ELEKTRODINAMIKA

(14. Előadás)

Pontszerű elektromos dipólus elektromágneses tere

Vegyünk egy $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ momentumú elektromos dipólust az $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0$ pontban. Tételezzük fel, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}(t)$ az időnek folytonos függvénye. Határozzuk meg ezen dipólus elektromos terét! A teret leíró Maxwell-egyenletekben adott mennyiségnek tekintjük a

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}}(t) = \int_V \overrightarrow{\boldsymbol{P}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) dV$$

egyenlettel definiált $\overrightarrow{\boldsymbol{P}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ dipólmomentum-sűrűséget.

Ismert, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \epsilon_0 \epsilon_r \overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}}$. Ha a térben vákuum van és $\overrightarrow{\boldsymbol{j}} \equiv 0$, illetve $\rho \equiv 0$, az aktuális ME-k:

$$1.\ rot \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \varepsilon_0 \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}} + \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{P}}},\ \Rightarrow\ 1.\ rot \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = (\varepsilon_0 \overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}})^{\bullet},$$

$$2.\ div(\varepsilon_0 \overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}}) = 0,$$

$$3.\ rot \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\mu_0 \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{H}}},$$

$$4.\ div \mu_0 \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = 0.$$

Ezek az egyenletek az $\overrightarrow{\boldsymbol{i}_p} = \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{P}}}{\partial t}$ polarizációs áramsűrűség és a $\rho_p = -div \overrightarrow{\boldsymbol{P}}$ töltéssűrűség időben változó elektromágneses terét határozzák meg. Ez azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ vektor és ϕ skalárpotenciált a $\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{P}}}$ és $-div \overrightarrow{\boldsymbol{P}}$, azaz a $\overrightarrow{\boldsymbol{P}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ függvény határozza meg. A potenciálokra ezért fennállnak a

$$\triangle \phi - \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\phi} = \frac{1}{\varepsilon_0} div \overrightarrow{\boldsymbol{P}},$$

$$\triangle \overrightarrow{\boldsymbol{A}} - \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}} = -\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{P}}}{\partial t}$$

egyenletek, és a Lorentz-feltétel

$$div \overrightarrow{\boldsymbol{A}} + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\phi} = 0.$$

Ezen egyenletek megoldásai az úgynevezett retardált potenciálok:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{P}}(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{\partial t} dV',$$

$$\phi(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{r} div' \overrightarrow{\boldsymbol{P}}(x', y', z', t - \frac{r}{v})_{t - \frac{r}{v} = konst.} dV'.$$

(Itt $r = (\overrightarrow{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}}') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$, $\quad t' = t - \frac{r}{c}$, $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.)

Belátható, hogy mind ϕ, mind pedig $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ a

$$\vec{\mathbf{Z}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}', t')}{r} dV'$$

vektorból számolható a

$$\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} div \overrightarrow{\boldsymbol{Z}}, \quad illetve \;\; \overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \mu_0 \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}}$$

összefüggésekkel. A vektorpotenciálnál a bizonyítás triviális, mivel az integrálás és az idő szerinti deriválás felcserélhetőek. (Az integrálás intervallumának határa független az időtől!) A skalárpotenciál formulájában használjuk fel, hogy ennek értéke a

$$div' \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}}}{r} = \frac{1}{r} div' \overrightarrow{\boldsymbol{P}} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}} grad' \frac{1}{r}$$

összefüggés segítségével

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int (div' \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}}}{r} - \overrightarrow{\boldsymbol{P}} grad' \frac{1}{r}) dV'$$

kapható.

Az első tagban áttérhetünk a térfogati integrálról egy $R \to \infty$ sugarú gömbre vett felületi integrálra (Gauss-tétel), ez az integrál zérust ad eredményül, hacsak $\overrightarrow{\boldsymbol{P}}$ legalább $\frac{1}{r}$ rendben nullához tart nagy r-ekre (amit feltételezünk). A második tagban felhasználjuk a $grad' \frac{1}{r} = -grad \frac{1}{r}$ átalakítást, majd a

$$div \left. \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}}}{r} \right|_{t'=konst.} = \frac{1}{r} div \left. \overrightarrow{\boldsymbol{P}} \right|_{t'=konst.} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}} grad \left. \frac{1}{r} \right|_{t'=konst.}$$

