ELEKTRODINAMIKA

(13. Előadás)

Homogén, izotróp szigetelőkben terjedő elektromágneses hullámok

Milyen, időben gyorsan változó elektromágneses tér alakulhat ki homogén, izotróp szigetelőkben, ha az áramsűrűség és a töltéssűrűség 0?

Induljunk ki az elektromágneses potenciálokat meghatározó egyenletekből, ha ($\rho = 0$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = 0$):

$$\triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}} - \varepsilon\mu \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} = 0,$$

$$\triangle \phi - \varepsilon\mu \ddot{\phi} = 0.$$

Ezek a potenciálokra homogén hullámegyenletet jelentenek, melynek megoldása:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) = \overrightarrow{\boldsymbol{A}}(t - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{v}),$$

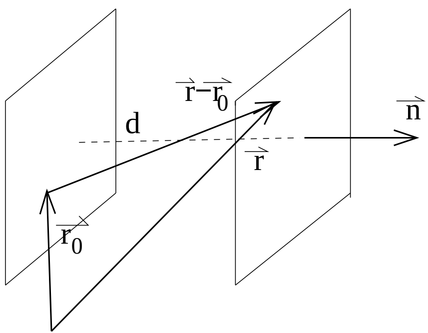
$$\phi(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) = \phi(t - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{v}),$$

alakú lehet, ahol $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ rögzített (időtől független) egységvektor, $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. A megoldások meglehetősen általánosak.

Pusztán az $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$,$t$ változók között kell meghatározott kapcsolatnak fennállnia, egyébként a $t - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{v}$ <u>fázis</u> tetszőleges (differenciálható) függvényei lehetnek. Az állandó fázishoz tartozó pontok halmaza a $t - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{v}$ =áll. egyenletből számítható, ha az állandót $-\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0}{v}$ alakban választjuk meg:

$$t - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{v} = -\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0}{v} \Rightarrow vt = (\overrightarrow{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0)\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$$

alakú.



A jobb oldal egy $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ normálisú sík Hesse-féle normálalakja. A sík térbeli helyzete változó, $vt = d$ épp a $t = 0$ helyzettől mért távolság (a sík önmagával párhuzamosan mozog), a mozgás sebessége (a fázissebesség), $v_f = \frac{ds}{dt} = v$.

Ezt a megoldást síkhullám típusúnak nevezzük. (Belátható, hogy a $t + \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{v}$ fázisú függvény ugyancsak megoldás, ez a $-\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ irányban terjedő, v sebességű síkhullámot ír le. Megjegyzés: (A vákuumban a v fázissebesség épp a c vákuumbeli fénysebességgel egyenlő.)

Az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ és ϕ függvények még a Lorentz-feltételt is ki kell, hogy elégítsék. Ez az

$$\nabla \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + \varepsilon\mu\dot{\phi} = 0,$$

$$-\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}}{v}\overrightarrow{\boldsymbol{A}}' + \varepsilon\mu\dot{\phi} = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$\phi' - v\overrightarrow{\boldsymbol{A}}'\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = 0.$$

Számítsuk ki a térmennyiségeket:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}}, \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -grad\phi - \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}},$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu} rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}}, \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{D}} = -\varepsilon\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} - \varepsilon grad\phi.$$

(A számolás pl. derékszögű koordinátákban:

$$(rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}})_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y = -A'_z n_y/v + A'_y n_z/v =$$

$$= (A'_y n_z - A'_z n_y)/v = (\overrightarrow{\boldsymbol{A}}' \times \overrightarrow{\boldsymbol{n}})_x/v),$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{v}(\overrightarrow{\boldsymbol{A}'} \times \vec{\boldsymbol{n}}), \qquad \vec{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu v}(\overrightarrow{\boldsymbol{A}'} \times \vec{\boldsymbol{n}}),$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -grad\phi - \dot{\vec{\boldsymbol{A}}} = \phi' \frac{\vec{\boldsymbol{n}}}{v} - \vec{\boldsymbol{A}}' = *$$

A Lorentz-feltételt $\vec{\boldsymbol{n}}$−nel szorozva kapjuk:

$$\frac{\vec{\boldsymbol{n}}\phi'}{v} = \overrightarrow{(\boldsymbol{A}'\vec{\boldsymbol{n}})}\vec{\boldsymbol{n}}.$$

$$* = \vec{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{(\boldsymbol{A}'\vec{\boldsymbol{n}})} - \vec{\boldsymbol{A}}' = \vec{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{(\boldsymbol{A}'\vec{\boldsymbol{n}})} - \vec{\boldsymbol{A}}'(\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{n}}) = \vec{\boldsymbol{n}} \times \overrightarrow{(\boldsymbol{n} \times \vec{\boldsymbol{A}}')} = (\vec{\boldsymbol{A}}' \times \vec{\boldsymbol{n}}) \times \vec{\boldsymbol{n}}.$$

