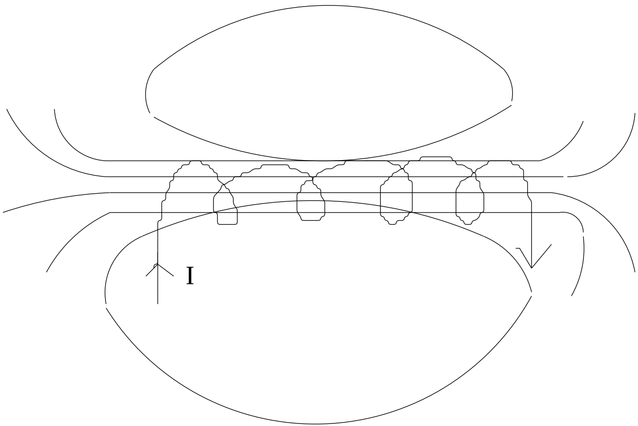
ELEKTRODINAMIKA

(10. Előadás)

A tekercs mágneses tere

Vegyünk egy hosszú, kis keresztmetszetű tekercset.



A mágneses teret a fenti ábra mutatja. A mágneses tér a tekercsen kívül gyenge, a tekercs belsejében pedig jó közelítéssel állandó, homogénnek tekinthető. Határozzuk meg a tér erősségét a tekercs belsejében.

Integráljuk a ($rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{j}}$, 1.ME) egyenletet egy erővonal által meghatározott zárt görbével határolt felületre. Majd felhasználva a Stokes-tételt:

$$\oint \overrightarrow{\boldsymbol{H}} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = \int_F (rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}})_n dF = \int_F j_n dF.$$

F-en a zárt görbére - mint határgörbére - illeszkedő felületet értünk. Az áramsűrűség a felület azon helyein különbözik zérustól, ahol a tekercset alkotó vezetők azt átdöfik. Ha a tekercs menetszáma n, akkor az F felületet a vezető n-szer szúrja át. Ezért a $j_n - nek$ az F felületre vett integrálja a vezető q keresztmetszetére vett integrál n-szerese:

$$\int_F j_n dF = n \int_q j_n dF,$$

$$\Downarrow$$

$$\oint \overrightarrow{\boldsymbol{H}} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = nI.$$

A B.O.-t közelítéssel számítjuk ki. Feltételezzük, hogy a tekercsen kívül olyan gyenge a mágneses tér, hogy a tőle származó járulék elhanyagolható az integrál kiszámításánál. A zárt görbe helyett, csak a tekercs belsejében haladó l egyenes szakaszra integrálunk. Mivel itt $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ egy irányú $d\overrightarrow{\boldsymbol{s}}$ $-$ sel, és homogénnak tekinthető, ezért

$$\oint \overrightarrow{\boldsymbol{H}} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}} \approx \left|\overrightarrow{\boldsymbol{H}}\right| l.$$

Tehát:

$$\left|\overrightarrow{H}\right| l = nI,$$

$$\left|\overrightarrow{H}\right| = \frac{In}{l},$$

$l \doteq$ a tekercs hossza

$n \doteq$ a tekercs menetszáma.

A tekercs belsejében a tér annál inkább tekinthető homogénnak, minél nagyobb a tekercs hossza a keresztmetszethez képest.

A mágneses tér kiszámítása a vektorpotenciál segítségével

Most rátérünk (az előbbi egyszerű esetek után) az általános eset tárgyalására. Tételezzük fel, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ ismert függvény az egész térben. Keressük a $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ függvényt. Ehhez a

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0, \quad rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{j}}$$

egyenleteket kell megoldanunk.

A $div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0$ egyenlet kielégíthető, ha

$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ (itt az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ vektortér a mágneses tér vektorpotenciálja).

Az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ vektorpotenciál nem határozza meg egyértelműen a teret. Ugyanis, ha az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ vektorpotenciál a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ alapján leírja a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} - vel$ jellemzett mágneses teret, az

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}' = \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + grad\chi$$

potenciál, ahol $\chi(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ tetszőleges függvénye a helynek, ugyanazt a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ teret írja le. Ugyanis:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}' = rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}}' = rot(\overrightarrow{\boldsymbol{A}} + grad\chi) = rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}} + rot\,grad\chi = rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{B}}.$$

Tehát, ha $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}'$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ potenciálok egy tetszőleges függvény gradiensében különböznek egymástól, akkor ugyanazt a mágneses teret írják le. Ez felhasználható arra, hogy a vektorpotenciálra egy megszorító kikötést tegyünk. Ezáltal megszűnik a határozatlanság, másrészt alkalmas mellékfeltételekkel sikerül a vektorpotenciál differenciálegyenletét egyszerű alakra hozni.

