

# ELEKTRODINAMIKA

(6. Előadás)

## Elektrosztatika

Nyugvó töltések időben állandó elektromos tere.

1. Minden fizikai mennyiség állandó az időben.
2. A töltések nem mozognak, tehát  $\vec{v} = 0$ ; továbbá nincs áram:  $\vec{J} = 0$ .

A Maxwell és az anyagi egyenletek a következő formát öltik:

1. ME  $rot\vec{H} = 0$ ,  $H_{t_2} - H_{t_1} = 0 \Rightarrow H_{t_2} = H_{t_1}$ ,
2. ME  $div\vec{D} = \rho$ ,  $D_{n_2} - D_{n_1} = \eta$ ,
3. ME  $rot\vec{E} = 0$ ,  $E_{t_2} - E_{t_1} = 0$ ,
4. ME  $div\vec{B} = 0$ ,  $B_{n_2} - B_{n_1} = 0$ .

A ME-ek két egymástól független egyenletrendszerre esnek szét. Az egyik az elektromos a másik a mágneses tér tulajdonságait írja le.

### Az elektrosztatikus tér

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad \text{ahol} \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r.$$

## Az elektrosztatikus tér potenciálja

A sztatikus teret leíró alapegyenletek:  $rot \vec{E} = 0$ ,

$$div \vec{D} = \rho \Rightarrow div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}.$$

Ki kell számítanunk:  $\rho(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t)$ .

Mivel  $rot \vec{E} = 0 \Rightarrow \exists$  olyan egyértékű  $\phi(\vec{r}, t)$  skalárfüggvény, amelyre:

$$\vec{E} = -grad \phi.$$

Ha ismerjük a  $\phi(\vec{r}, t)$  függvényt  $\Rightarrow \vec{E} = -grad \phi$ .

A feladatot visszavezettük a  $\phi$  skalártér meghatározására.

$\phi$ -t a sztatikus tér potenciáljának nevezzük.

Helyettesítsük be az  $\vec{E} = -grad \phi$  kifejezést a

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

egyenletbe, ekkor

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}.$$

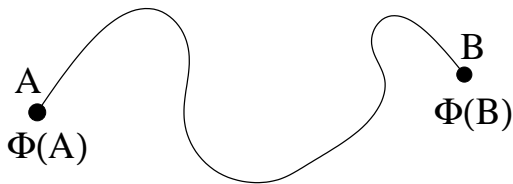
$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}, \quad \text{Poisson-egyenlet.}$$

Adott  $\rho(\vec{r}, t)$  töltéeloszlás potenciálját a Poisson-egyenlet megoldásaként kapjuk. A térerősségekre vonatkozó határfeltételek a  $\phi$  potenciál segítségével a következők:

$$(\operatorname{grad} \phi)n_2 - (\operatorname{grad} \phi)n_1 = -\frac{\eta}{\epsilon_0 \epsilon_r},$$

$$(\operatorname{grad} \phi)t_2 - (\operatorname{grad} \phi)t_1 = 0.$$

Mi a  $\phi$  potenciál fizikai jelentése?



Számítsuk ki azt a munkát, ami az  $\vec{E}$  tér végez, amikor a pozitív egységnyi töltést az A pontból a B-be mozgatja.

$$\text{Munka} = \int_A^B \vec{E} \, d\vec{s} = - \int_A^B \text{grad } \phi \, d\vec{s} = \phi(A) - \phi(B).$$

A végzett munka tehát az AB út végpontjaiban érvényes potenciálok különbségével egyenlő. A  $\phi$  potenciál és az  $\vec{E}$  térerősség között a kapcsolat egy konstans erejéig meghatározott, ugyanis  $\phi$ -hez tetszőleges konstans hozzáadható anélkül, hogy  $\vec{E}$  megváltozna. Önkényes megválasztási lehetőség létezik. Az elméleti fizikában a potenciál értékét a végtelen távoli pontban választjuk zérusnak.  $\phi(\infty) = 0$ . (Technikai problémák esetén általában a Föld potenciál értéke zérus.)