Az eredményekből látszik, hogy $\vec{\boldsymbol{E}}$ és $\vec{\boldsymbol{H}}$ merőlegesek az $\vec{\boldsymbol{n}}$ egységvektorra, továbbá $\overrightarrow{(\boldsymbol{A}' \times \vec{\boldsymbol{n}})} = \mu v \vec{\boldsymbol{H}}$-t az $\vec{\boldsymbol{E}}$ kifejezésébe beírva:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \mu v(\overrightarrow{\boldsymbol{H}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{n}}) = \mu \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \overrightarrow{\boldsymbol{H}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{n}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \overrightarrow{\boldsymbol{H}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{n}}.$$

Azaz $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ merőlegesek egymásra és $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}, \overrightarrow{\boldsymbol{E}}, \overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak. $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ között felírható még egy következmény összefüggés:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{E}}.$$

Mivel az elvégzett műveletek során a fázis szerkezete nem változott, ezért

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(t - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{v}), \quad \textit{illetve} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{H}}(t - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{v}),$$

vagyis $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ szintén síkhullám típusúak.

Vizsgáljuk meg az energia terjedését síkhullám típusú elektromágneses tér esetében. Az energiasűrűség:

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon\overrightarrow{\boldsymbol{E}}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\overrightarrow{\boldsymbol{H}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{n}})^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\mu}{\varepsilon}\left[\overrightarrow{\boldsymbol{H}}(\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \times (\overrightarrow{\boldsymbol{H}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{n}}))\right] =$$

$$\frac{1}{2}\mu\left[\overrightarrow{\boldsymbol{H}}(\overrightarrow{\boldsymbol{H}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}}(\overrightarrow{\boldsymbol{H}}\overrightarrow{\boldsymbol{n}}))\right] = \frac{1}{2}\mu\overrightarrow{\boldsymbol{H}}^2 = u_m.$$

(Itt felhasználtuk, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = 0$.)

Ebből az következik, hogy síkhullámoknál az elektromos és mágneses komponensekre azonos energiasűrűség esik.

Írjuk fel a Poynting-vektort:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{S}} = \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\overrightarrow{(\boldsymbol{n} \times \overrightarrow{\boldsymbol{E}})} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{E}}^2 - \overrightarrow{\boldsymbol{E}}\overrightarrow{(\boldsymbol{n}\boldsymbol{E})}) =$$

$$\varepsilon\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\overrightarrow{\boldsymbol{E}}^2\vec{\boldsymbol{n}} = uv\overrightarrow{\boldsymbol{n}}.$$

Mivel $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = 0$, és – az előbbi egyenletünk értelmében – a teljes energiasűrűség: $u = 2u_e = \epsilon\overrightarrow{\boldsymbol{E}}^2$. Az energia tehát párhuzamosan terjed a hullám terjedési irányával, v sebességgel. Eredményünk trivialitásnak tűnik, de belátható, hogy anizotróp közegeknél nem feltétlenül van így.

A további alkalmazások szempontjából nagy jelentőséggel bírnak a periódikus síkhullámok, melyek

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) = \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} e^{i\omega(t - \overrightarrow{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}}/v)},$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) = \overrightarrow{\boldsymbol{H}_0} e^{i\omega(t - \overrightarrow{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}}/v)}$$

alakúak. Mivel az $\exp(ix)$ függvény 2π szerint periódikus, van olyan T idő, melyre

$$e^{i\omega(t + T - \overrightarrow{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}}/v)} = e^{i\omega(t - \overrightarrow{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}}/v)},$$

és így

$$\omega(t + T - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{v}) = \omega(t - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{v}) + 2\pi,$$

$$\omega T = 2\pi.$$

Bevezetve a $\nu = \frac{1}{T}$ frekvenciát: $\omega = 2\pi\nu$. Ha a térbeli periódicitást vizsgáljuk, van olyan λ távolság, melyre

$$e^{i\omega(t - \overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}/v)} = e^{i\omega(t - (\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}} + \lambda)/v)},$$

ahonnan

$$\omega(t - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{v}) + 2\pi = \omega(t - \left[\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}} + \lambda\right]/v),$$

azaz

$$\frac{\omega\lambda}{v} = 2\pi \Rightarrow \nu\lambda = v.$$

A λ mennyiséget, mely két, azonos fázisú sík távolsága, hullámhossznak nevezzük. Szokás bevezetni a $\overrightarrow{\boldsymbol{k}} = k\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ hullámszám-vektort, ahol $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ (a 2π hosszúságra eső hullámok száma). A hullámszámmal:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \overrightarrow{\mathbf{E}_0} e^{i(\omega t \pm \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}})}, \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{H}_0} e^{i(\omega t \pm \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}})}.$$

(A - előjel $+\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ irányba terjedő síkhullámot írja le.) Az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ előbb bevezetett formái komponensenként kielégítik a $\triangle\chi - \frac{1}{v^2}\ddot{\chi} = 0$ homogén hullámegyenletet. (Behelyettesítéssel igazolhatjuk!) Ha a homogén hullámegyenlet megoldását $\chi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \chi_0(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega t}$ alakban keressük, a helytől függő részre a

$$\triangle\chi_0 + k^2\chi_0 = 0$$

amplitúdó-egyenletet kapjuk.

