

ELEKTRODINAMIKA

(4. Előadás)

Az elektromágneses tér energiája

Vizsgáljuk az elektromágneses teret homogén izotróp szigetelőben. Ekkor ϵ , μ , és σ állandók.

$$1. \text{ ME} \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \rho \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$1'. \text{ ME} \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \rho \vec{v} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$$3. \text{ ME} \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$3'. \text{ ME} \quad \text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Szorozzuk meg az 1'. ME-t ($-\vec{E}$)-vel;

3'. ME-t ($+\vec{H}$)-val, majd az így kapott két egyenletet adjuk össze. Megfelelő sorrend változtatás után kapjuk:

$$-\vec{E} \text{rot} \vec{H} = -\vec{E} \vec{j} - \vec{E} \rho \vec{v} - \vec{E} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$+\vec{H} \text{rot} \vec{E} = -\vec{H} \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\rho(\vec{v}, \vec{E}) = \vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E} - (\vec{j}, \vec{E}) - \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \mu_r \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\rho(\vec{v}, \vec{E}) = -(-\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} + \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}) - (\vec{j}, \vec{E}) - \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \mu_r \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát integrálva egy adott V térfogatra, kapjuk:

$$\begin{aligned} \int_V \rho(\vec{v}, \vec{E}) dV = & - \int_V (-\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} + \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}) dV - \int_V (\vec{j}, \vec{E}) dV - \\ & - \int_V (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \mu_r \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) dV. \end{aligned}$$

A jobb oldalon szereplő első integrál integrandusza a vektoranalízisből ismert összefüggés alapján a következőképpen írható:

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}). \quad *$$

Az utolsó integrál integrandusza pedig idő szerinti differenciálhányadosra alakítható:

$$\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \mu_r \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}^2 + \mu_0 \mu_r \vec{H}^2). \quad **$$

Az * és ** behelyettesítése után egyenletünk a következő alakot veszi fel:

$$\int_V \rho(\vec{v}, \vec{E}) dV = - \int_V \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV - \int_V (\vec{j}, \vec{E}) dV$$

$$- \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}^2 + \mu_0 \mu_r \vec{H}^2) dV.$$

Mivel a V térfogat rögzített, az utolsó integrálból az idő szerinti differenciálás jele az integrál elé emelhető. A jobb oldal első integrálját a Gauss-Osztrogradszkij tétellel átalakítjuk a V tartomány F felületére vett integrállá. Ekkor:

$$\int_V \rho(\vec{v}, \vec{E}) dV = - \int_F (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{F} - \int_V (\vec{j}, \vec{E}) dV -$$

$$- \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}^2 + \mu_0 \mu_r \vec{H}^2) dV \right].$$

Az itt szereplő integráloknak konkrét fizikai jelentésük van. A bal oldal azt a teljesítményt jelenti, amelyet az elektromágneses tér végez, midőn a konvektív áramot képviselő ρ sűrűségű töltésrendszert \vec{v} sebességgel mozgatja. Ez a

teljesítmény — mint azt a mechanikából tudjuk — a töltésrendszer K kinetikus energiájának időegységre eső növekedésével egyenlő:

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \rho(\vec{v}, \vec{E}) dV.$$

A jobb oldal harmadik tagjának értelmezése miatt tételezzük fel, hogy a kiválasztott V tartományban vezetők nincsenek ($\vec{j} = 0$), és a tartomány határán a térerősségek eltűnnek. Ez a feltevés azt jelenti, hogy a vizsgált fizikai rendszerünk zárt, mivel nincs a környezetével elektromágneses kölcsönhatásban. A tett feltevések következtében a jobb oldalon csak az utolsó tag marad meg, az első két integrál eltűnik:

$$\int_V \rho(\vec{v}, \vec{E}) dV = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) dV.$$

Tovább írva a töltésrendszer kinetikai energiájának időegységre eső növekedésével:

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) dV.$$

Azt kaptuk, hogy zárt rendszer esetén sem érvényes a mechanikai jellegű energia megmaradásának a tétele:

$$\frac{dK}{dt} \neq 0.$$

A vizsgált zárt rendszerünk azonban nemcsak töltött testeket tartalmaz, hanem az általuk keltett elektromágneses teret is. Ha az energia megmaradásának tételét minden zárt rendszerre érvényesnek akarjuk tekinteni, akkor fel kell tételezni, hogy az elektromágneses térnek is van energiája. Az elektromágneses térnek a következő energiát kell tulajdonítanunk:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) dV.$$

