ELEKTRODINAMIKA

Maxwell-egyenletek (2.Előadás)

Maxwell-egyenletek

Az elektromágneses teret négy vektortérrel jellemezzük: $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$.

A helynek és az időnek függvényei.

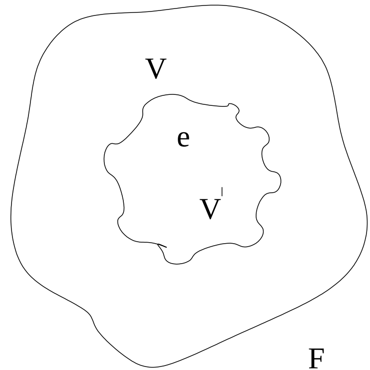
A tér és az időbeli változásukat meghatározott fizikai törvények szabályozzák.

A fizikai törvényeket matematikai egyenletek alakjában fogalmazzuk meg.

Az elektromágneses tér változását leíró törvények differenciálegyenletek alakjában adhatók meg.

1. Tekintsük egy V'tartományt, amelyet elektromos töltés tölt ki $\rho = \rho(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ térfogati sűrűségeloszlással. A V'térfogatban levő összes töltés:

$$e = \int_V \rho(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) dV'.$$



Az e töltés által keltett $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ vektor értéke a tér minden pontjában megmérhető.

Így tegyük fel, hogy a $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ vektor értékét az F felület minden pontjában ismerjük. Ezután képezhetjük az alábbi integrált:

$$N = \int_F D_n dF.$$

Ezen integrál jelentése: Az F felületen áthaladó elektromos indukcióvonalak száma. N az elektromos indukció fluxusa.

A tapasztalat azt mutatja, hogy:

$\int_F D_n dF = ke$ SI: $k = 1$ cgs: $k = 4\pi$

$$N = \int_F D_n dF = e.$$

Az N indukciófluxus arányos az F felület belsejében levő összes töltéssel.

Ez az összefüggés a Gauss-tétel. Átalakítva:

$$\int_F D_n dF = \int_V \rho dV,$$

(Gauss-Osztrogradszkij-tétel) ($\int_V div \overrightarrow{\boldsymbol{a}} dV = \oint_F a_n dF$)

$$\int_F D_n dF = \int_V div \overrightarrow{\boldsymbol{D}} dV = \int_V \rho dV \quad \Rightarrow \quad \int_V (div \overrightarrow{\boldsymbol{D}} - \rho) dV = 0,$$

$$\int_V (div\vec{\boldsymbol{D}} - \rho)dV = 0.$$

A tapasztalat szerint ez az integrál a V térfogat választásától függetlenül mindig zérus. Ez csak úgy lehet , ha az integrandusz a tér minden pontjában eltűnik:

$$div\vec{D} = \rho.$$

Maxwell 2. egyenlete (Gauss-tétel differenciális alakban való megfogalmazása.)

Következmények:

a, ha egy V tartományban $div\vec{\boldsymbol{D}} = 0$, a felületen $\vec{\boldsymbol{D}}$ vonal nem megy át;

b, ha egy V tartományban $div\vec{\boldsymbol{D}} \neq 0$, a felületre vett fluxus zérustól különböző;

$div\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ ott különbözik zérustól, ahol elektromos töltés van.
A $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ vonalak töltésből indulnak ki és töltésbe torkollanak be.
Az elektromos töltések az indukcióvonalak forrásai vagy nyelői.

a, Ha $div\overrightarrow{\boldsymbol{D}} > 0 \Rightarrow$ a töltés pozitív, a fluxus is > 0, vagyis kifelé mennek az indukcióvonalak.

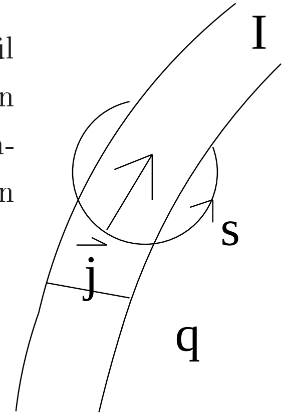
b, Ha $div\overrightarrow{\boldsymbol{D}} < 0 \Rightarrow (\rho < 0)$ a fluxus is < 0, vagyis befelé mennek az indukcióvonalak.

