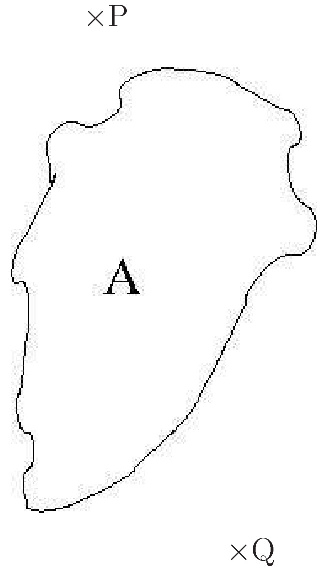
ELEKTRODINAMIKA

Elektromos és mágneses alapfogalmak

Elektromos alapfogalmak

Elektromosan töltött testek egymásra erőt fejtenek ki. Vizsgáljuk az erőhatást. Legyen A tetszőleges nagyságú és alakú test, amely elektromosan töltött. Legyen két kis töltött fémgolyónk (próbatestek), amelyek töltése e_1 és e_2. Ezen értékek kicsik az A töltéséhez képest, ezért ezek a töltések nem módosítják lényegesen az A által létrehozott teret. Ekkor a két töltésre -a tér különböző P és Q pontjaiba helyezve azokat-, az alábbi erők hatnak:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_1(P);\ \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_2(P)$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_2(Q);\ \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_1(Q)$$

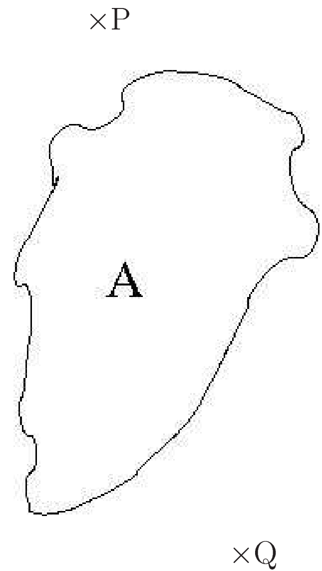


A négy erő nagyságát és irányát tanulmányozva a következő törvényszerűségek állapíthatók meg:

a, $\overrightarrow{\boldsymbol{F}_1}(P)$ iránya megegyezik $\overrightarrow{\boldsymbol{F}_2}(P)$irányával;
$\overrightarrow{\boldsymbol{F}_1}(Q)$ iránya megegyezik $\overrightarrow{\boldsymbol{F}_2}(Q)$irányával.

b, Az ugyanazon pontban mért erők nagyságának hányadosa a pont helyzetétől független, és a próbatöltések töltéseinek hányadosával egyezik meg:
$\frac{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{F}_1}(P)\right|}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{F}_2}(P)\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{F}_1}(Q)\right|}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{F}_2}(Q)\right|}=\frac{e_1}{e_2}.$

c, Valamely próbatöltésre a tér különböző pontjaiban ható erők nagyságának hányadosa független a próbatöltéstől:
$\frac{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{F}_1}(P)\right|}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{F}_1}(Q)\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{F}_2}(P)\right|}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{F}_2}(Q)\right|}.$



Az a,-c, megállapításokat a tapasztalat útján nyertük. Ezekől arra a következtetésre jutunk, hogy a P pontban elhelyezett e töltésre ható $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}(P)$ erő két tényező szorzataként álítható elő : $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}(P)= e\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(P)$.

e: $=$ a próbatest töltése (skalár).

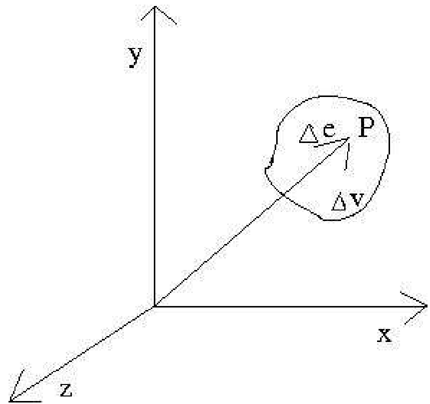
$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(P)$: $=$ a próbatesttől független vektortér, amelyet az A elektromosan töltött test határoz meg.

