# ELEKTRODINAMIKA

## (8. Előadás)

## Thomson tétele, az elektrosztatikai probléma megoldásának egyértelműsége

Tételezzük fel, hogy a végtelen teret szigetelő tölti ki, amelyről nem tételezzük fel, hogy homogén. A szigetelőben legyen $\rho = \rho(\vec{\boldsymbol{r}})$ sűrűségű töltéseloszlás és töltött vezetők. Csak azt tudjuk megadni, hogy mennyi az egyes vezetők össztöltése. Ezek legyenek rendre $e_k (k = 1, 2, ...)$. E töltésrendszer által keltett elektrosztatikus tér alapegyenletei a következők:

$$rot \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = 0, \qquad 1.$$

$$div \overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \rho, \qquad 2.$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \epsilon_0 \epsilon_r \overrightarrow{\boldsymbol{E}}, \qquad 3.$$

$$\int_{F_k} D_n dF = e_k. \quad 4.$$

1. -ből következik, hogy

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -grad\phi, \qquad 5.$$

amely potenciál a vezetők felületén állandó, tehát

$$\phi(F_k) = C_k. \qquad 6.$$

4. -ből következik, hogy

$$\int_{F_k} \epsilon(grad\phi)_n dF = -e_k. \quad 7.$$

Az (1.-7.) egyenleteket kielégítő $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ megoldásokat nevezzük elektrosztatikus megoldásoknak.

Tételezzük fel, hogy az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}'$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}'$ terek szintén megoldásai a 2.3.4. egyenletek-nek, de az előbbiektől különböznek. Az 5. és 6. egyenletek teljesülését az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}'$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}'$ mennyiségekre egyenlőre még nem követeljük meg.

Fennállnak a következő összefüggések:

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{D}}' = \rho, \qquad 2.a$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{D}}' = \epsilon_0\epsilon_r\overrightarrow{\boldsymbol{E}}', \qquad 3.a$$

$$\int_{F_k} D_n^{,} dF = e_k. \qquad 4.a$$

Az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}'$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ térerősségek különbségét jelöljük $\widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}}$- vel,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}' = \overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}}. \tag{8}$$

Eszerint fennáll a következő:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{D}}' = \overrightarrow{\boldsymbol{D}} + \epsilon_0 \epsilon_r \widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}}. \tag{9}$$

A 4. 4a. és 9. egyenletekből következik:

$$\int_{F_k} \epsilon \widetilde{\overrightarrow{E}}_n dF = 0. \tag{10}$$

A 2. 2a. és 9. egyenletek alapján pedig érvényes:

$$div(\epsilon_0 \epsilon_r \widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}}) = 0 \tag{11}$$

egyenlet.

Írjuk fel a vesszős tér energiájának kifejezését:

$$U' = \frac{1}{2}\int \overrightarrow{\boldsymbol{E}}'\overrightarrow{\boldsymbol{D}}'dV = \frac{1}{2}\int \epsilon\vec{\boldsymbol{E}}'^2 dV = \frac{1}{2}\int_V [\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}'^2 + \epsilon\widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}}^2 + \underbrace{2\epsilon(\overrightarrow{\boldsymbol{E}}, \widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}})]dV}_{*}. \quad (12)$$

A * integrált jelöljük $\mathcal{F}$-fel, és alakítsuk át az 5. egyenlet figyelembevételével:

$$\mathcal{F} = \int_V \epsilon(\overrightarrow{\boldsymbol{E}}, \widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}})dV = -\int_V \epsilon(grad\phi, \widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}})dV.$$

Mivel a vezetők belsejében $grad\phi$ azonosan zérus, ez az integrál a vezetőkön kívüli térre terjesztendő ki. Az egész rendszert vegyük körül egy nagy $\overrightarrow{F}'$ zárt felülettel, amelyen kívül már nincs sem vezető, sem töltés, és végül $\overrightarrow{F}'$ tartson $\infty$. A

$$(grad\phi, \epsilon\widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}}) = div(\phi\epsilon\widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}}) - \phi div(\epsilon\widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}})$$

összefüggés felhasználásával, $\mathcal{F}$ a következő alakú lesz:

$$\mathcal{F} = -\int_V div(\phi\epsilon\widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}})dV + \underbrace{\int_V \phi div(\epsilon\widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}})dV}_{11 \Rightarrow 0}.$$

Az első részt Gauss-tétel segítségével felületi integrállá alakítva:

$$\mathcal{F} = -\int_{F'} \phi\epsilon\widetilde{\overrightarrow{E}}_n dF - \sum_k \int_{F_k} \phi\epsilon\widetilde{\overrightarrow{E}}_n dF.$$

Ha $F' \to \infty$, az $F'$- re vett integrál eltűnik, mert $\phi \sim \frac{1}{r}$, $\widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}} \sim \frac{1}{r^2}$ és $dF \sim r^2 \Rightarrow integrandusz \sim \frac{1}{r}$. $R \to \infty$, $\frac{1}{R} \to 0$.