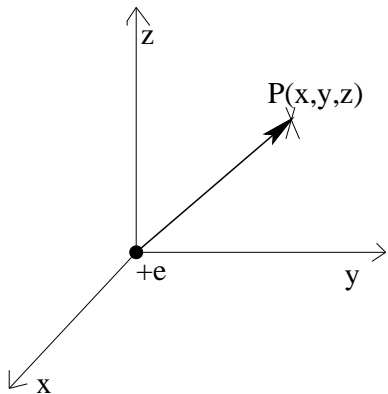
Miután a végtelen távoli pontban felvett értéket előírtuk, így már nemcsak a

potenciál különbségnek, hanem magának a potenciálnak is van fizikai jelentése:  $\phi(P)$  az a munka, amelyet az elektrosztatikus tér végez, amikor a pozitív egységnyi töltést a P pontból a végtelenbe mozgatja.

A sztatikus tér munkája független az úttól; a kezdő és végállapot egyértelműen meghatározza. Az elektrosztatikus tér konzervatív.

## A ponttöltés elektrosztatikus tere

Keressük a  $\phi(\vec{r}, t)$  potenciál értékét a tér valamely  $P(x, y, z)$  pontjában, s ebből határozzuk meg az  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  értékét.



A potenciál értékének meghatározására a Poisson-egyenletet használjuk fel. A ponttöltésen (tehát az origón) kívül az egyenlet jobb oldala zérus. A megoldandó egyenlet tehát:

$$\Delta\phi = 0.$$

A probléma gömbszimmetrikus.

$\Delta$ -t gömbi polárkoordinátákban írjuk fel, de  $\vartheta$ ,  $\varphi$  függés már nincs, így

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = 0.$$

Vezessük be a  $\psi = r\phi$  függvényt, ekkor

$$\phi = \frac{1}{r}\psi, \quad \phi' = -\frac{1}{r^2}\psi + \frac{1}{r}\psi',$$

$$\phi'' = +\frac{2}{r^3}\psi - \frac{1}{r^2}\psi' - \frac{1}{r^2}\psi' + \frac{1}{r}\psi'' = \frac{2}{r^3}\psi - \frac{2}{r^2}\psi' + \frac{1}{r}\psi'',$$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2\psi}{dr^2} = 0,$$

$$\psi = Ar + B,$$

⇓

$$\phi = \frac{B}{r} + A,$$

$$r = \infty \quad \phi(\infty) = 0 \Rightarrow A = 0,$$

$$\phi = \frac{B}{r} \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = -\text{grad} \frac{B}{r} = \frac{B}{r^2} \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}.$$

Az  $\vec{\mathbf{E}}$  tér sugárirányú gömbszimmetrikus tér.

A  $B$  értékét a Gauss-tételből határozhatjuk meg:

$$\int_F \vec{\mathbf{E}} d\vec{\mathbf{F}} = |\vec{\mathbf{E}}| \int_{F(G)} dF = \frac{B}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi B.$$

(Mivel  $\vec{\mathbf{E}}$  a felületen állandó nagyságú és sugárirányú, kapjuk:)

$$4\pi B = \frac{e}{\epsilon_0 \epsilon_r},$$

$$B = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}.$$

Tehát:

$$\phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{e}{r},$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{e}{4\pi r^2} \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}.$$

Gondoljunk egy másik  $e'$  töltést, akkor a közöttük fellépő erő:

$$\vec{F} = e' \vec{E}(\vec{r}),$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{e'e}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Ez az összefüggés lehetőséget ad az egységnyi töltés definiálására:

**Egységnyi az a töltés, amely vákuumban a tőle 1 m-re lévő ugyancsak egységnyi töltésre 1 N erőt fejt ki.**

Ha a töltést nem az origóba, hanem egy tetszőleges  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  pontba helyezzük, egy  $P(x, y, z)$  pontban a potenciál értéke a következő:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{e}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Több ponttöltés elektromos terét az egyes töltések terének szuperpozíciója adja meg. Ugyanis az alapegyenletek lineáris volta miatt az egyes megoldások összege is megoldás:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \dots = -grad \phi_1 - grad \phi_2 - \dots = -grad (\phi_1 + \phi_2 + \dots) = -grad \phi,$$

ahol  $\vec{\mathbf{E}}_1, \vec{\mathbf{E}}_2, \dots$ ;  $\phi_1, \phi_2, \dots$  az egyes ponttöltések által keltett elektromos térerősségeket, illetve azok potenciáljait jelentik:  $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots$ . Ha az  $e_i$  ponttöltés helykoordinátái  $x_i, y_i, z_i$ , akkor

