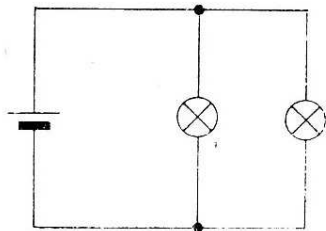


ELEKTRODINAMIKA

Egyenáramú hálózatok 2.

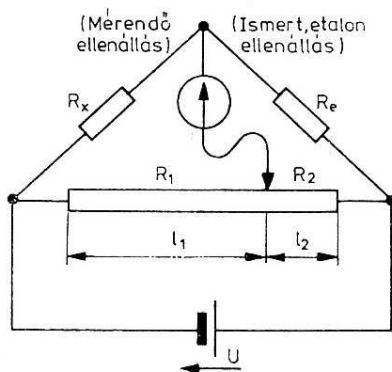
Az összetett villamos hálózat

Az összetett villamos hálózat legfontosabb jellemzője, hogy elágazások is vannak az áramkörben. Pl. egyetlen telepre két izzólámpát kapcsolunk (2-11.ábra), vagy a Wheatstone-híd (2-12.ábra). Ez utóbbit ellenállásmérésre lehet felhasználni.



2-11. ábra

Két fogyasztó párhuzamos kapcsolása esetén elágazás van az áramkörben



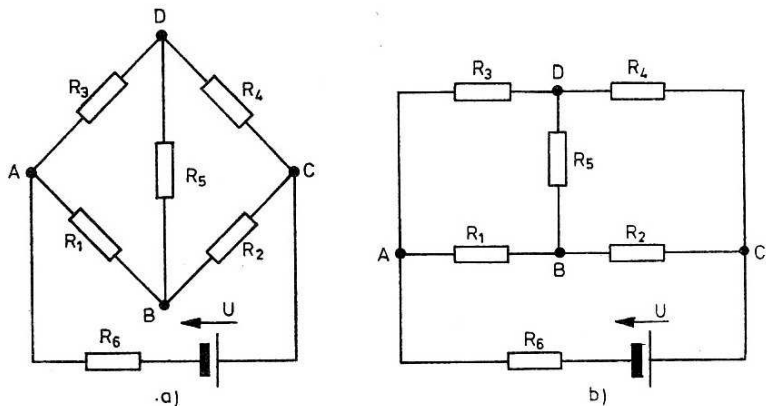
2-12. ábra

Az ellenállásmérésre használatos Wheatstone-híd kapcsolásában több elágazás is található

A mérés menete: A mérés során az alsó ellenállás csúszkáját úgy állítjuk be, hogy az árammérő árammentes állapotot jelezzen az ún. hídágbán. Ekkor az ismeretlen ellenállás a beállított részellenállások arányából számítható:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_e.$$

A Wheatstone-híd kapcsolását — két különböző, szokásos formában (2-13. ábra) is megadhatjuk. A *kapcsolási vázlat elágazási pontjait*, amelyeket *csomópontoknak* nevezünk, latin nagybetűkkel jelöljük. Jelenleg négy csomópont van.



2-13. ábra

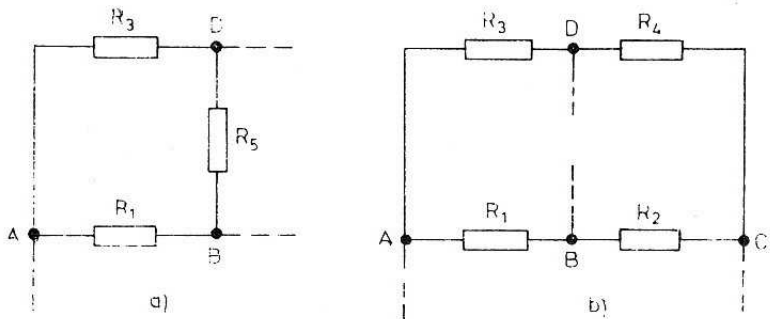
A Wheatstone-híd átrajzolt formában, a telep körének ellenállását is figyelembe véve

A két csomópontot közvetlenül összekötő hálózatrészt ágnak nevezzük. Minden ág egy közvetlen áramot biztosít a két szomszédos csomópont között. Hálózatunkban összesen hat ág található. Öt egy-egy konduktív elemmel azonos, a hatodik pedig a telep és egy konduktív elem soros kapcsolása.

