} \right) (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}).$$

Ez a ϑ iránymenti differenciálja a $d\vec{r}$ irányban.

Definíció:

$$\text{grad}\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\vec{k}$$

↓

$$d\vartheta = (\text{grad}\vartheta)d\vec{r} \quad \text{ahol} \quad (d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

ϑ ——— skalár tér

$\vec{v} = \text{grad}\vartheta$ ——— vektortér

A $\text{grad}\vartheta$ vektor iránya mindig a térfüggvény maximális növekedése felé mutat, abszolút értéke pedig a maximális növekedési sebességet adja meg.

Differenciálás vektortérben

Legyen megadva a

$$\vec{v} = v_1(x, y, z) \vec{i} + v_2(x, y, z) \vec{j} + v_3(x, y, z) \vec{k}$$

térfüggvény, valamint az É.T.-ban haladó g görbe

$$\vec{r} = x(\lambda) \vec{i} + y(\lambda) \vec{j} + z(\lambda) \vec{k}.$$

Erre a g görbére lokalizált térfüggvény $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}(\lambda))$, és $\frac{d\vec{v}}{d\lambda}$ -ra kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{d\lambda} &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{dz}{d\lambda} \right) \vec{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \frac{dz}{d\lambda} \right) \vec{j} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \frac{dz}{d\lambda} \right) \vec{k} = \\
& = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{d\lambda}.
\end{aligned}$$

Így a vektortér iránymenti differenciálja:

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz.$$

Átalakítva:

$$d\vec{v} = dx \frac{\partial}{\partial x} \vec{v} + dy \frac{\partial}{\partial y} \vec{v} + dz \frac{\partial}{\partial z} \vec{v} = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v}.$$

Formálisan skaláris szorzat alakban felírva:

$$dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} = (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Bevezetjük a:

$$\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \nabla$$

nabla-operátor-t (∇), ami egy lineáris vektorikus differenciáloperátor.

A nabla-operátorral az alábbi műveletek értelmezhetőek:

1. A nabla hatása egy $\vartheta = \vartheta(x, y, z)$ skaláris térfüggvényre

$$\nabla \vartheta = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vartheta = \vec{i} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \text{grad} \vartheta.$$

2. A nabla hatása egy $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}(t))$ vektorfüggvényre

a, A nablával való skaláris szorzás értelmezése:

$$\nabla \vec{v} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \text{div } \vec{v}.$$

b, A nablával való vektoriális szorzás értelmezése:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = \text{rot } \vec{v}. \end{aligned}$$

c, A nablával való diadikus szorzat értelmezése:

$$\vec{v} \oplus \nabla = \vec{i} \oplus \nabla v_1 + \vec{j} \oplus \nabla v_2 + \vec{k} \oplus \nabla v_3$$

ahol

$$\vec{i} \oplus \nabla v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x} \vec{i} \oplus \vec{i} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \vec{i} \oplus \vec{j} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \vec{i} \oplus \vec{k}.$$

Megjegyzendő!

$grad\vartheta_1, rot\vec{v} \rightarrow$ vektorfüggvények

$div\vec{v} \rightarrow$ skalárfüggvény

Differenciálási szabályok:

1. Legyen c állandó, $\varphi = \varphi(x, y, z)$ skaláris térfüggvény. Ekkor

$$\nabla(c\varphi) = \nabla(\overset{\downarrow}{c}\varphi) + \nabla(c\overset{\downarrow}{\varphi}) = \varphi\nabla c + c\nabla\varphi = c\nabla\varphi,$$

$$(\varphi\nabla c = \vec{0})$$

$$gradc\varphi = cgrad\varphi.$$

2. Legyenek $\varphi = \varphi(x, y, z)$, $\psi = \psi(x, y, z)$ skaláris térfüggvények. Ekkor

$$\text{a,} \quad \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\overset{\downarrow}{\varphi}\psi) + \nabla(\varphi\overset{\downarrow}{\psi}) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi,$$

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \psi \text{ grad}\varphi + \varphi \text{ grad}\psi.$$

$$\text{b,} \quad \nabla\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi}{\psi^2},$$

$$\text{grad}\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\psi \text{ grad}\varphi - \varphi \text{ grad}\psi}{\psi^2}.$$