Éppen ezért megköveteljük, hogy az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ vektorpotenciál elégítse ki a

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = 0$$

egyenletet. Az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}' = \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + grad\chi$ transzformáció felhasználásával ez mindig elérhető. Ha ugyanis az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ nem teljesítené a $div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = 0$ egyenletet, akkor az

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}\text{'} = \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + grad\chi$$

alapján bevezethető olyan $\overrightarrow{A}'$, amely már kielégíti, ha $\chi - t$ a

$$\triangle\chi = -div\vec{\boldsymbol{A}}$$

egyenlet megoldásaként választjuk. Nyugodtan megkövetelhető tehát az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ divergenciamentessége.

A vektorpotenciált meghatározó differenciál egyenletet a $rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ −ből kapjuk a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0\mu_r\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ anyagi egyenlet felhasználásával.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{\mu}rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}}.$$

Behelyettesítve az 1. ME-be, kapjuk

$$rot(\frac{1}{\mu}rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,.$$

Feltételezzük, hogy a közeg homogén, tehát μ_r állandó. Ekkor:

$$rot\,rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \mu\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,.$$

Felhasználva a $(rot\, rot \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = grad\, div\, \overrightarrow{\boldsymbol{A}} - \triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}})$ azonosságot, kapjuk:

$$\triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}} - grad\, div \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = -\mu \overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,.$$

Figyelembe véve a $div \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = 0$ mellékfeltételt, az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ vektorpotenciál differenciálegyenlete a következő:

$$\triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = -\mu \overrightarrow{\boldsymbol{j}}$$

alakú lesz.

A fenti egyenlet az elektrosztatikában megismert Poisson-egyenlet, amelynek megoldása:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,')}{|\overrightarrow{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,'|} dV'.$$

Itt $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ annak a pontnak a helyzetvektora, amelyben a potenciált keressük, $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'$ pedig az integrációs futópont helyzetvektora.

Az elektrosztatikában bebizonyítottuk, hogy az előbbi $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ valóban kielégíti a Poisson-egyenletet. Most meg kell még mutatni, hogy a $div\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = 0$ mellékfeltételt is kielégíti. Vezessük be az $r = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'\right|$ jelölést. Képezzük az

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,')}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'\right|}dV'$$

divergenciáját az $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ vektor (x, y, z) koordinátái szerint:

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V div_{(r)}(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}}{r})dV' = \frac{\mu}{4\pi}\int_V [\frac{1}{r}div_{(r)}\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,')+(\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,'), grad_{(r)}\frac{1}{r})]dV'.$$

Itt felhasználtuk a

$$div(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}}{r}) = \frac{1}{r} div \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + (\overrightarrow{\boldsymbol{j}}, grad\frac{1}{r})$$

összefüggést.

A jobb oldali integrál első tagjában $div_{(r)}\overrightarrow{\boldsymbol{j}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}},) = 0$, mert $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ az $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'$–től függ, a divergenciát pedig az $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ koordinátái szerint képezzük. A második tag a következőképpen írható:

$$grad_{(r)}\frac{1}{r} = -grad_{(r,)}\frac{1}{r}. \qquad *$$

Ez az összefüggés nyilvánvaló az

$$r = \sqrt{(x - x,)^2 + (y - y,)^2 + (z - z,)^2} \qquad **$$

kifejezés alapján, majd * és ** felhasználásával írható:

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{j}}, grad_{(r)}\frac{1}{r}) = -(\overrightarrow{\boldsymbol{j}}, grad_{(r^,)}\frac{1}{r}) = -div_{(r^,)}(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}}{r}) + \frac{1}{r}div_{(r^,)}\overrightarrow{\boldsymbol{j}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}^,).$$

A jobb oldalon levő utolsó tag eltűnik, mert az 1.ME ⇒

$$div_{(r^,)}\overrightarrow{\boldsymbol{j}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}^,) = 0, \qquad\qquad majd$$

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{j}}, grad_{(r)}\frac{1}{r}) = -div_{(r^,)}(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}}{r}).$$

Behelyettesítve a $div\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ egyenletébe:

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = -\frac{\mu}{4\pi}\int_V div_{(r^,)}(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}}{r})dV,$$

(Gauss-tétel)

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = -\frac{\mu}{4\pi}\int_F \frac{j_n}{r}dF.$$

Mivel a vezető szigetelőbe ágyazott, az áramsűrűség normális komponense a felület mentén eltűnik és ezzel együtt a fenti egyenlet jobb oldala is. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}^,)}{|\overrightarrow{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}}^,|}dV^,$$

vektorpotenciál valóban kielégíti a $div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = 0$ egyenletet.