A testek elektromos töltésük révén a környező geometriai teret fizikai tulajdonságokkal ruházzák fel, fizikai térré alakítják. Ezt a fizikai tulajdonságokkal felruházott teret elektromos térnek nevezzük. Az elektromos tér helytől és időtől függő vektortér. Jellemzésére az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(P,t)$ elektromos térerősség vektort használjuk. Ha az elektromos töltés egységét megválasztottuk, akkor a térerősség nagysága és iránya valamely pontban a pozitív egységnyi töltésre ható erő nagyságával és irányával egyezik meg.

sztatikus tér : $=$ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(P,t)$ nem függ t-től, csak a helytől,
homogén tér : $=$ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(P,t)$ független a helytől,

Töltéssűrűség

Az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ teret töltések keltik. A fenomenológiai elektrodinamikában a töltések eloszlását folytonosnak tételezzük fel, és az elektromos töltéssűrűséggel - mint a helynek és az időnek folytonos függvényével - írjuk le. Ezt a következőképpen definiáljuk:

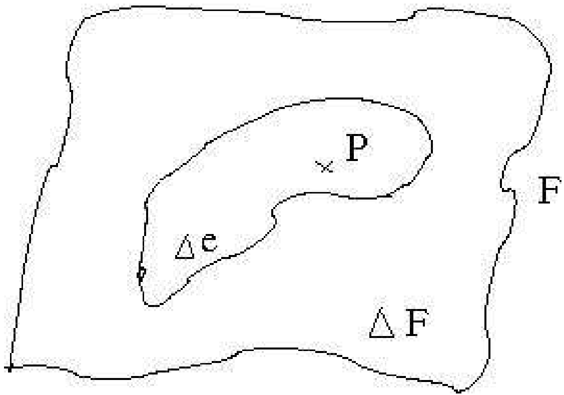


Legyen a térben egy ΔV térfogat, amelyet Δe elektromos töltés tölt ki folytonosan. $\Delta V -$ t összehúzva a P pontba, vagyis képezve a $\Delta V \to 0$ határátmenetet, a töltéssűrűség értéke a P pontban: $\rho(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta V}$.

A véges térfogatban lévő e töltést a $\rho(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ sűrűségfüggvény térfogatai integrálja adja meg: $e{=}\int_V \rho(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) dV$.

Az elektrodinamikában a $\rho(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ függvény adott, és az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ térerősséget keressük.

Felületi töltéssűrűség



$\eta(P,t) = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta F}$.

Itt Δe a ΔF felületelem elektromos töltése. A véges F felületen lévő e töltést az $\eta(P,t)$ felületi integrálja adja meg:

$e = \int_F \eta dF$, ahol η a felületi kordináták folytonos függvénye.

Vonal menti töltéssűrűség

$$\gamma(s,t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta s},$$

ahol Δe a Δs vonalelem elektromos töltése. $\gamma(s,t)$ általában az ívhossznak és az időnek folytonos függvénye. Valamely véges vonalszakasz e töltését a $\gamma(s,t)$ vonal menti integrálja adja meg:

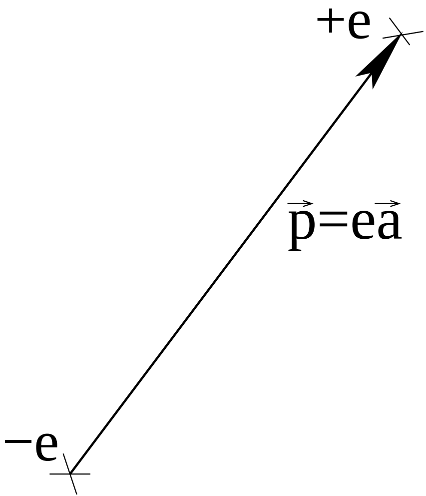
$$e = \int \gamma(s,t) ds.$$

Kétféle elektromos töltés:

- *negatív* $\longrightarrow$ (bőrrel dörzsölt ebonitrúd),
- *pozitív* $\longrightarrow$ (bőrrel dörzsölt üvegrúd).

Dipólusmomentum

Két, egymástól $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ távolságban levő $+e$, illetve $-e$ pontszerű töltést elektromos dipólnak nevezzük. Jellemzésére a dipólmomentum vektort használjuk:



Dimólmomentum-sűrűség (térfogati)

Tekintsük egy olyan anyagot, amelyben elemi dipólusok vannak és tételezzük fel, hogy eloszlásuk folytonos. Az anyag ΔV térfogatelemében lévő elemi dipólusok momentuma legyen $\Delta\vec{\boldsymbol{p}}$. A ΔV tartományt gondolatban húzzuk össze a belsejében lévő Q pontra, és képezzük a $\Delta\vec{\boldsymbol{p}}/\Delta V$ hányados határértékét:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{\boldsymbol{p}}}{\Delta V}.$$

Dimólmomentum-sűrűség (felületi)

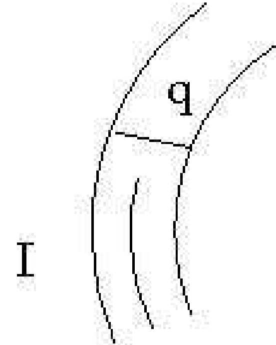
$$\vec{\boldsymbol{\nu}}(P,t) = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{p}}}{\Delta F}.$$

Kettősréteg esetén a felület normálisának irányítását úgy választjuk, hogy a negatív töltésű oldal felől mutasson a pozitív töltésű felé. Ebben az esetben a $\vec{\boldsymbol{\nu}}$ momentumsűrűség iránya megegyezik a felület normálisának irányával.