Tehát:

$$\mathcal{F} = -\sum_k \int_{F_k} \phi\epsilon\widetilde{\overrightarrow{E}}_n dF = -\sum_k \phi_k \int_{F_k} \epsilon\widetilde{\overrightarrow{E}}_n dF.$$

Ez pedig 10. miatt 0.

Emiatt, az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}'$, $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}'$ tér energiája:

$$U' = U + \frac{1}{2}\int \epsilon \widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}}^2 dV.$$

Mivel az $\epsilon_0\epsilon_r\widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}}^2$ integradusz pozitív, az integrál is az. Tehát:

$$U' > U. \qquad *$$

Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az elektrosztatikus megoldások energiája a minimális energia. Más szóval: az elektrosztatikai egyensúlyhoz a minimális térenergia tartozik, hasonlóan a mechanikai stabilis egyensúly esetéhez, ahol azt a potenciális energia minimuma jellemzi. Ezt nevezzük <u>Thomson -tételnek</u>.

Ha feltesszük, hogy a vesszős tér az 5. és 6. egyenleteket is kielégíti:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}' = -grad\phi',$$

$$\phi'(F_k) = C'_k,$$

akkor az előbbi levezetés megismételhető úgy, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}'$, $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}'$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ helyet cserélnek. Így azt kapnánk, hogy

$$U' < U. \qquad\qquad **$$

A * és ** közötti ellentmondás csak abban az esetben szűnik meg, ha $\widetilde{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}} \equiv 0$, vagyis $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}' = \overrightarrow{\boldsymbol{E}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}' = \overrightarrow{\boldsymbol{D}}$. Ez pedig annyit jelent, hogy az elektrosztatika (1.-6.) alapegyenleteinek a megoldása egyértelmű.

## Mágnesek sztatikus tere

Mágneses testet úgy képzeljük el, hogy abban elemi mágneses momentumok folytonosan oszlanak el. A mágnesezettség jellemzésére a térfogategység mágneses momentumát, a mágneses momentumsűrűséget, vagy más szóval a mágneses polarizációs vektort használjuk. Az egész test $\vec{\boldsymbol{m}}$ mágneses momentuma alatt az $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}$ momentumsűrűség testre vett térfogati integrálját értjük:

$$\vec{\boldsymbol{m}} = \int_V \overrightarrow{\boldsymbol{M}}(\vec{\boldsymbol{r}})dV.$$

Ha az $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \Rightarrow$ sztatikus tér.

Alapegyenleteit a Maxwell-egyenletek adják, azzal a megszorítással, hogy

a) minden elektromos mennyiség zérus;

b) a mágneses mennyiségek függetlenek az időtől

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = 0, \qquad div\,\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0.$$

Határfeltételek:

$$H_{t_2} - H_{t_1} = 0, \qquad B_{n_2} - B_{n_1} = 0.$$

Sztatikus mágneses tér vákuumban

Legyen egy $V$ térfogat, amelyet $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}$ momentumsűrűségű mágnes tölt ki. A testen kívül legyen vákuum, tehát $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \overrightarrow{\boldsymbol{H}}$. Tegyük fel, hogy a mágneses momentum eloszlása ismert, vagyis adott függvénye a helynek:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}} = \overrightarrow{\boldsymbol{M}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}).$$

$$A \quad rot \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = -grad\, \varphi,$$

ahol $\varphi$ a mágneses potenciál.

A mágnes az elektréttel állítható párhuzamba. Ugyanis az elektrét folytonos térfogati dipóluseloszlás, a mágnes pedig folytonos mágneses momentumeloszlás. A mágnes által keltett sztatikus tér $\varphi$ potenciálját ennélfogva az elektrét (korábban kiszámított) potenciáljához hasonló kifejezés adja meg:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\int_V \frac{div\overrightarrow{\boldsymbol{M}}}{r}dV + \frac{1}{4\pi\mu_0}\int_F \frac{M_n}{r}dF.$$

Itt F a mágneses test felületét jelenti.

