ELEKTRODINAMIKA

(5. Előadás)

Az elektromágneses potenciálok homogén és izotróp szigetelőkben és vezetőkben

A Maxwell-egyenletek csatolt elsőrendű differenciálegyenletek. Egyszerre oldhatók meg. Ez bizonyos matematikai nehézséget jelent. A csatolás megszüntetése miatt új mennyiségeket vezetünk be, amelyeknek (közvetve vagy közvetlenül) fizikai jelentést tulajdonítunk.

Induljunk ki a 4. ME-ből:

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0,$$

a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ vektortér tehát forrásmentes. Ennek következménye, hogy létezik olyan $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ vektortér, amelyből a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ összefüggéssel a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ vektortér kiszámítható. (Illetve a 2. ME-ből $\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu}rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$.) Az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ neve vektorpotenciál. Az is látható, hogy a vektorpotenciál nem egyértelműen adott. Valóban, az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}' = \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + grad\chi$ új vektorpotenciállal kapható:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}' = rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}}' = rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}} + rot\,grad\chi = rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{B}},$$

ugyanazt a teret adja, mint az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$. A χ a hely és idő tetszőleges (differenciálható) függvénye lehet. Az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ vektorpotenciál egy <u>mértéktranszformáció</u> erejéig meghatározott. Helyettesítsük eredményünket a 3. ME-be:

$$rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -(rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}})^{\bullet},$$

(a Young-tételt alkalmazva és az egyenletet rendeze, kapjuk:)

$$rot(\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overset{\bullet}{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}) = 0.$$

Az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overset{\bullet}{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}$ vektortér tehát örvénymentes, amiből következik, hogy $\exists$ olyan $\phi(\overrightarrow{r}, t)$ skalárfüggvény, amelyre teljesül, hogy

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overset{\bullet}{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} = -grad\,\phi,$$

azaz

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\overset{\bullet}{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} - grad\,\phi.$$

A ϕ függvény neve <u>skalárpotenciál</u>. A 1. AE segítségével a $\overrightarrow{D}$ vektor is előállítható:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \epsilon_0\epsilon_r\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\epsilon_0\epsilon_r grad\,\phi - \epsilon_0\epsilon_r\overset{\bullet}{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}.$$

A ϕ skalárpotenciál — akár az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ vektorpotenciál, egy mértéktranszformáció erejéig határozatlan. Az előbb bevezetett χ függvénnyel előállított $\phi' = \phi - \overset{\bullet}{\chi}$ új skalárpotenciál ugyanazt az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ -t szolgáltatja, mint ϕ:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E'}} = -grad\,\phi' - \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A'}}} = -grad(\phi - \dot{\chi}) - (\overrightarrow{\boldsymbol{A}} + grad\chi)^{\bullet} =$$

$$= -grad\,\phi + grad\,\dot{\chi} - \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} - grad\,\dot{\chi} = -grad\,\phi - \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{E}}.$$

Az eddig alkalmazott vektoranalízis tételek az $\overrightarrow{A}$ és ϕ elektromágneses potenciálok létezését állítják. Szükségünk van ezek megkonstruálására is. Most már ismerjük az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$,$\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$,$\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$,$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ vektorok elektromágneses potenciálokkal kifejezett alakját. Keressük az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ - ra és ϕ - re a meghatározó egyenleteket. Ehhez helyettesítsük be $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ potenciálokkal kifejezett alakját az 1. ME-be. Tételezzük fel, hogy az anyagi közeg homogén, vagyis $\epsilon = áll.$ és $\mu = áll.$. Így:

$$rot(\frac{1}{\mu_0\mu_r} rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}}) = (-\epsilon_0\epsilon_r grad\phi - \epsilon_0\epsilon_r \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}})^{\bullet} + \overrightarrow{\boldsymbol{J}}.$$

Felhasználva a közeg homogén voltát, az anyagi állandók kiemelhetők a differenciáloperátorok elé, így :

$$rot\, rot \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = -\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r grad\, \dot{\phi} - \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} + \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\boldsymbol{J}}.$$

A B.O. átírható ($rot\, rot \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = grad\, div \overrightarrow{\boldsymbol{A}} - \triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}}$) az alábbi alakban, mely rendezése után adódik:

$$graddiv \overrightarrow{\boldsymbol{A}} - \triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = -\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r grad\, \dot{\phi} - \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} + \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\boldsymbol{J}},$$

$$grad(div \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + \epsilon\mu\dot{\phi}) = \triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}} - \epsilon\mu \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} + \mu \overrightarrow{\boldsymbol{J}}.$$