ág: egy vagy több konduktív elem, és egy vagy több telep soros láncából áll;

hurok: a csomópontokon keresztül csatlakozó ágak zárt alakzata; önmagába záródó áramút;

A vizsgált hálózatunk két hurokja (2-14.ábra).



2-14. ábra

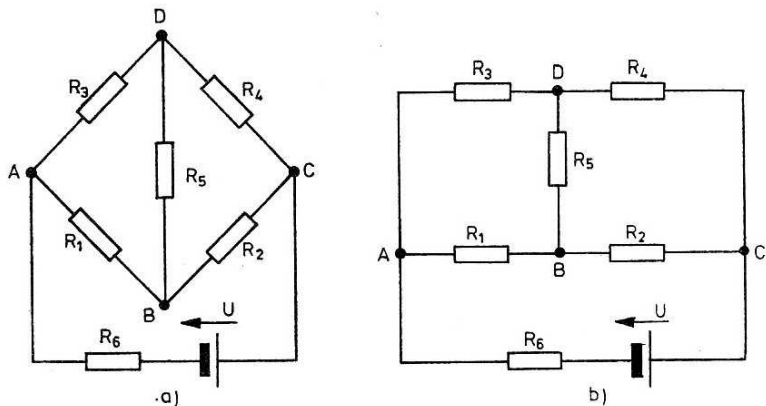
A hurok a hálózatnak önmagában záródó része

A hálózat egymás mellett elhelyezkedő, zárt alakzatait *elemi hurkoknak* nevezzük. Az elemi hurkon belül nincsenek más ágak. Elemi hurok (2-14a), nem elemi hurok (2-14b) ábrákon látható.

Összefoglalva: a Wheatstone-híd kapcsolásban hat ágat, négy csomópontot és három elemi hurkot találunk.

Összefüggés az elemi hurkok, csomópontok és az ágak száma között

Rajzoljuk meg a (2-13.ábra) *hálózati gráfját*. (Az ágakat vonalakkal ábrázoljuk, elhagyjuk a konduktív elemek és telepek részletes megrajzolását.)

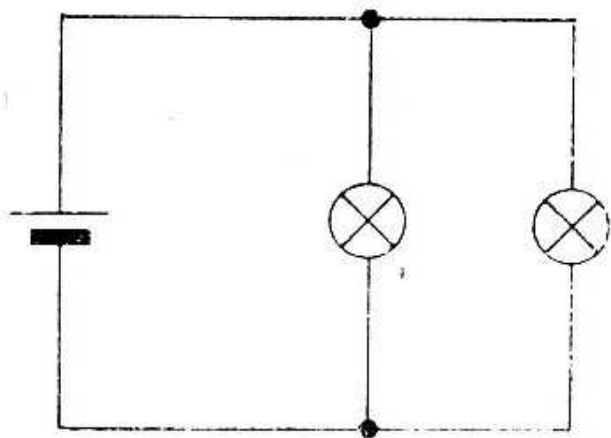


2-13. ábra

A Wheatstone-híd átrajzolt formában, a telep körének ellenállását is figyelembe véve

A gráfoknak alapvetően két típusát különböztetjük meg. Az egyik a *strukturális gráf*, amely valamely rendszer szerkezetét írja le (mint most a mi esetünkben), a másik pedig a *funkcionális vagy hatásgráf*, ami a rendszer működését jellemzi.

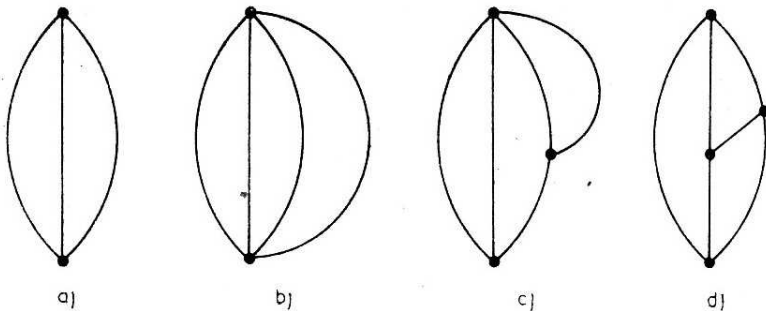
Rajzoljuk meg a (2-11.ábra) *hálózatának gráfját*, amit *eredeti gráfnak* fogunk nevezni. Ezt a gráfot egy újabb vonal berajzolásával három különbözőképpen bonyolíthatjuk:



2-11. ábra

Két fogyasztó párhuzamos
kapcsolása esetén elágazás van
az áramkörben

1. Egy újabb ágat kapcsolunk a meglévő két csomópont közé, amivel a hurkok száma is eggyel megnövekszik (2-16b ábra).
2. Az újabb vonalat az egyik csomópontból kiindulva rajzoljuk valamelyik ág egyik közbülső pontjához. Így az ágak számát kettővel, míg a csomópontok és elemi hurkok számát pedig egy-eggyel növeltük meg (2-16c ábra).
3. Egy újabb ágat iktatunk az eredeti gráf két ágának közbülső pontjai közé. Az eredeti ág kettéosztása miatt az ágak száma hárommal, a csomópontoké kettővel, a hurkoké pedig eggyel nő meg (2-16d ábra).



2-16. ábra

Ág hozzáadásának háromféle lehetősége a három ágból álló hálózat bővítésére

Általánosan igaz, hogy az ágak számának növekedése megegyezik az elemi hurok és csomópontok számának együttes növekedésével.

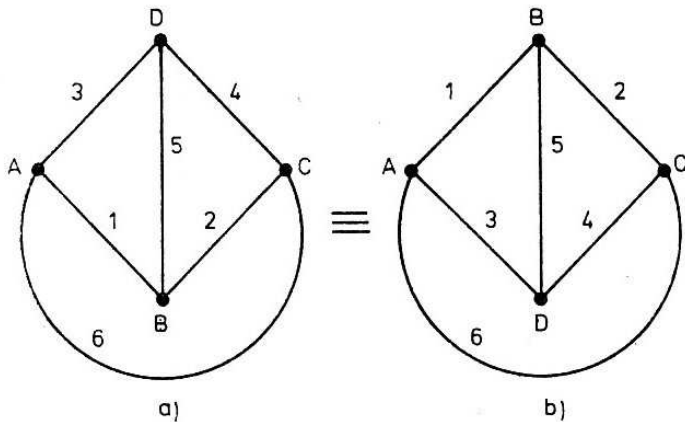
A legegyszerűbb összetett hálózatnak három ága, két elemi hurokja és két csomópontja van (2-11. és 2-16a ábrák). A hálózatban az ágak száma eggyel kevesebb, mint az elemi hurok és a csomópontok együttes száma. Ez a meg-

állapítás általános érvényű:

$$A = H + Cs - 1,$$

ahol A az ágak, H az elemi hurkok, Cs pedig a csomópontok száma.

A Wheatstone-híd struktúrájú hálózatban a hurok definíciója szerint hét különböző hurok jelölhető ki. Ezek közül négy háromszögű (háromágú), három pedig négyszögű (négyágú). A hét hurkot az őket alkotó csomópontok és ágak jeleivel adjuk meg a 2-15. ábrának megfelelően.



2-15. ábra

A hálózat szerkezetét szemléltető vonalas ábra a hálózat gráfja

Háromágú hurkok:

1. A B C; 1 2 6,
2. A B D; 1 5 3,
3. B C D; 2 4 5,
4. A D C; 3 4 6.

Négyágú hurkok:

5. A B C D; 1 2 4 3,
6. A B D C; 1 5 4 6,
7. A D B C; 3 5 2 6.

Kirchhoff törvényei

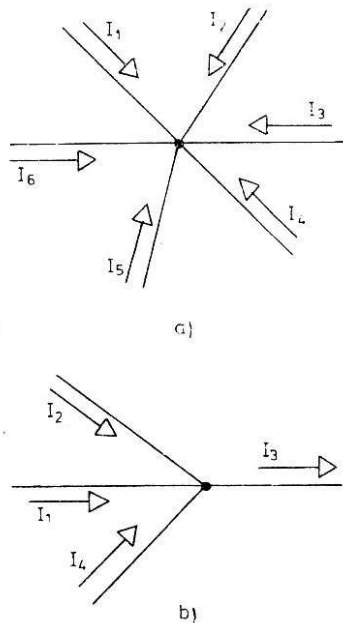
Általános érvényűek, alapját képezik valamennyi hálózat analízisének és szintézisének, legyen a hálózat lineáris vagy nonlineáris, stacionárius vagy időben változó. A villamos hálózatok axiómáinak is tekinthetők.

