ELEKTRODINAMIKA

(11. Előadás)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} \sin \omega t,$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \epsilon \overrightarrow{\boldsymbol{E}},$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{D}}}{\partial t} = \omega \epsilon \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} \cos \omega t = \nu 2\pi \epsilon \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} \cos \omega t,$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \sigma \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \sigma \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} \sin \omega t,$$

$$\frac{\left| \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \right|_{max}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{D}}}{\partial t} \right|_{max}} = \frac{\sigma}{\nu 2\pi \epsilon},$$

de

$$\epsilon \approx 1,$$

$$\sigma \approx (10^{16} - 10^{17}) \frac{1}{s}.$$

Az elektrotechnikában előforduló összes frekvenciára a fenti hányados:

$\frac{\sigma}{\nu \pi \epsilon} \gg 1 \Rightarrow \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{D}}}$ mennyiség elhagyható a $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ mellett.

Kvázistacionárius áramok

A kvázistacionárius áramok fizikai sajátságait leíró alapegyenletek:

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{j}}, \qquad 1.ME$$

(Itt a $\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{D}}}$ tagot hagytuk el.)

$$div\,\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \rho, \qquad 2.\,ME$$

$$rot\,\overrightarrow{E} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}, \qquad 3.\,ME$$

$$div\,\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0, \qquad 4.\,ME$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \epsilon_0\epsilon_r\overrightarrow{\boldsymbol{E}},$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0\mu_r\overrightarrow{\boldsymbol{H}},$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \sigma(\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overrightarrow{\boldsymbol{E}}'),$$

valamint a határfeltételi egyenletek.

Az alapegyenletekben szereplő fizikai mennyiségek - az egyenáramokkal ellentétben - függenek az időtől is.

Az 1.ME-ből következik, hogy

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = 0.$$

Az áramsűrűség divergenciamentességéből következik, hogy szigetelőbe ágyazott vezető felületén a $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ normális komponense eltűnik: $j_n = 0$.

Ennek alapján belátható, hogy véges keresztmetszetű vezető bármely két keresztmetszetére vett áramerősség kvázistacionárius áramok esetén is megegyezik egymással. Jelöljük a két keresztmetszetet q_1- gyel, illetve q_2- vel. Integráljuk a $div\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = 0$ egyenletet a q_1 és q_2 által bezárt vezetőszakaszra. A Gauss-tétel alapján írható:

$$\int_{q_1} j_n \mathrm{d}F - \int_{q_2} j_n \mathrm{d}F + \int_{palst} j_n \mathrm{d}F = 0.$$

Mivel a vezetőt szigetelő veszi körül, az előbb mondottak szerint a harmadik integrálban $j_n = 0$, ezért

$$\int_{q_1} j_n \mathrm{d}F = \int_{q_2} j_n \mathrm{d}F.$$

Ezek az integrálok pedig a két helyen vett I_1, illetve I_2 áramerősségekkel egyenlőek. Tehát:

$$I_1 = I_2.$$

A négy ME-t, az anyagi egyenletek és a határfeltételek együtt szolgálnak a kvázistacionárius áramok elektromágneses terének a meghatározására.

Konkrét példa: Lineáris vezetőkörökre vonatkozó alapegyenletek

Tételezzük fel, hogy az egyes körökben áramforrások is lehetnek, amelyek elektromotoros erejét $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$... jelöli. A k-adik kör $\mathcal{E}_k$ elektromotoros erejét az

$$\mathcal{E}_k = \oint \overrightarrow{\boldsymbol{E}}' \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}$$

körintegrállal értelmezzük.

A $\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \sigma(\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overrightarrow{\boldsymbol{E}}')$ Ohm-törvényből kifejezve az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ térerősséget, és beírva a 3. ME-be, kapjuk:

$$rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}},$$

$$rot(\frac{1}{\sigma}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - \overrightarrow{\boldsymbol{E}}') = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}.$$

Integráljuk a fenti egyenlet mindkét oldalát a k-adik áramkörre, mint határvonalra illeszkedő felületre:

$$\int_k rot(\frac{1}{\sigma}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - \overrightarrow{\boldsymbol{E}}')\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = -\int_k \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}.$$

A bal oldali integrál a Stokes-tétellel a vezetőkörre vett vonalmenti integrállá alakítható. Tegyük fel, hogy a vezetők által meghatározott felületek időben nem változnak. Ekkor a jobb oldalon az idő szerinti differenciálás jele az integráljel elé emelhető. Így:

$$\oint_k \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}}{\sigma} - \oint_k \overrightarrow{\boldsymbol{E}}'\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_k B_n \mathrm{d}F.$$