Legyenek $\varphi = \varphi(x, y, z)$ skaláris, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ vektor térfüggvények. Ekkor:

$$\text{a,} \quad \nabla(\varphi\vec{v}) = \nabla(\overset{\downarrow}{\varphi}\vec{v}) + \nabla(\varphi\overset{\downarrow}{\vec{v}}) = \vec{v}\nabla\varphi + \varphi\nabla\vec{v},$$

$$\text{div}(\varphi\vec{v}) = \vec{v}\text{ grad}\varphi + \varphi\text{ div}\vec{v}.$$

$$\text{b,} \quad \nabla \times (\varphi\vec{v}) = \nabla \times (\overset{\downarrow}{\varphi}\vec{v}) + \nabla \times (\varphi\overset{\downarrow}{\vec{v}}) = (\nabla\varphi) \times \vec{v} + \varphi(\nabla \times \vec{v}) =$$

$$= -\vec{v} \times \nabla\varphi + \varphi(\nabla \times \vec{v}),$$

$$\text{rot}\varphi\vec{v} = \varphi\text{rot}\vec{v} - \vec{v} \times \text{grad}\varphi.$$

Legyenek $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$, $\vec{w} = \vec{w}(x, y, z)$ vektor térfüggvények. Ekkor

$$\begin{aligned}
\text{a, } \nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= \nabla \times (\overset{\downarrow}{\vec{v}} \times \vec{w}) + \nabla \times (\vec{v} \times \overset{\downarrow}{\vec{w}}) = (\nabla \vec{w}) \vec{v} - (\nabla \vec{v}) \vec{w} + \\
&+ (\nabla \vec{w}) \vec{v} - (\nabla \vec{v}) \vec{w} = (\vec{w} \nabla) \vec{v} - \vec{w} (\nabla \vec{v}) + \vec{v} (\nabla \vec{w}) - (\vec{v} \nabla) \vec{w}, \\
\text{rot}(\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{v} \operatorname{div} \vec{w} - \vec{w} \operatorname{div} \vec{v} + (\vec{w} \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \nabla) \vec{w}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b, } \nabla(\vec{v} \times \vec{w}) &= (\nabla \vec{v} \vec{w}) = (\nabla \overset{\downarrow}{\vec{v}} \vec{w}) + (\nabla \vec{v} \overset{\downarrow}{\vec{w}}) = (\vec{w} \nabla \vec{v}) - (\vec{v} \nabla \vec{w}) = \\
&= \vec{w} (\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} (\nabla \times \vec{w}), \\
\operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{w} \operatorname{rot} \vec{v} - \vec{v} \operatorname{rot} \vec{w}.
\end{aligned}$$

Laplace-operátor (skaláris differenciál-operátor):

$$\nabla \nabla = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2},$$

↓

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Alkalmazások

1. $div(grad\varphi) = div(\nabla\varphi) = \nabla(\nabla\varphi) = \Delta\varphi.$
2. $rot(rot\vec{v}) = rot(\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) =$
 $= \nabla(\nabla\vec{v}) - (\nabla\nabla)\vec{v} = grad(div\vec{v}) - \Delta\vec{v}.$
3. $rot(grad\varphi) = rot(\nabla\varphi) = \nabla \times (\nabla\varphi) = (\nabla \times \nabla)\varphi = \mathbf{0}\varphi = \mathbf{0}.$
4. $div(rot\vec{v}) = div(\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \times \vec{v}) = (\nabla \times \nabla)\vec{v} = \mathbf{0}\vec{v} = \mathbf{0}.$

Megjegyzések

1. Ha $rot\vec{v} = \mathbf{0} \Rightarrow$ a tér örvénymentes
2. Ha $div\vec{v} = 0 \Rightarrow$ a tér forrásmentes
3. Ha egy egyszeresen összefüggő tartományon $rot\vec{v} = \mathbf{0}$, akkor $\vec{v} = grad\varphi \Rightarrow \varphi$ potenciál függvény.

Ha még $div\vec{v} = 0$ is teljesül $\Rightarrow \vec{v} = grad\varphi \Rightarrow \varphi$

megoldása a

$$\Delta\varphi = 0$$

Laplace-féle differenciálegyenletnek.

Feladatok

1. Számítsuk ki $\text{grad}\vartheta$ értékét a megadott helyen, ha

$$\vartheta = e^{-(x^2+y^2+z^2)} \sin(2x - 3) \quad P_0(1, 1, 1)$$

$$\vartheta = \frac{x}{e^y - z} \quad P_0(2, 2, 1).$$

$$2. \text{grad}\vartheta \vec{e}^0 = \frac{d\vartheta}{ds}$$

$$\vartheta = |\vec{r}|^2, \quad \vec{e}^0 = \left\{ \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}} \right\},$$

$$\vartheta = |\vec{r}|^{-1}, \quad \vec{e}^0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\},$$

$$\vartheta = x^2 + 4y^2 + z^2 \quad \vec{e}^0 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{59}}, \frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{7}{\sqrt{59}} \right\},$$

$$\vartheta = 3x^2 - 2xy + z^2 \quad \vec{e}^0 = \left\{ \frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}, -\frac{1}{\sqrt{19}} \right\}.$$