<u>Tehát:</u> az elektromos indukcióvonalak a pozitív töltésből indulnak ki, és a negatív töltésben végződnek. $\oplus$: források $\ominus$: nyelők

Az $\vec{\boldsymbol{E}}$ tér gerjesztését a $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ indukcióvektor jellemzi. A $div\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \rho$ egyenletből következik, hogy a $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ vektortér független attól, hogy a töltések milyen anyagi közegben helyezkednek el, ha az egész teret egységes anyag tölti ki. Más szóval, ha a térben ε-nak nincsen szakadása.

2. Ismert, hogy a vezetőben folyó áram maga körül mágneses teret kelt. Tekintsünk egy vezetőt, amelyben I erősségű áram folyik. Az áram eloszlását a $\overrightarrow{j}$ áramsűrűség írja le, amely I-vel a következő kapcsolatban van.

$$I = \int_q j_n dq.$$



q:= vezető keresztmetszete,

s:= vezetőt körülvevő zárt görbe.

Tételezzük fel, hogy a mágneses tér $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ térerőssége ismert az s görbe minden pontjában.

Ezután képezhető a $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ s görbe menti vonalintegrálja:

$$\oint_s \overrightarrow{\boldsymbol{H}} \overrightarrow{d\boldsymbol{s}}.$$

A tapasztalat azt mutatja, hogy:

a, ha a görbe közrefogja a vezetőt :

$$\oint \overrightarrow{\boldsymbol{H}}\,\overrightarrow{d}\,\boldsymbol{s} = kI,$$

(SI: $k = 1$ cgs: $k = \frac{4\pi}{C} = 3 \cdot 10^{10} cm/s$)

b, ha a görbe nem fogja körül a vezetőt:

$$\oint \overrightarrow{\boldsymbol{H}}\overrightarrow{d\boldsymbol{s}} = 0.$$

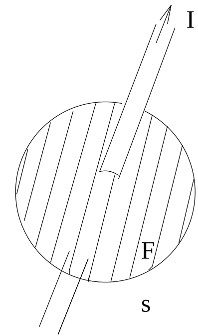
Az áram által keltett mágneses tér alaptörvénye tehát a következő alakba írható:

$$\oint \overrightarrow{\boldsymbol{H}}\overrightarrow{d\boldsymbol{s}} = I.$$

(Ez az egyenlet egyaránt érvényes konvektív és konduktív áramok által keltett mágneses térre.)

Az integrális összefüggésről differenciális összefüggésre térünk át. (Az elméleti fizikában általában erre törekszünk.)

Felhasználva a Stokes-tételt: $(\oint_L \overrightarrow{\boldsymbol{a}}\,\overrightarrow{d\boldsymbol{s}} = \oint_F (rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{a}})_n dF)$



$$\oint_S \overrightarrow{\boldsymbol{H}}\overrightarrow{d\boldsymbol{s}} = \int_F rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}}\overrightarrow{d\boldsymbol{F}}.$$

A jobb oldali felületi integrál olyan F felületre értendő, amely az s zárt görbére illeszkedik (s az F felület határoló görbéje).

Mivel a vezetőn kívül $\overrightarrow{\boldsymbol{j}} \equiv 0$ így:

$$I = \int_q j_n dq = \int_F \overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,\overrightarrow{d\boldsymbol{F}}.$$

Ezzel:

$$\oint_s \overrightarrow{\boldsymbol{H}}\overrightarrow{d\boldsymbol{s}} = \int_F rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}}\overrightarrow{d\boldsymbol{F}} = I = \int_F \overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,\overrightarrow{d\boldsymbol{F}}.$$

Ezt átalakítva:

$$\int_F (rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} - \overrightarrow{\boldsymbol{j}})d\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = 0.$$

Ez az integrál (a tapasztalat szerint) az F felület választásától függetlenül zérus:

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{j}}.$$

Ha ismert $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$, akkor $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ meghatározható.
Ha a mágneses teret a konduktív és konvektív áram együtt kelti, akkor

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \rho\overrightarrow{\boldsymbol{v}}.$$

A legáltalánosabb esetet akkor kapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy időben változó elektromos tér is mágneses teret kelt. Ekkor a mágneses teret meghatározó integrális összefüggés a következő:

$$\int_s \overrightarrow{\boldsymbol{H}}\overrightarrow{d\boldsymbol{s}} = \int_F (\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \rho\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{D}}}{\partial t})d\overrightarrow{\boldsymbol{F}}.$$

Maxwell 1.