I. Kirchhoff (vagy csomóponti) törvény: A töltésmegmaradást konkretizálja csomópontra. A konvencionális áramirányokat figyelembe véve — a csomópontba befolyó áramok összege megegyezik a csomópontból elfolyó áramok összegével (2-18a ábra):

$$\sum I = 0.$$

2-18b ábrának megfelelően:

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0.$$



2-18. ábra

Egy összetett hálózatból eltávolított csomópont, a csomóponti törvény értelmezéséhez

II. Kirchhoff (vagy hurok) törvény: A hurok feszültségi egyensúlyát írja le. Zárt hurokban a feszültségesések összege mindig nulla:

$$\sum U = 0.$$

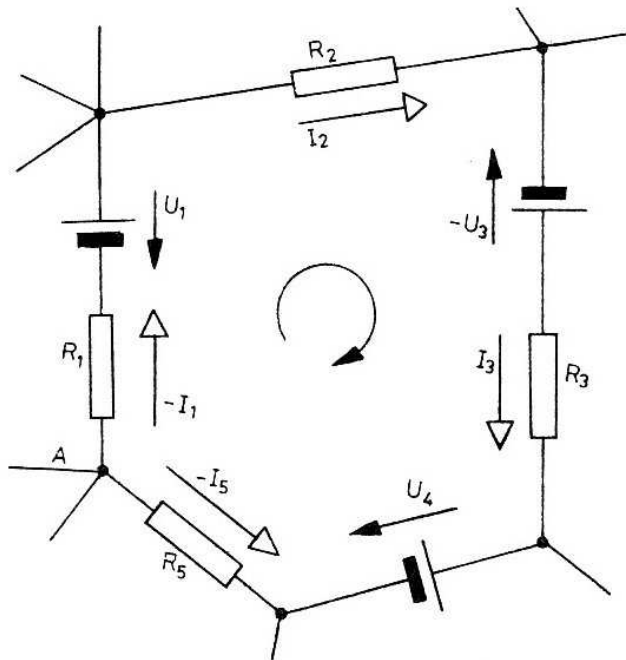
A feszültségek összegzését a hurokban előzetesen felvett (pozitív) körüljárási irány szerint kell elvégezni. Az összegzésben mind a telepek, mind pedig a fogyasztók feszültségei szerepelnek. A kétféle feszültség között semmiféle különbség nincs!

A hurokegyenlet a 2-19. ábra alapján (az A csomópontból indulunk):

$$(-I_1 R_1) - U_1 + I_2 R_2 - (-U_3) + I_3 R_3 + U_4 - (-I_5 R_5) = 0,$$

egyszerűsítve:

$$-R_1 I_1 - U_1 + R_2 I_2 + U_3 + R_3 I_3 + U_4 + R_5 I_5 = 0.$$



2-19. ábra
 Bonyolult hálózat egyik hurokjá, a huroktörvény
 értelmezéséhez

A vegyes módszer alkalmazása hálózatanalízisre és -szintézisre

Vegyes módszer: A hálózat karakterisztikus egyenletrendszerének egyenletei vegyesek. Egy részükben az áramerősség értékek, másik részükben pedig a feszültségek alkotják a tagokat.

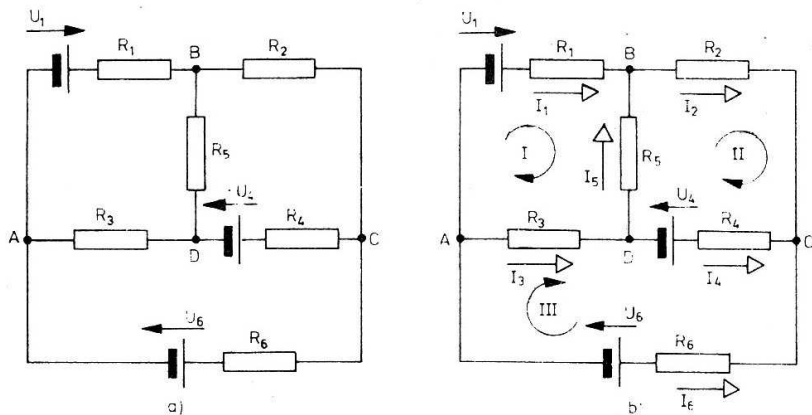
Hálózat analízis: Egy meglévő hálózat „állapotának”, az egyes konduktív elemek áramának, feszültségének, teljesítményének a meghatározása.

Hálózatszintézis: Valamilyen adott tulajdonságú hálózat megtervezése és létrehozása.

