ELEKTRODINAMIKA

(12. Előadás)

Változó elektromágneses terek. Elektromágneses hullámok

A Maxwell-egyenletek:

$$1. \quad rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{D}}},$$

$$ahol \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{i}} = \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \rho\overrightarrow{\boldsymbol{v}},$$

$$2. \quad div\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \rho,$$

$$3. \quad rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}},$$

$$4. \quad div\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0.$$

Anyagi egyenletek:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \epsilon_0\epsilon_r\overrightarrow{\boldsymbol{E}},$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0\mu_r\overrightarrow{\boldsymbol{H}},$$

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma(\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overrightarrow{\boldsymbol{E}}').$$

A fenti differenciálegyenletek a fenomenológiai elektrodinamika keretein belül a legáltalánosabb elektromágneses terek törvényszerűségeit írják le.

Az elektromágneses potenciálok

Tételezzük fel, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{i}} = \overrightarrow{\boldsymbol{i}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ és $\rho = \rho(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ ismert függvényei a helynek és az időnek. Feladat a térerősségek meghatározása.

Nem közvetlenül az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$, és $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}$ términnyiségeket számítjuk, hanem az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$

vektor és ϕ skalárpotenciálokat:

$$\triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}} - \varepsilon\mu \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} = -\mu \overrightarrow{\boldsymbol{i}},$$

$$\triangle \phi - \varepsilon\mu \ddot{\phi} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Inhomogén hullámegyenletek (d'Alembert-egyenlet), ahol a ϕ és $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ az úgynevezett Lorentz-mértéket elégítik ki:

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} + \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\dot{\phi} = 0.$$

Ekkor

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}},$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} - grad\phi,$$

és $\exists$ egy szabadság az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ és ϕ megválasztásában:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}' = \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + grad\chi,$$

$$\phi' = \phi - \dot{\chi}.$$

Az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}'$, illetve a ϕ és ϕ' ugyanazt az elektromágneses teret írják le.

Retardált és avanzsált potenciálok

Az $\overrightarrow{\boldsymbol{i}} = \overrightarrow{\boldsymbol{i}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ és $\rho = \rho(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ áram, illetve töltéseloszlás által keltett elektromágneses tér meghatározását visszavezettük az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ és ϕ elektromágneses potenciálok meghatározására. Keressük az

$$\triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}} - \varepsilon\mu \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} = -\mu \overrightarrow{\boldsymbol{i}},$$

$$\triangle \phi - \varepsilon\mu \ddot{\phi} = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

egyenletek olyan megoldását, amelyek kielégítik a

$$div \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + \varepsilon\mu \dot{\phi} = 0$$

Lorentz-feltételt.

Stacionárius esetben ezek az egyenletek az egyenáramok mágneses terének kiszámításánál bevezetett vektorpotenciálokra vonatkozó

$$\triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = -\mu \overrightarrow{\boldsymbol{j}}, \quad illetve \quad div \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = 0$$

egyenletekbe, valamint az elektrosztatikus potenciál Poisson-egyenletébe mennek át:

$$\triangle \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

A korábbiakban láttuk, hogy a fenti egyenletek megoldásait integrálalakban a következőképpen lehet előállítani:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}(x', y', z')}{r} dV',$$

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(x',y',z')}{r}dV',$$

ahol

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \qquad dV' = dx'dy'dz'.$$

Most felírjuk a fenti megoldások alapján a d'Alembert típusú differenciálegyenletek megoldásait, s igazoljuk, hogy tényleg jó megoldások. Ezek:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(x,y,z,t) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}}\,(x',y',z',t-\frac{r}{v})}{r}dV', \qquad *$$

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(x',y',z',t-\frac{r}{v})}{r}dV', \quad ** \;\; ahol \;\; v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Ezek a kifejezések a következőképpen értelmezhetők: az elektromágneses potenciálok értékeit az x, y, z pontban, a t időpillanatban az egyes térfogatelemekben levő áram- és töltéssűrűségek nem a t időponthoz tartozó értékei szabják meg, hanem a korábbi $t - \frac{r}{v}$ időben felvett értékei. A $t - \frac{r}{v}$ idő annyival korábbi, mint amennyi szükséges egy v sebességgel terjedő hatásnak ahhoz, hogy a töltéselemtől az x, y, z koordinátájú pontig eljusson, vagyis befussa az r távolságot. A töltés - és árameloszlás mozgásállapotában bekövetkezett változás tehát nem azonnal érezhető a potenciálpontban, hanem véges sebességgel terjedő hatás közvetítésével jut el oda. Ezek a potenciálok tehát kifejezik az elektromágneses kölcsönhatás véges sebességgel való terjedését. A * és ** elektromágneses potenciálokat retardált potenciáloknak nevezzük.

