

ELEKTRODINAMIKA

Határfeltételek (3. Előadás)

Határfeltételek

A Maxwell-egyenleteket a tapasztalatból nyert integrális összefüggésekből vezettük le a Stokes, illetve a Gauss-Osztrogradszkij tételek alkalmazásával. Minden esetben feltettük, hogy az integrandusban szereplő függvények folytonosak az egész integrációs tartományban. Ezért a Maxwell-egyenletek olyan térrészben érvényesek, ahol az \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} , \vec{D} folytonosak. Egységes anyagi közeg esetén nincs baj. Két különböző közeg határfelületén az anyagra jellemző ϵ , μ , σ mennyiségek ugrásszerűen változhatnak. Emiatt az anyagi egyenletek alapján, a közeget határokra a különböző térmennyiségeknek is szakadása van. Ezért a Maxwell-egyenletek az integrális összefüggésekből az egységes anyaggal kitöltött térrészre vezethetők le. A különböző közegekre felírt Maxwell-egyenletek megoldásait az érintkező közegek határfelületén egymáshoz kell illesztenünk. Ehhez ismerni kell azokat a törvényeket, amelyek megmondják, hogyan változnak a térmennyiségek két különböző közeg határán. Ezek az úgynevezett határfeltételi egyenletek. Most ezeket adjuk meg.

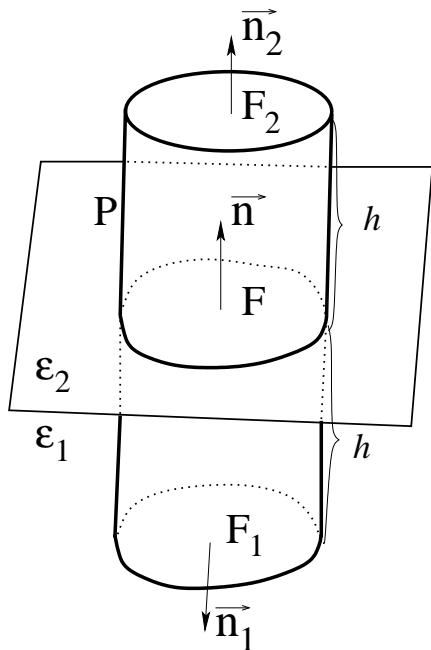
1. Határfeltétel (D_n -re)

Tekintsünk két egymással érintkező különböző közeget. Ezeket ϵ_1 és ϵ_2 jellemzi. A határokon vegyünk fel egy F felületet, amely legyen egy töltött vezető. A rajta lévő e töltés a következő:

$$e = \int_F \eta dF.$$

Egy olyan zárt térfogatot kaptunk, amelyet az F_1 és F_2 felület, valamint a P palást határol.

(Az F_1 és F_2 követi F alakját.)



Alkalmazzuk az ezen térfogatot határoló felületre a tapasztalati $\int_F D_n dF = e$

egyenletet:

$$\int_{F_2} D_n dF + \int_{F_1} D_n dF + \int_P D_n dF = \int_F \eta dF. \quad (*)$$

Vegyük a $h \rightarrow 0$ határátmenetet, ekkor F_1 és F_2 felületek az F felülethez, és P pedig zérushoz tart. Ekkor:

1. $\int_P D_n dF \rightarrow 0$, mivel $P \rightarrow 0$ és D_n korlátos,
2. $\int_{F_2} D_n dF \rightarrow \int_F D_{n_2} dF$ és $\int_{F_1} D_n dF \rightarrow -\int_F D_{n_1} dF$,
· mivel \vec{n}_2 és \vec{n} azonos irányú és \vec{n}_1 ezekkel ellentétes.

D_{n_1} és D_{n_2} a \vec{D} normálisát jelenti az F felület mentén az 1, illetve 2 indexű (ε_1 , illetve ε_2 dielektromos együtthatójú közeggel érintkező) oldalon. Így (*)-ból a következő marad:

$$\int_F D_{n_2} dF - \int_F D_{n_1} dF = \int_F (D_{n_2} - D_{n_1}) dF = \int_F \eta dF.$$

(Az egyenlet a határmenti F felület választásától függetlenül érvényes.)