A hálózat megoldása azt jelenti, hogy az ágak számának megfelelő számú ismeretlent kell meghatározni, amihez ugyanennyi lineárisan független egyenletből álló egyenletrendszer szükséges. Pontosan ennyi egyenletet lehet a csomóponti és a hurok törvényekből felírni.

a) Az elemi hurkokra felírható egyenletek mind függetlenek egymástól és a csomóponti egyenletektől.

b) A csomóponti egyenletek csak addig függetlenek egymástól, míg számuk eggyel kevesebb az összes csomópontok számánál ($Cs - 1$).



2-20. ábra

Összetett hálózat a Kirchoff-törvények alkalmazásának a bemutatására

Példa (2-20b ábra):

A csomóponti egyenletek:

$$A. \quad -I_1 - I_3 - I_6 = 0,$$

$$B. \quad I_1 - I_2 + I_5 = 0,$$

$$C. \quad I_2 + I_4 + I_6 = 0.$$

A hurokegyenletek az elemi hurkokra:

$$I. \quad U_1 + R_1 I_1 - R_5 I_5 - R_3 I_3 = 0,$$

$$II. \quad R_2 I_2 - R_4 I_4 + U_4 + R_5 I_5 = 0,$$

$$III. \quad R_3 I_3 - U_4 + R_4 I_4 - R_6 I_6 + U_6 = 0.$$

Az ismeretlen ágakamok az egyenletrendszer megoldásaiként adódnak.

A hálózatszintézis

Adott a hálózat struktúrája, adottak a megkívánt ágáramok (vagy feszültségek, vagy teljesítmények). Meg kell ezekhez határozni a konduktív elemek ellenállásértékeit.

Az előbbieket alapjában a következőket mondhatjuk:

1. *nem lehet az összes ágáramot előírni*, mert a csomóponti törvények kötéseket jelentenek köztük;
2. kevesebb egyenletünk van az ágak ellenállásaira, mint az ágak száma. Így a szintézis során az *egyes ágak ellenállásértékét* az egyenletrendszerrel függetlenül, *más megfontolások alapján kell felvenni*.

A mostani példánkban három ágáramot lehet előírni, hurkonként egyet. Írjuk elő I_1 , I_2 , ill. I_6 értékét. Rendezve az egyenleteket fejezzük ki a másik három áramerősség értékét (I_3 , I_4 , ill. I_5) az adottakkal. Ekkor kapjuk:

$$I. \quad I_1 R_1 + (I_1 + I_6) R_3 + (I_1 - I_2) R_5 = -U_1,$$

$$II. \quad I_2 R_2 + (I_2 + I_6) R_4 + (I_2 - I_1) R_5 = -U_4,$$

$$III. \quad -(I_1 + I_6) R_3 - (I_2 - I_6) R_4 - I_6 R_6 = U_4 - U_6.$$

Az egyenletrendszer alapján általában meghatározható a hat ágellenállás közül tetszőleges három, ha a másik három értéke, valamint a már említett három ágáram és a kapcsolófeszültségek adottak. A megoldásnak két különböző esetét vizsgáljuk.

1. Amennyiben R_3 , R_4 ill. R_5 értékei az ismeretlenek, az egyenletrendszer egyenletei nem függetlenek egymástól. Ez belátható, mert a három egyenletet

összeadva, ezek a betűk nem szerepelnek az új egyenletben:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_6 R_6 = -U_1 - U_6.$$

Ebből az egyenletből látszik, hogy I_1 , I_2 , I_6 , R_1 , R_2 ill. R_6 értékek közül csak öt választható megszabadon, a hatodikat ezen egyenlet alapján kell meghatározni. Ugyanakkor az ismeretlenek feltételezett három ellenállásérték közül egyet önkényesen fel kell vennünk ahhoz, hogy az egyenletrendszerből a másik kettő adódjék. Ez a megoldás azt jelenti, hogy az eredeti feltevésünk hibás volt. Nem lehet egyidejűleg ismeretlen R_3 , R_4 ill. R_5 , hanem csak kettő közülük. Ugyanakkor ismeretlennek kell lennie az I_1 , I_2 , I_6 , R_1 , R_2 ill. R_6 értékek közül valamelyiknek.

2. Ha R_1 , R_2 ill. R_6 ellenállásértékek az ismeretlenek, a három egyenletet külön-külön kell megoldani. A megoldás akkor reális, ha a kapott ellenállásértékek pozitívak. Amennyiben mégis valamelyik negatív lesz, a többi érték

megválasztása volt helytelen. Ilyenkor változtatni kell vagy a felvett áramok, vagy a felvett ellenállások , vagy telepek feszültségeinek értékein. Esetleg több értéket is változtatni kell, majd újra kezdeni a számolást.