Tételezzük fel, hogy:

$$div \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + \epsilon\mu\dot{\phi} = 0,$$

és ezzel az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$- ra vonatkozó egyenletünk:

$$\triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}} - \epsilon\mu \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} = -\mu \overrightarrow{\boldsymbol{J}}\,.$$

Minthogy a problémák jelentős részében $\overrightarrow{\boldsymbol{J}}$ a hely és idő adott függvénye, nyert egyenletünk $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$-ra inhomogén hullámegyenlet (d'Alembert-egyenlet). A $div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} + \epsilon\mu\dot{\phi} = 0$ feltételt Lorentz-feltételnek nevezzük.

Hátra van még a ϕ megkeresése.

A 2. ME-be helyettesítve a $\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = -\epsilon_0\epsilon_r grad\,\phi - \epsilon_0\epsilon_r \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}$ kifejezését:

$$div(-\epsilon_0\epsilon_r grad\,\phi - \epsilon_0\epsilon_r \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}) = \rho$$

egyenletet nyerjük, melyből az anyagi állandók helytől való függetlenségét felhasználva, és a Lorentz-feltételből $\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}$-ot kifejezve, ϕ-re kapjuk:

$$-\epsilon_0\epsilon_r div\, grad\, \phi - \epsilon_0\epsilon_r div\, \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} = \rho,$$

$$div\, grad\, \phi + div\, \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon_r},$$

$$\triangle\phi - \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\ddot{\phi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon_r}.$$

Ez pedig akár az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$-ra nyert egyenlet, d'Alembert-egyenlet.

<u>Célunkat elértük</u>: A Maxwell-egyenleteket szétcsatoltuk. A potenciálokra kapott egyenletek már <u>nem csatoltak</u>, de másodrendűek.

<u>Mit jelent a Lorentz-feltétel?</u>

Két dolgot kell vizsgálnunk:

1. Ha az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ és ϕ függvények nem elégítik ki a Lorentz-feltételt, található - e

olyan χ , amellyel a mértéktranszformáció olyan $\overrightarrow{\boldsymbol{A'}}$-t, és ϕ' -t állít elő, amelyek kielégítik a Lorentz-feltételt.

Ha az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}' = \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + grad\,\chi$, illetve $\phi' = \phi - \overset{\bullet}{\chi}$ potenciálokkal ki akarjuk elégíteni a Lorentz-feltételt:

$$div(\overrightarrow{\boldsymbol{A}} + grad\,\chi) + \epsilon\mu(\phi - \overset{\bullet}{\chi})^{\bullet} = 0,$$

akkor

$$div\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}} + \triangle\chi + \epsilon\mu\overset{\bullet}{\phi} - \epsilon\mu\overset{\bullet\bullet}{\chi} = 0,$$

azaz

$$\triangle\chi - \epsilon\mu\overset{\bullet\bullet}{\chi} = -(div\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}} + \epsilon\mu\overset{\bullet}{\phi}).$$

Ez χ-re d'Alembert-egyenlet, melyet megoldva, az így kapott χ-vel transzformált $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}'$ és ϕ' már kielégítik a Lorentz-feltételt. Látható, hogy ha már $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ és ϕ is kielégíti a Lorentz-feltételt $\Rightarrow$, hogy χ homogén hullámegyenletnek tesz eleget.

2. Mi a Lorentz-feltétel fizikai jelentése? A „fizikai jelentés „ fogalmát le lehet szűkíteni. Azon objektumoknak van fizikai jelentése, amelyek mérhetők. Így tekintve a dolgot az elektromágneses potenciáloknak nincs közvetlen fizikai jelentése.