Ezért: $D_{n_1} - D_{n_2} = \eta$.

Ez a következőt jelenti:

1. Ha az elválasztó (ϵ_1 és ϵ_2) felület határán töltés van (töltött vezető), akkor a \vec{D} normális irányú komponense ugrik a határon:

$$D_{n_2} = \eta + D_{n_1}.$$

2. Ha a két közeg határán nincs töltés ($\eta = 0$), ekkor a \vec{D} normális komponense folytonosan megy át a két közeg határán:

$$D_{n_2} = D_{n_1}.$$

\vec{E} - re a következő teljesül:

$$\epsilon_2 E_{n_2} = \epsilon_1 E_{n_1} \rightarrow E_{n_2} \neq E_{n_1}.$$

(Az \vec{E} normális komponense ugrik a határon.)

$$\frac{E_{n_2}}{E_{n_1}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

2. Határfeltétel (B_n - re)

Legyen a két érintkező közeg mágneses permeabilitása μ_1 és μ_2 . A tapasztalatból nyert $\int_F B_n dF = 0$ egyenletet alkalmazzuk az előbbi hengszerű térfogatra:

$$\int_{F_2} B_n dF + \int_{F_1} B_n dF + \int_P B_n dF = 0.$$

Az előbbi gondolatmenethez hasonlóan, ha $h \rightarrow 0$ kapjuk:

$$\int_F (B_{n_2} - B_{n_1}) dF = 0$$

\Downarrow

$$B_{n_2} = B_{n_1}.$$

A \vec{B} mágneses indukció vektor normális komponense folytonosan megy át két különböző közeg határán. A mágneses térerősség normális komponensére kapjuk:

$$\mu_2 H_{n_2} = \mu_1 H_{n_1} \Rightarrow H_{n_1} \neq H_{n_2}.$$

A \vec{H} mágneses térerősség vektor normális komponense ugrik két különböző közeg határán:

$$\frac{H_{n_2}}{H_{n_1}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Ez az integrál a $\overline{P_1P_2}$ vonalszakasz választásától függetlenül eltűnik. Ez csak úgy lehet, hogy az integrandusz azonosan zérus:

$$E_{t_1} = E_{t_2}.$$

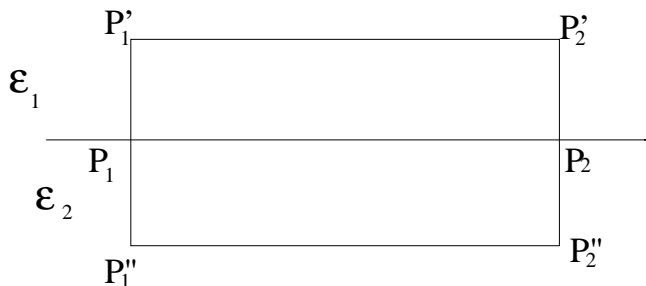
Két különböző közeg határán az \vec{E} elektromos térerősség tangenciális komponense folytonosan megy át. Ekkor teljesül:

$$\frac{D_{t_1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{t_2}}{\epsilon_2} \rightarrow D_{t_1} \neq D_{t_2}.$$

Az elektromos indukcióvektor tangenciális komponenseinek hányadosa a megfelelő dielektromos együtthatók hányadosával egyezik meg:

$$\frac{D_{t_1}}{D_{t_2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

4. Határfeltétel (H_t - re)



Írjuk fel az 1. ME-t $\oint_s \vec{H} d\vec{s} = \int_F (\vec{j} + \rho \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{F}$ az előbbi $P_1 P_2 P_2 P_2'' P_1'' P_1 P_1$ zárt görbére, illetve az általa meghatározott F felületre:

$$* \int_{P_1}^{P_2} \vec{H} d\vec{s} + \int_{P_2}^{P_2''} \vec{H} d\vec{s} + \int_{P_2''}^{P_1''} \vec{H} d\vec{s} + \int_{P_1''}^{P_1} \vec{H} d\vec{s} = \int_F (\vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{F}.$$