3. Számítsuk ki $\operatorname{div} \vec{v}$ értékét, ha

$$\vec{v} = |\vec{r}| \vec{r} \quad \vec{r} = (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}.$$

4. Bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \Delta \varphi,$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0.$$

5. Kiszámítandó $\operatorname{rot} \vec{v}$, ha

$$\vec{v} = |\vec{r}| \vec{r}.$$

6. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \Delta \vec{v}.$$

ELEKTRODINAMIKA

Vektoranalisis II.

Vektoranalízis 2

A térfüggvény integrálása és alkalmazásai

Egy \vec{f} térfüggvény g görbeív mentén vett vonalintegrálja

legyen

$$\vec{f} = f_1(x, y, z) \vec{i} + f_2(x, y, z) \vec{j} + f_3(x, y, z) \vec{k}$$

akkor

$$\int_g \vec{f} d\vec{r} = \int_g f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz.$$

Skalártér vonal menti integrálja

$$\int_g \vartheta(\vec{r}) d\vec{r} = \vec{i} \int_g \vartheta(x, y, z) dx + \vec{j} \int_g \vartheta(x, y, z) dy + \vec{k} \int_g \vartheta(x, y, z) dz.$$

Példa:

Számítsuk ki a $\int_g \vartheta d\vec{r}$ vonalintegrált, ha $\vartheta = 2xz - 3y^2 + 4z$ és a g görbeív egyenlete $\vec{r} = \{t, t^2, t^3\}$, kezdőpontja $A(0,0,0)$ és a végpontja $B(1,1,1)$.

Megoldás:

Lokalizálva a görbére:

$$\vartheta_l = \underline{2t}t^3 - \underline{3t^2}t^2 + \underline{4t^3} = 4t^3 - t^4.$$

Ezt szorozva az érintő irányú

$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}}dt = \{1, 2t, 3t^2\} dt$$

vektorral, kapjuk:

$$\begin{aligned}
\int_g \vartheta d\vec{r} &= \int_{t=0}^1 (4t^3 - t^4)(1, 2t, 3t^2) dt = \vec{i} \int_{t=0}^1 (4t^3 - t^4) dt + \vec{j} \int_{t=0}^1 (8t^4 - 2t^5) dt + \\
&+ \vec{k} \int_{t=0}^1 (12t^5 - 3t^6) dt = \vec{i} \left[t^4 - \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 + \vec{j} \left[\frac{8}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^6 \right]_0^1 + \vec{k} \left[2t^6 - \frac{3}{7}t^7 \right]_0^1 = \\
&= \vec{i} \left[1 - \frac{1}{5} \right] + \vec{j} \left[\frac{8}{5} - \frac{1}{5} \right] + \vec{k} \left[2 - \frac{3}{7} \right] = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{19}{15}\vec{j} + \frac{11}{7}\vec{k}.
\end{aligned}$$

A vektortér skalárértékű vonalintegrálja

(Pld. a munka kiszámítása: $W = \int_g \vec{F} d\vec{r}$.)

$$W = \int_g \vec{w}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{w}[\vec{r}(t)] \dot{\vec{r}}(t) dt.$$

Példa:

$$\vec{w}(\vec{r}) = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

Ha a görbe az origó közepű R sugarú kör,

$$\text{akkor } \vec{r} = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = -R \sin t \vec{i} + R \cos t \vec{j}$$

$$W = \int_{t=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) (-R \sin t \vec{i} + R \cos t \vec{j}) dt = \int_{t=0}^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}R \sin t + \frac{1}{2}R \cos t\right) dt =$$

$$= \left[\frac{1}{3}R \cos t + \frac{1}{2}R \sin t\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{1}{3}R + 0 - \frac{1}{3}R - 0\right] = 0.$$

A vektortér vektorértékű vonalintegrálja

$$\int_g \vec{w} \times d\vec{r} = \vec{i} \left(\int_g w_2 dz - w_3 dy \right) + \vec{j} \left(\int_g w_3 dx - w_1 dz \right) + \vec{k} \left(\int_g w_1 dy - w_2 dx \right)$$

$$= \int_{t=t_A}^{t_B} \vec{w} [\vec{r}(t)] \times \dot{\vec{r}}(t) dt.$$

(pl. a Biot-Savart-törvény)

Példa:

Számítsuk ki a $\int_g \vec{w} \times d\vec{r}$ vektorértékű vonalintegrált, ha

$\vec{w} = \{x^2, 2y, 3z\}$, és a g görbe egyenlete $\vec{r} = \{t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\}$,

kezdőpontja $A(0,0,0)$, végpontja $B(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

Megoldás:

A vektorteret lokalizáljuk a görbére $\vec{w}_l = \{t^2, t^2, t^3\}$.