Intergál egyenlet:

$$\int_s \overrightarrow{\boldsymbol{H}} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = \int_F (\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \rho \overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{D}}}{\partial t}) d\overrightarrow{\boldsymbol{F}}.$$

Differenciálegyenlet:

$$rot \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \rho \overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{D}}}{\partial t},$$

ahol $\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{D}}}{\partial t}$:=eltolódási áramsűrűség.

3. Oersted:= az elektromos és mágneses jelenségek nem függetlenek egymástól.

a, vezetőben folyó áram mágneses teret kelt;

b, Faraday szerint a duális is létezik. A mágneses tér is kelt elektromos áramot.

A mozgó mágnesnek időben változó mágneses tere van, amely maga körül elektromos teret kelt. Az elektromos térerősség vonalai zárt görbék. Ha a térbe zárt vezetőt helyezünk, benne az elektromos tér áramot indít meg. Jellemzésére az $\mathcal{E}$ indukált elektromos erőt használjuk. Ezen azt a munkát értjük, amelyet az elektromos tér akkor végez, ha a pozitív egységnyi töltést a zárt görbe mentén egyszer végig mozgatja:

$$\mathcal{E} = \oint \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \overrightarrow{d\boldsymbol{s}}.$$

Vegyünk egy zárt drótkeretet, amelyet F nagyságú felület határol. Az F felületen átmenő mágneses indukciófluxust az

$$\mathcal{F} = \int \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \overrightarrow{d\boldsymbol{F}}$$

integrál adja meg. A mágnes mozgatásakor az $\mathcal{F}$ fluxus változik. A tapasztalat azt mutatja, hogy

$$\mathcal{E} = -\frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

(Az indukált elektromos erő nagysága az indukciófluxus időegysége eső változásával egyezik meg, és akkor pozitív, ha az indukcióvonalak irányába nézve, a fluxus csökken:)

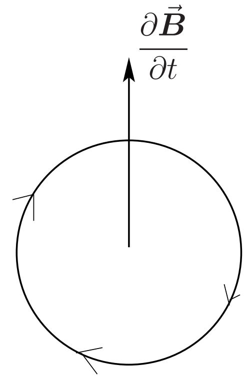
$$\varepsilon = \oint \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \overrightarrow{d\boldsymbol{s}} = -\frac{d}{dt} \int_F \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \overrightarrow{d\boldsymbol{F}}.$$

(Stokes-tétellel átalakítva:)

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} d\vec{\boldsymbol{s}} = -\int_F rot \vec{\boldsymbol{E}} d\vec{\boldsymbol{F}}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_F rot \vec{\boldsymbol{E}} d\vec{\boldsymbol{F}} = -\int_F \frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} d\vec{\boldsymbol{F}}.$$

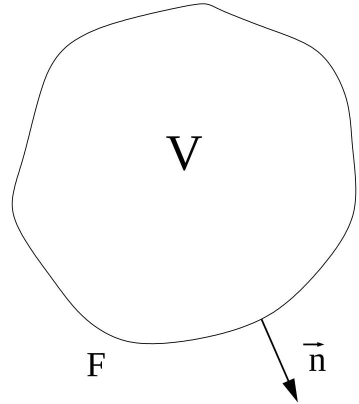


(Feltételeztük, hogy az F integrációs tartomány nem változik (azaz, a zárt görbe nyugszik) és így az idő szerinti differenciálás az integrál jel alá vihető.)
Ez csak akkor teljesülhet minden felületre, ha

$$rot \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}.$$

Ez a Faraday-féle indukció törvény, vagy **Maxwell 3. egyenlete.**

4. Tekintsük egy V tartományt, amelyet az F zárt felület határol. Ismert, hogy a mágneses indukcióvektor értéke a tér bármely pontjában meghatározható. Ezért tételezzük fel, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ vektor F felület menti külső normálisának F-re vett integrálja:



$$\int_F B_n dF = \int_F \overrightarrow{\boldsymbol{B}} d\overrightarrow{\boldsymbol{F}}.$$