Mivel lineáris vezetőkről van szó, $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = j\mathrm{d}s$, ezért:

$$\oint_k \frac{jq\mathrm{d}s}{\sigma q} - \oint_k \overrightarrow{\boldsymbol{E}}'\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_k B_n \mathrm{d}F.$$

Az $I_k = jq$ áramerősség az egész vezetőkör mentén állandó, ezért az integráljel elé emelhető:

$$I_k \oint_k \frac{ds}{\sigma q} - \oint_k \overrightarrow{\boldsymbol{E}}' \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_k B_n \mathrm{d}F,$$

$$I_k R_k = \mathcal{E}_k - \dot{\mathcal{F}}_k. \qquad *$$

Ugyanilyen egyenlet érvényes a többi áramkörre is, $k = 1, 2, 3, ..., n$.

Ez az egyenlet az integrális Ohm-törvény általánosítása kvázistacionárius áramok esetére. Az $\dot{\mathcal{F}}$ tag az elektromágneses indukció következménye. Ez az indukált elektromotoros erő (negatív előjellel) hozzáadódik az áramkörbe beiktatott áramforrás $\mathcal{E}_k$ elektromotoros erejéhez.

$$\mathcal{F}_k = \sum_{i=1}^{n} I_i L_{ki},$$

ahol

$$L_{ki} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_i \oint_k \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}_i} \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}_k}{r_{ik}}.$$

Ezen kifejezéseket *-ba beírva, kapjuk:

$$I_k R_k + \sum_{i=1}^{n} L_{ki} \dot{I}_i = \mathcal{E}_k.$$

A kvázistacionárius áramkörök alapegyenletei. Ezen egyenletekből az áramkörökre jellemző R_k ellenállások és L_{ki} indukciós együtthatók, valamint az $\mathcal{E}_k$ elektromotoros erők ismeretében az adott kezdőfeltételekhez tartozó I_i áramerősségek kiszámíthatók.

Áramkör ellenállással és önindukcióval

Tekintsünk egy áramkört R ohmikus ellenállással és L önindukciós együtthatóval. Kapcsoljunk be $t = 0$-ban egy $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ állandó elektromotoros erejű áramforrást. $t = 0-$ban $I(0) = 0$. Határozzuk meg, hogy az $\mathcal{E}_0$ elektromotoros erő hatására kialakult $I(t)$ áramerősség milyen függvénye az időnek. Az áramerősséget meghatározó differenciálegyenletet az előbbi képletből kapjuk, ha azt egyetlen áramkörre írjuk fel:

$$IR + L\dot{I} = \mathcal{E}_0.$$

Megoldandó ez a differenciálegyenlet az $I(0) = 0$ kezdőfeltétellel.

Mivel $\mathcal{E}_0$ állandó, az előbbi egyenlet átírható:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I - \frac{\mathcal{E}_0}{R}) + \frac{R}{L}(I - \frac{\mathcal{E}_0}{R}) = 0,$$

bevezetve:

$$y = I - \frac{\mathcal{E}_0}{R},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}y = 0,$$

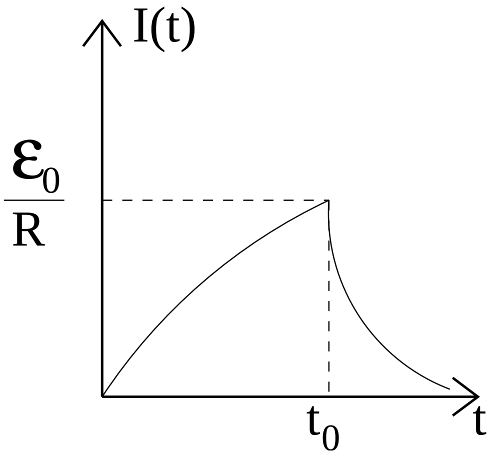
$$y = Ce^{-\frac{R}{L}t},$$

$t = 0$, $I = 0$:

$$Ce^{-\frac{R}{L}t} = I - \frac{\mathcal{E}_0}{R},$$

$$C = 0 - \frac{\mathcal{E}_0}{R} = -\frac{\mathcal{E}_0}{R},$$

$$I(t) = y + \frac{\mathcal{E}_0}{R} = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$



Most vizsgáljuk meg, hogyan változik az áramerősség, ha a $t = t_0$ időpillanatban kikapcsoljuk az áramforrást. A $t > t_0$ időben $\mathcal{E} = 0$. A megoldandó differenciálegyenlet:

$$RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0,$$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