Ha $\vec{r} = \{t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\}$ $\dot{\vec{r}}(t) = \{1, t, t^2\}$.

$$\vec{w}_i \times \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t^2 & t^2 & t^3 \\ 1 & t & t^2 \end{vmatrix} = \underline{(t^4 - t^4)\vec{i}} + (t^3 - t^4)\vec{j} + (t^3 - t^2)\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \int_g \vec{w} \times d\vec{r} &= \int_{t=t_A}^{t_B} \vec{w}_i \times \dot{\vec{r}} dt = \int_{t=0}^1 \left[\vec{j}(t^3 - t^4) + \vec{k}(t^3 - t^2) \right] dt = \\ &= \vec{j} \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 + \vec{k} \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{20}\vec{j} - \frac{1}{12}\vec{k}. \end{aligned}$$

Kétméretű integrálok

1. A skalár tér fluxusa

$$\begin{aligned} \int_F \int \vartheta d\vec{F} &= \int_{T_{u,v}} \vartheta \left[\vec{r}(u, v) \right] (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) dudv = \\ &= \int_{T_{u,v}} \int \vartheta [x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \left[\vec{i} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \vec{j} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \vec{k} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] dudv; \end{aligned}$$

* Itt ha a felület egyenlete $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$

és az F felület az (u,v) síkon lévő T_{uv} tartomány képe, akkor a vektorikus felületelem:

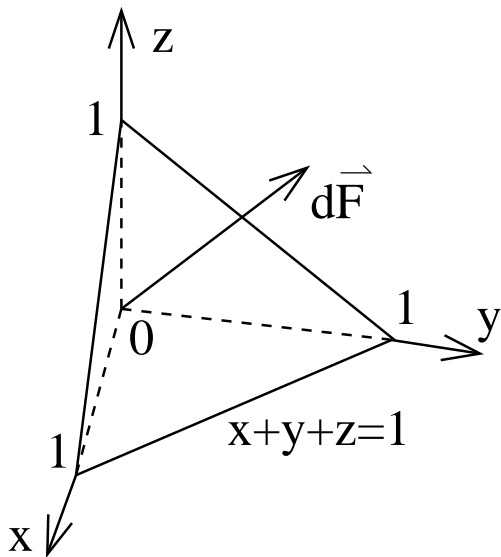
$$d\vec{F} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v dudv = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} dudv =$$
$$= \left[\vec{i} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \vec{j} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \vec{k} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] dudv.$$

Az integrál kiszámításánál a ϑ integranduszt lokalizálni kell a felületre úgy, hogy x,y,z helyébe a felület egyenletében szereplő $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ függvényeket írjuk.

Példa:

Számítsuk ki a $\int_F \int \vartheta d\vec{F}$ skalár tér fluxusát, ha $\vartheta = xyz$, és az F felület az $x + y + z = 1$ egyenletű sík első tércsojtdba eső része „felfelé” mutató felületi normálissal.

Megoldás:



felületelem

A felület egyenlete $z=1-x-y$, a vektorikus

$$d\vec{F} = (-z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j} + \vec{k}) dx dy = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) dx dy.$$

A \vec{k} vektor előjeléből látszik, hogy $d\vec{F}$ hegyesszöget alkot a z tengely pozitív irányával, azaz „felfelé” mutat!

Az integranduszt lokalizálva a felületre:

$$\vartheta_l = xyz = xy(1 - x - y) = xy - x^2y - xy^2.$$

Az integrálás alaptartománya az (x,y) síkon lévő $0 \leq y \leq 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$ egyenlőtlenségekkel jellemzett háromszög. Ezek felhasználásával kapható:

$$\begin{aligned} \int_F \int \vartheta d\vec{F} &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} (xy - x^2y - xy^2)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) dx dy = \\ &= \int_{x=0}^1 \left[x \frac{y^2}{2} - x^2 \frac{y^2}{2} - x \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{1-x} dx (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \frac{1}{120} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}). \end{aligned}$$

2. A vektortér skaláris fluxusa

$$\begin{aligned}\int_F \int \vec{w} d\vec{F} &= \int_{T_{u,v}} \int \vec{w} [\vec{r}(u, v)] (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) dudv = \\ &= \int_{T_{u,v}} \int \left[w_1 \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + w_2 \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + w_3 \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] dudv.\end{aligned}$$

(lásd*)

Példa:

Számítsuk ki a $\int_F \int \vec{w} d\vec{F}$ vektortér skaláris fluxusát, ha $\vec{w} = \{-y, x, z\}$, az F felület az $x + y + z = 3$ sík első tényolcadban levő része. A normális most is felfelé mutat.