Így a zárt fizikai rendszer (töltött testek + elektromágneses tér) teljes energiájára érvényes a megmaradási tétel:

$$\frac{d}{dt}(K + U) = 0,$$
$$K + U = \text{konst.}$$

Az elektromágneses tér energiájának kifejezése az

$$u = \frac{1}{2}(\epsilon_0\epsilon_r \vec{E}^2 + \mu_0\mu_r \vec{H}^2)$$

folytonos függvénynek a V térfogatra vett integrálja. A térenergia tehát folytonosan oszlik el az egész tartományban. Az u folytonos függvényt az elektromágneses tér energiasűrűségének nevezzük. Az energiasűrűség képletéből látszik, hogy az u ott különbözik zérustól, ahol a térerősségek is zérustól különböznek, tehát ahol elektromágneses tér van. Az anyagi egyenletek figyelembevételével u a következő alakban írható:

$$u = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}).$$

Ezzel:

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{dK}{dt} + \int_F (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{F} + \int_V \vec{j} \vec{E} dV. \quad * * *$$

A bal oldal jelentése:

Az F felülettel bezárt elektromágneses tér energiájának időegységre eső csökkenése. Ez három részből tevődik össze:

1. Az elektromágneses tér által mozgatott töltések kinetikai energiájának időegységre eső növekedése.
3. Tapasztalatból tudjuk, hogy a vezetőben folyó áram hőt termel. Ez az úgynevezett Joule hő. (Az integrandusz csak a vezetőkben különbözik zérustól.)

Eszerint a V térfogatban időegység alatt keletkezett hő:

$$Q = \int_V \vec{j} \vec{E} dV.$$

Alkalmazzuk az előbbi képletet l hosszúságú, q keresztmetszetű vékony, homogén drótszakaszra, amelyben I erősségű áram folyik. Ebben az esetben $I = |\vec{j}|q$, $dV = qdl$. A $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ Ohm-törvény felhasználásával kapjuk:

$$Q = \int_V \vec{j} \vec{E} dV = \int_V \frac{j^2}{\sigma} q dl = I^2 \int_l \frac{dl}{\sigma q}.$$

Bevezetve az ohmikus ellenállás kifejezését:

$$R = \int_l \frac{dl}{\sigma q}.$$

A vezetőben időegység alatt keletkezett Joule-hőre a kísérleti fizikából ismert

$$Q = I^2 R$$

képletet kapjuk. Ez a hő szintén az elektromágneses tér energiáját fogyasztja.

2. A második tag az $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H})$ kifejezés F -re vett felületi integrálja. Ezt a tagot a V tartomány F határfelületén az időegység alatt kiáramló energiával azonosítjuk. Az \vec{S} energiaáram sűrűség vektort bevezetőjéről, Poynting-vektornak nevezzük.

Ezek után megfogalmazzuk a Maxwell-egyenletekből levezetett *** energia egyenlet fizikai jelentését. Az F felülettel határolt tartomány elektromágneses terének energiája három okból csökkenhet:

1. Az erőtér mozgatja a töltött testeket, miközben munkát végez, és így azok kinetikai energiáját növeli (1. tag).
2. A határfelületen energia áramlik ki (2. tag).

3. A V térfogatban levő vezetőkben az áram hatására hő keletkezik (3. tag).

Az elektromágneses tér impulzusa. A Maxwell-féle feszültségi tenzor. Ponderom

Definiáljunk egy szimmetrikus másodrendű tenzort az alábbi módon. Legyen

$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}_e + \hat{\mathbf{P}}_m$, ahol

$$\hat{\mathbf{P}}_e := \vec{\mathbf{E}} \oplus \vec{\mathbf{D}} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{\mathbf{E}}^2 \hat{\mathbf{1}},$$

$$\hat{\mathbf{P}}_m := \vec{\mathbf{H}} \oplus \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \vec{\mathbf{H}}^2 \hat{\mathbf{1}}.$$

(Két vektor diadikus szorzatával, az — $(\vec{\mathbf{a}} \oplus \vec{\mathbf{b}}) \vec{\mathbf{x}} := \vec{\mathbf{a}} (\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{x}})$ egyenlőséggel — értelmezzünk egy tenzort; $\hat{\mathbf{1}}$ az egységtenzor.)