Ezután $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$–ból a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$, majd abból a $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ vektor egyszerű rotációképzéssel nyerhető. Behelyettesítve az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ kifejezését a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ egyenletbe, kapjuk:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot_{(r)}\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu}{4\pi} rot_{(r)} \int_V \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}')}{r} dV' = \frac{\mu}{4\pi} \int_V rot_{(r)} (\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}}{r}) dV.$$

A rot melletti ($\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$) index azt jelenti, hogy a rotációt az $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ helyvektor végpontjainak (x, y, z) koordinátái szerint kell képezni. A $rot_{(r)}(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}}{r})$ kifejezés a vektoranalízisből ismert összefüggés alapján a következő alakba írható:

$$rot_{(r)}(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}}{r}) = \frac{1}{r} rot_{(r)} \overrightarrow{\boldsymbol{j}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}') + (grad_{(r)} \frac{1}{r} \times \overrightarrow{\boldsymbol{j}}).$$

Mivel $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}')$ az $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'$ vektor végpontjának (x', y', z') koordinátáitól függ, és független (x, y, z)–től:

$$rot_{(r)} \overrightarrow{\boldsymbol{j}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}') = 0.$$

Ezt figyelembe véve $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$–re kapjuk:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V (grad_{(r)}\frac{1}{r}\times\overrightarrow{\boldsymbol{j}})\mathrm{d}V' = -\frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}-\overrightarrow{\boldsymbol{r}}')\times\overrightarrow{\boldsymbol{j}}}{r^3}\mathrm{d}V' = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\times(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}-\overrightarrow{\boldsymbol{r}}')}{r^3}\mathrm{d}V'.$$

(Itt felhasználtuk, hogy $grad_{(r)}\frac{1}{r} = -\frac{(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}-\overrightarrow{\boldsymbol{r}}')}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}-\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'\right|^3}$).

Az $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'$ vektor az integrációs térfogatelemtől azon pont felé mutat, amelyben a mágneses teret számítjuk.

A $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0\mu_r\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ anyagi egyenlet felhasználásával a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$-t meghatározó egyenletből a $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ mágneses térerősséget $\mu_0\mu_r$-rel való osztással kapjuk:

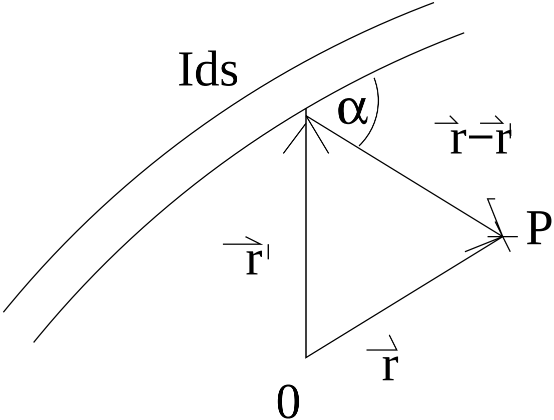
$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\times(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}-\overrightarrow{\boldsymbol{r}}')}{r^3}\mathrm{d}V'.$$

Látszik a kifejezésből, hogy a $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}')$ árameloszlás által keltett mágneses tér $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ erőssége nem függ az áramot körülvevő közegtől, vagyis adott áram ugyanazt a térerősséget hozza létre vákuumban, mint valamilyen közegben. Ez azt jelenti, hogy a mágneses jelenségek elméletében a $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ ugyanazt a szerepet játsza, mint a $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ az elektromos jelenségek elméletében. A $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$, valamint a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ vektorok közötti analógia csak formális. Tulajdonképpen a $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$, valamint a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ vektorok állítandók egymással párhuzamba. Ebből az is következik, hogy az $\epsilon-$hoz hasonló szerepet az $\frac{1}{\mu}$ játszik.