Megoldás:

(Az ábrát lásd az előző feledatnál, csak a 3-nál metszi a tengelyeket.)

A felület egyenlete $z = 3 - x - y$ a vektorikus felületelem $d\vec{F} = (-z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j} + \vec{k}) dx dy = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) dx dy$. Az intergraduszt lokalizálva a felületre:

$$\vec{w} = \{-y, x, z\} = \{-y, x, 3 - x - y\}.$$

Az integrálás alaptartománya az (x,y) síkon lévő $0 \leq y \leq 3 - x$, $0 \leq x \leq 3$ egyenlőtlenséggel jellemzett háromszög. Ezek felhasználásával kapjuk:

$$\begin{aligned}\int_F \int \vec{w} d\vec{F} &= \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{3-x} (-y, x, 3 - x - y)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) dx dy = \\ &= \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{3-x} -y + x + 3 - x - y = \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{3-x} (3 - 2y) dx dy =\end{aligned}$$

$$\int_{x=0}^3 [3y - y^2]_0^{3-x} dx = \int_{x=0}^3 (3x - x^2) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{6} = 4.5.$$

3. A vektortér vektoriális fluxusa

$$\int_F \int \vec{w} \times d\vec{F} = \int_{Tuv} \int \vec{w} [\vec{r}(u, v)] \times [\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v] dudv =$$

$$\int_{Tuv} \int \left\{ \vec{i} \left[w_2 \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} - w_3 \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right] + \vec{j} \left[w_3 \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - w_1 \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] + \vec{k} \left[w_1 \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - w_2 \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right] \right\} dudv.$$

(lásd*)

Példa:

Számítsuk ki a $\vec{w} = e^x y z^2 \vec{i} + e^x z^2 \vec{j} + 2e^x y z \vec{k}$ vektortér vektoriális fluxusát, ha az F felület a $z=xy$ nyeregfelület az $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ egyenlőtlenségekkel kijelölt része, „felfelé” irányított felületi normálissal.

Megoldás:

A vektorteret lokalizáljuk a felületre a $z=xy$ helyettesítés segítségével:

$$\begin{aligned}\vec{w}_l &= e^x y z^2 \vec{i} + e^x z^2 \vec{j} + 2e^x y z \vec{k} = e^x y x^2 y^2 \vec{i} + e^x x^2 y^2 \vec{j} + 2e^x y x y \vec{k} = \\ & e^x x y^2 (x y \vec{i} + x \vec{j} + 2 \vec{k}).\end{aligned}$$

A vektorikus felületem:

$$d\vec{F} = (-z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j} + \vec{k}) dx dy = (-y \vec{i} - x \vec{j} + \vec{k}) dx dy$$

(ahol a $+\vec{k}$ miatt az irányítás felfelé mutat). A vektoriális szorzat:

$$\vec{w}_l \times d\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ xy & x & 2 \\ -y & -x & 1 \end{vmatrix} \cdot e^x x y^2 dx dy = \{3x, -xy - 2y, xy - x^2 y\} e^x x y^2 dx dy.$$

Ezt integrálva:

$$\int_F \int \vec{\omega} \times d\vec{F} = \vec{i} \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^1 3x^2 e^x y^2 dx dy - \vec{j} \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^1 (x+2)e^x xy^3 dx dy + \\ + \vec{k} \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^1 (1-x)e^x x^2 y^3 dx dy = (2e^2 - 2)\vec{i} - e^2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Integrálátalakítási tételek

Gauss-Osztrogradszkij-tétel egy vektortér skaláris fluxusának és divergenciájának hármas integrálja között ad összefüggést

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{w} dV = \oint \oint_F \vec{w} d\vec{F}.$$

Itt a $\vec{w}(\vec{r}) = w_1(x, y, z) \vec{i} + w_2(x, y, z) \vec{j} + w_3(x, y, z) \vec{k}$ vektortér $w_i(x, y, z)$ skalárkomponensei ($i = 1, 2, 3$) folytonos parciális deriváltakkal ($\frac{\partial w_i}{\partial x}, \frac{\partial w_i}{\partial y}, \frac{\partial w_i}{\partial z}$) rendelkeznek a V tartományban.