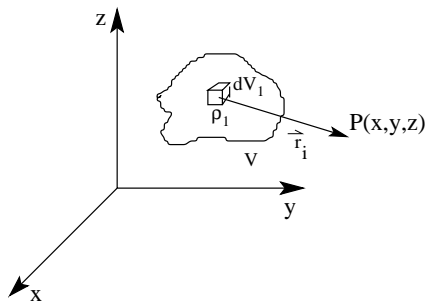
$$\phi(x, y, z) = \sum_{i=1, n} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r 4\pi} \frac{e_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}},$$

$$\phi = \sum_{i=1, n} \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{e_i}{r_i},$$

és  $\vec{\mathbf{E}} = -grad \Phi$ .

### A folytonos töltéseloszlás potenciálja

Legyen egy  $V$  térfogat, amelyet elektromos töltés folytonosan tölt ki  $\rho$  sűrűséggel. Határozzuk meg ennek a töltéseloszlásnak az elektrosztatikus potenciálját a  $P(x, y, z)$  pontban.



$$\phi(x, y, z) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{r_i}$$

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_V \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}, \quad *$$

vagy rövidebben:

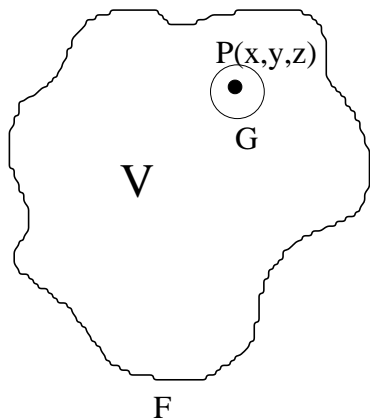
$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_V \frac{\rho dV'}{r}$$

A ponttöltés elektrosztatikus potenciálját a Poisson-egyenlet megoldásaként kaptuk. Ebből — a fizikában eléggé gyakori gondolatmenettel — következettünk a folytonos töltéeloszlás potenciál kifejezésére. A gondolatmenet logikája alapján biztosak vagyunk abban, hogy ez a megoldás jó megoldása lesz a Poisson-egyenletnek is. Azonban néhány ilyen esetben célszerű megmutatni pontos (matematikai) módszerekkel, hogy a fenti gondolatmenettel nyert megoldások valóban megoldásai a probléma alapegyenletének. Jelen esetben:  $(\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon_r})$ - nek.

Tegyük fel, hogy  $\psi$  és  $\phi$  differenciálhányadosokkal együtt reguláris függvényei az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  változóknak a  $V$  térfogatban. ( $\psi$ ,  $\phi$ ,  $\psi'$ ,  $\phi'$  folytonosak és korlátosak az értelmezett intervallumon.) A Green-tétel szerint ekkor fennáll a következő egyenlőség:

$$\int_V (\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi)dV = \int_F (\psi \text{ grad } \phi - \phi \text{ grad } \psi)\overline{d\vec{F}},$$

ahol  $F$  a  $V$  tartomány határoló felülete. Legyen  $P(x, y, z)$  a  $V$  tartomány egy tetszőleges pontja. A többi pont ettől számított távolságát jelöljük  $r$ -rel.