Az így definiált tenzor neve Maxwell-féle feszültségi tenzor.

Képezzük a $\hat{\mathbf{P}}$ tenzor divergenciáját:

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{P}}_e = \operatorname{div}(\vec{\mathbf{E}} \oplus \vec{\mathbf{D}}) - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\epsilon_0 \epsilon_r \vec{\mathbf{E}}^2 \hat{\mathbf{1}}). \quad *$$

Felhasználjuk az ismert összefüggést:

$$\operatorname{div}(\vec{\mathbf{E}} \oplus \vec{\mathbf{D}}) = \vec{\mathbf{E}} \nabla \vec{\mathbf{D}} + (\vec{\mathbf{D}} \nabla) \vec{\mathbf{E}},$$

$$\operatorname{div}(\epsilon \vec{\mathbf{E}}^2 \hat{\mathbf{1}}) = \vec{\mathbf{E}}^2 \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \vec{\mathbf{E}}^2,$$

illetve

$$\frac{1}{2} \nabla \vec{\mathbf{E}}^2 = \vec{\mathbf{E}} \times \nabla \times \vec{\mathbf{E}} + (\vec{\mathbf{E}} \nabla) \vec{\mathbf{E}}.$$

Ezen összefüggésekkel * -ra kapjuk:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{\mathbf{P}}_e &= \vec{\mathbf{E}} \nabla \vec{\mathbf{D}} + (\vec{\mathbf{D}} \nabla) \vec{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \vec{\mathbf{E}}^2 \nabla \epsilon - \frac{1}{2} \epsilon \nabla \vec{\mathbf{E}}^2 \\ &= \vec{\mathbf{E}} \nabla \vec{\mathbf{D}} + (\vec{\mathbf{D}} \nabla) \vec{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \vec{\mathbf{E}}^2 \nabla \epsilon - \epsilon [\vec{\mathbf{E}} \times \nabla \times \vec{\mathbf{E}} + (\vec{\mathbf{E}} \nabla) \vec{\mathbf{E}}]. \end{aligned}$$

Elvégezve az összevonást és figyelembe véve a $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}}$ egyenletet:

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{P}}_e = \vec{\mathbf{E}} \nabla \vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{D}} \times \nabla \times \vec{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \vec{\mathbf{E}}^2 \nabla \epsilon.$$

Behelyettesítve a 2. ME ($\nabla \vec{D} = \rho$) és 3. ME ($\nabla \times \vec{E} = -\vec{B}$)-t:

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{P}}_e = \vec{E} \rho + \vec{D} \times \vec{B} \cdot - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \nabla \epsilon.$$

Ugyanezen eljárással kiszámíthatjuk, hogy

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{P}}_m = \vec{H} \nabla \vec{B} - \vec{B} \times \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{2} \vec{H}^2 \nabla \mu.$$

Behelyettesítve az 1. ME ($\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{D}$) és 4. ME ($\nabla \vec{B} = 0$) -t, kapjuk:

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{P}}_m = 0 + \vec{D} \cdot \times \vec{B} + \vec{j} \times \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{H}^2 \nabla \mu.$$

Végeredményben:

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{P}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} + (\vec{D} \times \vec{B}) \cdot - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 \nabla \epsilon + \vec{H}^2 \nabla \mu).$$

A nyert egyenlet értelmezéséhez megszorításokat kell tennünk:

Tegyük fel, hogy a közeg homogén (azaz $\epsilon = \text{áll.}$ és $\mu = \text{áll.}$), továbbá, hogy

a folyamatok stacionáriusak (azaz $\vec{j} \neq 0$), de minden mennyiség expliciten független az időtől. Előbbi egyenletünk ekkor:

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{P}} = \rho \vec{\mathbf{E}} + \vec{j} \times \vec{\mathbf{B}}.$$

Az egyenlet jobb oldala a mechanikai közegre ható erő (ez az a közeg, amely a töltéseket szállítja, „ponderábilis” közeg) sűrűsége. Ebből, ha a közeg inhomogenitását megengedjük, a