összefüggésből (tehát $t' = konstans$ mellett) kapjuk:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int div\ \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}}}{r}\bigg|_{t'=konst.} dV' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r} div\ \overrightarrow{\boldsymbol{P}}\Big|_{t'=konst.} dV'.$$

Ám $div\ \overrightarrow{\boldsymbol{P}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}', t')\Big|_{t'=konst.} = 0$, mert a div operátor $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ szerinti parciális deriválást jelent, $\overrightarrow{\boldsymbol{P}}$ pedig $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'$-től függ. A div viszont az integrálással felcserélhető:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} div \int \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}}}{r} dV' = -\frac{1}{\varepsilon_0} div \overrightarrow{\boldsymbol{Z}}.$$

($\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}$-t szokták Hertz-vektornak nevezni, ám ez más mennyiség, mint az előző fejezetben bevezetett Hertz-vektor). $\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}$ formájából látható, hogy kielégíti a

$$\triangle \overrightarrow{\boldsymbol{Z}} - \frac{1}{c^2}\ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}} = -\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{P}}}\mu_0$$

d'Alembert-egyenletet.

Helyezzünk egy időtől függő pontszerű dipólt az origóba. Ennek a dipólsűrűségét a

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}', t') = \overrightarrow{\boldsymbol{p}}(t')\delta(\overrightarrow{r}')$$

függvény írja le. Számoljuk ki ezzel a $\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}$ vektort:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}(t')\delta(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}')}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'\right|} dV' = \frac{1}{4\pi} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}(t - \frac{r}{c})}{r}.$$

Ebből ϕ-t és $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$-t kiszámolhatjuk, s azok ismeretében - az $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -grad\phi - \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}$, illetve a $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = rot\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ összefüggéssel - a térmennyiségek meghatározhatók. A részletszámolásoknál ügyelni kell arra, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ a retardált időn keresztül <u>közvetve</u> függ a helykoordinátáktól. Így

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \mu_0 \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{Z}}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'(t - \frac{r}{c})}{r},$$

ahol a vessző a fázis szerinti deriválást jelenti.

$$\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} div \overrightarrow{\boldsymbol{Z}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} div \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}}{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r} div \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}} grad \frac{1}{r}) =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}\frac{1}{c}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r}\overrightarrow{\boldsymbol{p}}' + \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{p}}}{r^3}).$$

Ehhez hasonló elemi, de hosszadalmas számítás után adódik:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}})\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^5} - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}}{r^3} + \frac{1}{c}(\frac{3(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'\overrightarrow{\boldsymbol{r}})\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^4} - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'}{r^2}) + \frac{1}{c^2}(\frac{3(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}''\overrightarrow{\boldsymbol{r}})\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^3} - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}''}{r})\right],$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'' \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{cr^2} - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}' \times \vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}\right],$$

ahol $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ vektor és deriváltjai a $t' = t - \frac{r}{c}$ retardált időben veendők. Az elektromos térerősség három tagra bontható. Az első az

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}_s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}})\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^5} - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}}{r^3}\right],$$

melyet <u>sztatikus zónának</u> nevezzük. Látható, hogy ez nagy $r - ekre$ $\frac{1}{r^3} - nel$ arányos (ha $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ korlátos függvény). Ez a tag akkor is különbözik nullától, ha $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ időben állandó. Szemmel láthatóan egy sztatikus dipól potenciálját írtuk fel. A második tag

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}_k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{3(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}})\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^4} - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'}{r^2}\right]$$

alakú. Nagy r-rek esetén $\frac{1}{r^2}$-tel arányos. Mivel a harmadik tag $\frac{1}{r}$ nagyságrendben tart nullához, a dipólhoz közel az $\frac{1}{r^2}$-es tag lesz a domináns: ezért <u>közeli zónának</u> is nevezzük. A $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ dipól első deriváltját tartalmazza, ezért sztatikus esetben értéke nulla. Végül a harmadik tag

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_h = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{3(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}''\overrightarrow{\boldsymbol{r}})\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^3} - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}''}{r}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'' \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}) \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^3}.$$

A dipóltól nagy távolságra ez a tag különbözik lényegében nullától. Neve: <u>hullámzóna</u>. Jellemzője még, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$"-vel arányos. A $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ mágneses teret szemügyre véve két taggal találkozunk. Itt is látható a

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}}_k = \frac{1}{4\pi}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}' \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^3}$$

közeli zóna, és a

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}}_h = \frac{1}{4\pi c}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'' \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

hullámzóna.