$\psi$ -t válasszuk speciálisan úgy, hogy kielégítse a  $\Delta\psi = 0$  egyenletet  $\Rightarrow \psi = \frac{1}{r}$ . Ez a  $\psi$  függvény a  $P$  pontban nem reguláris. Kizárva a  $P$  pontot a térfogattól  $\Rightarrow$  már mindkét függvény  $\psi$  és  $\phi$  is reguláris lesz. A  $\phi$  függvényről tételezzük fel, hogy az a keresett potenciállal egyezik meg. Így a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\int_{V-\text{gömb}} \frac{\Delta\phi}{r} dV = \int_F \left( \frac{1}{r} \text{grad } \phi - \phi \text{grad } \frac{1}{r} \right) d\vec{F} + \int_G \left( \frac{1}{r} \text{grad } \phi - \phi \text{grad } \frac{1}{r} \right) d\vec{F}.$$

A gömb felületén vett integrálban:

$$(\text{grad } \phi)_n = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_{r=R}; \quad \left(\text{grad } \frac{1}{r}\right)_n = \frac{1}{R^2},$$

$$dF = R^2 d\Omega,$$

ahol  $d\Omega$  a  $P$ -ből kiinduló elemi térszög. Ha a  $G$  gömbfelületet folytonosan összehúzzuk a  $P$  pontra, a gömbre vett felületi integrál  $-4\pi\phi(P)$  - hez tart. Ennélfogva:

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Delta \phi}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int_F \left(\frac{1}{r} \text{grad } \phi - \phi \text{grad } \frac{1}{r}\right) d\vec{F}.$$

Most feltételezzük, hogy a tekintett tartomány az egész végtelen tér, és hogy a  $\phi$  potenciál differenciálhányadosaival együtt mindenütt folytonos és korlátos. Ekkor az integrálban szereplő gömbfelület a végtelen sugarú gömbfelület. Mihez tart a fenti felületi integrál  $F \rightarrow \infty$  határátmenetben. A végtelenben  $\phi$

úgy tart zérushoz, mint  $\frac{1}{r}$ ; a  $(grad \Phi)_n$  és a  $(grad \frac{1}{r})_n$  pedig úgy, mint  $\frac{1}{r^2}$ . Az egész indegrandusz tehát úgy viselkedik a végtelenben, mint  $\frac{1}{r^3}$ . A  $dF = r^2 d\Omega$  felület elem másodfokú függvényként tart a végtelenhez. Ezért az egész felületi integrál a zérushoz tart, amikor az  $F$  felületet kitoljuk a végtelenbe. Ennélfogva egyenletünk a végtelen térre kiterjesztve a következő alakot veszi fel:

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta\phi}{r} dV.$$

A Poisson-egyenlet alapján  $\Delta\phi$  helyébe a  $-\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon_r}$  írható. Így végül éppen a már korábban felírt \* megoldást kapjuk:

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int \frac{\rho}{r} dV.$$

Ezzel megmutattuk, hogy \* valóban a  $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon_r}$  Poisson-egyenlet megoldása. Ha a folytonos töltéseloszlás nem térfogati, hanem felületi,  $\eta$  sűrűséggel, akkor

az előző gondolatmenethez hasonlóan  $\phi$  potenciálra kapjuk

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_F \frac{\eta}{r} dF.$$

Általános esetben, amikor felületi és térfogati töltéseloszlás is jelen van, az elektrosztatikus tér potenciálját a következő adja:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_V \frac{\rho}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_F \frac{\eta}{r} dF.$$

## Vezetők elektrosztatikus térben

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Az elektrosztatikus térben a töltések nyugalomban vannak, tehát nincs áram:  $\vec{J} = 0$ . Ennélfogva Ohm-törvényéből következik, hogy sztatikus tér esetén a vezetőkben az elektromos térerősség mindenütt zérus:

$$\vec{E} = 0.$$

Mivel  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = 0$ . Tehát vezetőkben, sztatikus elektromos tér esetén

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0.$$

Ha ezt összevetjük az általános érvényű 2. ME-tel ( $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ ), akkor látható, hogy az elektrosztatikában a vezetőben az elektromos töltés térfogati sűrűsége

mindenütt zérus:

$$\rho = 0.$$

Ebből következik, hogy az elektromos töltés a vezető felületén helyezkedik el, vagyis  $\eta \neq 0$ . Ha a töltött vezetőt külső elektromos térbe helyezzük, a töltés a felületen átrendeződik úgy, hogy belül az általa keltett tér a külső teret teljesen kompenzálja.