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{P}} = \rho \vec{\mathbf{E}} + \vec{j} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{E}}^2 \nabla \epsilon + \vec{\mathbf{H}}^2 \nabla \mu) =: \vec{\mathbf{f}}$$

egyenlettel az következik, hogy az $\vec{\mathbf{f}}' = -\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{E}}^2 \nabla \epsilon + \vec{\mathbf{H}}^2 \nabla \mu)$ tag is erő-sűrűség. Ez az erőhatás csak akkor különbözik nullától, ha $\nabla \epsilon$ vagy $\nabla \mu$ nem nulla; más szóval ez az erő-sűrűség az anyag inhomogén voltából ered. A mechanikából tudjuk, hogy $\dot{\vec{p}} = \vec{\mathbf{f}}$, ahol a \vec{p} a mechanikai impulzus-sűrűség, $\vec{\mathbf{f}}$ a közegre ható erő sűrűsége. Ha bevezetjük a

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} = \epsilon\mu \vec{E} \times \vec{H} = \epsilon\mu \vec{S}$$

vektort (amely a Poynting-vektortól az $\epsilon\mu$ szorzóban különbözik),

kiinduló egyenletünk, — immár a kezdetben tett megszorításokat feloldva:

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{P}} = \vec{f} + \dot{\vec{g}} = (\vec{p} + \vec{g}) \cdot$$

Vegyünk egy zárt térfogatot, integráljuk erre az egyenletet:

$$\int_V \operatorname{div} \hat{\mathbf{P}} dV = \int_V (\vec{p} + \vec{g}) \cdot dV = \frac{d}{dt} \left(\int_V \vec{p} dV + \int_V \vec{g} dV \right).$$

Az egyenlet B.O. -ra az általánosított Gauss-tételt alkalmazva:

$$\int_V \operatorname{div} \hat{\mathbf{P}} dV = \oint_F (\hat{\mathbf{P}} \vec{n}) \cdot d\vec{F},$$

ahol \vec{n} a felület normálvektora. Legyen a térrész zárt. Elektromágneses szempontból ez azt jelenti, hogy a felületen a térmennyiségek zérus értéket vesznek fel, ám ekkor a felületen $\hat{\mathbf{P}} \equiv 0$, azaz az egyenlet bal oldala is zérus. Így

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \vec{\mathbf{p}} dV + \int_V \vec{\mathbf{g}} dV \right) = 0.$$

Ha megvizsgáljuk a $\vec{\mathbf{P}} = \int_V \vec{\mathbf{p}} dV$ összes mechanikai impulzust, azt látjuk, hogy az zárt rendszer esetén sem állandó. Az impulzusmegmaradás az energia (vagy a töltés) megmaradáshoz hasonló, széles érvényességű természeti törvény, megmaradási elv. Erre való tekintettel a $\vec{\mathbf{G}} = \int_V \vec{\mathbf{g}} dV$ mennyiséget az elektromágneses tér impulzusával azonosítjuk. A $\vec{\mathbf{g}} = \epsilon\mu \vec{\mathbf{S}}$ mennyiség az elektromágneses tér impulzussűrűsége. Az elektromágneses tér impulzusát definiálva a $\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{G}}) = 0$ egyenlet fejezi ki az impulzusmegmaradást.

Kérdés: Minek a feszültségét írja le a $\hat{\mathbf{P}}$ tenzor?

Minden olyan próbálkozás, amely az elektromágneses térnek valamilyen „hordozó közeget” feltételezett (ez volt az éter), és ennek feszültségét írta volna le a $\hat{\mathbf{P}}$ tenzor, kísérletileg ellenőrizhetetlen lett volna. Nem létezik más értelmezési lehetőség, mint hogy a $\hat{\mathbf{P}}$ tenzor magának az elektromágneses térnek a feszültségét írja le.

Önmagában a $\hat{\mathbf{P}}$ feszültségi tenzor kísérletileg nem vizsgálható; következménye, — azaz az elektromágneses tér impulzusának léte, — azonban már igen. Az utóbbiból ugyanis az következik, hogy a tükörről visszaverődő fény (ami nem más, mint az elektromágneses térben terjedő hullám) annak impulzust ad át, ami a tükörré erőt fejt ki. Ennek az erőnek a felületegységre számolt értéke a fénynyomás, melyet kísérletileg először Lebedyev mutatott ki.

Továbbmenve, az

$$\vec{\mathbf{L}} = \int_V \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{g}} dV$$

összefüggéssel értelmezhetjük az elektromágneses tér impulzusmomentumát.
Kísérletileg igazolást nyert, hogy az elektromágneses tér impulzusmomentummal is rendelkezik.