ELEKTRODINAMIKA

(11v. Előadás)

Áramkör önindukcióval és kapacitással (RLC-kör)

Vegyünk egy vezető kört, amelyben R ohmikus ellenállás, L önindukciós együtthatójú tekercs és C kapacitású kondenzátor van. A körbe bekapcsolt áramforrás elektromotoros ereje legyen $\mathcal{E}$. Az áramkörben egyenáram nem alakul ki, mert a kondenzátor nem engedi át. Az időben változó elektromotoros erő azonban az ilyen körben is áramot létesít.

Tekintsük az RLC-kör alapegyenletét, amelyből meghatározható az áramerősség, mint az idő függvénye adott R, L, C és $\mathcal{E}$ értékek esetén:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{\mathcal{E}}. \qquad (1)$$

Legyen

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 coswt, \qquad (2)$$

ekkor az (1) differenciálegyenlet a következő alakot veszi fel:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = -\omega\mathcal{E}_0 sin\omega t. \quad (3)$$

Hasonlóan az RL-kör esetéhez, célszerű a megoldáshoz az alábbi komplex egyenletből kiindulni:

$$L\frac{d^2y}{dt^2} + R\frac{dy}{dt} + \frac{1}{C}y = i\omega\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \qquad (4)$$

Belátható ebben az esetben is, hogy az előbbi egyenlet megoldásának valós része megoldása a (3) egyenletnek is. Vagyis:

$$I(t) = \mathrm{Re}\left[y(t)\right]. \qquad (5)$$

A megoldandó (4) egyenlet a mechanikából ismert kényszerrezgések differenciálegyenletéhez teljesen hasonló szerkezetű. Általános megoldását a (4) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása és a megfelelő homogén egyenlet általános megoldásának összege adja.

Tekintsük először a partikuláris megoldást. A kényszerrezgések analógiája alapján keressük a megoldást a következő alakban:

$$y_p = Ae^{i\omega t}. \qquad (6)$$

$y_p - t$ a (4) egyenletbe helyettesítve, A-ra a következő egyenletet kapjuk:

$$A\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right) = i\omega\mathcal{E}_0. \qquad (7)$$

Ebből adódik:

$$A = \frac{\mathcal{E}_0}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\mathcal{E}_0}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\left[R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left(\cos\delta - i\sin\delta\right) = \frac{\mathcal{E}_0 e^{-i\delta}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \qquad (8)$$

ahol

$$\cos\delta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \sin\delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

vagyis

$$\delta = \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (9)$$

A (4) differenciálegyenlet partikuláris megoldása tehát:

$$y_p = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{i(\omega t - \delta)}. \qquad (10)$$

A megfelelő homogén differenciálegyenlet:

$$L\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}y = 0. \qquad (11)$$

Ez állandó együtthatós, homogén, másodrendű, lineáris, közönséges differenciálegyenlet. Általános megoldása:

$$y_h = c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t}, \qquad (12)$$

ahol

$$\gamma_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}}, \qquad (13)$$

c_1 és c_2 integrációs állandók. A (11) differenciálegyenlet a csillapított rezgőmozgás differenciálegyenletéhez teljesen hasonló szerkezetű. A megoldás időbeli viselkedését a (13)-ban szereplő négyzetgyökös kifejezés szabja meg. Asszerint, hogy

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL} \gtreqless 0,$$

háromféle megoldás létezik. Két esetben időben exponenciálisan lecsengő aperiodikus megoldást, a harmadik esetben pedig exponenciálisan csökkenő amplitúdójú, ún. csillapított rezgést kapunk. A homogén egyenlet általános megoldása tehát hosszabb idő elteltével eltűnik. Ezért a problémák stacionárius megoldását a (10) partikuláris megoldás valós része adja:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \delta) = \frac{\mathcal{E}\left(t - \frac{\delta}{\omega}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (14)$$

A periodikusan változó elektromotoros erő hatására az RLC körben is időben periodikus áramerősség keletkezik. Az áramerősség I_0 amplitúdója:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \qquad (15)$$

frekvenciája megegyezik az elektromotoros erő frekvenciájával.