A térerősségekre vonatkozó határfeltételek töltött határfelület mentén:

$$D_{n_2} - D_{n_1} = \eta,$$

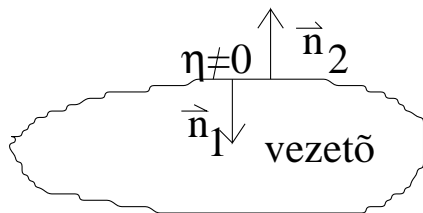
$$E_{t_2} - E_{t_1} = 0.$$

A 2-es index vonatkozzék a vezető felület külső normálisára, ezért  $D_{n_2} = \epsilon_0 \epsilon_r E_{n_2}$ , továbbá  $E_{t_1} = 0$  és  $D_{n_1} = 0$  (mert a vezetőben az elektromos térerősség mindenütt zérus). A töltött vezető felületén:

$$E_{n_2} = \frac{\eta}{\epsilon_0 \epsilon_r}, \quad E_{t_2} = 0. \quad **$$

Ez azt jelenti, hogy a töltött vezető felületét az elektromos erővonalak merőlegesen hagyják el, vagyis a felületen:

$$\vec{E} = \frac{\eta}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{n}_2.$$



Az  $\vec{E} = -grad \phi$  alapján a

$$\phi = konst.$$

következik.

(A vezető minden pontjában azonos a potenciál értéke.)

A \*\* kifejezhető a potenciálok értékével is:

$$(\text{grad } \phi)_{n_2} = -\frac{\eta}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

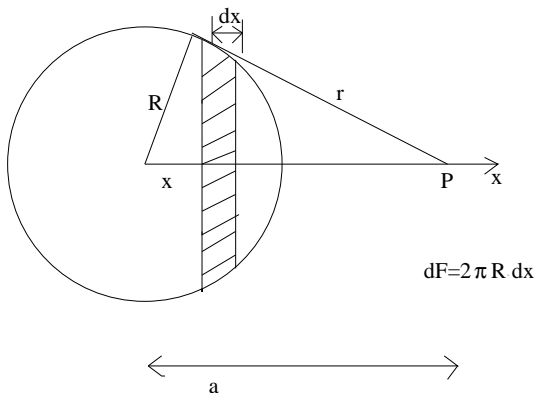
$$(\text{grad } \phi)_{t_2} = 0.$$

## Töltött vezető gömb elektrosztatikus tere

Tekintsünk egy  $R$  sugarú vezető gömböt, melynek töltése  $e$ .

Ekkor  $\eta = \frac{e}{4\pi R^2} = \text{áll.}$  A felületen elhelyezett töltések által keltett sztatikus tér potenciálját a következő összefüggés adja:

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_F \frac{\eta}{r} dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{e}{4\pi R^2} \int_F \frac{dF}{r}.$$



$$r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos(R, a)} = \sqrt{R^2 + a^2 - 2ax},$$

$$\phi(P) = \frac{e}{4\pi R^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{-R}^R \frac{2\pi R dx}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2ax}} = \frac{e}{\epsilon_0\epsilon_r 2R} \frac{1}{4\pi} \int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2ax}} =$$

$$= -\frac{e}{\epsilon_0\epsilon_r 2Ra} \frac{1}{4\pi} [\sqrt{R^2 + a^2 - 2ax}]_{-R}^R =$$

$$= -\frac{e}{\epsilon_0\epsilon_r 2Ra} \frac{1}{4\pi} \{ \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR} - \sqrt{R^2 + a^2 + 2aR} \}.$$

Ha a  $P - re$  ( $a > R$ ), akkor

$$\phi_k = -\frac{e}{\epsilon_0\epsilon_r 2Ra} \frac{1}{4\pi} \{ a - R - a - R \} = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon_r 4\pi} \frac{e}{a} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r a}. \quad *$$

Ha a  $P - re$  ( $a < R$ ), akkor

$$\phi_b = -\frac{1}{\epsilon_0\epsilon_r 4\pi} \frac{e}{2Ra} \{ R - a - a - R \} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{e}{R}. \quad **$$

\*  $\doteq$  A gömbön kívül a potenciál olyan, mintha az összes  $e$  töltés a gömb középpontjában lenne egyesítve.

\*\*  $\doteq$  A gömbön belül a potenciál állandó.