Példa:

Legyen $\vec{w} = (\vec{r})^2 \vec{r}$, és az F felület az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb, ahol

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

Megoldás:

$$\operatorname{div} \vec{w} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) (x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$3x^2 + y^2 + z^2 + 3y^2 + x^2 + z^2 + 3z^2 + x^2 + y^2 = 5(x^2 + y^2 + z^2) = 5 (\vec{r})^2,$$

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{w} dV = \int \int \int_V 5 (\vec{r})^2 dV = 5 \int \int \int_V (\vec{r})^2 dV =$$

$$= 5 \int_{r=0}^R (\vec{r})^2 4r^2 dr \pi = 5\pi \int_{r=0}^R 4r^4 dr = 5\pi \left[\frac{4}{5} r^5 \right]_0^R = 5\pi \frac{4}{5} R^5 = 4\pi R^5.$$

Illetve:

$$\oint \oint \vec{w} d\vec{F} = \oint \oint (\vec{r})^2 \vec{r} d\vec{F} = \oint \oint (\vec{r})^2 \vec{r} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} dF = \oint \oint |\vec{r}|^3 dF = R^3 4R^2 \pi = 4\pi R^5.$$

Igazoltuk, hogy mindkét oldal ugyanazt az eredményt adja!

Green-tétele (a Gauss-Osztrogradszkij-tételből nyerhető)

Legyen a G.-O.- tételben $\vec{w} = \varphi \text{ grad } \vartheta$, akkor

$$\int \int \int_V (\text{grad} \varphi \text{ grad} \vartheta + \varphi \Delta \vartheta) dV = \oint \oint \varphi \text{ grad} \vartheta d\vec{F}.$$

Ha $\vec{w} = \vartheta \text{ grad} \varphi$, akkor

$$\int \int \int_V (\text{grad} \vartheta \text{ grad} \varphi + \vartheta \Delta \varphi) dV = \oint \oint \vartheta \text{ grad} \varphi d\vec{F}.$$

A két egyenletet egymásból kivonva kapjuk:

$$\int \int \int_V (\varphi \Delta \vartheta - \vartheta \Delta \varphi) dV = \oint \oint (\varphi \text{ grad} \vartheta - \vartheta \text{ grad} \varphi) d\vec{F}.$$

Ebből az egyenletből $d\vec{F} = \vec{n}_0 dF$ és $\vec{n}_0 \text{ grad} \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial n}$ helyettesítéssel:

$$\int \int \int_V (\varphi \Delta \vartheta - \vartheta \Delta \varphi) dV = \oint \oint (\varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial n} - \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial n}) dF.$$

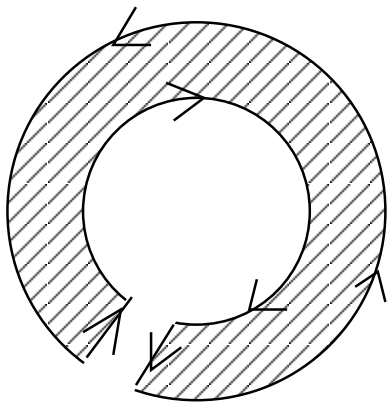
Ha $\varphi = 1$

$$\int \int \int_V \Delta \vartheta dv = \oint \oint \text{grad} \vartheta d\vec{F}.$$

A Stokes-tétel egy vektortér cirkulációja és rotációjának skaláris fluxusa között ad összefüggést:

$$\int_g \vec{w} d\vec{r} = \int_F \int \text{rot} \vec{w} d\vec{F}.$$

Itt a $\vec{w} = \vec{w}(\vec{r}) = w_1(x, y, z) \vec{i} + w_2(x, y, z) \vec{j} + w_3(x, y, z) \vec{k}$ vektortér $w_i(x, y, z)$ skalárkomponensei folytonos parciális deriváltakkal ($\frac{\partial w_i}{\partial x}, \frac{\partial w_i}{\partial y}, \frac{\partial w_i}{\partial z}$) rendelkeznek, (i=1,2,3) egy V tartományban.



Itt

Itt a felület normálisa és a g görbe irányítása jobb csavart alkot. ($d\vec{F}$ irányába nézve a g irányítása az óramutató járásával megegyezik.)