Ezek nagyságrendben úgy viselkednek, mint az elektromos tér megfelelő komponensei. Hasonló a $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'$, illetve $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$"-vel való kapcsolatuk is. Pontszerű dipólnál a teret „kényelmesen” a dipóltól nagy távolságra tudjuk tanulmányozni. Ezért további vizsgálatainkat korlátozzuk a hullámzónára. Ha bevezetjük az $\overrightarrow{\boldsymbol{r}^{o}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r}$ egységvektort a jelöléseinkbe kapjuk:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}_{h}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'' \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}^{0}) \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}^{0}}{r} = \frac{1}{r}\overrightarrow{\boldsymbol{e}}(t - \frac{r}{c}),$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}_{h}} = \frac{1}{4\pi c} \frac{(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'' \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}^{0})}{r} = \frac{1}{r}\overrightarrow{\boldsymbol{h}}(t - \frac{r}{c}).$$

A hullámzóna tehát a dipóltól kifelé, c sebességgel terjedő gömbhullámmal írható le. A $\overrightarrow{\boldsymbol{H}_{h}}$-t jobbról vektoriálisan $\overrightarrow{\boldsymbol{r}^{0}}$-lal szorozva kapjuk:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}_{h}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^{0}} = \frac{1}{4\pi c} \frac{(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'' \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}^{0}) \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}^{0}}{r} = c\varepsilon_0 \overrightarrow{\boldsymbol{E}_{h}} = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\ \overrightarrow{\boldsymbol{E}_{h}},$$

vagyis

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}_h} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\ \overrightarrow{\boldsymbol{H}_h} \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}.$$

Látható továbbá, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{H}_h}\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} = 0$. Összefoglalva: $\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}, \overrightarrow{\boldsymbol{E}_h}, \overrightarrow{\boldsymbol{H}_h}$ ortogonális, jobbsodrású rendszert alkot.

Írjuk fel a Poynting-vektort:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{S}} = \overrightarrow{\boldsymbol{E}_h} \times \overrightarrow{\boldsymbol{H}_h} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}(\overrightarrow{\boldsymbol{H}_h} \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}) \times \overrightarrow{\boldsymbol{H}_h} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}'(\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{H}}_h{}^2 - \overrightarrow{\boldsymbol{H}_h}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}\overrightarrow{\boldsymbol{H}_h})) =$$

$$= \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\ \overrightarrow{\boldsymbol{H}}_h{}^2 \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0},$$

mivel $\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}\overrightarrow{\boldsymbol{H}_h} = 0$. Ha még $\overrightarrow{\boldsymbol{H}_h}$-nak $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$”-vel vett kifejezését is behelyettesítjük:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{S}} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\left[\frac{1}{4\pi c}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'' \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}}^0}{r}\right]^2 \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\frac{1}{(4\pi)^2}\varepsilon_0\mu_0\frac{1}{r^2}\overrightarrow{\boldsymbol{p}}''^2 \sin^2\theta \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0},$$

ahol θ a $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$" és $\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}$ vektorok által bezárt szög. A kisugárzott energia a $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$" vektor irányában nulla, rá merőlegesen maximális. Kiszámolhatjuk a sugárzási teljesítményt. Emiatt integráljuk az $\overrightarrow{\boldsymbol{S}}$ Poynting-vektort egy r sugarú gömb felületére:

$$W = \oint \overrightarrow{\boldsymbol{s}}\, d\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}(\sqrt{\mu_0})^3}{(4\pi)^2}\int \frac{1}{r^2}\overrightarrow{\boldsymbol{p}}''(t - \frac{r}{c}) \sin^2\theta \overrightarrow{\boldsymbol{r}^0}\overrightarrow{\boldsymbol{r}^0} r^2 d\Omega =$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_0}(\sqrt{\mu_0})^3}{(4\pi)^2} 4\pi \overrightarrow{\boldsymbol{p}}''^2(t - \frac{r}{c}) \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_0}(\sqrt{\mu_0})^3}{(4\pi)^2} \overrightarrow{\boldsymbol{p}}''^2 2\pi \frac{4}{3}.$$