Most megmutatjuk, hogy a retardált potenciálok kielégítik a d'Alembert-egyenletel és a Lorentz-feltételt.

Foglalkozzunk előbb a ϕ skalárpotenciállal. Az x, y, z koordinátájú pontot vegyük körül egy végtelen kis r_0 sugarú gömbfelülettel. Az integrációs tartományt ezáltal két részre bontjuk: a V_1 térfogatú gömbre és az azon kívül eső V_2

térfogatú, úgynevezett külső térrészre. A ϕ ennek megfelelően két tag összege lesz:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2,$$

ahol

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V_1} \frac{\rho(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{r} dV',$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V_2} \frac{\rho(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{r} dV'.$$

Képezzük a $\triangle\phi_2 - t$ az x, y, z koordináták szerint. ϕ_2 kifejezése ezeket a koordinátákat csak r-ben tartalmazza. A differenciálás elvégezhető az integráljelen belül, ha az integrandusz második deriváltja véges és folytonos az integrációs tartományban. Mivel $r > r_0$, ez a feltétel itt teljesül, ezért:

$$\triangle\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_2}\triangle(\frac{\rho(t-\frac{r}{v})}{r})dV' =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\rho(t-\frac{r}{v})dV' =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_2}\frac{1}{r}\rho''(t-\frac{r}{v})\frac{1}{v^2}dV',$$

ahol ρ'' a $t-\frac{r}{v}$ argumentum szerint vett második differenciálhányadost jelenti. Mivel az argumentumban a t független változó együtthatója 1, ezért az argumentum szerint vett differenciálhányados megegyezik a t szerinti parciális differenciálhányadossal: $\rho' = \frac{\partial\rho}{\partial t}$, $\rho'' = \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}$. Ezért — mivel r és t független változók — $\triangle\phi_2$ a következő alakba írható:

$$\triangle\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_2}\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\rho(t-\frac{r}{v})}{r})dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{V_2}(\frac{\rho(t-\frac{r}{v})}{r})dV' =$$

$$= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2}.$$

Tehát:

$$\triangle\phi_2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} = 0.$$

Továbbá:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_1}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\rho(x',y',z',t-\frac{r}{v})}{\partial t^2}dV'.$$

Az x, y, z koordinátájú P pont körüli r_0 sugarú gömböt, tehát a V_1 tartományt húzzuk össze a P pontra. Mivel $\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}$ véges, az integrál zérushoz tart. Ugyanis az integrál értékét az

$$\int_{V_1} \frac{1}{r} dV'$$

viselkedése szabja meg. Ennek határértéke pedig zérus:

$$\lim_{r_0\to 0}\int_{V_1} \frac{1}{r} dV' = 4\pi \lim_{r_0\to 0}\int_0^{r_0} r dr = 4\pi \lim_{r_0\to 0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{r_0} = 0.$$

Ennélfogva a $\phi - re$ felírt d'Alembert egyenlet bal oldala a következő:

$$\triangle\phi - \varepsilon\mu\ddot{\phi} = \triangle\phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \triangle\phi_1 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} + \triangle\phi_2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} = \triangle\phi_1.$$

$\triangle\phi_1$ kiszámításánál nem járhatunk el úgy, mint $\triangle\phi_2-$nél tettük, mivel most az integrációs tartomány az $r = 0$ pontot is tartalmazza, és ezért az integrandus második deriváltja $r = 0-$nál végtelenné válik. Itt a következő átalakítást használjuk fel:

$$\triangle\phi_1 = div\, grad\, \phi_1 = \lim_{V\to 0} \frac{\oint grad\phi_1 d\overrightarrow{\boldsymbol{F}}}{V}.$$