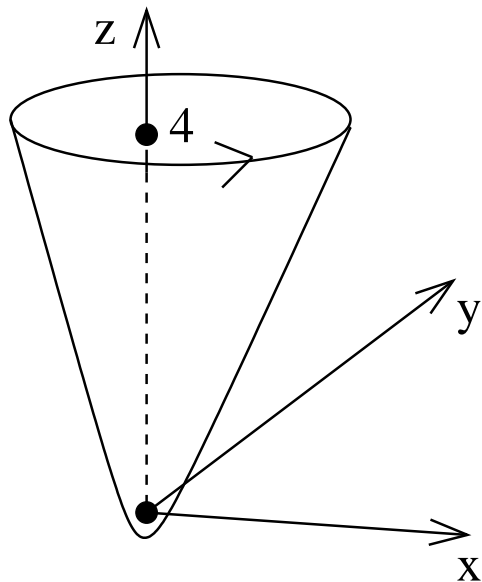
Példa:

Legyen $\vec{w} = (x + y + z)\vec{i} + xyz\vec{j} + x^2\vec{k}$ és az F felület a $z = x^2 + y^2$ paraboloid $z \leq 4$ része.

A felületdarab határoló görbéje az (x,y) síkkal párhuzamos, tőle 4 egység távolságban futó 2 egységnyi sugarú kör, amelynek középpontja a z tengelyen van. Ha a normális „felfelé” mutat, a g görbe irányítása az ábrának megfelelő.

Igazoljuk a Stokes-tételt!

Megoldás:



A $z = x^2 + y^2$ paraboloid $z' \leq 4$ része.

Ha $\vec{w} = (x + y + z)\vec{i} + xyz\vec{j} + x^2\vec{k}$, akkor

$\text{rot}\vec{w} = -xy\vec{i} + (1 - 2x)\vec{j} + (yz - 1)\vec{k}$.

Lokalizálva a $z = x^2 + y^2$ felületre:

$$(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{w}})_l = -xy \vec{\mathbf{i}} + (1 - 2x) \vec{\mathbf{j}} + (yx^2 + y^3 - 1) \vec{\mathbf{k}}.$$

A vektorikus felületelem:

$$d\vec{\mathbf{F}} = (-z'_x \vec{\mathbf{i}} - z'_y \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}) dx dy = (-2x \vec{\mathbf{i}} - 2y \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}) dx dy.$$

Skaláris szorzatuk:

$$(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{w}}) d\vec{\mathbf{F}} = (2x^2y - 2y + 4xy + yx^2 + y^3 - 1) dx dy.$$

Az F felületdarab vetülete az (x,y) síkon az $x^2 + y^2 = 4$ kör belseje és határvonala, tehát a Stokes-tételben szereplő felületi integrál:

$$\int_F \int \operatorname{rot} \vec{\mathbf{w}} d\vec{\mathbf{F}} = \int_{x^2+y^2 \leq 4} \int (3x^2y + y^3 + 4xy - 2y - 1) dx dy.$$

Az integrál értékét polár koordinátákban számítjuk ki:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \text{az elemi terület } r dr d\varphi$$

↓

$$\begin{aligned} \int_F \int \operatorname{rot} \vec{w} d\vec{F} &= \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (3r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi + r^4 \sin^3 \varphi \\ &\quad + 4r^3 \cos \varphi \sin \varphi - 2r^2 \sin \varphi - r) d\varphi dr. \\ &= -4\pi. \end{aligned}$$

(Itt csak az utolsó tag ad zérustól különböző értéket.)

A vonalintegrál kiszámításánál használjuk a g görbe egyenletét:

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} + 4 \vec{k}.$$

Lokalizáljuk a \vec{w} vektort a görbére:

$$\vec{w}_l = \vec{w} [\vec{r}(t)] = (2 \cos t + 2 \sin t + 4) \vec{i} + 16 \cos t \sin t \vec{j} + 4 \cos^2 t \vec{k}.$$

A $\oint_g \vec{w} d\vec{r} = \int_{t=0}^{2\pi} \vec{w} \dot{\vec{r}} dt$ vonalintegrál kiszámításához szükséges:

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} + 4 \vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = -2 \sin t \vec{i} + 2 \cos t \vec{j}.$$

A skaláris szorzat:

$$\vec{w}_l \vec{r}(t) = -4 \sin t \cos t - 4 \sin^2 t - 8 \sin t + 32 \cos^2 t \sin t.$$

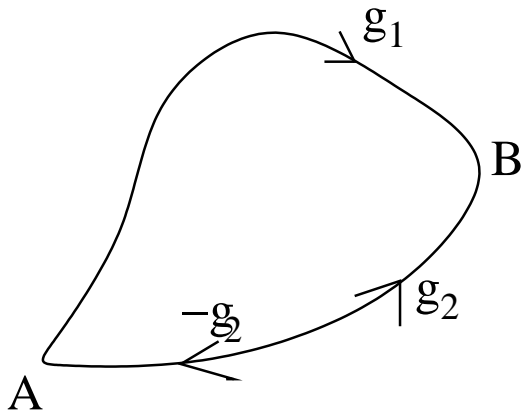
A vonalintegrál:

$$\oint_g \vec{w} d\vec{r} = \int_{t=0}^{2\pi} \left[-2 \sin 2t - 4 \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) - 8 \sin t - 32 \cos^2 t \sin t \right] dt = -4\pi,$$

(mert a $[0, 2\pi]$ között integrálva csak a t mentes tag ad zérustól különböző értéket).