Eddig nem rögzítettük $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}(t)$ formáját. Legyen

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}}(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0} e^{i\omega t},$$

ahol $\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0}$ rögzített vektor. Ebből $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'' = -\omega^2 \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0} e^{i\omega t}$. Az energia számításához vegyük $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}''$ valós részét:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}}'' = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0} \omega^2 \cos(\omega t + \pi),$$

vagyis a sugárzási teljesítmény

$$W(t) = \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}(\sqrt{\mu_0})^3}{3} \omega^4 p_0^2 \cos^2 \left[\omega(t - \frac{r}{c}) + \pi \right].$$

Ez az idő periódikus függvénye. Ha a frekvencia nagy, $W(t)$ igen gyorsan változik, ez esetben célszerű idő szerinti átlagát képezni. Ám a $\cos^2(\omega t - \frac{\omega r}{c} + \pi)$ függvény időátlaga:

$$\left\langle \cos^2(\omega t - \frac{\omega r}{c} + \pi) \right\rangle = \frac{1}{2},$$

így

$$\langle W \rangle = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}(\sqrt{\mu_0})^3}{3} \omega^4 p_0^2.$$

Modellezzük a rezgő dipólt egy l hosszúságú botantennával, melyben cosinusos áram folyik. Az antennában folyó áram a dipólt alkotó töltések időbeli változásával egyenlő. $I = dq/dt$, ezt az antenna hosszával szorozva:

$$Il = l\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}lq = \frac{dp}{dt}.$$

Ha $p(t) = p_0 \sin \omega t$, úgy

$$\frac{dp}{dt} = p_0 \omega cos \omega t = I_0 l \cos \omega t,$$

azaz

$$p_0 = I_0 \frac{l}{\omega},$$

melyet a sugárzási teljesítmény formulájába helyettesítve:

$$\langle W \rangle = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}(\sqrt{\mu_0})^3}{3} \omega^4 \frac{I_0^2 l^2}{\omega^2} = \frac{(4\pi)^2 \sqrt{\varepsilon_0}(\sqrt{\mu_0})^3 c^2}{3} I_0^2 (\frac{l}{\lambda})^2 =$$

$$= \frac{16\pi^2}{3c\varepsilon_0} I_0^2 (\frac{l}{\lambda})^2.$$

A botantenna által kisugárzott teljesítmény az l/λ hányadostól függ: minél nagyobb az antenna hossza a hullámhosszhoz képest, annál több teljesítményt sugároz ki. A botantennában fejlődő Joule-hő:

$$\langle W_J \rangle = \frac{1}{2} R I_0^2.$$

A botantenna által felvett összes teljesítmény

$$W_T = \langle W \rangle + \langle W_J \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{32\pi^2}{3c\varepsilon_0}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2 + R I_0^2\right) = \frac{1}{2}(R_\lambda + R) I_0^2,$$

ahol

$$R_\lambda = \frac{32\pi^2}{3c\varepsilon_0}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Ezt a mennyiséget a rádiótechnikában <u>sugárzási ellenállásnak</u> nevezzük.

Homogén izotróp vezetőben terjedő elektromágneses hullámok

Az a kérdés, terjedhetnek-e elektromágneses hullámok vezető közegben. Az egyszerűbb tárgyalhatóság végett tegyük fel, hogy a közeg homogén. A Maxwell-egyenletekben a közeg vezető voltát úgy vesszük figyelembe, hogy a $\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \sigma \overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ egyenletet behelyettesítjük az 1.ME-be. Felhasználjuk továbbá azt, hogy fémekben a szabad töltéssűrűség igen gyorsan nullához tart az idő múltával; indokolt tehát a $\rho = 0$ feltevés. Így az egyenleteink

$$1.\ rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \varepsilon_0\varepsilon_r \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}} + \sigma\overrightarrow{\boldsymbol{E}},$$

$$2.\ div(\varepsilon_0\varepsilon_r\overrightarrow{\boldsymbol{E}}) = 0,$$

$$3.\ rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\mu\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{H}}},$$

$$4.\ div(\mu\overrightarrow{\boldsymbol{H}}) = 0.$$

Most eltérünk a homogén izotróp szigetelőkben alkalmazott levezetéstől. Képezzük az 1. egyenlet mindkét oldalának rotációját:

$$rot\, rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \varepsilon(rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{E}})^{\bullet} + \sigma(rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{E}}).$$