A hullámegyenletnél azonban más típusú megoldások is léteznek. Ennek vizsgálatához előbb emlékezzünk rá, hogy a vektorpotenciálos fejezetben megmutattuk, hogy ha a töltéssűrűségre $\rho = 0$ teljesül, található olyan mértéktranszformáció, mellyel $\phi = 0$ választható. Ekkor a térmennyiségek a vektorpotenciálból számíthatók, melyet most $\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}$-vel jelölünk (és Hertz-vektornak nevezzük). Az így rögzített mérték a Coulomb-mérték. Esetünkben $\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = 0$, így a Hertz-vektort a

$$\triangle \overrightarrow{\boldsymbol{Z}} - \frac{1}{v^2} \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}} = 0$$

megoldásaként nyerjük ($v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$). $\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}$-re teljesül a $div \overrightarrow{\boldsymbol{Z}} = 0$ feltétel is. A Hertz-vektorból a térmennyiségek az

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}},$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{Z}},$$

összefüggésekkel adódnak.

Tételezzük fel, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}$ gömbszimmetrikus, vagyis csak egy adott ponttól mért távolságtól függ. Ekkor $\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}$-re felírva a hulámegyenletet ($\triangle$-t gömbi polárkoordinátákkal kifejezve):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}}{\partial\varphi^2}\right] - \frac{1}{v^2}\ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}} = 0.$$

Mivel $\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}$ a szögkoordinátáktól nem függ, egyenletünk:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}) - \frac{1}{v^2}\ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}} = 0, \qquad / * r$$

$$\frac{\partial^2(r\overrightarrow{\boldsymbol{Z}})}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}(r\overrightarrow{Z})^{\bullet\bullet} = 0,$$

amely az $r\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}$ függvényre egydimenziós hullámegyenlet. Tekintsük ennek egy partikuláris megoldását:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}r = \overrightarrow{\mathcal{Z}}(t - \frac{r}{v}),$$

azaz

$$\overrightarrow{\boldsymbol{Z}} = \frac{1}{r}\overrightarrow{\mathcal{Z}}(t - \frac{r}{v}).$$

A $\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}$ függvény tehát a $t - \frac{r}{v}$ <u>fázistól</u> függ. A $t - \frac{r}{v}$ =állandó fázisfelületek gömbök, melyek

$$v_f = \frac{dr}{dt} = v$$

fázissebességgel mozognak a centrumtól <u>kifelé</u>. (A $t + \frac{r}{v}$ fázissal vett megoldás a centrum felé mozgó fázisfelületet jelent.) Ha a $\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}$ függvény korlátos, a megoldás $\frac{1}{r}$-rel arányos. Ezt a megoldást gömbhullám típusúnak nevezzük. A $div\overrightarrow{\boldsymbol{Z}} = 0$ feltétel:

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{Z}} = \frac{1}{r}div\overrightarrow{\mathcal{Z}} + grad\frac{1}{r}\overrightarrow{\mathcal{Z}} = 0$$

alakú, melyben

$$div\overrightarrow{\mathcal{Z}} = -\frac{1}{v}\overrightarrow{\mathcal{Z}}'gradr = -\frac{\overrightarrow{\mathcal{Z}}'\overrightarrow{\boldsymbol{r}}^0}{v},$$

$$grad\frac{1}{r} = -\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}^0}{r^2}.$$

(Itt $\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r}$ egységvektor, és a vessző a fázis szerinti deriváltat jelöli).

Vagyis:

$$\frac{\overrightarrow{\mathcal{Z}}'\overrightarrow{\boldsymbol{r}}^0}{vr} + \frac{\overrightarrow{\mathcal{Z}}r^0}{r^2} = 0$$

alakban írható.