Lineáris vezetők esetén a $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ képlet (általános alak) egyszerűbb alakot vesz fel. (Lineáris az a vezető, ahol az áramsűrűség vektor párhuzamos a $d\overrightarrow{\boldsymbol{s}}$ vonalelemmel.) Ekkor $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,dV = Ids$. Így

$$* \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{H}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = \frac{I}{4\pi}\int \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{s}} \times (\overrightarrow{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}}')}{r^3}.$$

A fenti vonalintegrál a lineáris vezetőre értendő. E képlet szerint a lineáris vezető által keltett mágneses tér úgy fogható fel, mint a $d\overrightarrow{\boldsymbol{s}}$ vonalelemek, pontosabban az $Id\overrightarrow{\boldsymbol{s}}$ áramelemek által keltett tér szuperpozíciója. Nevezetesen:



$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = \int d\overrightarrow{\boldsymbol{H}},$$

ahol

$$** \qquad d\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{s}} \times (\overrightarrow{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}}')}{r^3}.$$

Az $Id\vec{\boldsymbol{s}}$ áramelem által a P pontban keltett mágneses tér irányát a $d\vec{\boldsymbol{s}} \times (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}')$ vektorszorzat iránya adja, ami a rajz szerint a lap síkjára merőlegesen befelé mutat. (A kísérleti fizikában az Ampere - vagy jobbkéz - szabály néven szerepelt.) A * és ** képlet pedig Biot-Savart-törvény néven ismeretes. Szokásos alakja a ** abszolut értékét kifejező:

$$dH = \frac{I \cdot \sin\alpha}{4\pi r^2} ds$$

képlet, ahol α a $d\vec{\boldsymbol{s}}$ vonalelem és az $\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$ vektor által bezárt szöget jelenti.

<u>Egyenáramok mágneses terének energiája. Indukciós együttható</u>

Vegyünk egy tetszőleges alakú vezetőt, amelyben egyenáram folyik. Az áram-eloszlást a $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ áramsűrűség írja le. A keltett mágneses teret az 1. és 4. ME-k határozzák meg. A mágneses térnek van energiája, amely folytonosan oszlik el azon a tartományon, ahol a $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ térerősség különbözik zérustól. A mágneses térenergia sűrűsége:

$$u = \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{H}}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}.$$

A teljes térenergiát az u térfogati integrálja adja:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \overrightarrow{\boldsymbol{H}}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}dV.$$

(V az a tartomány, ahol $\overrightarrow{\boldsymbol{H}} \neq 0$.) A térenergia fenti általános kifejezése áramok esetén más alakban is felírható. E célból a $(\overrightarrow{\boldsymbol{H}}, \overrightarrow{\boldsymbol{B}})$ skaláris szorzatot átalakítjuk a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ összefüggés, valamint a

$$div(\overrightarrow{\boldsymbol{A}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{H}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{H}}rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}} - \overrightarrow{\boldsymbol{A}}rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$$

vektoranalitikai képlet felhasználásával.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}}\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{H}} rot \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = div(\overrightarrow{\boldsymbol{A}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{H}}) + \overrightarrow{\boldsymbol{A}} rot \overrightarrow{\boldsymbol{H}},$$

(1. ME)

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{H}}, \overrightarrow{\boldsymbol{B}}) = div(\overrightarrow{\boldsymbol{A}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{H}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{A}}, \overrightarrow{\boldsymbol{j}}),$$

ekkor

$$U = \frac{1}{2}\int_V div(\overrightarrow{\boldsymbol{A}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{H}}) dV + \frac{1}{2}\int_V (\overrightarrow{\boldsymbol{A}}, \overrightarrow{\boldsymbol{j}}) dV,$$

(Gauss-tétel)

$$\frac{1}{2}\int_V div(\overrightarrow{\boldsymbol{A}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{H}}) dV = \frac{1}{2}\int_F (\overrightarrow{\boldsymbol{A}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{H}})_n dF.$$

Ha az F felületet kitoljuk a $\infty-$be, akkor a felületi integrál zérussá válik, mert az integrandusz erősebben tart 0−hoz, mint a felületelem a végtelenhez. Ezért az energia képletben csak a második tag marad meg:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \overrightarrow{A}\,\overrightarrow{j}\,dV. \qquad *$$

A térenergiának ez a kifejezése az áram és a mágneses tér kölcsönhatási energiájaként értelmezhető.