Vegyük figyelembe, hogy a 4. egyenlet szerint $div\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = 0$, másfelől, hogy $rot\,\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\mu\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{H}}}$:

$$rot\, rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = grad\, div\overrightarrow{\boldsymbol{H}} - \triangle\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = -\triangle\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = -\varepsilon\mu\ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{H}}} - \sigma\mu\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{H}}},$$

azaz

$$\triangle\overrightarrow{\boldsymbol{H}} - \varepsilon\mu\ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{H}}} - \sigma\mu\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{H}}} = 0.$$

3. egyenletből

$$rot\, rot\, \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\mu (rot \overrightarrow{\boldsymbol{H}})^{\bullet},$$

$$grad\, div \overrightarrow{\boldsymbol{E}} - \triangle \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\mu\varepsilon \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}} - \mu\sigma \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}},$$

$(div \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = 0)$

$$\triangle \overrightarrow{\boldsymbol{E}} - \varepsilon\mu \ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}} - \sigma\mu \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}} = 0.$$

$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$-re és $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$-ra hasonló szerkezetű egyenleteket kaptunk, amely a hullámegyenlettől csak az első deriváltat tartalmazó tagban különbözik. Ez a telegráf egyenlet. Látható, hogy szigetelő esetén $\sigma = 0$, visszakapjuk a homogén hullámegyenletet.

Kaptunk két db azonos szerkezetű vektor egyenletet. Jelölje a komponensek valamelyikét a $\chi(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t)$ függvény, erre teljesül, hogy

$$\triangle\chi - \varepsilon\mu\ddot{\chi} - \sigma\mu\dot{\chi} = 0.$$

Keressük a megoldást a hely és időkoordináták szerint <u>szeparált</u> formában, $\chi(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) = \chi_0(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})\tau(t)$. Behelyettesítve és az egyenletet χ-vel osztva

$$\frac{1}{\chi_0}\triangle\chi_0 - \frac{1}{\tau}(\varepsilon\mu\frac{d^2\tau}{dt^2} + \sigma\mu\frac{d\tau}{dt}) = 0.$$

Az egyenlet két, a változókban additíve szeparált tagra bomlott, melyek ennél fogva külön-külön konstansok kell, hogy legyenek:

$$\frac{1}{\chi_0}\triangle\chi_0 = -\kappa^2, \qquad \frac{1}{\tau}(\varepsilon\mu\frac{d^2\tau}{dt^2} + \sigma\mu\frac{d\tau}{dt}) = -\kappa^2.$$

Az időtől függő τ függvényre kapott egyenlet partikuláris megoldását keressük $\tau = \exp(-i\omega t)$ alakban. Behelyettesítve:

$$\kappa^2 = \varepsilon\mu\omega^2 + i\sigma\mu\omega$$

adódik eredményül. Számolásaink egyszerűbbé tétele végett célszerű bevezetni az

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$$

mennyiséget, melyet komplex dielektromos állandónak nevezünk. Ezzel ugyanis:

$$\kappa^2 = \omega^2\underline{\varepsilon}\mu, \; azaz \;\; \kappa = \omega\sqrt{\underline{\varepsilon}\mu}$$

írható. Másrészt a χ_0 helytől függő függvényre a

$$\triangle\chi_0 + \kappa^2\chi_0 = 0$$

egyenlet áll fenn. Ez az egyenlet a már korábban megismert amplitúdó egyenlet, csak itt κ komplex. Ezért a fizikai tartalom más. Határozzuk meg κ értékét, ha ismertek az anyagi állandók és az ω körfrekvencia. Ha κ-t a $\kappa = k + i\lambda$ alakban keressük,

$$\kappa^2 = k^2 - \lambda^2 + 2ik\lambda = \varepsilon\mu\omega^2 + i\sigma\mu\omega$$

egyenletet kapjuk, melynek valós és képzetes részét összevetve:

$$k^2 - \lambda^2 = \varepsilon\mu\omega^2,$$

$$2k\lambda = \sigma\mu\omega,$$

egyenletrendszer adódik k-ra és $\lambda - ra$. A második egyenlettel $\lambda - t$ eliminálva:

$$k^4 - \varepsilon\mu\omega^2 k^2 - (\frac{\sigma\mu\omega}{2})^2 = 0,$$

másodfokúra redukálható negyedfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldása:

$$k^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon\mu\omega^2 \pm (\sqrt{(\varepsilon\mu\omega^2 + (\sigma\mu\omega)^2}).$$