$t = t_0, \quad I(t_0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$, ezzel

$$\frac{\mathcal{E}_0}{R} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t_0},$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{\frac{R}{L}t_0},$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{\frac{R}{L}t_0} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}.$$

A kikapcsolás után az áramerősség a $t = t_0$−hoz tartozó $\frac{\mathcal{E}_0}{R}$ értékről exponenciálisan csökken zérusra. Az áramforrás bekapcsolásakor csak fokozatosan alakul ki az állandó $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ áramerősség, a kikapcsoláskor pedig fokozatosan szűnik meg. Ezt a jelenséget tranziens jelenségnek nevezzük, oka az indukált elektromotoros erő fellépése. Az önindukció révén ez az elektromotoros erő ellentétes irányú áramot indukál, mint a be, illetve kikapcsolt $\mathcal{E}_0$ elektromotoros erő. Ezért a bekapcsoláskor csökkenti annak hatását, a kikapcsoláskor pedig még egy ideig fenntartja az áramot.

Legyen most a bekapcsolt áramforrás:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

Az áramerősség $I(t)$ időfüggését meghatározó differenciálegyenlet a következő alakú:

$$RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad *$$

$t = 0$, $I(0) = 0$.

A * differenciálegyenlet megoldásánál célszerű az alábbi komplex egyenletből kiindulni:

$$Ry + L\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \quad **$$

Belátható, hogy az $y-$ra felírt egyenlet megoldásának valós része kielégíti a * egyenletet. Tegyük fel, hogy y megoldása az egyenletnek. Akkor y komplex konjugáltja az y^*, kielégíti az eredeti egyenlet komplex konjugáltját:

$$Ry^* + L\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

Képezzük a két egyenlet összegének a felét:

$$R\frac{y+y^*}{2} + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{y+y^*}{2}) = \mathcal{E}_0\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} = \mathcal{E}_0\cos\omega t.$$

Az $\frac{y+y^*}{2}$ az eredeti * egyenletet elégíti ki. Mivel az $\frac{y+y^*}{2}$ az $y(t)$ komplex függvény valós része, ezért a megoldandó * egyenlet $I(t)$ megoldását a ** komplex egyenletet kielégítő $y(t)$ függvény valós része adja:

$$I(t) = Re(y(t)).$$

A ** inhomogén, állandó együtthatós, lineáris, elsőrendű differenciálegyenlet. Általános megoldása: (homogén egyenlet általános megoldása + inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása). Utóbbit az

$$y_p = Ae^{iwt}$$

alakban keressük. Tegyük fel, hogy y_p kielégíti a ** egyenletet. Tehát a következő teljesül:

$$RAe^{iwt} + \underline{L}A\underline{i\omega}e^{i\omega t} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t},$$

$$(R + i\omega L)Ae^{i\omega t} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t},$$

$$A = \frac{\mathcal{E}_0}{R + i\omega L},$$

$$y_p = \frac{\mathcal{E}_0}{R + i\omega L} e^{i\omega t}.$$

A homogén egyenlet mgoldása:

$$y_h = Be^{-\frac{R}{L}t}.$$

A ** egyenlet általános megoldását az $y_p + y_h$ összege adja meg:

$$y = y_p + y_h = \frac{\mathcal{E}_0}{R + i\omega L} e^{i\omega t} + Be^{-\frac{R}{L}t}.$$

Az $I(t)$ áramerősség az y valós részével egyenlő:

$$I(t) = Re\left\{\frac{\mathcal{E}_0}{R + i\omega L}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + Be^{-\frac{R}{L}t}\right\}$$

$$= Re\left\{\mathcal{E}_0 \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + Be^{-\frac{R}{L}t}\right\}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{R^2 + \omega^2 L^2}(R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t) + \frac{B + B^*}{2} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

A B integrációs állandót, az $I(0) = 0$ kezdeti feltételből határozhatjuk meg:

$$\frac{B + B^*}{2} = -\frac{\mathcal{E}_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Bevezetve a következő mennyiségeket (jelöléseket):

$$\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} = \cos\delta,$$

$$\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} = \sin\delta.$$

$$(\cos\delta^2 + \sin\delta = 1).$$

Ezen kifejezésekkel:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}(\cos\delta\cos\omega t + \sin\delta\sin\omega t) - \frac{\mathcal{E}_0 R}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left[\cos(\omega t-\delta) - \cos\delta e^{-\frac{R}{L}t}\right].$$

A homogén egyenlet megoldása a tranziens jelenségeket írja le. Ez a tag igen gyorsan eltűnik.