A mozgó elektromos töltést elektromos áramnak nevezzük.

konduktív áram: = vezetőben folyó áram

konvektív áram: = diszkrét töltések árama



Az áram jellemzésére az áramerősséget vagy az áramsűrűséget használjuk. Tekintsünk egy vezetőt, amelyben áram folyik. Szemeljük ki a vezető egy tetszőleges q keresztmetszetét. Tételezzük fel, hogy a q keresztmetszeten Δt idő alatt átfolyik Δe elektromos töltés.

<u>áramerősség:</u> $I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$.

Itt az $I(t)$ általában az idő függvénye.

<u>áramsűrűség:</u> $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$

iránya: = a vezető egy adott pontjában megegyezik az áram irányával

$\mid \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \mid = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta F}$.

ΔI a ΔF felületelemen merőlegesen átfolyó áram erőssége. $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ a helynek és időnek folytonos függvénye, tehát egy vektortér. $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$:=a felületegységen merőlegesen időegység alatt áthaladt töltésmennyiség és

$I = \int_F j_n dF$.

Vektoriális felületelem: $d\overrightarrow{\boldsymbol{F}}$ olyan vektor, amelynek nagysága a dF felületelem, iránya pedig a felület normálisa. Ezzel:

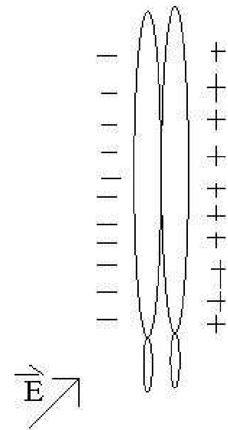
$I = \int_F \overrightarrow{\boldsymbol{j}} d\overrightarrow{\boldsymbol{F}}$.

<u>Konvektív áramsűrűség:</u> A töltések áramát egy $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ sebesség térrel írjuk le. Az áramló töltések térfogati sűrűsége $\rho(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$,

$\overrightarrow{\boldsymbol{J}}_k = \rho \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \Rightarrow I = \int_F \rho \overrightarrow{\boldsymbol{v}} d\overrightarrow{\boldsymbol{F}}$.

Elektromos megosztás:

Az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ tér hatására a vezetőben a pozitív és negatív töltés szétválik. A pozitív töltés a tér irányában, a negatív ellentétes irányban a vezető felületéig mozog. A gyorsan beálló egyensúlyi állapotban a szétvált töltések által keletkezett tér a vezető belsejében kompenzálja a külső teret, és így ott zérus a térerősség. Ezt a jelenséget elektromos megosztásnak nevezzük. A megosztó hatás felhasználásával definiálunk egy másik vektorteret, amely szintén az elektromos teret jellemzi



$$\eta_1, \eta_2 \ldots.., \eta_n.$$

A lemezpár helyzetét folytonosan változtatva egy adott helyen az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$-hez képest, -a legnagyobb η-t véve-, a tér minden pontjához hozzárendelhetünk egy vektort,- $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$, amelynek nagysága η, iránya pedig a pozitív töltésű lap külső normálisa a maximális töltéshez vezető helyzetben. A $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ vektort az elektromos indukció vektorának nevezzük.

Az elektromos tér jellemzésére két mennyiség szolgál:

$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) :=$ elektromos térerősség
$\overrightarrow{\boldsymbol{D}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) :=$ elektromos indukció

E két vektor nem független egymástól. A közöttük lévő kapcsolat attól függ, hogy a teret milyen anyagi közeg tölti ki.

Vákumban: $\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \varepsilon_0 \overrightarrow{\boldsymbol{E}}$.

Izotróp közegben: $\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \overrightarrow{\boldsymbol{E}}$.

ε_r :=relatív dielektromos együttható. Ha ε_r állandó $\Rightarrow$homogén közeg.

Anizotróp közeg esetén $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ között tenzoriális összefüggés áll fenn:

$$\begin{aligned}
D_x &= \varepsilon_{rxx}\varepsilon_0 E_x + \varepsilon_{rxy}\varepsilon_0 E_y + \varepsilon_{rxz}\varepsilon_0 E_z \\
D_y &= \varepsilon_{ryx}\varepsilon_0 E_x + \varepsilon_{ryy}\varepsilon_0 E_y + \varepsilon_{ryz}\varepsilon_0 E_z \\
D_z &= \varepsilon_{rzx}\varepsilon_0 E_x + \varepsilon_{rzy}\varepsilon_0 E_y + \varepsilon_{rzz}\varepsilon_0 E_z .
\end{aligned}$$

Az ε_{rik} mennyiségek egy kétindexes szimmetrikus tenzor elemei.