Mivel k már valós kell legyen, a megoldásban a $+$ előjelet kell figyelembe venni. Így

$$k = \pm \left\{ \frac{1}{2}\varepsilon\mu\omega^2(1 + \sqrt{1 + (\sigma/\varepsilon\mu)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

A κ mennyiség képzetes része:

$$\lambda = \pm \left\{ \frac{1}{2}\varepsilon\mu\omega^2(\sqrt{1 + (\sigma/\varepsilon\mu)^2} - 1) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

alakú. Vegyük észre, hogy $\sigma = 0$ esetben (szigetelőben) $\lambda = 0$ és $\kappa = \pm\sqrt{\varepsilon\mu}\omega = \pm\omega/v = \pm k$, ami a hullámszám.

Az amplitúdó-egyenlet megoldása, ha $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ valamely rögzített egységvektor:

$$\chi_0(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = c_0 e^{\pm i\kappa \overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}},$$

ahol c_0 integrációs konstans. A térmennyiségek derékszögű komponensei tehát

$$\chi(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) = c_0 e^{\pm i\kappa \overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}} e^{-i\omega t}$$

alakúak. Az eredmény fizikailag könnyebben értelmezhető, ha beírjuk κ konkrét formáját:

$$\chi(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}, t) = c_0 e^{\pm i(k+i\lambda)\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}} e^{-i\omega t} = c_0 e^{\pm\lambda \overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}} e^{-i(\omega t \pm k \overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}})}.$$

Az $e^{-i(\omega t \pm k \overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}})}$ mennyiség egy $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ irányba (vagy $-\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ irányba) terjedő, k hullámszámú síkhullámot ír le. Az $e^{\pm\lambda \overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}$ tag azt jelzi, hogy a síkhullám amplitúdója exponenciálisan csökken vagy nő.

A növekvő amplitúdó fizikailag nem indokolható, ezért λ megoldásai közül azt választjuk, mellyel az amplitúdó csökken.

Fémekben (vezetőben) tehát exponeniálisan csökkenő amplitúdójú síkhullám a vezetőben gyorsan elnyelődik. Mivel az $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ szorzat a vezetőben megtett távolság, a vezetőbe való behatolás mélységét az $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\lambda = 1$ egyenletből kifejezve: $d = \frac{1}{\lambda}$ (λ neve: extinkciós együttható). Eredményeinket a telegráf-egyenlet megoldásaként kaptuk. A vektorkomponensek azonban nem függetlenek egymástól. Csatolódásukat a Maxwell-egyenletekből lehet leolvasni. Ha az időtől való függést a már felírt $\exp(-i\omega t)$ alakban figyelembe vesszük, azaz

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{H}_0}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}$$

függvényeket helyettesítsük be, a Maxwell-egyenletek az alábbi alakúak lesznek:

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0} = (-i\omega\varepsilon + \sigma)\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} = -i\omega\underline{\varepsilon}\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0},$$

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} = +i\omega\mu\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0},$$

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} = 0,$$

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0} = 0.$$

Vegyük továbbá tekintetbe az amplitúdóra kapott

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0} = \overrightarrow{\boldsymbol{h}_0}e^{\pm i\kappa\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}, \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} = \overrightarrow{\boldsymbol{e}_0}e^{\pm i\kappa\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{r}}},$$

formákat. Ezekkel

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} = \pm i\kappa\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} = 0,$$

és

$$div\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0} = \pm i\kappa\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0} = 0$$

adódik.

Ez azt jelenti, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ merőleges az $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ terjedési irányra.