Számoljuk ki $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} - t$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} - t$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}} = -\frac{1}{r}\overrightarrow{\mathcal{Z}}'(t - \frac{r}{v}),$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\overrightarrow{\boldsymbol{Z}} = \frac{1}{r}rot\overrightarrow{\mathcal{Z}}(t - \frac{r}{v}) + grad\frac{1}{r} \times \overrightarrow{\mathcal{Z}}(t - \frac{r}{v}).$$

Derékszögű komponensekben a $rot\overrightarrow{\mathcal{Z}}$ könnyen kiszámolható:

$$(rot\overrightarrow{\mathcal{Z}} = \overrightarrow{\mathcal{Z}}' \times grad\frac{r}{v}),$$

illetve $grad r$ és $grad\frac{1}{r}$ alakját behelyettesítve, $\overrightarrow{B}$-re adódik:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \frac{\overrightarrow{\mathcal{Z}}' \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}^0}{vr} + \frac{\overrightarrow{\mathcal{Z}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}}{r^2}.$$

A mágneses tér két részre bomlott. Az első tag $\frac{1}{r}$-rel arányos, a második $\frac{1}{r^2}$-rel. A szimmetria-középpont közelében az $\frac{1}{r^2}$-es tag domináns, attól nagy távolságra az $\frac{1}{r}$-rel arányos. A $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$-t leíró függvény <u>nem megoldása</u> a hullámegyenletnek, az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$-t leíró függvény igen.

Számoljuk ki a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}\overrightarrow{\boldsymbol{r^0}}$szorzatot:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} = (\overrightarrow{\mathcal{Z}}' \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0})\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}}{vr} + (\overrightarrow{\mathcal{Z}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0})\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}}{r^2} = 0.$$

A $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ (és a $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ vektor) merőleges az $\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}$ (a terjedés irányába mutató) egységvektorra. Az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ vektorról ezt nem mondhatjuk.

Most számítsuk ki a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}$ szorzatot:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}\times\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} = \frac{(\overrightarrow{\mathcal{Z}}' \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}) \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}^0}{vr} + \frac{(\overrightarrow{\mathcal{Z}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}) \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}}{r^2} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}(\overrightarrow{\mathcal{Z}}'\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}) - \overrightarrow{\mathcal{Z}}'}{vr} + \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}(\overrightarrow{\mathcal{Z}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}) - \overrightarrow{\mathcal{Z}}}{r^2} =$$

$$= \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}\left[\frac{\overrightarrow{\mathcal{Z}}'\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}}{vr} + \frac{\overrightarrow{\mathcal{Z}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}}{r^2}\right] - \frac{\overrightarrow{\mathcal{Z}}'}{vr} - \frac{\overrightarrow{\mathcal{Z}}}{r^2}.$$

A szögletes zárójelben a $div\overrightarrow{\mathcal{Z}} = 0$ feltétel előbb kiszámított alakja van, ez tehát nulla. A $\overrightarrow{\mathcal{Z}}'$ -vel arányos tagba az elektromos térerősség beírható:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} = \frac{1}{v}\overrightarrow{\boldsymbol{E}} - \frac{\overrightarrow{\mathcal{Z}}}{r^2}.$$

Szorítkozzunk a tér vizsgálatánál a szimmetriacentrumtól nagy távolságra. Ekkor elég az $\frac{1}{r}$-rel arányos tagokat vizsgálni. Az $r \to \infty$ asszimptótikus viselkedésre való utalással jelöljük ezeket $\overrightarrow{\boldsymbol{E}_a}$, illetve $\overrightarrow{\boldsymbol{B}_a}$-val (az $\frac{1}{\mu}\vec{\boldsymbol{B}}_a$ mágneses teret

$\overrightarrow{\boldsymbol{H}}_a$-val). A fenti egyenletből $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_a \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} = \frac{1}{v}\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_a$, vagy

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}}_a \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} = \frac{1}{\mu v}\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_a = \frac{1}{\mu}\sqrt{\varepsilon\mu}\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_a.$$

Ez ugyanaz az összefüggés, mint síkhullámok esetén. Ebből:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} \times \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_a = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} \times (\overrightarrow{\boldsymbol{H}}_a \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\overrightarrow{\boldsymbol{H}}_a - \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}(\overrightarrow{\boldsymbol{H}}_a\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0})\right].$$

Az előbb beláttuk, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}_a\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} = 0$, ezért $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}_a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} \times \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_a$, ami ugyancsak a síkhullámoknál már megkapott összefüggés.

(Megjegyzés: Ezek az összefüggések csak közelítő jellegűek.)

Az energiasűrűséget és a Poynting vektort erre a <u>távoli</u> zónarészre nem szükséges ismét kiszámolni. A számolásnál csupán az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}, \overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ és a terjedés irányába mutató egységvektor közötti kapcsolatokat használtuk fel, s ezek megegyeznek a síkhullámra felírottakkal. Az energiasűrűségre $u_e = u_m$, a Poynting-vektorra pedig:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{S}} = uv\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} = \varepsilon\overrightarrow{\boldsymbol{E}}^2\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{\mathcal{Z}}'^2(t-\frac{r}{v})\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}$$

teljesül.