Mágneses alapfogalmak

A mágneses test erőtere forgatónyomatékot fejt ki a mágnestűre. Vegyünk két mágnestűt, amelyek momentuma legyen m_1 és m_2. Tételezzük fel, hogy mind-kettő kicsi a test eredő momentumához képest. Legyen $\overrightarrow{\boldsymbol{N}_1}(P)$ az m_1 mágneses momentumra ható maximális forgatónyomaték a P pontban. Hasonlóan kapjuk az $\overrightarrow{\boldsymbol{N}_1}(Q)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{N}_2}(P)$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{N}_2}(Q)$ mennyiségeket is. A mérési eredményeket vizsgálva a következő megállapításra juthatunk:

a, Az egy pontban mért maximális forgatónyomatékok abszolút értékeinek hányadosa nem függ a helytől, hanem csak a tűk mágneses momentuma nagyságának hányadosától:
$\frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{N}_1}(P)|}{|\overrightarrow{\boldsymbol{N}_2}(P)|} = \frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{N}_1}(Q)|}{|\overrightarrow{\boldsymbol{N}_2}(Q)|} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{m_1}{m_2}$.

b, A tér különböző pontjaiban mért maximális forgatónyomatékok nagyságá-nak aránya független a tű mágneses momentumától:
$\frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{N}_1}(P)|}{|\overrightarrow{\boldsymbol{N}_1}(Q)|} = \frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{N}_2}(P)|}{|\overrightarrow{\boldsymbol{N}_2}(Q)|} = \ldots\ldots\ldots$

A mágneses test -az elektromosan töltött testekhez hasonlóan- a környező geometriai teret fizikai tulajdonságokkal ruházza fel, fizikai térré alakítja. Ezt a teret mágneseset térnek nevezzük. A mágneses tér a mágneses momentumra forgatónyomatékot fejt ki, s ez a kísérletek tanulsága szerint - két mennyiségtől függ: a tű mágneses nyomatékától és a mágneses test fizikai terére jellemző $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ mágneses térerősségétől:

$$\vec{\boldsymbol{N}}(P) = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{H}}(P).$$

A tű $\vec{\boldsymbol{m}}$ mágneses momentumának irányát ismerjük. Eszerint $\vec{\boldsymbol{H}}$ irányát az a tűhelyzet határozza meg, amelyben a forgatónyomaték zérus. Ennélfogva ismert mágneses momentumú mágnestűvel a mágneses tér a fenti egyenlet alapján kimérhető.

A mágneses teret -ellentétben az elektromos térrel- nem pólusok, tehát nem mágneses töltések, hanem mágneses momentumok keltik.

Mágneses momentumsűrűség:

Feltételezzük, hogy a mágnesezettség folytonos az egész anyagban. Az anyag ΔV térfogatelemében lévő eredő mágneses momentum legyen $\Delta\vec{\boldsymbol{m}}$.

Ekkor: $\vec{\boldsymbol{M}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{m}}(t)}{\Delta V}$.

A mágneses alap problémáknál $\vec{\boldsymbol{M}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ ismert függvénye a helynek és az időnek. Ebből kerül meghatározásra az általa keltett mágneses tér.

Egy mágneses test eredő momentumát az $\vec{\boldsymbol{M}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ térfogati integrálja adja:

$\vec{\boldsymbol{m}}(t) = \int_V \vec{\boldsymbol{M}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)dV$.

A $\vec{\boldsymbol{B}}$ indukcióvektor definíciója: Vegyünk egy egységnyi alapterületű drótkeretet, amelyet egy voltméterrel kötünk össze. Ezt a mágneses térbe helyezzük, és a síkjában fekvő bármely tengely körül egységnyi idő alatt 90^o-kal elforgatjuk. Próbálgatással megkereshető a maximális kitérésű (volt méter) helyzet. Az indukált maximális feszültség lesz a bevezetendő új $\vec{\boldsymbol{B}}$ vektor nagysága. Irányát pedig a vezetőkeret (mint síklap) normálisa adja a kezdőhelyzetben, abban az irányban véve, amelyben az indukált feszültség által keltett áram iránya az óramutató járásával megegyező.

$\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$:= mágneses térerősség vektor,

$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$:= mágneses indukció vektor.

Vákuumban: $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \overrightarrow{\boldsymbol{H}}$.

Izotróp közegben: $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_r \mu_0 \overrightarrow{\boldsymbol{H}}$.

Homogén közeg: μ_r =állandó,

μ_r :=mágneses permeabilitás, $\qquad \mu = \mu_0 \mu_r$

$\mu_r > 1$ paramágneses agyagok,

$\mu_r < 1$ diamágneses agyagok,

$\mu_r = 1$ vákuum.

Anizotróp közegben:

$$B_i = \sum_j \mu_0 \mu_{rij} H_j.$$