Olyan t időtartományban, amikor a második tagtól eltekintünk, az áramerősség az időnek tiszta periódikus függvénye:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \delta) = I_0 \cos(\omega t - \delta).$$

$I_0 :=$ amplitúdó $\delta :=$fázisszög,

ezeket az R, L, $\mathcal{E}_0$, valamint az ω határozzák meg.

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \qquad \delta := \arctan \frac{\omega L}{R}.$$

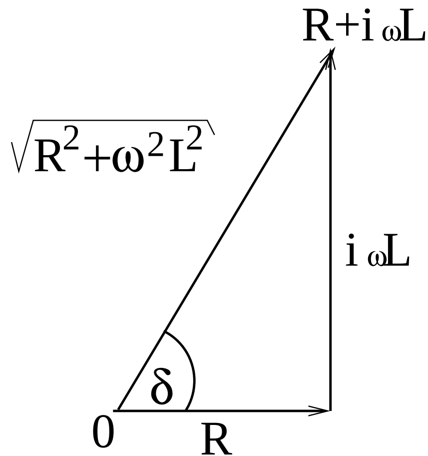
Az $I(t)$ kifejezéséből látszik, hogy az áramerősség ugyanakkora frekvenciával rezeg, mint az elektromotoros erő, de az áramerősség δ fázisszöggel késik az elektromotoros erőhöz képest. Ez azt jelenti, hogy az áramerősség $t - \frac{\delta}{\omega}$ idővel később veszi fel maximumát, mint az elektromotoros erő. Az áramerősség az egyenáramoknál megismert $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ Ohm-törvényhez hasonló alakra hozható:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0 \cos\omega(t - \frac{\delta}{\omega})}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{\mathcal{E}(t - \frac{\delta}{\omega})}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

ahol $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ az impedancia.

Komplex síkon történő szemléltetés:

$$Impedancia \doteq |R + i\omega L|.$$



Energiaviszonyok az RL körben. Az áram teljesítménye

$$RI + L\dot{I} = \mathcal{E}, \qquad / * I$$

$$RI^2 + L\dot{I}I = \mathcal{E}I,$$

$$\mathcal{E}I = RI^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}LI^2).$$

A B.O. az áramforrás elektromotoros erejének 1s-ra eső munkája, vagyis a teljesítmény. Ez a teljesítmény fedezi az ellenálláson időegység alatt keletkezett Joule-hő (RI^2) és mágneses energia ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}LI^2)$) növekedését.

Energiaegyenlet, amely az energiamegmaradás törvényét fejezi ki RL-kör esetén.

Számítsuk ki az $\mathcal{E}I$ teljesítményt periódikusan változó elektromotoros erő esetén:

$$\mathcal{E}I = \mathcal{E}_0 I_0 \cos\omega t \cos(\omega t - \delta). \quad *$$

A pillanatnyi teljesítmény gyors változása miatt, a teljesítmény középértékét szokás számítani. Határozzuk meg a * egy periódusra vett középértékét (amelyet felülhúzással jelölünk):

$$\overline{\mathcal{E}I} = \mathcal{E}_0 I_0 \frac{1}{T}\int_0^T \cos\omega t\cos(\omega t-\delta)\mathrm{d}t =$$

$$= \mathcal{E}_0 I_0 \frac{1}{T}\int_0^T (\cos^2\omega t\cos\delta + \cos\omega t\sin\omega t\sin\delta)\mathrm{d}t =$$

$$\frac{\mathcal{E}_0 I_0}{T}\cos\delta\int_0^T \cos^2\omega t\,\mathrm{d}t + \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{T}\sin\delta\int_0^T \cos\omega t\sin\omega t\,\mathrm{d}t.$$

Felhasználva:

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\cos^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\cos\omega t\sin\omega t\,\mathrm{d}t = 0,$$

kapjuk:

$$\overline{\mathcal{E}I} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 I_0 \cos\delta = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}\frac{I_0}{\sqrt{2}}\cos\delta.$$

Ahol:

$$\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\overline{\mathcal{E}^2}} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_0^2}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\,\mathrm{d}t},$$

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\overline{I^2}}$$

effektív értékek.

$$\mathcal{E}_{eff} = \sqrt{\overline{\mathcal{E}^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}, \quad ; \quad I_{eff} = \sqrt{\overline{I^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}},$$

$$\overline{\mathcal{E}I} = \mathcal{E}_{eff} I_{eff}\cos\delta.$$

(A teljesítmény középértéke arányos a fáziskésés cosinusával. Ha $\delta \to \frac{\pi}{2}$, akkor $\overline{\mathcal{E}I} \to 0$.)