A tapasztalat azt mutatja, hogy ez az integrál a felület választásától függetlenül mindig zérus:

$$\int_F \overrightarrow{\boldsymbol{B}} d\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az F felületen be- és kimenő mágneses indukcióvonalak számának összege zérus. A vonalaknak nincs a tartományon belül forrásuk, azok zárt görbék.

$$\int_F \overrightarrow{\boldsymbol{B}} d\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = 0.$$

Átalakítva a Gauss-Osztrogradszkíj tétellel kapjuk:

$$\int_F \overrightarrow{\boldsymbol{B}} d\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = \int_V div \overrightarrow{\boldsymbol{B}} dV = 0.$$

Az integrál a térfogattól függetlenü zérus. Ez csak úgy teljesülhet, ha

$$div \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0.$$

Maxwell 4. egyenlet

A természetben mágneses töltések nincsennek, a mágneses indukció vektortere mindenütt forrásmentes.

A Maxwell-egyenletek differenciális alakja:

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \rho\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{D}}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \rho, \tag{2}$$

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0. \tag{4}$$

Az elektrodinamika alapproblémája a következő: megadott töltés és áramel-oszlás elektromágneses terét keressük. Adott tehát a $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}, \rho, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ mint a helynek és időnek a függvénye. Keressük a teret leíró $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}, \overrightarrow{\boldsymbol{D}}, \overrightarrow{\boldsymbol{H}}, \overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ vektorokat a hely és idő függvényeként.

A Maxwell egyenletekben szereplő $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ illetve a $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ nem függetlenek egymástól; közöttük a teret kitöltő makroszkópikus anyagi közegtől függő kapcsolatok állnak fenn. Ezért a 4 Maxwell-egyenletet ki kell egészíteni az anyagi közegekre jellemző egyenletekkel.

1, Vákuumban: $\varepsilon_0\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \overrightarrow{\boldsymbol{D}}$, $\mu_0\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{B}}$.

2, Izotróp közegben: $\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \varepsilon_0\varepsilon_r\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$, illetve $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}=\mu_0\mu_r\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$.

ε:= dielektromos együttható $\qquad \varepsilon(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, T, \rho_a)$

μ:= mágneses permeabilitás $\qquad \mu(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, T, \rho_a)$

Ha ε és μ állandó $\Rightarrow$ homogén, izotróp közeg.

Milyen összefüggés van a vezetőben folyó áram erőssége és az azt létrehozó térerősség között?

Tekintsünk egy vékony vezetőszakaszt és a két közeli pontja P_1, P_2 közötti potenciálkülönbséget jelöljük $\Delta\Phi$-vel. (A $\Delta\Phi$ potenciál különbségen azt a munkát értjük, amelyet az elektromos tér akkor végez, ha a pozitív egységnyi töltést az áram irányában elmozgatja az egyik ponttól a másikig ($P_1 \to P_2$).)

Legyen a P_1P_2 szakasz hossza l, a vezető keresztmetszete q. Az Ohm-törvény szerint a vezetőben folyó áram I intenzitása arányos a $\triangle\Phi$ potenciálkülönbséggel és a q keresztmetszettel, fordítva arányos a szakasz l hosszával:

$$I = \sigma \frac{\triangle\Phi}{l} q. \qquad (*)$$

A σ arányossági tényező a vezető anyagára jellemző mennyiség; neve vezetőképesség.

$$I = \sigma \frac{\triangle\Phi}{l} q, \qquad (*)$$

itt az $\frac{l}{\sigma q}$ mennyiséget a vezetőszakasz ellenállásának nevezzük és R -rel jelöljük

$$R = \frac{l}{\sigma q},$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{\triangle\Phi}{R}. \qquad (**)$$

A (*) és (**) integrális összefüggések.