A két eredmény valóban egyezik!

Legyen adva a $\vec{w} = \vec{w}(\vec{r}) = w_1(\vec{r}) \vec{i} + w_2(\vec{r}) \vec{j} + w_3(\vec{r}) \vec{k}$ vektortér. Rögzített A és B pontok között levő g görbeíven vett $\int_g \vec{w} d\vec{r}$ vonalintegrál független az úttól, ha az A és B pontokat összekötő tetszőleges g_1, g_2 görbére nézve:



$$\int_{g_1} \vec{w} d\vec{r} = \int_{g_2} \vec{w} d\vec{r}$$

$$\int_{g_1} \vec{w} d\vec{r} = \int_{g_2} \vec{w} d\vec{r} \iff \oint_g \vec{w} d\vec{r} = 0 \iff \text{rot} \vec{w} \equiv 0 \iff \vec{w} =$$

$$= \text{grad} \phi \iff w_1 dx + w_2 dy + w_3 dz = d\phi.$$

A vonalintegrálnak az út alakjától való függetlensége (bizonyos differenciálhatósági feltételek teljesülése esetén) egyenértékű az alábbi állítások akármelyikével:

1. Zárt görbe mentén vett vonalintegrál értéke zérus.
2. A vektortér örvénymentes.
3. A vektortérnek van potenciálja.
4. Az elemi munka teljes differenciál.

Az előzőekből következik, hogy adott

$$\vec{w} = w_1(x, y, z) \vec{i} + w_2(x, y, z) \vec{j} + w_3(x, y, z) \vec{k}$$

vektortérhez csak akkor lehet a $\vec{w} = \text{grad}\phi$ egyenletnek megfelelő $\phi(x, y, z)$ potenciálfüggvényt találni, ha $\text{rot}\vec{w} \equiv 0$, azaz ha az $(\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{\partial w_3}{\partial x}, \frac{\partial w_2}{\partial z} = \frac{\partial w_3}{\partial y})$ integrálhatósági feltételek teljesülnek.

Vagy, ha a $\frac{\partial \phi}{\partial x} = w_1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = w_2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = w_3$

adott parciális deriváltakat integráljuk.

Példa:

Vizsgáljuk meg, hogy létezik e a

$$\vec{w} = 6x^2y \vec{i} + (2x^3 - 12y^3z^2) \vec{j} + (20z^4 - 6y^4z) \vec{k}$$

vektortérnek potenciálja, és ha van, számítsuk ki.

Megoldás:

A potenciál létezésének feltétele:

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \vec{i} (-24y^3z + 24y^3z) - \vec{j} (0 - 0) + \vec{k} (6x^2 - 6x^2) \equiv 0.$$

Tehát létezik potenciál.

Adottak a w_1, w_2, w_3 függvények révén az ismeretlen $\phi(x, y, z)$ függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 6x^2y,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2x^3 - 12y^3z^2,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 20z^4 - 6y^4z.$$

Az első egyenletet integrálva x szerint:

$$\phi = \int 6x^2y dx = 2x^3y + c(y, z).$$

Ezt differenciálva y , illetve z szerint, és figyelembe véve a második, illetve a harmadik egyenletet: $2x^3 + c'_y = 2x^3 - 12y^3z^2$,

$$c'_z = 20z^4 - 6y^4z,$$

⇓

$$\frac{\partial c}{\partial y} = -12y^3z^2 \quad \text{és} \quad \frac{\partial c}{\partial z} = 20z^4 - 6y^4z.$$

↓

$$c = -3y^4z^2 + K(z).$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = 20z^4 - 6y^4z = -6y^4z + K'(z),$$

$$K'(z) = 20z^4 \quad \Rightarrow \quad K = \int 20z^4 dz = 4z^5 + k.$$

$$\phi = 2x^3y + c(y, z) = 2x^3y - 3y^4z^2 + K(z) = 2x^3y - 3y^4z^2 + 4z^5 + k.$$

Tehát a potenciál értéke: $\phi = 2x^3y - 3y^4z^2 + 4z^5 + k.$