Másfelől

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0} = \pm i\kappa(\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{H}_0}) = -i\omega\underline{\varepsilon}\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0},$$

és

$$rot\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} = \pm i\kappa(\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0}) = i\omega\mu\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0}.$$

Ezekből az egyenletekből:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} = \pm\frac{\kappa}{\omega\underline{\varepsilon}}\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0} \times \overrightarrow{\boldsymbol{n}} = \pm\sqrt{\mu/\underline{\varepsilon}}\ \overrightarrow{\boldsymbol{H}_0} \times \overrightarrow{\boldsymbol{n}},$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0} = \pm\frac{\kappa}{\omega\mu}\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} = \pm\sqrt{\underline{\varepsilon}/\mu}\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0}.$$

Most is igaz tehát, hogy az $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0}$ vektorok jobbsodrású ortogonális rendszert alkotnak. Az amplitúdó vektorok közötti kapcsolatot azonban (minthogy $\underline{\epsilon}$ komplex) komplex szám létesíti, ami azt jelenti, hogy $\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0}$ és $\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0}$ között fáziseltolódás lép fel. Ennek számolásához célszerű fenti egyenletünkből a $\kappa/\omega\mu$-t részletezni:

$$\frac{\kappa}{\omega\mu} = \frac{k + i\lambda}{\omega\mu} = \frac{1}{\omega\mu}\sqrt{k^2 + \lambda^2}e^{i\gamma},$$

ahol $\tan\gamma = \lambda/k$, s így a fáziseltolódás az anyagi állandók ismeretében kiszámolható. Az energia tanulmányozásához a komplex megoldás valós részét vesszük:

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon Re(\overrightarrow{\boldsymbol{E}})^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\left\{\frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overrightarrow{\boldsymbol{E}}^*)\right\}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{4}\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}^2 + 2\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\overrightarrow{\boldsymbol{E}}^* + \overrightarrow{\boldsymbol{E}}^{*2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{4}\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0}^2 e^{-2i\omega t} + 2 \mid \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} \mid^2 + \overrightarrow{\boldsymbol{E}}^{*2} e^{2i\omega t}\right\}.$$

Az energiasűrűség 2ω körfrekvenciával oszcillál. Időátlagát véve, minthogy az $e^{\pm 2i\omega t}$ tagok időátlaga zérus:

$$\langle u_e \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{2} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} \mid^2 .$$

Ugyanígy kiszámolható a mágneses térhez tartozó energiasűrűség:

$$\langle u_m \rangle = \frac{1}{2}\mu\frac{1}{2} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{H}_0} \mid^2 .$$

Ebbe behelyettesítjük $\overrightarrow{\boldsymbol{H}_0}$-nak $\overrightarrow{\boldsymbol{E}_0}$-lal való kapcsolatát:

$$\langle u_m \rangle = \frac{1}{2}\mu\frac{1}{2} \mid \frac{\kappa}{\omega\mu}\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} \mid^2 = \frac{1}{2}\mu\frac{1}{2}\frac{\mid \kappa \mid^2}{\omega^2\mu^2} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} \mid^2,$$

vagyis $\mid \kappa \mid^2 = \omega^2\mu \mid \underline{\varepsilon} \mid$, *illetve* $\frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{2} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{E}_0} \mid^2 = \langle u_e \rangle$ helyettesítéssel

$$\langle u_m \rangle = \frac{\mid \underline{\varepsilon} \mid}{\varepsilon} \langle u_e \rangle \, ,$$

vagy, mivel $\mid \underline{\varepsilon} \mid / \varepsilon = \sqrt{1 + (\sigma/\omega\varepsilon)^2}$,

$$\langle u_m \rangle = \sqrt{1 + (\sigma/\omega\varepsilon)^2} \, \langle u_e \rangle \, .$$

Az energiasűrűség tehát különbözik az elektromos és mágneses komponensekre számolva (a mágneses tér átlagos energiasűrűsége nagyobb).

Eredményünkből az alábbi következtetés adódik: Vezetőkben csak exponenciálisan csillapodó síkhullám terjedhet, szigetelőkben csillapítatlan. Mivel a fény nem más, mint elektromágneses hullám, minden vezető átlátszatlan, minden szigetelő átlátszó. Ezzel szemben az ebonit (ami jó szigetelő) látható fényben átlátszatlan, a jól vezető sóoldat pedig átlátszó. Az ellentmondás feloldható, ha feltesszük, hogy a σ vezetőképesség függ a ν frekvenciától. Emiatt a stacionárius, vagy alacsony frekvenciájú kvázistacionárius áramoknál „szigetelőként" viselkedő anyagok, a látható fény $\nu \sim 10^{15}$Hz-es frekvenciáján vezető tulajdonságúak. A $\sigma(\nu)$ függvény vizsgálatával azonban itt nem foglalkozunk.