Differenciális alakra térve:

$$\mid \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \mid = \frac{I}{q} = \sigma \frac{\triangle\Phi}{l},$$

$$| \overrightarrow{\boldsymbol{j}} | = \frac{I}{q} = \sigma \frac{\triangle \Phi}{l},$$

$$\text{tartson } P_2 \to P_1$$

$$\Downarrow$$

$$| \overrightarrow{\boldsymbol{j}} |_{P_1} = lim_{l \to o} \sigma \frac{\triangle \Phi}{l} = \sigma \mid grad \Phi \mid_{P_1} \ .$$

Ez az egyenlet már egy pontban érvényes mennyiségek között teremt kapcsolatot.

Elhagyva a P indexet, az előbbi összefüggés a vezető bármely pontjára igaz:

$$| \overrightarrow{\boldsymbol{j}} | = \sigma \mid grad \Phi \mid$$

$$| \overrightarrow{\boldsymbol{j}} |= \sigma \mid grad\Phi \mid .$$

$\triangle\Phi$-t az egységnyi pozitív töltés P_1-től P_2-ig történő mozgatásakor végzett munkával definiáltuk. Ez a munka az $\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = e\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ képlet alapján a következő szakasz menti integrállal egyezik meg:

$$\triangle\Phi = \int_{P_1}^{P_2} \overrightarrow{\boldsymbol{E}} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}}.$$

Ebből következik, hogy a Φ és $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ között fennáll az

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -grad\Phi$$

összefüggés.

Ekkor:

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{j}}| = \sigma \mid grad\Phi \mid = \sigma \mid \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \mid .$$

Mivel az áram iránya a pozitív töltés mozgásirányával, tehát az $\overrightarrow{E}$ irányával egyezik meg, az abszolútérték jelet elhagyhatjuk:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \sigma \overrightarrow{\boldsymbol{E}}.$$

(Ez Ohm-törvénye differenciális alakban.)
<u>Jelentése:</u> Az áramsűrűség a vezető bármely pontjában arányos az elektromos térerősséggel, az arányossági tényező a σ vezetőképesség. A σ értéke általában függhet a helytől és a hőmérséklettől $\sigma(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, T)$. Ha σ állandó, akkor homogén vezetőkről beszélünk.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{D}} &= \epsilon_0 \epsilon_r \overrightarrow{\boldsymbol{E}}, \\
\overrightarrow{\boldsymbol{B}} &= \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\boldsymbol{H}}, \\
\overrightarrow{\boldsymbol{j}} &= \sigma \overrightarrow{\boldsymbol{E}}.
\end{aligned}
$$

Az előbbi egyenleteket anyagi egyenleteknek nevezzük, mivel a közegre jellemző ε, μ, σ anyagi együtthatókat tartalmazzák. A négy Maxwell-egyenlettel együttesen írják le az elektromágneses tér fizikai sajátosságait.

Maxwell-egyenletek

Integrális alak

1. $\oint_s \overrightarrow{\boldsymbol{H}} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = \frac{d}{dt}\int_F \overrightarrow{\boldsymbol{D}} d\overrightarrow{\boldsymbol{F}} + \sum I,$

2. $\oint_F \overrightarrow{\boldsymbol{D}} d\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = \sum Q,$

3. $\oint_s \overrightarrow{\boldsymbol{E}} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = -\frac{d}{dt}\int \overrightarrow{\boldsymbol{B}} d\overrightarrow{\boldsymbol{F}},$

4. $\oint_F \overrightarrow{\boldsymbol{B}} d\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = 0.$

Differenciális alak

1. $rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{D}}}{\partial t} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \rho\overrightarrow{\boldsymbol{v}},$

2. $div\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \rho,$

3. $rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \frac{-\partial\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\partial t},$

4. $div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0.$

+ 3db anyagi egyenlet:

1, $\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \epsilon_0\epsilon_r\overrightarrow{\boldsymbol{E}},$

2, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0\mu_r\overrightarrow{\boldsymbol{H}},$

3, $\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \sigma\overrightarrow{\boldsymbol{E}},$

ahol ϵ, μ, $\sigma(T, \overrightarrow{\boldsymbol{r}}, \rho_a)$.