Itt F annak a V térfogatnak a zárt felülete, amely belsejében tartalmazza a P(x,y,z) pontot, amelyben a $divgrad\phi$ értékét meghatározzuk. Képezzük előbb $grad\,\phi_1-$et:

$$grad\,\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_1} grad\frac{\rho}{r}dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_1}(\frac{1}{r}grad\,\rho + \rho\,grad\frac{1}{r})dV' =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_1}(-\frac{\rho'}{vr}grad\,r - \frac{\rho}{r^2}grad\,r)dV' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_1}(\frac{\rho'}{vr}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r} + \frac{\rho}{r^2}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r})dV',$$

ahol $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ az x', y', z' ponttól a dF felületelemig húzott vektor. Mivel ρ' véges, az $r_0 \to 0$ határátmenetnél a jobb oldali első integrál zérushoz tart. Tehát:

$$\oint grad\, \phi_1 d\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_1}\oint \frac{\rho\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^3} d\overrightarrow{\boldsymbol{F}} dV'.$$

Annál a határátmenetnél, amikor mind a V_1 térfogat, mind az F felület végtelen kicsivé válik, a $\rho(x', y', z', t - \frac{r}{v})$ függvény $r-$től való függése elhagyható. Ekkor $\rho(x', y', z', t)$ kiemelhető a felületi integrálból:

$$\oint grad\, \phi_1 d\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V}\rho\oint \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^3} d\overrightarrow{\boldsymbol{F}} dV'.$$

Az $\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ vektor normális komponensének a zárt felületre vett integrálja 4π vagy zérus asszerint, hogy a x', y', z' pont az F felülettel körülfogott V térfogat belsejében van, vagy azon kívül. A mi esetünkben V_1 a V belsejében van, ezért a felületi integrál $4\pi-$vel egyenlő. Tehát

$$\oint grad\, \phi_1 d\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = -\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon}\int \rho(x', y', z')dV'.$$

Ebből:

$$\triangle\phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_p = -\frac{\rho_p}{\varepsilon},$$

ahol ρ_p a $\rho(x, y, z, t)$ függvény értéke a $P(x, y, z)$ pontban. Megmutattuk, hogy a $\phi - re$ felírt ** integrálkifejezés:

$$\phi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{r}dV',$$

és kielégíti a ϕ skalárpotenciál differenciálegyenletét.

Hasonlóképpen megmutatható, hogy * megoldása a vektorpotenciálra vonatkozó differenciálegyenletnek.

Megmutatjuk, hogy a * és ** alakú retardált potenciálok kielégítik a Lorentz-feltételt is $(div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} + \varepsilon\mu\dot{\phi} = 0)$.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be a $t' = t - \frac{r}{v}$ jelölést. Képezzük a vektorpotenciál divergenciáját a * integrálkifejezés alapján. A differenciálás az integrál jel alatt elvégezhető:

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu}{4\pi}\int div(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}}(x', y', z', t')}{r})dV'.$$

Vizsgáljuk az integrandust:

$$div(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}}(x', y', z', t')}{r}) = \frac{1}{r}div\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{i}}\,grad\frac{1}{r}.$$

Mivel $\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$ csak az r-en keresztül függ x, y, z-től,

$$div \, \vec{\boldsymbol{i}} \, (x', y', z', t') = -\frac{1}{v} \frac{\partial \vec{\boldsymbol{i}}}{\partial t'} grad \, r.$$

Tehát

$$div(\frac{\vec{\boldsymbol{i}}}{r}) = -\frac{1}{vr} \frac{\partial \vec{\boldsymbol{i}}}{\partial t'} grad \, r + \vec{\boldsymbol{i}} \, grad \frac{1}{r}. \qquad *$$

Az $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ összefüggés alapján belátható, hogy

$$grad \, r = -grad' r,$$

ahol $grad'$ az x', y', z' koordináták szerint képzett gradienst jelenti. Ennek alapján * a következő alakba írható:

$$div(\frac{\vec{\boldsymbol{i}}}{r}) = \frac{1}{vr} \frac{\partial \vec{\boldsymbol{i}}}{\partial t'} grad' r - \vec{\boldsymbol{i}} \, grad' \frac{1}{r}.$$