Összefoglalva:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}}, \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} - grad\,\phi,$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu_0\mu_r} rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}}, \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{D}} = -\epsilon_0\epsilon_r grad\,\phi - \epsilon_0\epsilon_r \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}},$$

amikor

$$\triangle\overrightarrow{\boldsymbol{A}} - \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} = -\mu_0\mu_r \overrightarrow{\boldsymbol{J}},$$

$$\triangle\phi - \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\ddot{\phi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon_r}.$$

További egyszerűsítés lehetséges:

Induljunk ki egy olyan $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ és ϕ vektor, illetve skalárpotenciálból, amelyek kielégítik a Lorentz-feltételt. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az elektromágneses potenciálok Lorentz-mértékben vannak felírva. Hajtsunk végre egy mérték-transzformációt úgy, hogy

$$\phi' = \phi - \dot{\chi} \equiv 0$$

legyen. Ebből $\dot{\chi} = \phi$ és $\chi = \int \phi \mathrm{d}t$. Ezzel kiszámíthatjuk a transzformált vektorpotenciált:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}'} = \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + grad\,\chi,$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}'} = \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + grad \int \phi \mathrm{d}t.$$

Azt állítjuk, hogy a nyert potenciálok kielégítik a Lorentz-feltételt. Ehhez az szükséges, hogy χ kielégítse a homogén hullámegyenletet. Alkalmazzuk a $\triangle$-operátort χ-re:

$$\triangle\chi = \triangle \int \phi \mathrm{d}t = \int \triangle\phi \mathrm{d}t = \int \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\ddot{\phi}\mathrm{d}t - \int \frac{1}{\epsilon_0\epsilon_r}\rho \mathrm{d}t =$$

$$= \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\dot{\phi} - \frac{1}{\epsilon_0\epsilon_r}\int \rho \mathrm{d}t = \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\ddot{\chi} - \frac{1}{\epsilon_0\epsilon_r}\int \rho \mathrm{d}t.$$

(Itt felhasználtuk, hogy ϕ a d'Alembert-egyenletnek tesz eleget, és az idő szerinti integrálás és a hely szerinti parciális deriválás felcserélhetőek.) Látható, hogy $\underline{\rho = 0}$ esetén χ rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Ekkor pedig a térmennyiségek:

$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A'}}}$, $\qquad \overrightarrow{B} = rot\overrightarrow{\boldsymbol{A'}}$,

$\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = -\epsilon_0\epsilon_r\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A'}}}$, $\qquad \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}rot\overrightarrow{\boldsymbol{A'}}$.

Továbbá az $\overrightarrow{A}'$ vektorpotenciál a

$$div\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A'}}} = 0$$

feltételt elégíti ki, és a

$$\triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}'} - \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}'}} = -\mu_0 \mu_r \overrightarrow{\boldsymbol{J}}$$

egyenletből nyerhető. Az így meghatározott vektorpotenciált Coulomb-mértékben írtuk fel. Hangsúlyozzuk, hogy ez csak $\rho \equiv 0$ esetén lehetséges!

Vizsgáljuk az elektromágneses potenciálokat homogén izotróp vezetők belsejében. A 3. AE miatt a Maxwell-egyenletekre kapjuk:

1. $rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{D}}} + \sigma \overrightarrow{\boldsymbol{E}}$,
2. $div\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = 0$,
3. $rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}$,
4. $div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0$.

Felhasználtuk, hogy a töltésrelaxáció miatt $\rho = 0$ írható. A 4. ME-ből következik, hogy $\exists\ \overrightarrow{\boldsymbol{A}_0}$ vektorpotenciál, melyre

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0}.$$

S, hogy ez a vektorpotenciál a (tetszőlegesen választható) χ_0 skalárfüggvény gradiensét hozzáadva ugyanazt a $\overrightarrow{B}$-t szolgáltatja. (Egy mértéktranszformáció erejéig meghatározott.) A 3. ME-be helyettesítve:

$$rot(\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}_0) = 0$$

egyenletet kapjuk, melyből egy olyan ϕ_0 skalárfüggvény létezése következik, amelyre, $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}_0 = -grad\,\phi_0$, azaz

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -grad\,\phi_0 - \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}_0.$$

Az is belátható, hogy ha $(\phi_0 - \dot{\chi}_0)$-t választjuk, ugyanazt az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$-t kapjuk. A potenciálok meghatározásához helyettesítsük be eredményünket az első egyenletbe:

$$rot\frac{1}{\mu_0\mu_r}rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0} = -\epsilon_0\epsilon_r grad\,\dot{\phi}_0 - \epsilon_0\epsilon_r \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}_0 - \sigma grad\,\phi_0 - \sigma\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}_0.$$

Rendezés után (az anyag homogenitását felhasználva):

$$grad(div\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0} + \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\dot{\phi}_0 + \sigma\mu_0\mu_r\phi_0) = \triangle\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0} - \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}_0 - \mu_0\mu_r\sigma\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}_0.$$