Itt \vec{i} a konvektív és a konduktív áramok sűrűségének az összege. Végezzük el ismét a $P_1 \rightarrow P_1$; $P_1'' \rightarrow P_1$; $P_2 \rightarrow P_2$; $P_2'' \rightarrow P_2$ határatmenetet. Ekkor az előbbi gondolatmenet alapján a bal oldali második és negyedik integrál, valamint a jobb oldali második integrál zérushoz tart. Így * a következő egyenletbe

megy át:

$$\int_{P_1}^{P_2} (H_{t_1} - H_{t_2}) ds = I_{fel}.$$

Ahol I_{fel} a két közeg határfelülete mentén folyó áram erősségét jelenti. Az I_{fel} („felületi”) áramerősséget fejezzük ki az i_{fel} („felületi”) áramsűrűséggel a következőképpen:

$$\begin{aligned} I_{fel} &= \int_{P_1}^{P_2} i_{fel} ds, \\ &\Downarrow \\ \int_{P_1}^{P_2} (H_{t_1} - H_{t_2}) ds &= \int_{P_1}^{P_2} i_{fel} ds. \end{aligned}$$

Ez az egyenlet a $\overline{P_1 P_2}$ vonalszakasz választásától független, ezért az integranduszok megegyeznek:

$$H_{t_1} - H_{t_2} = i_{fel}.$$

Jelentése: „Felületi” áramok esetén a mágneses térerősség tangenciális kompo-

nenese ugrik a felület mentén. Az ugrás mértékét a „felületi” áramsűrűség adja meg.

Ha a határfelület mentén nem folyik áram ($i_{fel} = 0$), akkor a mágneses térerősség tangenciális komponense folytonosan megy át a két közeg határán:

$$H_{t_1} = H_{t_2},$$

⇓

a mágneses indukcióvektor \vec{B} tangenciális komponense pedig ugrik a határfelületen:

$$\frac{B_{t_1}}{B_{t_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Az elektromos töltés megmaradása. Kontinuitási egyenlet. Relaxációs idő

Képezzük az 1. ME mindkét oldalának divergenciáját

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \rho \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad / \operatorname{div}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div}(\vec{j} + \rho \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D}.$$

Mivel $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0 \Rightarrow$ az egyenlet B.O. azonosan zérus. Írjuk be $\operatorname{div} \vec{D}$ helyére a 2. ME-ből ρ -t, ekkor:

$$0 = \operatorname{div}(\vec{j} + \rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j} + \rho \vec{v}) = 0.$$

Ez a mechanikából már ismert kontinuitási egyenlet. Az elektromos töltés megmaradását fejezi ki differenciális formában. Integráljuk az egyenletet egy zárt rögzített V térfogatra:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div}(\vec{j} + \rho \vec{v}) dV = 0.$$

Rögzített térfogat esetén az idő szerinti differenciálhányados kiemelhető az integráljel elé. A második integrált pedig a Gauss-Osztrogradszkij tétellel a V felületére vett integrállá alakíthatjuk. Így a következőt kapjuk:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_F (\vec{j} + \rho \vec{v}) d\vec{F}.$$



A V térfogatban levő elektromos töltés időegységre eső növekedése.



Az F felületen időegység alatt beáramló töltés mennyiség.

A V térfogatban tehát adott idő alatt annyival nő meg a töltés, amennyi az F felületen beáramlik. Ez azt jelenti, hogy az elektromos töltés nem tűnik el, hanem megmarad.

Relaxációs idő

Egyelőre tekintsünk el a konvektív áramoktól, és tanulmányozzuk a kontinuitási egyenlet alapján, hogy a vezető vagy szigetelő belsejébe vitt elektromos töltés hogyan változik az időben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\mathbf{j}} = 0.$$

a. Tekintsük a szigetelők esetét: A szigetelők vezetőképessége zérus, ezért szigetelőkben $\vec{\mathbf{j}} \equiv 0$. Így kapjuk:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow \quad \rho = \text{konst.}$$

A szigetelőkbe vitt e töltés tehát ott marad a helyén, mivel a közeg nem vezeti az áramot.

b. Vezetők. Az \vec{E} tér hatására áram indul meg, ami a töltést a felületre szállítja, amíg az egyensúlyi állapotban a vezető belsejében a \vec{E} tér zérussá válik. Vizsgáljuk meg, hogy mennyi idő alatt következik be ez az egyensúlyi állapot magára hagyott vezető esetén. Induljunk ki az Ohm-törvényből:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Ekkor:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma \vec{E}) = 0.$$