A $\delta \to \frac{\pi}{2}$ határeset kétféleképpen érhető el:

1. Az (ωL) rögzített értéke mellett $R \rightarrow 0$. Ekkor nincs Joule-hő, mert $R \rightarrow 0$.

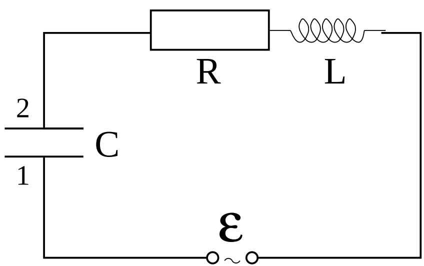
2. R=áll, de ωL $\rightarrow \infty \Rightarrow \sqrt{\mathrm{R}^2 + \omega^2 \mathbf{L}^2} \rightarrow \infty \Rightarrow I_0 \rightarrow 0$ és a Joule-hő ezért tűnik el.

Áramkör önindukcióval és kapacitással

Tekintsünk egy vezető kört, amelyben R, L, és C szerepel. A körbe kapcsolt elem elektomotoros ereje legyen $\mathcal{E}$. Az ilyen áramkörben egyenáram nem alakul ki, mert a kondenzátor nem enged át. Az időben változó elektromotoros erő azonban ilyen körben is létesít áramot.

Határozzuk meg a kondenzátort is tartalmazó áramkör alapegyenletét:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \sigma(\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overrightarrow{\boldsymbol{E}}') \Rightarrow \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}}{\sigma} = \overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overrightarrow{\boldsymbol{E}}', \qquad /\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}} \text{ ill. } \int (1 \to 2)$$



$$\int_1^2 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}}{\sigma} = \int_1^2 \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}} + \int_1^2 \overrightarrow{\boldsymbol{E}}' \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}.$$

Feltételezzük, hogy a vezető lineáris, ezért a korábbi gondolatmenetből következik:

$$IR = \mathcal{E} + \int_1^2 \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}, \qquad *$$

4.ME

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0 \Rightarrow \exists\ \vec{\boldsymbol{A}} \text{ melyre } \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}},$$

3.ME

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}} = \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = -rot\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\boldsymbol{A}},$$

$$rot(\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}{\partial t}) = 0.$$

Látszik, hogy az $(\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}{\partial t})$ vektor rotációmentes $\Rightarrow \exists$ olyan ϕ, amelyre:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}{\partial t} = -grad\,\phi,$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -grad\,\phi - \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{A}}}{\partial t}.$$

Írjuk be $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ kifejezését a * egyenletbe:

$$IR = \mathcal{E} - \underbrace{\int_1^2 grad\,\phi \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}}_{(\phi_1 - \phi_2)} - \int_1^2 \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{A}}}{\partial t}\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}.$$

(kondenzátor lemezek közötti potenciálkülönbség)

$$\int_1^2 \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{A}}}{\partial t}\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_1^2 \overrightarrow{\boldsymbol{A}}\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}.$$

Mivel a kondenzátor lapok közötti távolság kicsi az integrációs tartományt jelentő vezető szakaszhoz képest, az integrálás jó közelítéssel zárt áramkörre terjeszthető ki:

$$\int_1^2 \overrightarrow{\boldsymbol{A}}\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}} \sim \oint \overrightarrow{\boldsymbol{A}}\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}.$$

Ez pedig:

$$\oint \overrightarrow{\boldsymbol{A}} \mathrm{d} \overrightarrow{\boldsymbol{s}} = \int_F (rot\, \overrightarrow{\boldsymbol{A}})_n \mathrm{d} \overrightarrow{\boldsymbol{F}} = \int_F B_n \mathrm{d}F = \mathcal{F}.$$

Ekkor:

$$IR = \mathcal{E} - (\phi_2 - \phi_1) - \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}t}.$$

A kondenzátor lapok közötti $(\phi_2 - \phi_1)$ potenciálkülönbség a fegyverzetek e töltésével és a C kapacitással kifejezhető:

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{e}{C},$$

és

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}t} = L\dot{I}.$$

Ezekkel:

$$RI + L\dot{I} + \frac{e}{C} = \mathcal{E}, \quad \text{de} \quad e(t) = \int_0^t I(t')\mathrm{d}t',$$

és (t=0-ban kapcsoljuk be az áramforrást)

$$RI + L\dot{I} + \frac{1}{C}\int_0^t I(t')\mathrm{d}t' = \mathcal{E}.$$

Mindkét oldalt differenciálva:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{\mathcal{E}}.$$

Az RLC kör alapegyenlete, amelyből meghatározhatjuk az áramerősséget, mint az idő függvényét, adott R, L, C értékek, és adott $\mathcal{E}$ esetén.