A szimmetrikus Green-tétellel elvégzett bizonyításhoz hasonlóan kapható, hogy $\varphi$ kielégíti a

$$\triangle\varphi = \frac{1}{\mu_0}div\overrightarrow{\boldsymbol{M}} \qquad\qquad *$$

egyenletet.

Képezve a $\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = -grad\,\varphi$ egyenlet divergenciáját és figyelembevéve * -t:

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = -div\,grad\varphi = -\triangle\,\varphi = -\frac{1}{\mu_0}div\overrightarrow{\boldsymbol{M}},$$

$$\Downarrow$$

$$div(\overrightarrow{\boldsymbol{H}} + \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\boldsymbol{M}}) = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$div(\mu_0\overrightarrow{\boldsymbol{H}} + \overrightarrow{\boldsymbol{M}}) = 0.$$

Ezzel összevetve a 4. ME-t ($div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0$), kapjuk:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0\overrightarrow{\boldsymbol{H}} + \overrightarrow{\boldsymbol{M}}.$$

Ez azt mutatja, hogy $\mu_0\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{B}}$, ha mágnesen kívül vagyunk. A mágnes belsejében $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} \neq \mu_0 \overrightarrow{\boldsymbol{H}}$-val.

A $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ divergenciamentessége – azt fejezi ki, hogy a mágneses tér forrásai nem töltések, hanem mágneses momentumok. Mágneses töltések nincsennek.

A pontszerű $\overrightarrow{\boldsymbol{m}}$ mágneses momentum (kis mágnestű) által keltett sztatikus tér potenciálja és térerőssége, – az elektromos dipólus sztatikus teréhez hasonlóan, – a következő:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{(\overrightarrow{\boldsymbol{m}}, \overrightarrow{\boldsymbol{r}})}{r^3},$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\{\frac{3(\overrightarrow{\boldsymbol{m}}, \overrightarrow{\boldsymbol{r}})\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^5} - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{m}}}{r^3}\}.$$

$\overrightarrow{\boldsymbol{r}} \doteq$a mágneses momentumtól a kérdéses P pontba mutató vektor.

A mágneses térbe helyezett anyag „polarizálódik” és $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}$ mágneses dipólmomentumsűrűséget mérhetünk benne, amely arányos a mágneses térrel (lásd dielektrikum polarizációja). Vagyis:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}} \sim \kappa \overrightarrow{\boldsymbol{H}}, \qquad (\overrightarrow{\boldsymbol{M}} = \mu_0 \kappa \overrightarrow{\boldsymbol{H}})$$

ahol $\kappa \doteq$mágneses szuszceptibilitás. A $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}$ vektorok előbb felírt kapcsolatát figyelembe véve:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \overrightarrow{\boldsymbol{H}} + \overrightarrow{\boldsymbol{M}} = \mu_0 \overrightarrow{\boldsymbol{H}} + \mu_0 \kappa \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \mu_0 (1+\kappa) \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \mu \overrightarrow{\boldsymbol{H}},$$

vagyis $\mu = \mu_0(1+\kappa) = \mu_0 \mu_r \quad (\mu_r = 1 + \kappa)$.

Az anyagok mágneses viselkedés szempontjából hasonlóak a dielektrikumokhoz. Lényeges különbség van azonban a szuszceptibilitás nagyságát illetően. Ennek megfelelően az anyagok három csoportját különböztethetjük meg:

1. Diamágneses anyagok: A mágneses szuszceptibilitásuk negatív és kicsiny értékű. (Ha az anyag para- vagy ferromágneses, a diamágneses polarizáció nem figyelhető meg). $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ ellentétes irányúak.

2. Paramágneses anyagok: A $\kappa > 0$ , de kicsi. Keletkezési mechanizmusát az magyarázza, hogy a mágneses tér az anyag „elemi" mágneses momentumát rendezi; így $\kappa$ függ a hőmérséklettől. Kvantitatíve a $\kappa = \frac{c}{T}\tau$ Curie-törvény írja le a $T$ hőmérséklet függést ($\tau \doteq$az anyag sűrűsége).

3. Ferromágneses anyagok: A szuszceptibilitás értéke igen nagy lehet, és függ a $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ mágneses tértől. (Tehát $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}$ nem lineárisan függ $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$−tól.) Másik sajátságuk, hogy a $\kappa(\overrightarrow{\boldsymbol{H}})$ függvény viszonylag nem túl nagy $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ értéknél telített állapotba megy át. A ferromágnesesség értelmezése kívül esik a Maxwell-elmélet határain. Ehhez anyagszerkezeti és kvantummechanikai ismeretek szükségesek.