Ha a δ fáziskülönbség > 0, vagyis $\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$, akkor az áramerősség fázisa késik, ha $\delta < 0$, vagyis $\omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, akkor siet az $\mathcal{E}$ elektromotoros erőhöz képest. RL kör esetén az áramerősség határozottan késik $\mathcal{E}$- hez képest. Ha $L = 0$, ott $\delta < 0$, és ezért az áramerősség megelőzi az elektromotoros erőt. Az RLC körben az áramerősség és az elektromotoros erő fázisa közötti különbség az önindukció okozta késésből és a kapacitásból származó sietésből tevődik össze. Ennek mértékét — mint láttuk — az ωL és $\frac{1}{wC}$ viszonya szabja meg.

Az $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ esetben $\delta = 0$, tehát nincs fáziskülönbség $I(t)$ és $\mathcal{E}(t)$ között. Ekkor a

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

impedancia az R ohmikus ellenállással egyezik meg, és az áramerősség I_0 amplitúdója az $\mathcal{E}_0/R$ maximális értéket veszi fel. Ez az eset akkor következik be, ha az áramforrás elektromotoros erejének a frekvenciája megegyezik az áramkör $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ún. sajátfrekvenciájával:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \qquad (16)$$

RLC körök komplex írásmódban

Ekkor

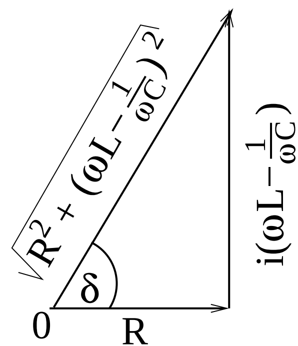
$$R \rightarrow R,$$

$$\omega L \rightarrow i\omega L,$$

$$-\frac{1}{\omega C} \rightarrow -i\frac{1}{\omega C},$$

mennyiségeket használjuk. Ekkor az impedanciát az $R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ komplex szám abszolút értéke adja, argumentuma pedig a δ fáziskülönbség:

$$R+i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{i\delta}. \qquad (17)$$



A $Z = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ jelöléssel az $\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ komplex elektromotoros erő és komplex áramerősség (y) között az

$$y = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{Z} \qquad (18)$$

összefüggés áll fenn. Ez a komplex mennyiségekre felírt Ohm-törvény. A komplex elektromotoros erő, áramerősség és ellenállás bevezetése megkönnyíti az időben periódikusan változó áramkörök tárgyalását, de fizikai jelentése csak a megfelelő valós részeknek van.

Foglalkozzunk az áramkörbe betáplált teljesítménnyel. Ehhez szorozzuk meg az alapegyenlet

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I(t')dt' = \mathcal{E}$$

mindkét oldalát az I áramersséggel:

$$\mathcal{E}I = L\dot{I}I + \frac{1}{C}e\dot{e} + RI^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2 + \frac{e^2}{2C}\right) + RI^2. \qquad (19)$$

A jobb oldalon álló $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{e^2}{C})$ tag az áram mágneses és a kondenzátor elektromos térenergiájának időegységre eső növekedését jelenti. Az $\mathcal{E}I$ teljesítmény a térenergia növekedését és az ellenállásban időegység alatt keletkezett Joule-hőt fedezi.

Ha az $\mathcal{E}$ elektromotoros erőt egy t pillanatban kikapcsoljuk, akkor az I áramerősség idővel exponenciálisan esik le zérusra. Ekkor (9)-ből kapjuk:

$$RI^2 = -\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{e^2}{C}). \qquad (20)$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy az áramforrás kikapcsolása után a Joule-hő a térenergiát fogyasztja el.

Periodikus elektromotoros erő esetén a teljesítmény középértéke:

$$\overline{\mathcal{E}I} = \overline{RI^2}. \qquad (21)$$

A vezetőkörbe betáplált $\overline{\mathcal{E}I}$ közepes teljesítmény az ellenálláson keletkezett hőt fedezi. Az önindukció és kapacitás középértékben nem fogyaszt energiát. Velük a feszültséget teljesítménymentesen lehet szabályozni.

A teljesítmény középértéke az RL körhöz hasonlóan:

$$\overline{\mathcal{E}I} = \mathcal{E}_{eff} I_{eff} \cos\delta, \qquad (22)$$

ahol

$$\mathcal{E}_{eff} = \sqrt{\overline{\mathcal{E}^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}, \qquad I_{eff} = \sqrt{\overline{I^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

az elektromotoros erő, illetve az áramerősség effektív értéke.