Legyen a vezető homogén (σ és ϵ állandó), és vegyük figyelembe a $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ egyenletet. Ekkor:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \operatorname{div} \vec{D} = 0.$$

Felhasználva a 2. ME-t, kapjuk:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \rho = 0.$$

Ez a differenciálegyenlet írja le homogén vezető belsejében az elektromos töltés sűrűségének időbeli változását. Megoldása a következő:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{-\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} t\right).$$

Homogén vezető belsejében a töltéssűrűség időben exponenciálisan csökken, ρ_0 a $t = 0$ időponthoz tartozó sűrűséget jelenti. A $t_\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\sigma}$ idő alatt a ρ töltéssűrűség kezdeti értékének az e-ad részére csökken. A t_τ időt relaxációs időnek nevezzük. Mivel vezetők esetén ϵ közelítőleg 1, a relaxációs időt gyakorlatilag $\frac{1}{\sigma}$ határozza meg. Ha σ nagy \Rightarrow relaxációs idő kicsi. Pl. réz esetén $\sigma = 53 * 10^{16} \frac{1}{s}$, így

$$t_\tau = 0.15 \cdot 10^{-18} \text{ s.}$$

A vezetők belsejébe vitt töltés tehát gyakorlatilag azonnal a vezető felületére kerül, és beáll a sztatikus egyensúly, amikor is a vezetőn belül $\rho = 0$, és ezzel együtt az elektromos térerősség is.

A Maxwell-egyenletek teljessége

A ME-ben szereplő mennyiségek a ρ , \vec{v} , ϵ , μ , σ a helynek és az időnek a függvényei. Az anyagi együtthatók függhetnek még általában a hőmérséklettől és a tömegsűrűségtől is. Ezeket ismert függvényeknek tekintjük, míg ismeretleneknek a térre jellemző mennyiségeket.

\vec{E} , \vec{H} , \vec{B} , \vec{D} (3 komponens) \Rightarrow 12 ismeretlen,

+ a 2 db anyagi egyenlet $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ és $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$,

\Downarrow

6 ismeretlen

4 db ME \Rightarrow 8 egyenlet.

Ellentmondás 6 ismeretlen és 8 egyenlet, túl határozott a probléma. Ez azonban nem igaz, mert az 1. és 3. egyenletekhez a 2. és 4. ME-ek kiegészítő feltételek szerepét játsszák.

A töltésmegmaradás miatt az áram és töltéssűrűség között mindig fennáll a kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{\mathbf{j}} + \rho \vec{\mathbf{v}}) = 0.$$

Képezzük a 1. ME mindkét oldalának divergenciáját:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} \equiv 0 = \operatorname{div}(\vec{\mathbf{j}} + \rho \vec{\mathbf{v}}) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{\mathbf{D}}.$$

A kontinuitási egyenletből $\operatorname{div}(\vec{\mathbf{j}} + \rho \vec{\mathbf{v}}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, ezt beírva az 1 ME-be

$$0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{\mathbf{D}},$$

↓

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} - \rho = \text{áll.}$$

(Az állandóság az időbeli függésre igaz!) Válasszuk $\vec{\mathbf{D}}$ -t úgy, hogy valamely időpillanatban ez az állandó 0 legyen, \Rightarrow

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = \rho. \quad 2. \text{ME}$$

Ha most eljárásunkat a 3. ME-re alkalmazzuk:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} \equiv 0 = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = \text{áll.} \quad \Rightarrow \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0.$$

Vagyis $\vec{\mathbf{B}}$ értékének alkalmas megválasztásával a 4. ME a 3. ME folyománya lesz.

Vagyis a kezdeti érték alkalmas megválasztása után a 2. és 4. ME-ek elhagyhatók, az elektromágneses teret az 1. és a 3. ME-ek határozzák meg. Ez pedig 6 egyenletet jelent a 6 db ismeretlen függvényre (pld. a 6 térerősség komponensre $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$).

Ezzel a ME-ek teljességét megmutattuk.