A mértéktranszformációt megválaszthatjuk úgy, hogy a

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0} + \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\dot{\phi}_0 + \sigma\mu_0\mu_r\phi_0 = 0$$

általánosított Lorentz-feltétel teljesüljön. Ez esetben $\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0}$- ra az

$$\triangle\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0} - \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}_0 - \sigma\mu_0\mu_r\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}_0 = 0$$

általánosított hullámegyenletet kapjuk, melyet telegráf-egyenletnek nevezünk. A $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ vektort a 2. ME-be helyettesítve, és az általánosított Lorentz-feltételt felhasználva:

$$div(-\epsilon_0\epsilon_r grad\,\phi_0 - \epsilon_0\epsilon_r \overset{\bullet}{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}_0) = 0,$$

$$-\triangle\,\phi_0 - div\overset{\bullet}{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}_0 = 0,$$

$$\triangle\phi_0 - \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\overset{\bullet\bullet}{\phi}_0 - \sigma\mu_0\mu_r\overset{\bullet}{\phi}_0 = 0$$

adódik, amely formailag azonos az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0}$-ra nyert egyenlettel. Egyszerű behelyettesítéssel belátható, hogy ha $\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0}$ és ϕ_0 Lorentz-mértékben vannak felírva, az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}'_0} = \overrightarrow{\boldsymbol{A}_0} + grad\,\chi_0$ és $\phi'_0 = \phi_0 - \overset{\bullet}{\chi}_0$ potenciálok akkor és csakis akkor lesznek Lorentz-mértékben transzformálva, ha χ_0 a

$$\triangle\chi_0 - \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\overset{\bullet\bullet}{\chi}_0 - \sigma\mu_0\mu_r\overset{\bullet}{\chi}_0 = 0$$

telegráf egyenletnek tesz eleget.

Az elektrodinamika felosztása a Maxwell-egyenletek alapján

1. Tételezzük fel, hogy az összes mennyiség független az időtől, és áramok nem folynak ($\overrightarrow{\boldsymbol{J}} = 0$), $\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{D}}} = 0$ és $\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}} = 0$. A Maxwell-egyenletek ekkor:

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = 0, \qquad rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = 0,$$

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \rho, \qquad div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0.$$

Ebben az esetben <u>sztatikus térről</u> (röviden sztatikáról) beszélünk. Az egyenletek <u>szeparáltak</u>. Az elektromos és mágneses tér komponenseire független egyenletek írhatók fel. Lehetővé válik, hogy az elektromos és mágneses teret külön tanulmányozhassuk.

2. Engedjük meg, hogy áramok folyjanak a térben, de sem a $\overrightarrow{\boldsymbol{J}}$ áramsűrűség, sem pedig a térmennyiségek nem függhetnek explicite az időtől ($\dot{} \equiv 0$). E feltevéssel a

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{J}}, \qquad rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = 0,$$

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \rho, \qquad div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0,$$

alakú egyenleteket nyerjük. Ez a stacionárius eset. Látható, hogy az elektromos és mágneses mennyiségek továbbra is szeparáltak. Szigetelő anyagban a szeparálás teljes; vezető közegben a $\overrightarrow{\boldsymbol{J}} = \sigma \overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ anyagi egyenlet „csatolja" az elektromos és mágneses térmennyiségeket.

3. Függjenek a mennyiségek az időtől, de legyen $\left|\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{D}}}\right| << \left|\overrightarrow{\boldsymbol{J}}\right|$. Ezt a feltételt úgy értelmezzük, hogy a mennyiségek időben lassan változnak. A Maxwell-egyenletek formája:

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{J}}, \qquad rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}},$$

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \rho\ , \qquad div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0.$$

Ez a kvázistacionárius eset. Megjelenik a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ ($rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}$), az egyenletek csatolttá válnak.

4. Az eredetileg felírt Maxwell-egyenletek érvényesek.

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{J}} + \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{D}}}, \qquad rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}},$$

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \rho, \qquad div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0.$$

Az egyes részesetek vizsgálatánál voltaképp egy-egy részelméletet építünk fel. Ezek mintegy bővülő körökben tartalmazzák egymást. Az általánosabb elméletből a speciális részesetként nyerhető, habár az „átmenet” olykor nem egyszerű.