A vesszős koordináták szerinti divergenciára érvényes a következő képlet:

$$div'(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}}}{r}) = (div'\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}}}{r})_{t'=konst.} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{i}}}{\partial t'} grad' t' =$$

$$= \overrightarrow{\boldsymbol{i}}\, grad' \frac{1}{r} + \frac{1}{r}(div' \overrightarrow{\boldsymbol{i}})_{t'=konst.} - \frac{1}{vr}\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{i}}}{\partial t'} grad\, r'. \qquad **$$

* és ** összehasonlításából következik:

$$div(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}}}{r}) = -div'(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}}}{r}) + \overrightarrow{\boldsymbol{i}}\, grad' \frac{1}{r} + \frac{1}{r}(div' \overrightarrow{\boldsymbol{i}})_{t'=konst.} - \overrightarrow{\boldsymbol{i}}\, grad' \frac{1}{r} =$$

$$= -div'(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}}}{r}) + \frac{1}{r}(div' \overrightarrow{\boldsymbol{i}})_{t'=konst.}.$$

Ezt a kifejezést beírva a $div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} - ra$ vonatkozó kezdeti egyenletbe:

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = -\frac{\mu}{4\pi}\int_V div'(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}}}{r})dV' + \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{(div'\overrightarrow{\boldsymbol{i}})_{t'=konst.}}{r}dV'.$$

Az első integrál Gauss-tétellel felületi integrállá alakítható:

$$\int_V div'\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}}}{r}dV' = \oint \frac{i_n}{r}dF.$$

Ha az integrációs tartománynak az egész végtelen teret tekintjük, akkor a felületi integrál zérussá válik, mert a végtelenben az áram zérus. Tehát:

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{(div'\overrightarrow{\boldsymbol{i}})_{t'=konst.}}{r}dV'.$$

A kontinuitási-egyenlet szerint:

$$div' \overrightarrow{\boldsymbol{i}}\,(x', y', z', t')_{t'=konst.} = -\frac{\partial \rho(x', y', z', t')}{\partial t'}.$$

Ekkor

$$div \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = -\frac{\mu}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial t'} dV'.$$

Mivel

$$t' = t - \frac{r}{v}, \Rightarrow \; \frac{\partial \rho}{\partial t'} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Ezért:

$$div \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = -\frac{\mu}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV' = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho(x', y', z', t')}{r} dV' =$$

$$-\frac{\varepsilon\mu}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\rho(x',y',z',t')}{r}dV' = \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

Ez az egyenlet pedig éppen a Lorentz-feltétel. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a retardált potenciálok kielégítik a Lorentz-feltételt is. Az előzőekben követett gondolatmenettel belátható, hogy az elektromágneses potenciálok differenciálegyenleteit az

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(x,y,z,t) = \frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{i}}(x',y',z',t+\frac{r}{v})}{r}dV',$$

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\rho(x',y',z',t+\frac{r}{v})}{r}dV',$$

integrálkifejezések is kielégítik.

Ezek olyan megoldásokat jelentenek, amelyek szerint a potenciálok értékeit az x, y, z pontban a t időpillanatban nem a t-hez, hanem egy későbbi, a $t + \frac{r}{v}$ időponthoz tartozó töltés és árameloszlás határozza meg. Ezen megoldásokat avanzsált potenciáloknak nevezzük. Ezeknek nincs olyan világos fizikai értelmezésük, mint a retardált potenciáloknak, ezért alkalmazásuk is sokkal ritkább.

Az elektromágneses potenciálok differenciálegyenletei inhomogén lineáris egyenletek, azok általános megoldását a homogén egyenletek általános megoldásának és az inhomogén egyenlet tetszőleges partikuláris megoldásának összege adja. Egyértelmű megoldást akkor kapunk, ha megadjuk a konkrét probléma kezdő - és határfeltételeit. Mind az elméleti, mind pedig az alkalmazásoknál előforduló problémák legtöbbjénél általában a retardált megoldások játszanak szerepet.