A gyakorlatban leginkább előforduló lineáris áramok esetén az U kifejezése tovább egyszerűsödik. Tételezzük fel, hogy a mágneses teret n lineáris áramkör kelti. Jelölésük: 1,2,...,k,...,n. Az egyes körökben folyó áram erőssége legyen $I_k(k = 1, 2, ..., n)$. Mivel a $\overrightarrow{j}$ áramsűrűség a vezetőkben különbözik zérustól, a * térfogati integrál az egyes áramkörökre vett integrálok összegeként írható:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \overrightarrow{\boldsymbol{A}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,dV = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{V_k} \overrightarrow{\boldsymbol{A}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,dV_k.$$

Lineáris áram esetén $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,dV = I d\overrightarrow{\boldsymbol{s}}$, ezért

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k \oint_k \overrightarrow{\boldsymbol{A}_k} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_k}.$$

Az integrál a k-adik vezetőkörre, mint zárt görbére terjesztendő ki. A körintegrál a Stokes-tétellel felületi integrállá alakítható:

$$\oint_k \overrightarrow{\boldsymbol{A}_k} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_k} = \int_{F_k} (rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}})_n dF = \int_{F_k} B_n dF = \mathcal{F}_k. \qquad **$$

$\mathcal{F}_k$ a k-adik vezetőkörre illeszkedő felület, amelynek határvonala a k-adik áramkör. $\mathcal{F}_k$ a rajta átmenő indukciófluxus. Ennélfogva a mágneses térenergia az áramerősségek és az indukciófluxusok szorzatának összegével fejezhető ki:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k \cdot \mathcal{F}_k.$$

Egyetlen lineáris áramkör esetén ez a képlet az

$$U = \frac{1}{2} I \cdot \mathcal{F}$$

egyszerű alakot veszi fel.

Térjünk vissza az indukciófluxus

$$\oint_k \overrightarrow{\boldsymbol{A}} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_k} = \int_{F_k} (rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}})_n dF = \int_{F_k} B_n dF = \mathcal{F}_k$$

** kifejezéséhez.

Az integrálban szereplő $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ vektorpotenciált az

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}')}{|\overrightarrow{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'|} dV'$$

képlet állítja elő. Itt az integrálás azokra a helyekre vonatkozik, ahol áram van, tehát a vezetőkre. N vezetőkörből álló lineáris áramrendszer esetén:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}_k} = \frac{\mu}{4\pi}\sum_{i=1}^{n} I_i \oint_i \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_i}}{r_{ik}}, \qquad *$$

ahol r_{ik} az i-edik kör $d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_i}$ elemének a k-adik kör $d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_k}$ elemétől mért távolsága. Behelyettesítve *-ot a **-ba, kapjuk:

$$U = \sum_k U_k = \frac{1}{2}\sum_k I_k \oint_k \overrightarrow{\boldsymbol{A}}_k d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_k} = \frac{1}{2}\sum_k I_k \oint_k \frac{\mu}{4\pi}\sum_l I_l \oint_l \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_l}}{r_{kl}} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_k}.$$

Az összegzést és az integrálást rendezve:

$$U = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l I_k I_l \frac{\mu}{4\pi} \oint_{(k)} \oint_{(l)} \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_l} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_k}}{r_{kl}}.$$

Az

$$L_{kl} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_k \oint_l \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_l} d\overrightarrow{\boldsymbol{s}_k}}{r_{kl}}$$

mennyiséget <u>indukciós</u> <u>együtthatónak</u> nevezzük,

- $l \neq k$ esetén <u>kölcsönös</u> <u>indukcióról</u>,
- $l = k$ esetén <u>önindukcióról</u> beszélünk.

Látható, hogy az L_{ik} a k-adik vezető nagyságától, alakjától és helyzetétől függ. Függ még a közeg minőségétől is.

Kiszámításuk azonban nehézkes, mert az önindukciós együtthatóknál az $\frac{1}{r_{kk}}$ indegrandusz divergens. Így vagy empírikus, illetve félempírikus módszereket kell használnunk, vagy az U mágneses tér energiát direkt módon kiszámolva a kiszemelt vezető hurokra, az

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

formulából már L leolvasható. Más módszer: ha az energiára a $\mathcal{F}_k$ fluxusok segítségével felírt formulát összevetjük az indukciós együtthatókkal felírtakkal, látszik, hogy:

$$\mathcal{F}_k = \sum_l L_{kl} I_l.$$

Egy vezetőhurokra ez $\mathcal{F} = LI$ alakú. Az $\mathcal{F}$ fluxus olykor direkt módon könnyen kiszámítható. (Megjegyzés: A kölcsönös indukciós együtthatók az indexek cseréjére szimmetrikusak ($L_{ij} = L_{ji}$), amint az a definiáló formulákból is látható.)